

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

КРАСНИЦЬКА Мар'яна Богданівна



УДК 537.9

КОЛЕКТИВНА ПОВЕДІНКА НА СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ:
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ АСПЕКТИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

01.04.02 – теоретична фізика
(104 – фізика та астрономія)

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 2025

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України.

Науковий консультант: Доктор фізико-математичних наук професор, академік НАН України **Головач Юрій Васильович**, Інститут фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів), головний науковий співробітник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Доценко Віктор Степанович**, професор лабораторії теоретичної фізики конденсованих систем Університету Сорбонна та Національного центру наукових досліджень, CNRS (Франція);

доктор фізико-математичних наук, професор **Лебовка Микола Іванович**, завідувач лабораторії фізичної хімії дисперсних мінералів Інституту біологічної хімії ім. Ф.Д. Овчаренка;

доктор фізико-математичних наук, професор **Козицький Юрій Васильович**, професор кафедри прикладної математики Інституту математики Університету Марії Кюрі-Склодовської (Польща).

Захист відбудеться «9» квітня 2025 року о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 при Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою: 79011 м. Львів, вул. Свенціцького, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем НАН України за адресою: 79026 м. Львів, вул. Козельницька, 4, а також на сайті спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 за посиланням: <https://www.icmp.lviv.ua/node/6658>

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д35.156.01
доктор фіз.-мат. наук



А.М. Швайка

ЗАГАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОБОТИ

Актуальність теми. Наука про складні мережі настільки тісно переплелась із наукою про складні системи, що часом важко встановити межу, де закінчується одна й починається інша. Мережа (чи граф) є впорядкованою парою $G = (V, E)$, де V — це множина вершин (часом їх називають вузлами), а E — це множина ребер (зв'язків). Теорія графів — це розділ дискретної математики, що бере свій початок ще з XVIII століття. Уже із самого означення випливає перспективність і природність застосування формалізму мереж для опису складних систем агентів, що взаємодіють. При цьому потрібно ставити у відповідність кожному з агентів вершину, а кожній із взаємодій — ребро. Застосування концепції складних мереж виявилось надзвичайно продуктивним для опису складних систем.

Фізики почали аналізувати мережі лише нещодавно — перші статті датуються кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин і ребер до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Зі зміною мети змінилися й методи аналізу. Народження “науки про мережі” відбулося внаслідок розвитку комп’ютерних технологій та засобів обробки великих масивів даних. На сьогодні в мережевому формалізмі прийнято описувати взаємодії, що змінюються з часом, стохастичні взаємодії, взаємодії, що виникають на декількох рівнях і не вбудовані в евклідовий простір. Якщо додати можливість задавати різні стани для кожного агента-вузла, то стає зрозумілим успіх використання складних мереж як своєї рідної *lingua franca* науки про складні системи¹.

Дослідження ж колективної поведінки на складних мережах є надзвичайно важливим для розуміння процесів у багаточастинкових системах. Застосування теорії колективної поведінки є широким і охоплює різні галузі: аналіз поширення інформації, динаміки формування громадської думки у соціальних мережах; задачі перколяції — дослідження стійкості до атак, поширення епідемій; оптимізаційні алгоритми, як от пошуку найкоротшого шляху; явища самоорганізації у біологічних системах, тощо. Актуальність вивчення колективної поведінки зумовлена необхідністю вирішення низки фундаментальних та прикладних проблем, які виникають у сучасному світі. Традиційні методи аналізу складних систем базуються на спрощених припущеннях, часто не здатні описати складну специфіку і структуру реальних мереж, чи просто обмежені застосуванням для однієї області знань і виникає необхідність розвивати нові моделі та підходи. Саме тому все частіше застосовують міждисциплінарні підходи та узагальнені моделі для вивчення складних мереж і виявлення прихованих закономірностей.

¹A. Albert, A. L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* 74, 47 (2002); S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW* (Oxford University Press, Oxford, 2003); Ю. Головач, О. Олемської, К. фон Фербер, Т. Головач, О. Мриглод, І. Олемської, В. Пальчиков, *Журн. фіз. досл.*, 10 (4) 247-289 (2006); A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks* (Cambridge University Press, 2008); M. Newman, *Networks: An Introduction* (Oxford University Press, 2010).

Важливим, а часто – визначальним, елементом у міждисциплінарних підходах є застосування методів і концептуального апарату фізики, зокрема, статистичної фізики і фізики фазових переходів².

Розробка нових спінових моделей для дослідження колективної поведінки на складних мережах мотивована прагненням поглибити розуміння складних систем і явищ впорядкування виходячи за межі традиційних підходів. Так, наприклад, нещодавно була запропонована модифікація моделі Ізінга [1, 2], яка зберігає її бінарну природу, але послаблює обмеження щодо фіксованої довжини спіна на кожному вузлі. Основною метою цієї моделі є дослідження критичної поведінки на різних типах графів, що дозволяє аналізувати колективні явища у складних мережах. Особливу увагу приділено вивченню взаємодії між індивідуальними характеристиками спінів та глобальними топологічними властивостями графа. Впровадження індивідуальної сили спіна в модель дозволяє більш адекватно описати складну природу соціальних мереж і водночас знайти практичне застосування у маркетингу, політиці та теорії ігор. Як приклад міждисциплінарного застосування моделі можна розглядати нейронауку. Відомо, що когнітивні процеси залежать від структурної зв'язності мозку, а нейронна взаємодія визначається складною взаємозалежністю геометрії та топології мозкових мереж³.

Інше узагальнення моделі статистичної фізики – модель Поттса з “невидимими” станами⁴ була розроблена для пояснення розбіжностей між теоретичними прогнозами та експериментальними спостереженнями критичної поведінки систем зі спонтанно порушеною Z_3 -симетрією, де спостерігаються фазові переходи першого роду. Це суперечить стандартним передбаченням для 2D моделі Поттса, яка для $q \leq 4$ передбачає фазові переходи другого роду. Модель з “невидимими” станами привернула значну увагу завдяки своїй здатності регулювати інтенсивність та рід фазових переходів шляхом зміни кількості невидимих станів, зберігаючи такі глобальні характеристики, як вимірність простору, діапазон взаємодії та симетрію. Гнучкість у регулюванні балансу енергії та ентропії робить цю модель потужним інструментом для вивчення критичних явищ у різних за структурою складних системах (див. огляд для моделі [3]). Дослідження цієї моделі на графах [4–6] є особливо важливим через їхню здатність описувати структури, характерні для багатьох природних і штучних систем, таких як соціальні, нейронні або технологічні мережі. Різні властивості графів, як-от їхня топологія, масштабованість або складність зв'язків, безпосередньо впливають на колективну поведінку системи та її критичні властивості. Зокрема, використання графів дозволяє моделювати взаємодії між вузлами з різною міцністю

²Yu. Holovatch, R. Kenna, S. Thurner, Eur. J. Phys. 38, 023002 (2017); S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, Rev. Mod. Phys. 80, 1275 (2008).

³C. Lynn, D. Bassett, Nat. Rev. Phys. 1, 318–332 (2019); C. Seguin, M. van den Heuvel, A. Zalesky, PNAS 115(24), 6297–6302 (2018).

⁴R. Tamura, S. Tanaka, N. Kawashima, Prog. Theor. Phys. 124(2), 381 (2010); S. Tanaka, R. Tamura, N. Kawashima, J. Phys. Conf. Ser. 297, 012022 (2011); S. Tanaka, R. Tamura, Journal of Physics: Conference Series, J. Phys. Conf. Ser. 320, 012025 (2011).

зв'язків та враховувати нерівномірний розподіл станів, що надає моделі універсальності для застосування в різних галузях – починаючи від фізики до теорії ігор і когнітивних наук.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України, із науковою тематикою якого пов'язаний вибраний напрямок досліджень. Подані в дисертації результати отримані згідно проєктів FP7 EU IRSES № IRSES project №612669 Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences (STREVCOMS) (2015-2017), IRSES Project № 612707 “Dynamics of and in Complex Systems” (2014-2018); планів робіт в рамках бюджетних тем НАН України “Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінгу у складних системах” (2018-2022 рр., номер держреєстрації 0118U003012), а також у рамках тем “Багатомасштабність і структурна складність конденсованої речовини: теорія і застосування” (2012-2016 рр., номер держреєстрації 0112U003119), “Нові концепції статистичного опису і їх застосування у теорії багаточастинкових систем” (2017-2021 рр., номер держреєстрації 0117U002093), 2017-2018: Проєкт НФДУ №76/105-2017 “Концепція складних мереж у задачах квантової фізики та космології” (0117U003869) (у співпраці з Астрономічною обсерваторією та кафедрою теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка); гранту від Польської АН-НАН України для короткострокового стажування у Польщі (2018 р.), 2020-2021: Проєкт НФДУ №2020.01/0338 “Комп'ютерне моделювання та теоретичні підходи до опису поширення інфекції COVID-19: роль просторової неоднорідності населення, гетерогенності мережі соціальних контактів та соціальної реакції”; Проєкт НАНУ для молодих вчених №07/01-2022(4) “Макромолекулярні утворення як складні системи: комп'ютерне моделювання та аналітичні підходи” (2022-2023); Грант для короткострокового стажування у Франції PAUSE programme (2022-2023); Проєкт НФДУ 023.03/0099 “Критичність складних систем: фундаментальні аспекти та застосування”.

Мета і завдання дослідження. *Метою дисертаційної роботи є дослідження колективної поведінки багаточастинкових систем, що описуються топологією складних мереж. Зокрема, з'ясування особливостей фазових переходів у магнетиках з нетривіальною архітектурою, явища впорядкування у класичних моделях статистичної фізики та їх модифікаціях на графах різної топології, а також формування соціальних мереж співавторства та семантичних мереж понять.*

Завдання роботи:

- дослідження фазових переходів для моделі Поттса з невидимими станами на повному графі та на безмасштабній мережі;
- дослідження впорядкування, побудова фазової діаграми для моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна на графах різної топології;
- пошук скейлінгових функцій моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна на графах різної топології;

- пошук функціонального представлення вільної енергії моделі Ізінга з випадковою довжиною спіна;
- дослідження впливу структурного безладу на магнітне впорядкування, чисельні симуляції для структурно-невпорядкованої 3D моделі Ізінга зі спінами двох довжин;
- аналіз нулів статистичної суми у площині комплексних значень фізичних параметрів для моделі Блюма-Капеля на повному графі;
- кількісний аналіз мережі співавторства ЖФД;
- аналіз динаміки росту семантичної мережі на прикладі мережі понять препринтів ArXiv.

Предмет дослідження становлять системи багатьох агентів із взаємодією різної природи: структурно-невпорядковані магнетика, мережі співавторства та семантичні мережі понять.

Об'єкт дослідження складають класичні та нові моделі статистичної фізики (моделі Ізінга та Блюма-Капеля, модель Ізінга зі змінною довжиною спіна, модель Поттса з невидимими станами) на складних мережах.

Методи дослідження, використані у роботі:

- аналітичні – наближення неоднорідного середнього поля, формалізм Лі-Янга-Фішера для нулів статистичної суми у комплексній площині, метод теоретико-польової ренормалізаційної групи, асимптотичні оцінки інтегралів зі степеневими та логарифмічними розбіжностями;
- чисельні – наближені методи обчислення інтегралів, методи теорії складних мереж, мінімізаційний метод *simulated annealing* для пошуку глобального мінімуму функції багатьох змінних;
- Монте-Карло симуляції ґраткових спінових систем для пошуку ефективних критичних показників.

Наукова новизна одержаних результатів. Для моделі Поттса з невидимими станами виявлено особливий тип критичної поведінки, що характеризується двома граничними значеннями числа невидимих станів, які відділяють різні типи впорядкувань. Вперше розглянуто модель на повному графі та на безмасштабній мережі у різних діапазонах параметрів. Показано, що додавання невидимих станів змінює неперервний перехід у моделі перколяції зв'язків на фазовий перехід першого роду [4–6].

Запропоновано нову спінову модель – модель Ізінга зі змінною довжиною (силою) спіна [1, 2] що, зберігаючи симетрію спінів, враховує також можливість різної величини елементарного магнітного моменту. Показано, що впровадження спінів змінної довжини значно розширює фазову діаграму та зумовлює появу нових класів універсальності (для провідних значень критичних показників та показників логарифмічних поправок) у випадку, коли така модель розглядається на складних мережах (повному графі, графі Ердоша-Рені та безмасштабній мережі).

Запропоновано нову модель структурно-невпорядкованого магнетика, що належить до класу універсальності моделі Ізінга з розведеними вузлами. А саме,

модель Ізінга зі спінами зі змінною довжиною, коли структурний безлад зумовлюється введенням не домішки (немагнітної компоненти), але іншого магнетика із відмінним значенням елементарного магнітного моменту. Вперше здійснено опис і проаналізовано ефективну критичну поведінку моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна на тривимірній регулярній ґратці використовуючи теорію ренормгрупи [7]. Виконано Монте-Карло симуляції [8] для дослідження ефективної та асимптотичної критичної поведінки моделі з двома довжинами спінів, що підтверджують теоретичні результати.

Формалізм Лі-Янга-Фішера вперше застосовано для аналізу фазових переходів в моделі Блюма-Капеля на повному графі. Знайдено асимптотики координат нулів в околі критичної та трикритичної точки для наближеного предсталення статистичної суми [9] в площині комплексної температури (нуллі Фішера), комплексного кристалічного поля (нуллі кристалічного поля) та комплексного магнітного поля (нуллі Лі-Янга).

При аналізі мереж понять препринтів arXiv було показано [10, 11], що широко використовувані мережеві моделі – Ердоша-Рені та Барабаші-Альберта – не можуть згенерувати мережу з бажаними властивостями, як у реальної системи. Було запропоновано просту генеративну модель, де зростання мережі понять відбувається не тільки за рахунок додавання нових вузлів і приєднання їх до вже існуючих у графі, а й за рахунок появи нових зв'язків між раніше існуючими вузлами. Показано, що для отримання задовільних результатів у моделюванні таких явищ необхідно враховувати два механізми: i) зростання за блоками та ii) переважний вибір понять.

Практичне значення одержаних результатів. Модель Поттса з невидимими станами була запропонована для пояснення розбіжностей між теорією та експериментами в 2D-магнетиках із Z_3 -симетрією, таких як $\text{Bi}_3\text{Mn}_4\text{O}_{12}(\text{NO}_3)$. Модель дозволяє налаштувати інтенсивність та рід фазового переходу, зберігаючи вимірність і симетрію. Було показано, що невидимі стани перетворюють перехід у моделі перколяції зв'язків на фазовий перехід першого роду. Концепція невидимих станів має застосування в теорії ігор (“нейтральні стратегії”) і оптимізації (“невидимі флуктуації”).

Узагальнена модель Ізінга зі змінною довжиною спінів дозволяє краще зрозуміти критичну поведінку у складних системах та мережах, враховуючи як індивідуальні властивості (сила спіна), так і глобальну топологію (структуру мережі). Модель може бути застосована для аналізу задач соціальної динаміки, таких як формування думок та маркетингові стратегії завдяки здатності моделювати складні взаємодії. У нейронауці спінові моделі допомагають вивчати нейронні мережі в мозку, де змінна сила вузлів відображає різницю у функціонуванні та взаємодії нейронів. Аналіз універсальних характеристик (критичних показників, скейлінгових функцій і відношень критичних амплітуд) дозволяє передбачати поведінку систем поблизу критичних точок, що сприяє розробці й оптимізації магнітних матеріалів, макромолекулярних структур та інших складних систем.

Застосований новий підхід до проблеми впливу структурного безладу на магнітні фазові переходи дозволяє розширити коло можливих матеріалів з властивостями структурно-неоднорідних магнетиків. Традиційні дослідження безладу в 3D моделі Ізінга зазвичай зосереджуються на замороженому безладі з немагнітними домішками у вузлах ґратки. Запропонована модифікація моделі Ізінга зі змінними довжинами спінів моделює безлад для суміші двох ізінгоподібних магнетиків (суміші зі спінами двох різних довжин). Такий підхід дозволяє дослідити вплив структурного безладу без врахування немагнітної компоненти. Також у перспективі планується досліджувати більш складні матеріали для різної кількості магнітних компонент, їх концентрацій та законів розподілу.

Результати з отриманого аналізу мережі співавторства між містами України на базі “Журналу Фізичних Досліджень” (ЖФД), дозволяють редакційній колегії оцінювати динаміку співпраці з авторами та виявляти тенденції у публікаційній активності, розробити стратегії залучення нових авторів, а також підтримки зв’язків із тими, хто раніше співпрацював із журналом.

Структуру семантичних мереж (систем знань, понять) можна моделювати різними способами, використовуючи одномодові проєкції відповідних багатосортних графів. Семантичний простір різних галузей можна представити у вигляді складної мережі тематично пов’язаних міток (де вузлами можуть бути як статті, так і поняття). Важливим завданням є аналіз структури семантичних мереж у науці та моделювання процесів їх еволюції. Із проаналізованої мережі понять препринтів на платформі arXiv, було встановлено, що спостережувана мережа є щільною та має складні характеристики, які неможливо пояснити простими генеративними моделями, типу випадкового графу Ердоша–Рені або моделі Барабаші–Альберта. Тому була запропонована модель, яка відтворює основні емпірично спостережувані особливості, дозволяє згенерувати мережу з властивостями, якісно подібними до властивостей мережі емпіричних понять, тобто, краще дозволяє моделювати процеси і структуру емпіричних семантичних систем.

Особистий внесок здобувача. Серед публікацій [1–7, 10–14] 1 стаття подана і 1 прийнята до опублікування [8, 9] (обидві опубліковані як препринти), 1 стаття [14] виконана дисертанткою одноосібно. У 13 роботах, виконаних спільно зі співавторами [1–13], здобувачці належить:

- отримання аналітичних виразів для статистичної суми та вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на повному графі [4];
- аналіз мережі співавторства ЖФД в Україні [12];
- результати розділу: Універсальність, нулі статистичної суми й порушення теореми Лі–Янга для моделі Ізінга на безмасштабній мережі [13];
- отримання аналітичних виразів статистичної суми та вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на безмасштабній мережі [5, 6];
- аналітичні розрахунки фазової діаграми моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна [1, 2];
- обговорення особливостей мережі наукових понять на базі препринтів

AgXiv. Відбір загальних і специфічних понять [10,11];

- написання розділів 1, 2 та 4 у статті [3];
- отримання функціонального представлення вільної енергії структурно-непорядкованого магнетика. Аналіз асимптотичної та ефективної критичної поведінки замороженої (quenched) суміші двох магнетиків [7];
- вибір моделі для комп'ютерної симуляції феромагнітного впорядкування у випадковій суміші двох магнетиків. Тестові симуляції структурно-впорядкованої 3D моделі Ізінга [8];
- отримання аналітичних виразів для точного та розкладеного представлення статистичної суми моделі Блюма-Капеля на повному графі. Аналіз нулів для наближеного представлення статистичної суми у комплексній площині [9].

Здобувачка брала безпосередню участь в обговоренні усіх результатів, опублікованих у спільних дослідженнях.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових зустрічах: МЕСО41: 42-nd International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Lyon, France, 2017); Різдв'яні дискусії на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету ім. І. Франка (2018, 2019); МЕСО43: 43-rd International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Kraków, Poland, 2018); International 11th Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, Ukraine, 2018); IX Scientific Conference “Selected issues of astronomy and astrophysics” (Lviv, Ukraine, 2018); 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications (Lviv, Ukraine, 2019); МЕСО45: 45-th International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Hungary, online, 2020); МЕСО46: 46-th International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Latvia, online, 2021); 13th Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, 2021); Всеукраїнська школа-семинар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, ІФКС НАН України, Львів (2018, 2021,2023); МЕСО47: 47-th International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Sicily, Italy, 2022); Statistical Physics and Low-Dimensional Systems (Abbaye des Prémontrés - Pont-à-Mousson, France, 2022); PG Meetings 2023 (Dresden, Germany, 2023); МЕСО48: 48th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Stará Lesná, Slovakia, 2023); igmaPhi2023 Conference (Chania-Crete, Greece, 2023); Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (Kyiv, Ukraine, 2024); а також на семінарах Групи статистичної фізики Університету Естремадури (Бадахос, Іспанія), Групи статистичної фізики Університету Лотарингії (Нансі, Франція), Відділу конденсованої речовини Інституту низьких температур та досліджень структури (Вроцлав, Польща), Інституту теоретичної біології, Університету Гумбольдта в Берліні (Берлін, Німеччина), семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України (Львів) та семінарах “Статистична фізика складних систем” ІФКС НАН України.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 12 статей (із урахуванням кватилів журналів: Q2 - 7, Q4 - 5) в наукових журналах, внесених до переліку наукових видань, що індексуються наукометричними базами [1–7, 10–14], 1 стаття прийнята до друку [8], 1 стаття подана до друку [9] та опублікована як препринт, 24 тез конференцій [15–38].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, розділу з оглядом літературних джерел, що стосуються тематики дисертації, шести розділів основної частини, у яких викладені результати досліджень здобувача, загальних висновків, списку використаних джерел та двох додатків. Робота викладена на 221 сторінці (повний обсяг разом з літературою та додатками – 255 сторінок), бібліографічний список містить 313 найменування публікацій у наукових виданнях.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету і завдання дисертації, висвітлено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів. Також окреслено особистий внесок здобувача та наведено інформацію щодо апробації роботи.

У **першому розділі** здійснено огляд робіт та результатів з теорії та емпіричного аналізу складних мереж. Також наведено короткий опис методів дослідження та характеристик вибраних спінових моделей на мережах, які досліджуються у дисертації.

У **другому розділі** представлено результати дослідження критичної поведінки магнетиків складної структури при наявності безладу та конкуренції ентропії і енергії на прикладі q -станової моделі Поттса з r невидимими станами на графах різної топології: на повному графі, графі Ердоша-Рені та відпаленій безмасштабній мережі. Особливу увагу приділено аналітичному формулюванню моделі та огляду теоретичних засад її аналізу. Використовуючи метод неоднорідного середнього поля розглянуто критичну поведінку моделі для різних діапазонів параметрів, що дозволяє виявити її особливості при різних умовах. Гамільтоніан моделі Поттса з невидимими станами (invisible state Potts model, ISPM) на мережі можна записати як [4]:

$$-H(q, r) = \sum_{i,j} J_{ij} \sum_{\alpha=1}^q \delta_{S_i, \alpha} \delta_{\alpha, S_j} + h \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, 1}. \quad (1)$$

де $S_i = (1, \dots, q, q + 1, \dots, q + r)$ – поттсівська змінна, q та r кількість “видимих” та “невидимих” станів відповідно, δ_{α, S_i} – дельта-символ Кронекера, h – зовнішнє магнітне поле, що спрямоване вздовж першого видимого стану. Взаємодія J_{ij} задається у формі матриці суміжності, що визначає структуру мережі. Перша сума в (1) береться за всіма різними парами взаємодіючих частинок, а для другої суми потрібно, щоб обидва взаємодіючі спіни перебували в одному

і тому ж стані серед станів підмножини $S_i \in (1, \dots, q)$. Це і є підставою називати такі стани “видимими”. Як можна побачити з гамільтоніана (1), головна і єдина відмінність від звичайної моделі Поттса⁵ полягає в тому, що коли спін знаходиться в одному з $q + 1, \dots, q + r$ “невидимих” станів, він не взаємодіє зі своїми сусідами, і, як наслідок, не вносить вклад в енергію взаємодії. Однак присутність “невидимих” станів збільшує кількість можливих спінових конфігурацій і, отже, вони роблять внесок в ентропію. Очевидно, що зміни параметра r , які керують кількістю невидимих станів і, таким чином, призводять до змін ентропії, зрештою викликають нову незвичну поведінку моделі. Слід зазначити, що кількість основних станів ISPM така ж, як і стандартної феромагнітної q -станової моделі Поттса. Таким чином, ISPM демонструє фазовий перехід із q -кратним порушенням симетрії.

Для дослідження критичної поведінки використовується метод середнього поля (MFA) вводячи локальні змінні (термодинамічні середні), як було запропоновано для стандартної моделі Поттса на мережі⁶:

$$\langle \delta_{S_i, \alpha} \rangle = \begin{cases} \mu, & \alpha = 1, \\ \nu_1, & \alpha = 2, \dots, q, \\ \nu_2, & \alpha = q + 1, \dots, r. \end{cases} \quad (2)$$

Тут усереднення виконується для гамільтоніана (1) у термодинамічній границі:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{Z} \text{Sp}(\dots) e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad \text{із} \quad Z = \text{Sp} e^{-\beta \mathcal{H}}, \quad (3)$$

де β – обернена температура, а шпур береться за всіма можливими конфігураціями спінів. Ця асимптотична поведінка разом із очевидною умовою нормування $\mu + (q - 1)\nu_1 + r\nu_2 = 1$ дозволяє означити наступні параметри порядку:

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu - \nu_1, \\ m_2 &= \mu - \nu_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Параметри порядку m_1 і m_2 мають стандартну температурну асимптотику, оскільки рівні нулю для $\beta \rightarrow 0$ і одиниці при $\beta \rightarrow \infty$.

Щоб отримати гамільтоніан в наближенні середнього поля, слід представити кожен дельта-символ Кронекера у Рів. (1) як суму його середнього значення (2) та відхилення від цього середнього. Нехтуючи членами, що містять добуток двох таких відхилень, отримується:

$$\mathcal{H} = -\frac{k}{2} \sum_i [\mu(2\delta_{1, S_i} - \mu) + \sum_{\alpha=2}^q (2\delta_{\alpha, S_i} - \nu_1)\nu_1] - h \sum_i \delta_{S_i, 1}, \quad (5)$$

⁵Wu F. Y. The Potts model, Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54. P. 235–268.

⁶Див., наприклад, М. Krasnytska, В. Berche, Y. Holovatch, Condens. Matter Phys. 16, 23602 (2013).

де k — кількість найближчих сусідів (ступінь вузла). Для статистичної суми (3) можна записати:

$$\mathcal{Z} = e^{-N\beta k(\mu^2 + (q-1)\nu_1^2)/2} \prod_i [e^{\beta(h+k\mu)} + (q-1)e^{\beta k\nu_1} + r].$$

Розглядаючи вільну енергію в розрахунку на одну частинку в термодинамічній границі ($N \rightarrow \infty$), для вільної енергії було отримано [5]:

$$\begin{aligned} f(m_1, m_2) = & \frac{\bar{k}}{(q+r)^2} \left((rm_2 + 1 + (q-1)m_1)^2 + (q-1)(rm_2 + 1 - \right. \\ & \left. (r+1)m_1)^2 \right) - \frac{1}{\beta} \int_2^\infty dk P(k) \ln \left(e^{\beta(h + \frac{k}{q+r}(m_1(q-1)+1+rm_2))} + \right. \\ & \left. (q-1)e^{\frac{\beta k}{q+r}(m_2r+1-(r+1)m_1)} + r \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де \bar{k} середній ступінь вузла, $P(k)$ — розподіл ступенів вузла. Для безмасштабної мережі $P(k)$ задається як:

$$P(k) = c_\lambda k^{-\lambda}, \quad k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, \quad (\lambda > 2). \quad (7)$$

Отриманий вираз для вільної енергії залежить від двох глобальних параметрів порядку m_1 і m_2 , які описують стан системи, та параметрів моделі, таких як кількість станів q і r , обернена температура β і показник загасання функції розподілу за ступенем вузлів λ з Рів. (7), що описує топологію системи.

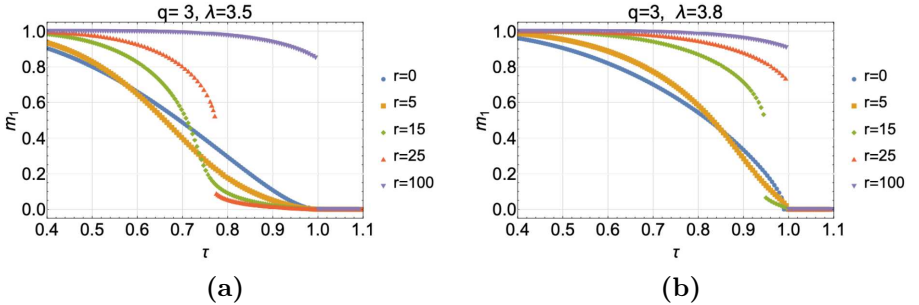


Рис. 1: Залежність параметра порядку від приведеної температури $\tau = T/T_c$: **(а)** $\lambda < \lambda_c(q)$ з $q = 3, \lambda = 3.5$, **(б)** $\lambda > \lambda_c(q)$ з $q = 3, \lambda = 3.8$. В обох цих випадках поступове збільшення кількості невидимих станів спричиняє виникнення фазового переходу першого роду між двома частково впорядкованими станами, тоді як вихідний фазовий перехід залишається при T_c . Коли кількість невидимих станів достатньо велика ($r > r_{c2}$), залишається лише один перехід першого роду.

Для стандартної моделі Поттса на безмасштабній мережі існує дві різні області залежно від значення λ : при $\lambda < \lambda_c(q)$ спостерігається фазовий перехід другого роду, а при $\lambda > \lambda_c(q)$ — першого роду. Саме тому було розглянуто як додавання невидимих станів впливає на критичну поведінку в обох цих

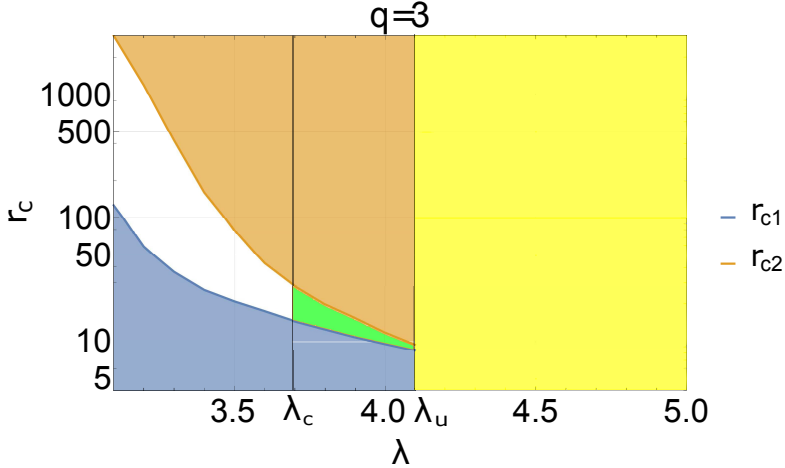


Рис. 2: Фазова діаграма $q = 3$ -станової моделі Поттса з невидимими станами на безмасштабній мережі. Для $\lambda < \lambda_c(q = 3)$ при великій кількості невидимих станів $r > r_{c2}$ (помаранчева область) відбувається фазовий перехід першого роду; якщо кількість невидимих станів невелика ($r < r_{c1}$), система описується поведінкою фазового переходу другого роду (блакитна область); між ними — біла область — як фазові переходи першого, так і другого роду відбуваються при різних температурах. Однак, для $\lambda > \lambda_c(q = 3)$ критична поведінка ще інша: відбуваються два фазові переходи першого роду (зелена та темно-жовта області). В області $\lambda > \lambda_u$ жодна кількість невидимих станів не може вплинути на критичну поведінку, відбувається єдиний перехід першого роду (світло-жовтий).

випадках. На Рис. 1 показана залежність параметра порядку m_1 від приведеної температури $\tau = T/T_c$ для $q = 3$, $r = 0, 5, 15, 25, 100$ і двох значень λ , що представляє області з різною критичною поведінкою: (а) $\lambda = 3.5 < \lambda_c(q = 3)$ і (б) $\lambda = 3.8 > \lambda_c(q = 3)$. Показано, що мала кількість невидимих станів не змінює порядок фазового переходу, а велика кількість невидимих станів призводить до існування лише фазового переходу першого роду. Однак у проміжній області ситуація інша. Показано, що збільшення невидимих станів r у спіновій системі з фазовим переходом другого роду запускає фазовий перехід першого роду при нижчій температурі. У попередніх роботах передбачалося, що невидимі стани не впливають на існуючий фазовий перехід першого роду. Після чисельного аналізу вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на безмасштабній мережі можна зробити висновок, що q , r і λ відіграють роль глобальних параметрів, які впливають на критичну поведінку системи. Було досліджено вплив зміни параметрів у різних областях q , r , λ і підсумовано її на фазових діаграмах. Залежно від q і λ критична поведінка змінюється (див., наприклад, Рис.2 для $q = 3$).

У **третьому розділі** розглядається запропонована в роботах, що увійшли до дисертації, модель Ізінга зі змінною довжиною спіна, яка є узагальненням класичної моделі Ізінга. Розділ починається з аналізу мотивації та теоретичних

засад моделі, які визначають її значення для розуміння критичних явищ. Далі подається формулювання моделі та її реалізація на графах різної топології. Основну увагу приділено аналізу термодинамічних функцій та побудові фазової діаграми. Отримані результати сприяють розширенню розуміння фізичних процесів у дискретних системах зі змінною природою взаємодій, відкриваючи перспективи для подальшого дослідження складних мережевих структур.

Особлива риса, яка зробила модель Ізінга такою популярною для опису колективної поведінки в безлічі системах – бінарність. Нещодавно у роботах [1, 2] було запропоновано інше узагальнення моделі Ізінга, яке вирішує такі задачі, зберігаючи бінарність моделі Ізінга, але пом'якшуючи умову фіксованої довжини спіна на кожному вузлі. Нова модель зберігає бінарний характер спінових змінних, але допускає, що вони змінюють своє абсолютне значення неперервним і випадковим чином. Щоб досягти цього, ми надаємо спінам довжину (інтенсивність), яка може змінюватися через випадкову величину \mathcal{S} із заданою функцією розподілу ймовірностей $q(\mathcal{S})$. Показовий приклад наведено на Рис. 3. Нижче розглядається випадок, коли ця функція розподілу характеризується степеневозгасним законом:

$$q(\mathcal{S}) = c_\mu \mathcal{S}^{-\mu}, \quad \mathcal{S}_{\min} \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{S}_{\max}, \quad (8)$$

з константою нормування c_μ і $\mu > 2$ для забезпечення скінченності середнього значення спіна $\langle \mathcal{S} \rangle$ при $\mathcal{S}_{\max} \rightarrow \infty$.

Розглядаючи критичну поведінку спінової системи на складній мережі, особливу увагу приділено безмасштабним мережам, які характеризуються степеневозгасним законом розподілу ступенів вузла (7). За наявності однорідного поля H гамільтоніан моделі зі змінною довжиною запишеться:

$$\mathcal{H} = - \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i, \quad \sigma_i = \pm \mathcal{S}_i. \quad (9)$$

Для стандартної версії спіні σ_i приймає значення ± 1 , $i = 1 \dots N$, а J_{ij} – матриця

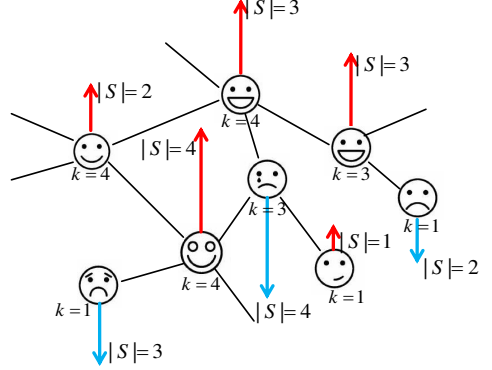


Рис. 3: Модель Ізінга зі змінною довжиною (інтенсивністю) спіна, як модель для опису соціальних явищ. Кожен індивід представлений у вигляді вузла складної мережі із заданим ступенем k_i (тобто, кількість осіб з якою він поєднаний через соціальні зв'язки) і має силу (інтенсивність) \mathcal{S}_i . Для такої соціальної мережі можна розглядати задачу поширення позитивних (спіни вгору) чи негативних (спіни вниз) емоцій.

суміжності з елементами один та нуль:

$$J_{ij} = \begin{cases} 1, & p_{ij}, \\ 0, & 1 - p_{ij}, \end{cases} \quad (10)$$

де p_{ij} — ймовірність зв'язку будь-якої пари вузлів i та j . У розділі було розглянуто три типи графів для пошуку точних розв'язків: повний граф, граф Ердоша-Рені та безмасштабну мережу. Як і в моделі Вейса, у випадку повного графа кожна пара вузлів $\{i, j\}$ пов'язана, тобто, $p_{ij} = 1$. У у другому випадку імовірність зв'язку також є однаковою для кожної пари $p = p_{i,j} = c < 1$, але не кожна пара пов'язана. Для третього випадку, відпаленої (annealed) безмасштабної мережі, розподіл ступеня вузла регулюється степеневим-спадним законом (7), а імовірність зв'язку між вузлами задається як⁷:

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{N \bar{k}} + O(1/N^2), \quad \bar{k} = \frac{1}{N} \sum_l k_l. \quad (11)$$

Виконуючи термодинамічне усереднення конфігураційно-залежну статистичну суму можна записати як:

$$\mathcal{Z}(\{k\}, \{\mathcal{S}\}) = \prod_{i < j} c_{ij} \text{Sp}_\sigma \left(e^{\sum_{i < j} d_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta H \sum_i \mathcal{S}_i \sigma_i} \right), \quad (12)$$

$$c_{ij} = \sqrt{a_{ij}^2 - b_{ij}^2}, \quad d_{ij} = \ln \frac{a_{ij} + b_{ij}}{a_{ij} - b_{ij}}. \quad (13)$$

Тут шпур береться за усіма спінами і $\sigma_i = \pm 1$, що відповідає значенню спіна $\sigma_i \mathcal{S}_i$. Коефіцієнти (13) неявно залежать від p_{ij} і \mathcal{S}_i через співвідношення

$$a_{ij} = 1 - p_{ij} + p_{ij} \cosh(\beta J \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j), \quad b_{ij} = p_{ij} \sinh(\beta J \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j). \quad (14)$$

Підставляючи відповідні p_{ij} для означення кожного графа та усереднюючи за спінами було отримано фінальні вирази для статистичної суми із яких легко записати і вирази для вільної енергії. Так, наприклад, для **повного графа** $p_{ij} = 1$, звідки $c_{ij} = 1$, $d_{ij} = 2\beta \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j$, і після усереднення за спінами отримуємо⁸:

$$\mathcal{Z}(\{\mathcal{S}\}) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2 T}{2}} \left[e^{I_\mu^+ \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)} + e^{I_\mu^- \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)} \right] dx, \quad (15)$$

використавши (8) з $\mathcal{S}_{\max} \rightarrow \infty$ і зберігаючи лише провідний доданок для малого значення магнітного поля отримуємо:

$$I_\mu^\pm(\varepsilon) = N \left[c_\mu \varepsilon^{\mu-1} I_\mu(\varepsilon) \pm \frac{\overline{\mathcal{S}^2}}{T} \varepsilon H \right], \quad (16)$$

⁷S. H. Lee, M. Ha, H. Jeong, J. D. Noh, H. Park, Phys. Rev. E 80, 051127 (2009).

⁸У (15) і в усіх відповідних інтегральних представлення нижче, нехтується нерелевантними множниками.

3

$$I_\mu(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty dz \frac{1}{z^\mu} \ln \cosh z, \quad \varepsilon = \frac{x}{\sqrt{N}}. \quad (17)$$

З асимптотичної поведінки інтегралу (17) статистична сума (15) оцінюється в термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$. Для вільної енергії на один спін отримуємо:

$$\frac{f}{N} \sim \begin{cases} m^2 + m^{\mu-1} - mH, & 2 < \mu < 3, \\ m^2 + m^2 \ln \frac{1}{m} - mH, & \mu = 3, \\ \tau m^2 + m^{\mu-1} - mH, & 3 < \mu < 5, \\ \tau m^2 + m^4 \ln \frac{1}{m} - mH, & \mu = 5, \\ \tau m^2 + m^4 - mH, & \mu > 5. \end{cases} \quad (18)$$

Тут m — параметр порядку, а $\tau = \frac{|T-T_c|}{T_c}$ — приведена температура, де T_c позначає критичну температуру. Форма вільної енергії (18) аналогічна тій, що описує критичну поведінку стандартної моделі Ізінга (де $\sigma_i = \pm 1$) на відпаленій безмасштабній мережі з показником загасання λ (див. Рис. 4а). У нашому випадку параметр μ відіграє подібну роль (див. Рис. 4с). Основні результати можна підсумувати наступним чином: при $\mu \leq 3$ система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі; при $\mu > 3$ спостерігається фазовий перехід другого роду; у проміжному діапазоні $3 < \mu < 5$ критичні показники залежать від μ ; для $\mu > 5$ поведінка системи описується критичними показниками середнього поля; у випадку $\mu = 5$ спостерігаються логарифмічні поправки, які визначаються класичними критичними показниками та задовільняють стандартні скейлінгові співвідношення.

У випадку **графа Ердоша-Рені** можна замінити $p_{ij} = c$ у (13). Це забезпечує подібний вираз для статистичної суми (12), як і в випадку повного графа (з точністю до перенормованої взаємодії). Тому критична поведінка обох моделей по суті, еквівалентна (див. схематичну фазову діаграму на Рис. 4с).

Для відпаленої безмасштабної мережі з імовірністю p_{ij} , заданої виразом (11), у термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$ (тобто, з малим p_{ij}), застосованим до (13) впливає, що $d_{ij} \sim p_{ij} \beta \mathcal{J} \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j$. Перетворення Стратоновича-Габбарда забезпечує усереднення за спінами в (12) і статистична сума має унарну залежність від випадкових величин $f(k_i \mathcal{S}_i)$. Це зручно для переходу від підсумовування по вузлах i до підсумовування за випадковими змінними k_i, \mathcal{S}_i . Було розглянуто провідні асимптотики для вільної енергії у різних діапазонах $\lambda - \mu$. Проаналізовано критичну поведінку і підсумовано на фазовій діаграмі (див. Рис. 4б). Там наведено різні області в площині $\lambda - \mu$, які характеризуються різною критичною поведінкою. Остання регулюється розподілом із “жирнішим” хвостом (менше значення з пари λ, μ). Можна порівнювати цю діаграму з діаграмами на Рис. 4 а, с. Дійсно, коли один із показників на Рис. 4б більший ніж п’ять (дуже швидке спадання одного з розподілів (8) або (7)), отримана діаграма більше не залежить від цього показника. Таким чином можна говорити про виродженість критичної поведінки (Рис. 4б) до одного з відповідних

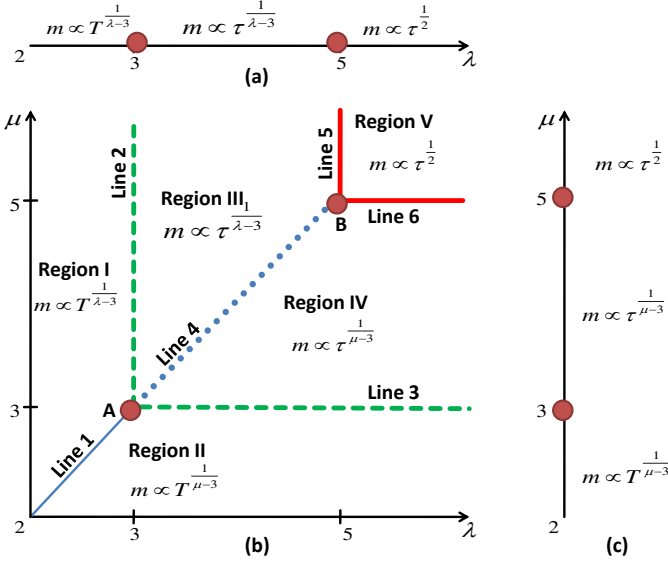


Рис. 4: (b) Фазова діаграма узагальненої моделі Ізінга зі степеневозгасним законом розподілу довжини спіна на безмасштабній мережі порівнюється з (a) моделлю Ізінга на безмасштабній мережі і (c) узагальненою моделлю Ізінга зі степеневозгасним законом розподілу довжини спіна на повному графі. Асимптотику параметра порядку в різних діапазонах μ , λ показано явно.

аналогів (Рис. 4a або c). На лініях діаграми Рис. 4b виникають нові цікаві явища, які розділяють області з різними асимптотиками для параметра порядку. Зазвичай, зміни в степеневих асимптотиках для термодинамічних спостережуваних супроводжуються появою логарифмічних поправок до скейлінгу (див.⁹ і посилання там). Для d -вимірних ґраток такі поправки з'являються при верхній критичній вимірності, а для безмасштабних мереж вони, як відомо, супроводжують провідну асимптотику при $\lambda = 5$. У нашому аналізі спостереження велось за *лініями* в площині $\lambda - \mu$, де виникають такі поправки. Крім того, спостерігаються нові закони скейлінгу на перетині цих ліній.

В ділянці, де спостерігаються логарифмічні поправки до скейлінгу, асимптотику для будь-якої термодинамічної функції можна означити в узагальненому вигляді:

$$A \sim \tau^\Theta |\ln \tau|^{\hat{\Theta}}, \quad H = 0. \quad A \sim H^{\Theta_c} |\ln H|^{\hat{\Theta}_c}, \quad \tau = 0, \quad (19)$$

де A – одна з термодинамічних функцій, Θ – критичний показник, $\hat{\Theta}$ – показник логарифмічної поправки. Подібно до випадку безмасштабних мереж, логари-

⁹R. Kenna, Universal Scaling Relations for Logarithmic-Correction Exponents, in “Order, Disorder and Criticality”, Ed. by Yu. Holovatch, Vol. 3 (World Scientific, 2012), pp. 1–46.

фмічні поправки для скеїлінгу появляються при $\lambda = 5$, $\mu > 5$ і $\mu = 5$, $\lambda > 5$, а також уздовж ліній 5 і 6 на Рис. 4б. Значення показників логарифмічних поправок збігаються зі значеннями для звичайної моделі Ізінга на безмасштабній мережі¹⁰. Щоправда, у моделі, що розглядається, виникають два нові класи логарифмічних поправок: в області $3 < (\lambda = \mu) < 5$ (лінія 4 на Рис. 4б), а також при $\lambda = \mu = 5$ (точка В). Для $\lambda = \mu = 5$ усі показники логарифмічних поправок вдвічі більші порівняно з аналогічними для моделі Ізінга на безмасштабній мережі при $\lambda = 5$ (див. детальніше Табл. 1). В області $3 < (\lambda = \mu) < 5$ усі показники поправок залежать від λ . Усі показники логарифмічних поправок задовільняють скеїлінгові співвідношення для логарифмічних поправок¹¹.

Таблиця 1: Показники логарифмічних поправок для узагальненої моделі Ізінга зі степеневим законом розподілу за довжинами спінів на відпаленій безмасштабній мережі в різних діапазонах параметрів. Показники степеня для ліній 5-6 збігаються зі знайденими раніше. Однак є два набори нових показників, які керують логарифмічними поправками – Лінія 4 і в точка В.

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_c$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\gamma}_c$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\omega}_c$
Лінія 4 ($\mu = \lambda$)	$-\frac{3}{\lambda-2}$	$-\frac{3}{\lambda-2}$	0	$-\frac{\lambda-3}{2(\lambda-2)}$	$-\frac{1}{\lambda-3}$	$-\frac{1}{\lambda-2}$	$-\frac{\lambda-4}{\lambda-3}$	$-\frac{2\lambda-4}{\lambda-2}$
Точка В	-2	-2	0	-2/3	-1	-2/3	-1	-4/3
Лінії 5-6	-1	-1	0	-1/3	-1/2	-1/3	-1/2	-2/3

Скеїлінгові функції та відношення для критичних амплітуд моделі Ізінга зі змінною довжиною на графах різної топології проаналізовано у **четвертому розділі**. Щоб розпочати аналіз скеїлінгових функцій, слід звернутися до гіпотези скеїлінгу для вільної енергії Гельмгольца $F(\tau, m)$, яка стверджує, що цей термодинамічний потенціал є узагальненою однорідною функцією¹². Отже, використовуючи змінну масштабування x , функцію двох змінних $F(\tau, m)$ можна записати як деяку функцію від $f(x)$:

$$F(\tau, m) \approx \tau^{2-\alpha} f_{\pm}(x), \quad (20)$$

де

$$x = m/\tau^{\beta} \quad (21)$$

є скеїлінгова змінна, $f_{\pm}(x)$ – скеїлінгова функція, знаки + та – відповідають $T > T_c$ та $T < T_c$, відповідно. Усі інші термодинамічні потенціали також є узагальненими однорідними функціями.

¹⁰M. Leone, A. Vázquez, A. Vespignani, R. Zecchina, Eur. Phys. J. B 28, 191 (2002); A. Goltsev, S. Dorogovtsev, J. Mendes, Phys. Rev. E 67, 026123 (2003); V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk, Y. Holovatch, Phys. Rev. E 80, 011108 (2009).

¹¹R. Kenna, D. Johnston, W. Janke, Phys. Rev. Lett. 96, 115701 (2006); R. Kenna, D. Johnston, W. Janke, Phys. Rev. Lett. 97, 155702 (2006); R. Kenna, D. Johnston, W. Janke, Phys. Rev. Lett. 97, 169901E (2006).

¹²A. Hankey, H. E. Stanley, Phys. Rev. B 6, 3515-3542 (1972).

В області фазового переходу другого роду поблизу критичної точки $T = T_c$, $H = 0$ спостерігається степенева асимптотика для термодинамічних характеристик¹³. Для параметра порядку m , ізотермічної сприйнятливості χ_T , питомиї теплоємності c_h і магнетокалоричного коефіцієнта m_T наступні функції від $\tau = |T - T_c|/T_c$ ($H = 0$) можна записати через критичні амплітуди та критичні показники:

$$m = B_- \tau^\beta, \quad \chi_T = \Gamma_\pm \tau^{-\gamma}, \quad c_H = \frac{A_\pm}{\alpha} \tau^{-\alpha}, \quad m_T = B_T^\pm \tau^{-\omega}. \quad (22)$$

В критичній точці $T = T_c$ (тобто при $\tau = 0$) справедливі наступні асимптотики:

$$m = D_c^{-1/\delta} H^{1/\delta}, \quad \chi = \Gamma_c H^{-\gamma_c}, \quad c_H = \frac{A_c}{\alpha_c} H^{-\alpha_c}, \quad m_T = B_T^c H^{-\omega_c}. \quad (23)$$

На відміну від критичних показників, критичні амплітуди є неуніверсальними, але їхні відношення (комбінації) є універсальними і використовуються для аналізу:

$$R_\chi^\pm = \Gamma_\pm D_c B_-^{\delta-1}, \quad R_c^\pm = \frac{A_\pm \Gamma_\pm}{\alpha B_-^2},$$

$$R_A = \frac{A_c}{\alpha_c} D_c^{-(1+\alpha_c)} B_-^{-2/\beta}, \quad A_+/A_-, \quad \Gamma_+/\Gamma_-. \quad (24)$$

Для моделі Ізінга зі змінною довжиною на безмасштабній мережі вільну енергію можна записати як [14]:

$$\Phi_{\mu,\lambda}(m, T, h) = \frac{\langle k \rangle m^2 T}{2} - c_\mu c_\lambda m^{\frac{\lambda+\mu-2}{2}} I_{\lambda,\mu}(\sqrt{m}) - \frac{\langle \mathcal{S}^2 \rangle \langle k \rangle}{T} m H. \quad (25)$$

де

$$I_{\lambda,\mu}(m) = \int_{\sqrt{m}}^{\infty} \int_{\sqrt{m}}^{\infty} \frac{\ln \cosh(k\mathcal{S})}{k^\lambda \mathcal{S}^\mu} d\mathcal{S} dk, \quad (26)$$

а m – параметр порядку, $\langle \mathcal{S}^2 \rangle$ – середнє значення квадрата сили спіна.

Отримана вільна енергія є симетричною при перестановці індексів $\mu \leftrightarrow \lambda$. Провідна асимптотика для вільної енергії визначається меншим параметром з μ, λ (“товстіший” хвіст функції розподілу виграє конкуренцію у визначенні класу універсальності). Тому було розглянуто два основні випадки: $\mu > \lambda$, $\mu < \lambda$. Зауважимо, що як показано вище, у ділянці $\mu = \lambda$ pojawiaються логарифмічні поправки і тому термодинамічний потенціал не може бути записаний у формі скейлінгової функції (20). Так проаналізовані вирази для вільної енергії в трьох основних областях фазового переходу другого роду (див. Рис. 4b): області V

¹³V. Privman, P. C. Hohenberg, A. Aharony, Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 14, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic Press, New York, 1991); H. E. Stanley, Rev. Mod. Phys. 71, S358–S366 (1999).

(MFA), області IV (μ -залежна критична поведінка) та області III (λ -залежна критична поведінка):

$$\Phi(m, \tau, h) = \frac{A}{2}\tau m^2 + \frac{B}{4}m^4 - Dmh, \quad (\text{Область V}), \quad (27)$$

$$\Phi(m, \tau, h) = \frac{A}{2}\tau m^2 + \frac{B'}{4}m^{\mu-1} - Dmh, \quad (\text{Область IV}), \quad (28)$$

$$\Phi(m, \tau, h) = \frac{A}{2}\tau m^2 + \frac{B''}{4}m^{\lambda-1} - Dmh, \quad (\text{Область III}), \quad (29)$$

тут $\tau = |T - T_c|/T_c$ і всі коефіцієнти додатні. Для моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна на **графі Ердоша-Рені** вирази для вільної енергії є аналогічними до результатів, отриманих для повного графа [1, 2] лише із врахованим перенормуванням константи взаємодії. Тому критичну поведінку у режимі фазового переходу другого роду також можна привести до представлення характерних для ділянок позначених як Область V (27) та Область IV (28).

Таблиця 2: Скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд для моделі Ізінга зі степеневим згасним розподілом довжини спіна на нескорельованій безмасштабній мережі, отримані з виразів вільної енергії (27)-(29) у трьох областях. Область V: $\lambda, \mu > 5$; Область IV: $3 < \mu < 5, \mu < \lambda$; Область III: $3 < \lambda < 5, \mu > \lambda$.

	Область V	Область IV	Область III
Відношення амплітуд			
A^+/A^-	0	0	0
R_χ^+	1	1	1
R_c^+	0	0	0
Γ^+/Γ^-	2	$\mu - 3$	$\lambda - 3$
R_χ^-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\mu-3}$	$\frac{1}{\lambda-3}$
R_c^-	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{(\mu-3)^2}$	$\frac{1}{(\lambda-3)^2}$
R_A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\mu-2}$	$\frac{1}{\lambda-2}$
Скейлінгові функції			
$f_\pm(x)$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\mu-1}}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\lambda-1}}{4}$
$H_\pm(x)$	$x^3 \pm x$	$\frac{\mu-1}{4}x^{\mu-2} \pm x$	$\frac{\lambda-1}{4}x^{\lambda-2} \pm x$
$\mathcal{S}(x)$	$-x^2/2$	$-x^2/2$	$-x^2/2$
$\mathcal{C}_\pm(x)$	$\frac{x^2}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x^2}{x^{\mu-3}(\mu-1)(\mu-2)/4 \pm 1}$	$\frac{x^2}{x^{\lambda-3}(\lambda-1)(\lambda-2)/4 \pm 1}$
$\chi_\pm(x)$	$\frac{1}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{1}{x^{\mu-3}(\mu-1)(\mu-2)/4 \pm 1}$	$\frac{1}{x^{\lambda-3}(\lambda-1)(\lambda-2)/4 \pm 1}$
$\mathcal{M}_\pm(x)$	$\frac{x}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x}{x^{\mu-3}(\mu-1)(\mu-2)/4 \pm 1}$	$\frac{x}{x^{\lambda-3}(\lambda-1)(\lambda-2)/4 \pm 1}$

Для аналізу виразів вільної енергії (27)–(29) у трьох областях фазового переходу другого роду були пораховані відповідні похідні за температурою та магнітним полем, щоб термодинамічні характеристики можна було отримати та представити у формі низки степеневих функцій від τ , H і критичних амплітуд

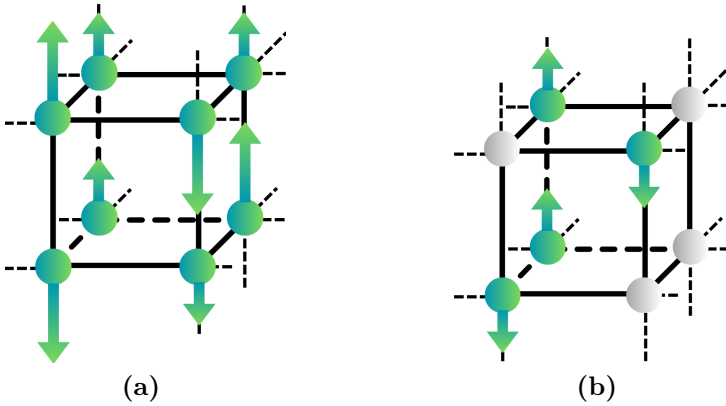


Рис. 5: (а) Окремий випадок моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна: суміш двох магнетиків Ізінга з двома різними довжинами спінів. (б) Розведена модель Ізінга, де деякі вузли (сірі) зайняті немагнітними сполуками або порожні.

(22)–(23). Деякі відношення амплітуд залишаються незмінними в усіх критичних областях (див. перші 3 рядки для відношень амплітуд у таблиці 2), тоді як решта залежать від глобальних значень параметрів і відрізняються в трьох областях. Для області V вони приймають асимптотичні значення з теорії середнього поля; у Області IV і III співвідношення стають залежними від μ і λ і в межі $\mu, \lambda \rightarrow 5$ наближаються до своїх середньопольових значень і залишаються незмінними для $\mu, \lambda \geq 5$.

Модель, що включає індивідуальну силу спіна, відображає складну природу соціальних мереж. З іншого боку, для об'єктів статистичної фізики модель пропонує розуміння впливу структурного безладу на колективну поведінку в магнітних системах з полідисперсними елементарними моментами¹⁴. У **п'ятому розділі** було вперше отримано представлення для ефективного гамільтоніану моделі на тривимірній ґратці (див. також схематичне представлення на Рис.5а для моделі зі спінами двох довжин¹⁵) [7,8]. Використовуючи теоретико-польовий підхід ренормгрупи для потоку ренормгрупи при різних початкових умовах, обчислено ефективні критичні показники. Проілюстровано, як зміна властивостей магнітних компонентів впливає на ефективні показники. Показано, що модель з наявністю двох (і більше) хімічно відмінних магнітних компонентів (спінів різної довжини) еквівалентна розбавленим магнетикам з немагнітними домішками [7] (див. Рис.5b). Крім того, було підтверджено таку поведінку за допомогою моделювання Монте-Карло [8].

Для дослідження поведінки структурно-непорядкованих магнетиків роз-

¹⁴V. Tadić, K. Malarz, K. Kulakowski, Phys. Rev. Lett. 94, 137204 (2005); V. Tadić, N. Gupte, EPL (Europhys. Lett.) 132, 60008 (2020).

¹⁵Покладаючи довжини всіх спінів рівні 1, отримується звичайна 3D-модель Ізінга.

глянута граткова версія моделі Ізінга зі змінною довжиною спіна. При наявності у системі магнетиків різних типів – спіни зберігають симетрію моделі Ізінга (спрямовані лише вгору та вниз), але можуть змінювати значення довжини спіна. Як і в попередньому розділі у такій моделі довжина \mathcal{S} кожного спіна є випадковою змінною, але тепер розглянемо випадок, коли спіни розташовані у вузлах D -вимірної (гіпер)кубічної гратки і взаємодіють із короткосяжним потенціалом $J(\mathbf{R})$. Гамільтоніан запишеться [7]:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} J(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) \mathcal{S}_{\mathbf{R}} \mathcal{S}_{\mathbf{R}'}, \quad \mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \pm \mathcal{S}_{\mathbf{R}}, \quad (30)$$

де $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$ є незалежні, однаково розподілені випадкові величини. Для замороженого безладу, який розглядається, довжини спіна $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$ розподілені випадковим чином і фіксуються в певній конфігурації $\{\mathcal{S}\}$. Статистична сума залежить від конфігурації і фізичні спостережувані величини отримуються з конфігураційного середнього вільної енергії:

$$F = -\beta^{-1} \langle \ln Z(\{\mathcal{S}\}) \rangle_{\{\mathcal{S}\}}, \quad \langle \dots \rangle_{\{\mathcal{S}\}} = \prod_{\mathbf{R}} \sum_{\mathcal{S}_{\mathbf{R}}} p(\mathcal{S}_{\mathbf{R}}) (\dots). \quad (31)$$

Для обчислення вільної енергії, щоб уникнути усереднення логарифму в рівнянні (31), використовують метод реплік

$$\ln Z(\{\mathcal{S}\}) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(Z(\{\mathcal{S}\}))^n - 1}{n}. \quad (32)$$

Застосовуючи цей метод, було отримано функціональне представлення для вільної енергії D -вимірної граткової моделі Ізінга із змінною довжиною, p -ня (30), з таким виразом для ефективного гамільтоніану:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\beta \nu(k)} - \langle \mathcal{S}^2 \rangle \right) \phi_{\mathbf{k}}^{\alpha} \phi_{-\mathbf{k}}^{\alpha} + \frac{1}{12} \langle \mathcal{S}^4 \rangle \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\mathbf{R}} (\phi_{\mathbf{R}}^{\alpha})^4 - \\ & \frac{1}{2} (\langle \mathcal{S}^4 \rangle - \langle \mathcal{S}^2 \rangle^2) \sum_{\alpha, \beta=1}^n \sum_{\mathbf{R}} (\phi_{\mathbf{R}}^{\alpha})^2 (\phi_{\mathbf{R}}^{\beta})^2, \end{aligned} \quad (33)$$

де $\nu(k)$ – фур'є-образ взаємодії, $\langle \mathcal{S}^k \rangle$ – моменти випадкової змінної \mathcal{S} , $\phi_{\mathbf{R}}^{\alpha}$, $\phi_{\mathbf{R}}^{\beta}$ – локальні поля в точці \mathbf{R} для реплік із індексами α і β відповідно.

Як частковий випадок було розглянуто систему, коли всі вузли гратки зайняті спінами з двома різними довжинами (Рис.5а). Довжина деяких спінів фіксована і рівна 1, а інші мають фіксовану довжину s із концентраціями спінів c та $1 - c$ відповідно:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 1, & \text{з імовірністю } c, \\ s, & \text{з імовірністю } (1 - c). \end{cases} \quad (34)$$

Така двосортна модель відповідає наступній двопараметричній функції розподілу:

$$p(\mathcal{S}) = c\delta(\mathcal{S} - 1) + (1 - c)\delta(\mathcal{S} - s). \quad (35)$$

Легко отримати моменти випадкової величини \mathcal{S} з розподілом (35):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}^k \rangle &= c + (1 - c)s^k, \\ \langle \mathcal{S}^4 \rangle - \langle \mathcal{S}^2 \rangle^2 &= c(1 - c)(1 - s^2)^2. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в (33), ефективний гамільтоніан запишеться:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{\beta\nu(k)} - c \right) \phi_{\mathbf{k}}^{\alpha} \phi_{-\mathbf{k}}^{\alpha} + \frac{c + (1 - c)s^4}{12} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\mathbf{R}} (\phi_{\mathbf{R}}^{\alpha})^4 - \\ &\quad \frac{c(1 - c)(1 - s^2)^2}{8} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\mathbf{R}} (\phi_{\mathbf{R}}^{\alpha})^2 (\phi_{\mathbf{R}}^{\beta})^2. \end{aligned} \quad (36)$$

З отриманого виразу для ефективного гамільтоніана (36) випливають два важливі висновки. Перший і очевидний полягає в тому, що його симетрія є такою ж, як і для розведеної моделі Ізінга (зображена на Рис. 5b, в якій частина вузлів зайнята магнітними ізінгівськими спінами, а інші є немагнітними), широко дослідженої раніше різними підходами¹⁶. Це у свою чергу приводить до висновку, що асимптотична критична поведінка випадкової суміші двох магнетиків типу Ізінга співпадає із відповідною асимптотикою моделі Ізінга з немагнітними домішками [7]. Зокрема, усі обчислення ренормгрупи, виконані досі для аналізу асимптотичної поведінки розведеної моделі Ізінга, також безпосередньо застосовуються і до запропонованої нами моделі магнетиків двох сортів. Другий висновок отримується зі спостереження за співвідношенням коефіцієнтів при двох доданках ϕ^4 у рівнянні (36). Воно залежить від концентрації c і різниці довжини спіна s . Дійсно, відношення цих коефіцієнтів можна записати як:

$$r(c, s) = \frac{g_{1,0}}{g_{2,0}} = -\frac{3}{2} \frac{c(1 - c)(1 - s^2)^2}{c + (1 - c)s^4}. \quad (37)$$

Зміна значення цього відношення відповідає зміні початкових значень констант зв'язку у ефективному гамільтоніані (36). Відповідно різні значення $r(c, s)$ приведуть до різної ефективної критичної поведінки при наближенні до T_c . У рамках підходу ренормгрупи (РГ) зміна констант зв'язку g_1, g_2 ефективного гамільтоніана (36) при перенормуванні описується рівняннями потоку¹⁷:

$$\ell \frac{d}{d\ell} g_1(\ell) = \beta_{g_1}(g_1(\ell), g_2(\ell)), \quad \ell \frac{d}{d\ell} g_2(\ell) = \beta_{g_2}(g_1(\ell), g_2(\ell)), \quad (38)$$

¹⁶R. Folk, Y. Holovatch, T. Yavors'kii, *Physics-Uspekhi* 46, 169–191 (2003); Y. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, T. Yavors'kii, *Int. J. Mod. Phys. B* 16(27), 4027–4079 (2002); A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rep.* 368(6), 549–727 (2002).

¹⁷J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press (2002); H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of φ^4 -Theories*, World Scientific (2001).

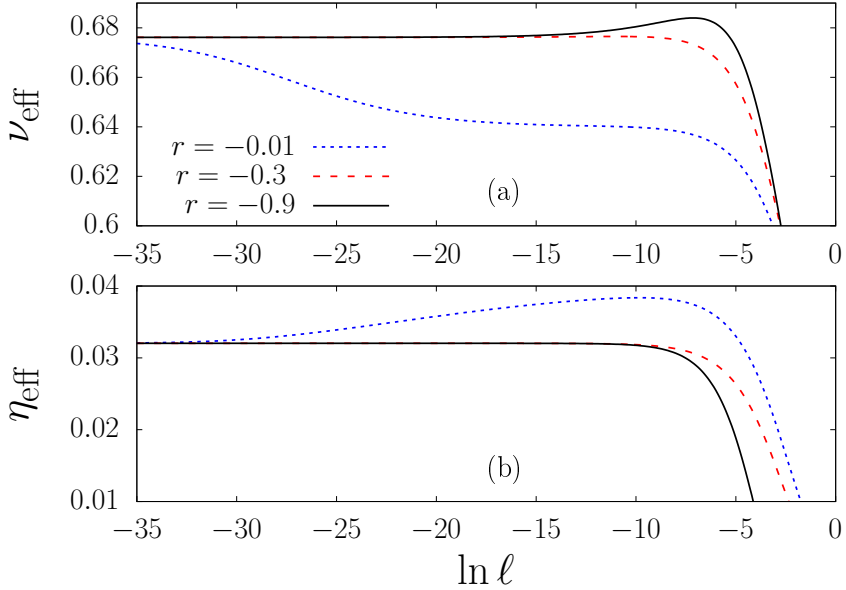


Рис. 6: Залежності ефективного критичного показника кореляційної довжини ν_{eff} (верхня панель (a)) та ефективного критичного показника парної кореляційної функції η_{eff} (нижня панель (b)) для параметра потоку, розрахованому вздовж різних потоків РГ.

де ℓ – параметр потоку РГ, а β_{g_i} – ренормгрупові функції. Для ефективного гамільтоніану (36) вони відомі на сьогодні у шестипетлевому наближенні¹⁸. Був проведений аналіз отриманих потоків ренормгрупи та досліджено ефективні критичні показники. Так, наприклад, залежність ефективних критичних показників ν_{eff} і η_{eff} від параметра потоку ℓ представлено на Рис. 6. Залежно від початкових умов ефективний критичний показник ν_{eff} або досягає свого універсального значення при стійкій нерухомій точці (НТ) порівняно швидко (червона крива), або досягає значень, які відрізняються від стійких НТ у широкій області переходу, яка регулюється критичними показниками з класом універсальності моделі Ізінга (синя крива), або його значення перевищує значення у стійкій НТ (пік на чорній кривій).

У наступній частині розділу здійснювалася перевірка теоретичних результатів для ефективних критичних показників для потоків з початковими умовами $r = 0.3$ і $r = 0.9$. З рівняння (37) легко визначити, що для першого випадку можна вибрати $s = 1.7$, $c \approx 0.53$, тоді як для другого випадку – $s = 3$, $c \approx 0.79594$. Модель було досліджено за допомогою чисельного моделювання, використовую-

¹⁸M. V. Kompaniets, A. Kudlis, A. I. Sokolov, Phys. Rev. E 103, 022134 (2021).

чи комбінацію однокластерного алгоритму Вольфа¹⁹, доповненого локальними оновленнями Монте-Карло. Зокрема, елементарний крок Монте-Карло складався з L однокластерних оновлень за якими слідувало послідовне повнограткове оновлення Метрополіса²⁰. Крім того, була проведена оцінка термалізації для кожного спостереження температури порівняно з логарифмом нелокальних спостережуваних за часом Монте-Карло, таких як сприйнятливність, кумулянт Біндера $U_4 = 1 - \frac{1}{3} \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2}$, відношення кореляційної довжини до розміру ґратки

$R_\xi \equiv \xi/L$, кумулянт $g_2 = \frac{\langle M^2 \rangle^2 - \langle M^2 \rangle^2}{\langle M^2 \rangle^2}$, який вимірює відсутність самоусередненості системи. У наведених вище виразах M – це значення намагніченості на один спін, а горизонтальна лінія і кутові дужки означають усереднення за безладом (за довжинами спінів) і термодинамічне усереднення, відповідно. У таблиці 3 наведено параметри чисельного моделювання. Було змодельовано експерименти для двох наборів параметрів²¹:

- $s = 1.7$, $c = 0.53$ – для яких теорія ($r = -0,3$) передбачає невеликі поправки до скейлінгу (майже ідеальна дія);
- $s = 3$, $c = 0.795943$ – для якого передбачення теорії ($r = -0,9$) полягає в появі значних скейлінгових поправок.

Слід зауважити, що відповідні потоки РГ та ефективні показники для цих двох значень r були обчислені аналітично і зображені на Рис. 6.

Таблиця 3: Параметри, що використовуються в чисельному моделюванні. N_{samples} – кількість реалізацій безладу, а N_{sweeps} – кількість елементарних кроків Монте-Карло. Наведено значення довжин спінів: 1 з імовірністю c , s з імовірністю $1 - c$.

L	s	c	N_{samples}	N_{sweeps}	s	c	N_{samples}	N_{sweeps}
8	1.7	0.53	26000	256	3.0	0.795943	48440	256
12	1.7	0.53	26000	256	3.0	0.795943	48950	256
16	1.7	0.53	26000	256	3.0	0.795943	49000	256
24	1.7	0.53	36000	256	3.0	0.795943	49000	256
32	1.7	0.53	26070	256	3.0	0.795943	48996	256
48	1.7	0.53	28080	256	3.0	0.795943	48997	256
64	1.7	0.53	31440	256	3.0	0.795943	41725	256

Щоб імітувати різні температури, виконано відпал від найвищої температури до найнижчої. Для $s = 3$ в процедурі відпалу було змодельовано 20 температур у критичній області, для $s = 1.7$ – 20 температур для менших розмірів ґратки ($L \leq 32$) і 7 для $L = 48$ і 64. Було використано аналіз на основі поліномів п'ятого порядку для обчислення температури фазового переходу (див. Рис.7).

¹⁹U. Wolff, Phys. Rev. Lett. 62, 361–364 (1989).

²⁰H. Ballesteros, L. Fernández, V. Martín-Mayor, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, J. Ruiz-Lorenzo, Nucl. Phys. B 512(3), 681–701 (1998); H. G. Ballesteros, L. A. Fernández, V. Martín-Mayor, A. Muñoz Sudupe, G. Parisi, J. Ruiz-Lorenzo, Phys. Rev. B 58, 2740–2747 (1998).

²¹Нижче два змодельованих випадки називатимуться як $s = 1.7$ і $s = 3$.

Остаточні результати для універсальних величин (див. Таблицю 4) добре узгоджуються (різниця менше ніж 1.8 стандартних відхилень у гіршому випадку) з усіма універсальними величинами 3D моделі Ізінга з розведеними вузлами. Важливо зауважити, що у випадку $s = 1.7$ отриманий показник поправки до скейлінгу добре співвідноситься з допоміжним показником тривимірної розведеної моделі Ізінга ($\omega_2 = 0,82(8)$). Однак у $s = 3.0$ -випадку обчислений показник ω_2 співмірний з провідним – $\omega_1 = 0,37(6)$.

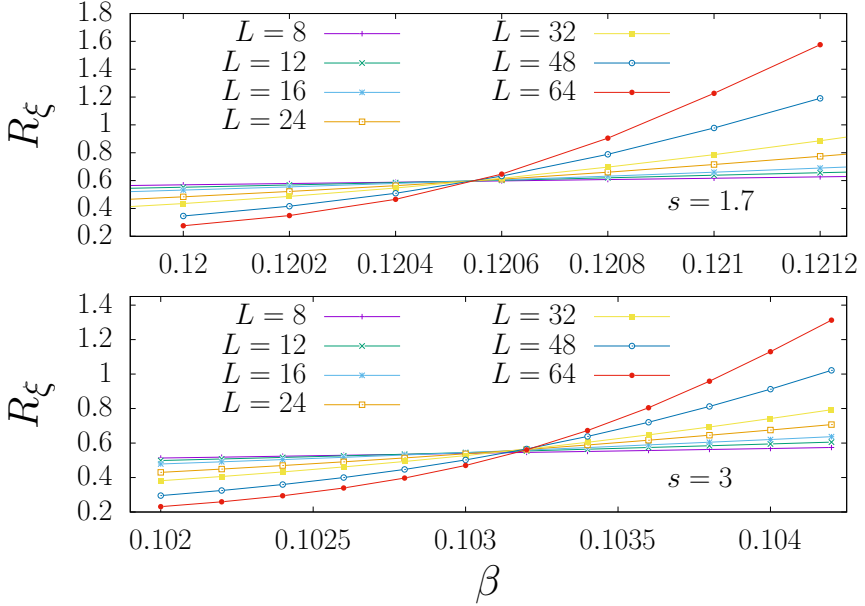


Рис. 7: Поведінка R_ξ як функція оберненої температури β для $s = 1.7$ (угорі) і $s = 3$ (внизу). Точка перетину різних кривих позначає ефективну точку переходу β_c : $\beta_c(s = 1.7) = 0.12056(1)$, $\beta_c(s = 3) = 0.1033(1)$.

Таблиця 4: Екстрапольовані результати за допомогою методу коефіцієнтів для $s = 1.7$ і $s = 3.0$ у порівнянні з відповідними результатами моделі Ізінга з розведеними вузлами (RIM – стаття H.G. Ballesteros and L.A. Fernández and V. Martín-Mayor and A. Muñoz Sudupe and G. Parisi and J.J. Ruiz-Lorenzo, Critical exponents of the three-dimensional diluted Ising model, Phys. Rev. B 58, 2740 (1998), останній рядок таблиці).

s	ν	η	ω	R_ξ	U_4	g_2
1.7	0.678(2)	0.033(7)	0.94(15)	0.5990(8)	0.453(3)	0.138(5)
3.0	0.706(6)	0.033(7)	0.31(12)	0.579(8)	0.46(3)	0.13(1)
RIM	0.684(5)	0.037(4)	0.37(6)	0.598(4)	0.449(6)	0.145(3)

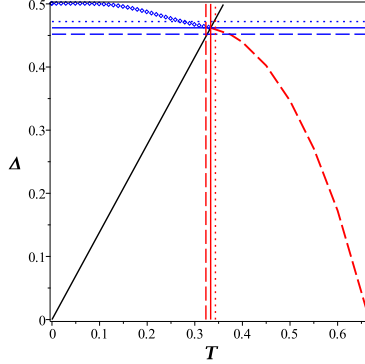


Рис. 8: Фазова діаграма моделі Блюма-Капеля на повному графі. Сині ромби: лінія фазового переходу першого роду. Червона пунктирна лінія: лінія фазового переходу другого роду. Обидві лінії перетинаються в трикритичній точці $(T_t, \Delta_t) = (1/3, 2 \ln(2)/3)$. Червона пунктирна крива перетинає вісь в критичній точці $(T_c, \Delta_c) = (2/3, 0)$.

Шостий розділ описує результати отримані з аналізу нулів статистичної суми у площині комплексних параметрів як інструменту для дослідження фазових переходів на складних мережах. У розділі розглянуто модель Блюма-Капеля на повному графі. Модель є узагальненням моделі Ізінга на випадок, коли спінова змінна може приймати не два (як у моделі Ізінга), а три значення. Спочатку модель була запропонована для пояснення намагніченості в оксиді урану, а згодом модифікована для опису фазових переходів першого роду у системах із трьома типами йонів. Аналіз нулів статистичної суми в комплексній площині є потужним інструментом для визначення критичних та трикритичних точок.

Гамільтоніан моделі Блюма-Капеля на повному графі має вигляд:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N} \sum_{l \neq m} S_l S_m + \Delta \sum_l S_l^2 - H \sum_l S_l, \quad S_l = -1, 0, 1, \quad (39)$$

де Δ та H – кристалічне та зовнішнє магнітне поле відповідно, суми охоплюють усі N вузлів графу, а шкала енергії фіксується²², встановлюючи $J = 1$. Ця тривірнева спінова модель має цікаву фазову структуру. Її критична поведінка визначається температурою T , кристалічним полем Δ та магнітним полем H . При відсутності впорядковуючого поля H площина параметрів $\Delta - T$ стає важливим об'єктом дослідження, див. Рис. 8. Зокрема, вона включає лінії фазових переходів другого та першого роду, які поєднані трикритичною точкою.

Нулі Лі-Янга розраховують при дійсній температурі T в площині комплексного магнітного поля H , тоді як нулі Фішера аналізують в площині компле-

²²Множник $1/N$ у взаємодії між спінами необхідний для відновлення екстенсивності енергії, коли всі пари спінів взаємодіють.

ксної температури. У термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$ нулі формують неперервні криві в комплексній (H чи T) площині. Аналізуючи розташування і скейлінг нулів, у формалізмі Лі-Янга-Фішера здійснюють альтернативний опис критичної поведінки всієї системи і знаходять її універсальні характеристики. Ці характеристики пов'язані між собою через певні універсальні співвідношення з критичними показниками.

Скейлінгове співвідношення для координат нулів Лі-Янга та Фішера має вигляд²³:

$$H_j(N, T = T_c) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{g_h}, \quad T_j(N, H = 0) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{g_t}, \quad (40)$$

$$g_h = \frac{\beta\delta}{2-\alpha}, \quad g_t = \frac{1}{2-\alpha}, \quad (41)$$

де індекс j позначає порядок нуля. Оскільки критичні та трикритичні особливості моделі Блюма-Капеля на повному графі в асимптотичній границі $N \rightarrow \infty$ керуються показниками середнього поля, можна вивести на їх основі очікувані значення кутів і показників, які описують поведінку нулів. Ці значення наведені в Табл. 5.

Таблиця 5: Критичні показники та очікуваний скейлінг для координат нулів моделі Блюма-Капеля в трикритичній та критичній точках.

Відомі результати MFA	Трикритична точка (T_t)	Критична точка (T_c)
α	1/2	0
β	1/4	1/2
δ	5	3
γ	1	1
Очікувані результати		
g_h із Рів. (40)	5/6	3/4
g_t із Рів. (40)	2/3	1/2

Застосовуючи перетворення Стратоновича-Габбарда було отримано точне інтегральне представлення для статистичної суми моделі Блюма-Капеля на повному графі:

$$Z_N(T, \Delta, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-Nx^2}{2T} + N \ln\left(1 + 2e^{-(\frac{1}{2N} + \Delta)/T} \cosh\left[\frac{x+H}{T}\right]\right)\right) dx. \quad (42)$$

Оскільки інтегральне представлення виразу (42) для статистичної суми є точним, його можна аналізувати для будь-якого скінченного значення N , а також у термодинамічній границі $N \rightarrow \infty$. У останньому випадку інтеграл береться методом найшвидшого спуску, і його поведінка аналізується детальніше. Було

²³М. Krasnytska, B. Berche, Y. Holovatch, R. Kenna, J. Phys. A: Math. Theor. 49(13), 135001 (2016); C. Itzykson, R. Pearson, J. Zuber, Nucl. Phys. B 220(4), 415–433 (1983).

отримано асимптотики, що впливають із аналізу координат нулів для точних та розкладених виразів статистичної суми та здійснено їх порівняння із очікуваними результатами.

При аналізі точних виразів статистичної суми було показано, що нулі Фішера в околі критичної точки добре визначені навіть для малих розмірів системи, однак очікуваний скейлінг ($T \sim N^{0.5}$) для перших нулів Фішера не було досягнуто — найкращий результат був $T \sim N^{0.44}$. Попри симетричність площини $T - \Delta$ у критичній точці, нулі кристалічного поля теж не були добре визначеними. Однак було показано, що у випадку аналізу розкладених виразів для статистичної суми ми здатні отримати чітку картину нулів статистичної суми в критичній точці та досягти хороших асимптотик для скейлінгу координат нулів.

Для аналізу нулів Фішера здійснюється розклад функції в експоненті у Рів. (42) при малих значеннях x , а потім — другий розклад (фіксує кристалічне поле Δ і розкладаючи в околиці T). Для виразу з провідною асимптотикою поблизу критичної точки, замінивши змінні та залишаючи два провідні члени отримуємо статистичну суму в узагальненій формі для приведеної змінної z :

$$Z_{\text{critical}}^{\text{expand}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-zx^2 - x^4\right) dx, \quad z = (T - T_c)\sqrt{3N}, \quad T_c = \frac{2}{3}. \quad (43)$$

Аналогічно розглядаючи розкладену статистичну суму поблизу критичної лінії потрібно розкласти функцію в експоненті у рівнянні (42) при малих значеннях x , фіксує значення Δ_{line} з критичної лінії, а потім здійснити другий розклад в околі точки T_{line} для пари точок Δ_{line} .

Для аналізу нулів кристалічного поля слід розкласти функцію в експоненті (42) при малих значеннях x , а потім здійснити другий розклад в околиці критичних та трикритичних точок (фіксує температуру і розкриваючи по Δ). Для виразу з провідними асимптотиками поблизу критичної точки замінивши змінну інтегрування отримано статистичну суму в узагальненій формі, як це було зроблено для нулів Фішера:

$$Z_{\text{critical}}^{\text{expand}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-zx^2 - x^4\right) dx, \quad z = \Delta N^{1/2}. \quad (44)$$

Аналогічним чином для нулів Лі-Янга в околі критичної та трикритичної точки було отримано вирази розкладеної статистичної суми в термінах приведених змінних h :

$$Z_{\text{critical}}^{\text{expand}}(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^4 + hx\right) dx, \quad h = (a_h/a_4)^{1/4} HN^{3/4}, \quad (45)$$

$$Z_{\text{tricritical}}^{\text{expand}}(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^6 + hx\right) dx, \quad h = 3240^{1/6} HN^{5/6}. \quad (46)$$

Так легко бачити, що із заміни змінних у виразах (43)-(46) для випадку аналізу нулів розкладеної статистичної суми скейлінг за N задовільняється автоматично: це впливає з порівняння виразів приведених змінних та значення

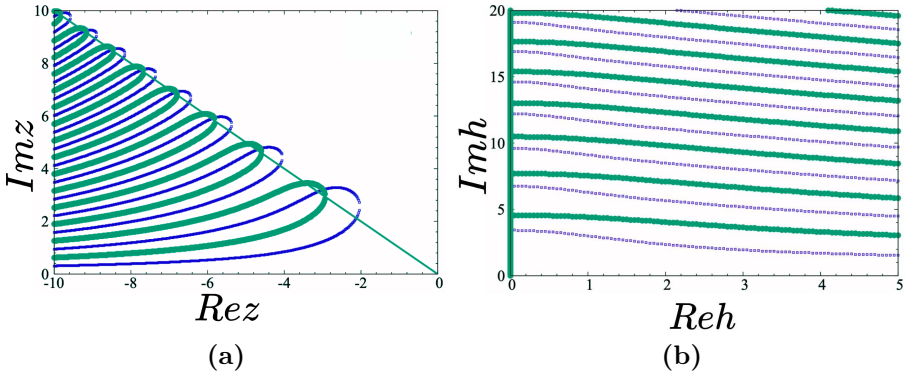


Рис. 9: (а) Поведінка дійсної та уявної частин розкладеної статистичної суми (43) та (44) поблизу критичної точки/лінії в узагальненій площині змінної z . Точки, де криві різних кольорів перетинаються, визначають координати розташування нулів. Кут розташування нулів $\sim \pi/4$. Зелена лінія утворює точний кут $\varphi = \pi/4$ з дійсною віссю. (б) Нулі Лі-Янга для узагальненої розкладеної статистичної суми в околі критичної точки та лінії (45). Зелені точки відповідають розв'язкам $ImZ = 0$, а сині — $ReZ = 0$.

очікуваних асимптотик у Табл. 5. Схематичне представлення візуалізації нулів в околі критичної точки наведено на Рис. 9.

У **сьомому розділі** розглянуто застосування теорії складних мереж для аналізу та візуалізації соціальних і наукометричних систем. У цьому розділі за мету було поставлено кілька завдань. А саме, навести прикладне застосування теорії мереж для дослідження систем реального світу, показати як механізми росту мереж і їх динаміка реалізуються на практиці і до чого вони призводять, а також продемонструвати, як реальні мережі описуються запропонованими моделями.

Так перша частина розділу присвячена аналізу мережі співавторства у журналі “Журнал фізичних досліджень” (ЖФД) в Україні. Було розглянуто історію журналу, характеристику бази даних і метрики, що використовуються для наукометричного аналізу. Серед публікацій в журналі 123 (12.8 % від усіх 962) написали автори-іноземці, 81 (8.4 %) робота з’явилася внаслідок міжнародної співпраці, а безумовна більшість належить авторству українських вчених. У розділі було розглянуто географію українських авторів на рівні окремих населених пунктів, а також проаналізовано співавторство установ з погляду їх поділу на вищі навчальні заклади та установи НАН України. Мережа співавторства на рівні міст України була побудована наступним чином: вузлам ставились у відповідність міста, а зв’язок між ними виникає тоді, коли обидва міста фігурують в адресах указаних місць праці авторів однієї статті. Важливо зауважити, що в цьому випадку всі зв’язки співавторства з іноземними містами або установами не беруться до уваги, тобто, як мережеві характеристики, так і наведена нижче статистика стосуються виключно українських авторів. На мапі України, Рис. 10, схематично зображено побудовану мережу, що включає 29 міст України. Ра-

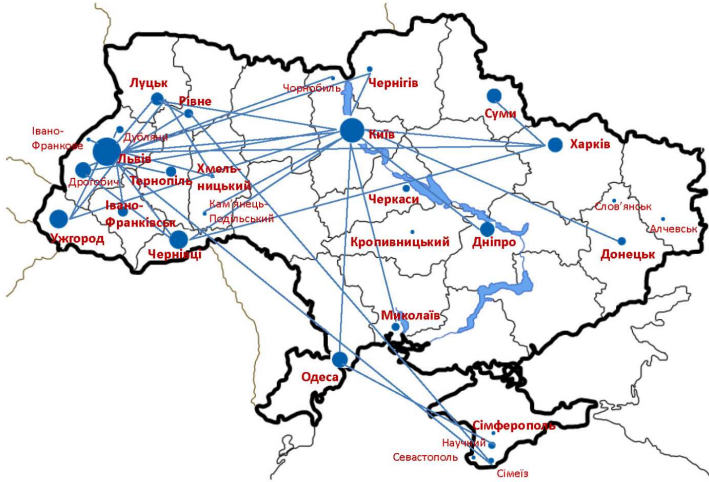


Рис. 10: Географія співавторства в ЖФД на рівні міст України, зображена за допомогою фрагмента незваженої мережі співавторства. Розмір вузла залежить як $\ln(n + 1)$ від кількості n публікацій, що стосуються певного міста.

діус круга для кожного міста залежить як $\ln(n + 1)$ від кількості n публікацій авторів із цього міста. Зображені зв'язки між містами є незваженими, тобто, відображають лише сам факт співпраці між містами, а не її інтенсивність. Уже з рисунка можна зробити певні висновки. Передусім про те, що вузли з найбільшою кількістю публікацій мають і найбільший ступінь. Так, двома яскравими “лідерами” за кількістю робіт є Львів (439 статей) та Київ (181) із ступенями 15 та 12 відповідно. Вузли ж із найменшою кількістю публікацій є ізольованими (Слов’янськ, Сімферополь, Алчевськ, Кропивницький, Севастополь, Черкаси). Основні кількісні характеристики побудованої мережі наведено в Табл. 6.

Таблиця 6: Основні кількісні характеристики мережі співавторства на рівні міст України, побудованої на основі даних про публікації в ЖФД.

Параметр	N	L	k_{max}	$\langle k \rangle$	$\langle C \rangle$	$\langle l \rangle$	l_{max}	N_{GCC}	N_i
Значення	29	68	16	4.69	0.6	2.25	4	23(79.3%)	6

Рис. 11а відображає те, наскільки широкою була географія українських авторів щорічно та скільки найменувань населених пунктів уперше потрапили до бази даних. Цікаво було дослідити, протягом якого періоду окремі міста з’являлися на карті співавторства ЖФД. За допомогою цієї статистики можна виявити, котрі міста становлять типову географію українських авторів видання, а котрі з’явилися на карті лише одноразово. Своєрідна “тривалість життя” кожного міста в цьому контексті показана на рис. 11б. По осі ординат відкладе-

но порядковий номер міста від 1 до 29, а по осі абсцис – перший та останній рік задування у статтях, проміжок між якими визначає кількість “років життя” міста.

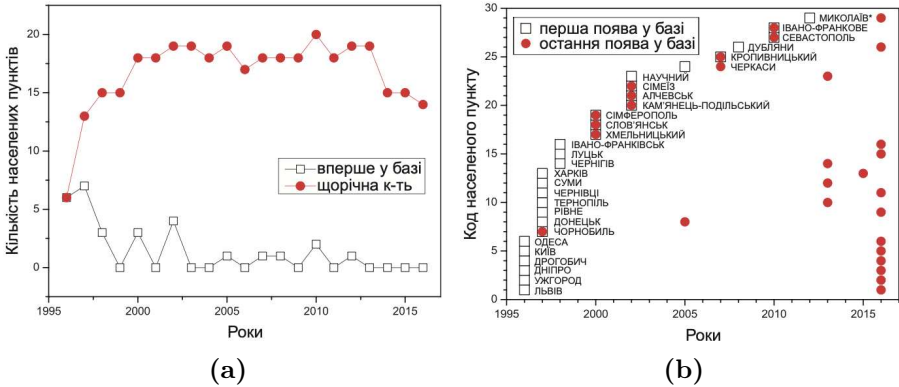


Рис. 11: (а) Щорічна загальна кількість міст України, що фігурували у статтях журналу (круги), та кількість найменувань міст, що вперше увійшли до бази даних (прямокутники). (б) Статистика першої появи публікації із міста з кодом від 1 до 29 (прямокутники) та останньої публікації з цього міста (круги) з 1996 по 2016 рр.

Для аналізу структури семантичних мереж було використано базу препринтів репозиторію [arXiv.org](http://arxiv.org) і словник наукових понять, зібраний через платформу ScienceWISE.info²⁴. Щоб розглянути зв'язки між поняттями, проаналізовано як поняття зустрічаються разом у публікаціях. Такий аналіз дозволяє побудувати мережу понять, а емпіричний аналіз і моделювання цієї мережі були основним предметом дослідження [10,11]. Вибірка рукописів складалась з 36 386 препринтів, поданих до електронного сховища [arXiv.org](http://arxiv.org) протягом 2013 року, які були віднесені до однієї категорії під час процесу подання. Міжкатегорійні статті було вилучено з аналізу, щоб мати однозначну відповідність із наборами даних, проаналізованими раніше²⁵. Для кожного з препринтів набір властивих йому понять було виділено за допомогою платформи ScienceWISE.

Було проведено аналіз мережі наукових понять та виявлено низку специфічних особливостей, таких як висока щільність, дисортативність, різниця між транзитивністю та середнім коефіцієнтом кластеризації разом із “перекошеним” розподілом ступенів вузла. Але особливо цікавим виявилось високе значення щільності²⁶ зв'язків $\rho \approx 7,66\%$. Були зроблені спроби знайти відповідну модель

²⁴ScienceWISE.info — це веб-служба, пов'язана з основними онлайн-репозиторіями, такими як [arXiv](http://arxiv.org), особливістю якої є висхідний підхід до управління науковими поняттями (<http://sciencewise.info/faq>). Станом на 2021 рік цей словник містив найповнішу колекцію наукових понять у галузі фізики.

²⁵V. Palchykov, V. Gemmetto, A. Boyarsky, D. Garlaschelli, EPJ Data Sci. 5, 28 (2016); V. Palchykov, Y. Holovatch, 2018 IEEE Second Int. Conf. Data Stream Mining Process. (DSMP), 84–87 (2018).

²⁶Імовірність того, що будь-яке випадково вибране поняття в середньому зустрічається ра-

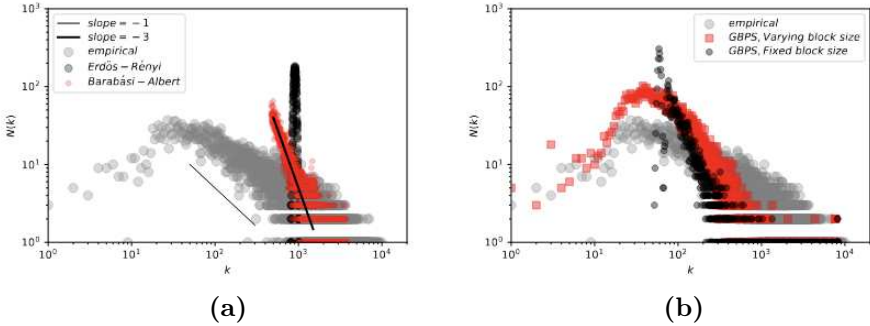


Рис. 12: Гістограми ступеня вузла $N(k)$ для мереж понять, розглянутих у дослідженні. Емпірично спостережувана мережа (сірі диски) порівнюється з моделями (а) Ердоша-Рені та Барабаші-Альберта (чорні та червоні диски відповідно) та (б) запропонованою моделлю зі зростанням за блоками з переважним вибором понять, GBPS (чорні диски: фіксований розмір блоку, червоні квадрати: змінний розмір блоку).

для відтворення такого поєднання характеристик мережі та показано, що традиційні мережеві моделі – граф Ердоша-Рені та модель Барабаші-Альберта – не можуть відтворити мережу з властивостями реальних семантичних мереж. Щоб зрозуміти можливі механізми, які призводять до структури схожої до емпіричної мережі, було розроблено модель, яка відтворює її емпірично спостережувані особливості. При цьому головною метою було не досягнення високої точності відтворення заданого набору показників, а якісний опис основних тенденцій у структурі мережі та пояснення механізмів її генерації (див. порівняльні гістограми для різних моделей на Рис. 12). Модель еволюції мережі, яку було запропоновано, базується на одночасному врахуванні двох факторів: зростання за блоками та переважному вибору понять. Розглянемо процес із дискретним часом $t = 1 \dots \mathcal{N}$. На кожному кроці часу створюється нова стаття A_t , яка містить блок понять n_t . Він приєднується до мережі понять як повний граф із n_t вузлів. Генерування статті складається з двох кроків: (i) визначення розміру блоку n_t ; (ii) вибір конкретних понять для заповнення блоку. Мережа понять зростає шляхом додавання клік до існуючого графа. Кожного разу в момент часу t , коли створюється нова стаття A_t з n_t понять, вона потрапляє в мережу понять як повний граф n_t вузлів і $n_t(n_t - 1)/2$ зв'язків. Таким чином, під час еволюції можна спостерігати такі процеси у створеній мережі понять: (i) додавання нових вузлів, (ii) поява зв'язків між новими вузлами та між новими та вже існуючими вузлами, (iii) поява нових зв'язків між раніше не з'єднаними існуючими вузлами, що важливо для створення щільних мереж. Порівняння основних особливостей мережі понять, згенерованої завдяки моделі зростанням за блоками із механізмом переважного вибору понять наведено в останньому рядку Таблиці 7. Так само як і для двох інших моделей, тут виводяться значення

з будь-яким іншим поняттям з імовірністю p .

Таблиця 7: Деякі особливості мережі понять. Емпірично спостережувана мережа (перший рядок) порівнюється з трьома різними моделями (Ердоша-Рені, Барабаші-Альберта та моделі GBPS (зростання за блоками з переважним вибором), які обговорюються нижче. Наведено чисельні результати для наступних характеристик: кількість вузлів N , кількість зв'язків L , щільність зв'язків ρ , середній ступінь вузла $\langle k \rangle$, його стандартне відхилення σ і максимальне значення k_{\max} , середній коефіцієнт кластеризації $\langle c \rangle$.

	N	$L, \times 10^6$	ρ	$\langle k \rangle$	σ	k_{\max}	$\langle c \rangle$
Емпірична	11853	5.38	7.66%	908	1146	9970	0.74
Ердоша-Рені	11853	5.38	7.66%	908	29	1023	0.08
Барабаші-Альберта	11853	5.38	7.66%	908	568	3875	0.15
модель GBPS	11554	1.50	2.25%	260	788	7603	0.95

ння усереднені за ансамблем із 100 реалізацій мережі. Кількість статей, згенерованих у симуляціях покладали таку ж саму, як кількість статей ($\mathcal{N} = 36386$) у наборі емпіричних даних. Запропонована проста модель, що вразовує механізми зростання за блоками та переважний відбір понять, дозволяє згенерувати мережу з властивостями, якісно подібними до властивостей мережі емпіричних понять. Жоден із цих механізмів сам по собі не дає задовільного результату: спостережувана структура мережі відтворюється завдяки їх взаємодії.

ВИСНОВКИ

Основні висновки та результати проведених досліджень можна сформулювати у вигляді наступних тверджень.

1. Запропоновано нову спінову модель для дослідження колективної поведінки на складних мережах – модель Ізінга зі змінною довжиною спіну \mathcal{S} . Зберігаючи бінарність моделі Ізінга, спіни можуть відрізнятися за значенням магнітного моменту. Це, в свою чергу, дозволяє моделювати соціальні системи, у яких агенти відрізняються за силою емоцій чи за рівнем переконання. Хоча така модель спочатку була запропонована для опису колективних явищ у соціальних системах, і, відповідно, для дослідження фазових переходів на графах, однак пізніше її було застосовано і для опису класичних проблем статистичної фізики, зокрема, для моделювання критичної поведінки тривимірних структурно-невпорядкованих магнетиків.
2. Було розглянуто модель зі степенево-спадним розподілом за довжинами спінів $q(\mathcal{S}) \propto \mathcal{S}^{-\mu}$ (оскільки багато залежностей для моделей на складних мережах описуються степеневими асимптотиками) на графах трьох типів (повному графі, графі Ердоша-Рені та на відпаленій безмасштабній мережі з функції розподілу за ступенем вузлів $P(k) \propto k^{-\lambda}$). Була отримана вільна енергія моделі і проаналізовано її вирази в різних діапа-

зонах параметрів. На основі вільної енергії отримані вирази для різних термодинамічних функцій. Розглянуто асимптотичну поведінку термодинамічних характеристик в околі критичної точки, а саме – критичні показники, поправки до логарифмічних поправок, скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд.

3. Передбачено появу логарифмічних поправок до головних степеневих асимптотик термодинамічних характеристик моделі Ізінга із випадковою степенево-спадною довжиною спіна на безмасштабній мережі. Такі поправки мають вигляд (19), а їх значення для різних термодинамічних величин приведені в Таблиці 1. Знайдені логарифмічні поправки відрізняються від тих, що характеризують неперервні фазові переходи на ґратках при верхній критичній вимірності d_c чи на безмасштабних мережах при верхньому критичному значенні показника λ_c . Відмінність полягає як у тому, що вони спостерігаються вздовж ліній фазової діаграми, так і у тому, що за своїми значеннями вони належать до нового класу універсальності.
4. Зміни в магнітній критичній поведінці структурно-невпорядкованих магнетиків зазвичай підтверджуються експериментально та в комп'ютерному моделюванні для розведених систем, що складаються з магнітних і немагнітних компонент. У дисертаційній роботі показано, що подібні ефекти можна спостерігати не тільки для розведених магнетиків з немагнітними домішками, але вони можуть також реалізуватися, наприклад, при наявності двох (і більше) хімічно різних магнітних компонент. З цією метою проведено дослідження критичної поведінки суміші двох Ізінгівських магнетиків із різними довжинами елементарних магнітних моментів. Показано, що така модель належить до класу універсальності 3D моделі Ізінга з розведенням вузлів. Пояснено ефективну критичну поведінку і продемонстровано її особливості за допомогою Монте-Карло моделювання. Таким чином, дослідження надало нові уявлення про вплив структурного безладу на критичну поведінку магнетиків і показало можливість налаштування критичних властивостей систем за допомогою варіацій мікроскопічних параметрів.
5. Було здійснено детальний огляд робіт і отриманих результатів для $(q+r)$ -станової моделі Поттса з невидимими станами (де r – кількість невидимих станів), для яких спіни, що перебуває у одному з цих станів, не взаємодіє з іншими спінами у системі. Було вперше розглянуто та отримано вирази для статистичної суми і вільної енергії моделі на повному графі (коли всі вузли пов'язані між собою, тобто, у наближенні середнього поля), а також на відпаленій безмасштабній мережі.
6. Отримані результати для моделі Поттса з невидимими станами на безмасштабній мережі підтверджують, що q , r та λ відіграють роль глобальних параметрів, що визначають критичну поведінку системи. Показано, що додавання невидимих станів викликає новий по своїй природі додатковий фазовий перехід першого роду, який для певного діапазону r існує поряд з фазовим переходом, який існував при $r = 0$. Це означає, що

топологічний та ентропійний ефекти на фазовий перехід є незалежними. Для випадку безмаштабної мережі вплив топології, який представлений граничними значеннями $\lambda_c(q)$, домінує над ентропійним фактором, що визначається кількістю невидимих станів r .

7. Проведено аналіз критичної поведінки моделі Блюма-Капеля за допомогою аналізу нулів статистичної суми. Модель розглянуто на повному графі, де в термодинамічній границі точні розв'язки демонструють асимптотичну поведінку, характерну для теорії середнього поля. Проведений аналіз нулів для наближеного представлення статистичної суми у комплексній площині параметрів (температури, магнітного поля, кристалічного поля) дозволив отримати детальну інформацію про фазові переходи та критичну поведінку. Встановлено, що нулі Лі-Янга розташовуються на уявній осі, підтверджуючи наявність фазового переходу другого роду. Поведінка нулів Фішера та нулів кристалічного поля поблизу критичних і трикритичних точок надає додаткову інформацію про механізми фазових переходів, підтверджуючи теоретичні передбачення. Навіть у випадку аналізу розкладених наближених виразів вдалося отримати результати, що автоматично задовольняють скейлінг координат нулів від розміру системи.
8. Продемонстровано, як ідеалізовані моделі мереж та моделі їх росту реалізуються у спостережуваних мережах на практиці. З цією метою використовуючи методи теорії складних мереж було проведено дослідження структури і параметрів для мережі співпраці (на підставі мережі співавторства “Журналу Фізичних Досліджень”, що видається у Львові) та семантичної мережі понять (на підставі термінів із статей на сервері препринтів arXiv).
9. При дослідженні мережі наукових понять було виявлено нетипову структуру для мережі, а саме – високу щільність зв'язків і специфічні властивості, такі як дисортативність та нерівномірний розподіл ступенів вузлів. Існуючі моделі, які переважно використовують для моделювання таких систем (як граф Ердоша-Рені та Барабаші-Альберта), не змогли відтворити ці характеристики. Саме тому була запропонована нова генеративна модель, яка пояснює еволюцію таких мереж. Вона включає два механізми: зростання за блоками та переважний вибір понять, які в комбінації забезпечують результат, що корелює із структурою реальних семантичних мереж, відтворюючи мережу з високою щільністю зв'язків, і є корисною для вивчення інших схожих мереж.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. M. Krasnytska, V. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Ising model with variable spin/agent strengths. *J. Phys. Complex.*, 1:035008, 2020.
2. M. Krasnytska, V. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Generalized Ising model on a scale-free network: An interplay of power laws. *Entropy*, 23(9):1175,

- 2021.
3. M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Potts model with invisible states: a review. *Eur. Phys. J. Special Topics*, pages 1951–6401, 2023.
 4. M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 49:255001, 2016.
 5. P. Sarkanych and M. Krasnytska. Ising model with invisible states on scale-free networks. *Phys. Lett. A*, 383(27):125844:1–5, 2019.
 6. P. Sarkanych and M. Krasnytska. Potts model with invisible states on scale-free network. *Condens. Matt. Phys.*, 26(1):13507, 2023.
 7. M. Dudka, M. Krasnytska, J. Ruiz-Lorenzo, and Yu. Holovatch. Effective and asymptotic criticality of structurally disordered magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 575:170718, 2023.
 8. J. Ruiz-Lorenzo, M. Dudka, M. Krasnytska, and Yu. Holovatch. Emergence of the 3d diluted Ising model universality class in a mixture of two magnets. *Phys Rev. E (to appear)*, 2025.
 9. Yu. Honchar, M. Krasnytska, Yu. Holovach, B. Berche, and R. Kenna. Partition function zeros for the Blume-Capel model on a complete graph. *Low Temp. Phys. (submitted)*, 2025.
 10. V. Palchykov, M. Krasnytska, O. Mryglod, and Yu. Holovatch. A mechanism for evolution of the physical concepts network. *Condens. Matter Phys.*, 24(2):24001, 2021.
 11. V. Palchykov, M. Krasnytska, O. Mryglod, and Yu. Holovatch. Network of scientific concepts: empirical analysis and modeling. *Advances in Complex Systems*, 21(1):2140001, 2021.
 12. Ю. Головач, М. Красницька, О. Мриглод, and А. Ровенчак. 20 років “Журналу фізичних досліджень”. Спроба журналометричного аналізу. *Журн. фіз. дослідж.*, 21(4):4001, 2017.
 13. Ю. Головач, М. Дудка, В. Блавацька, В. Пальчиков, М. Красницька, and О. Мриглод. Статистична фізика складних систем. *Журн. фіз. дослідж.*, 22(2):2801, 2017.
 14. M. Krasnytska. Ising model with varying spin strength on a scale-free network: scaling functions and critical amplitude ratios. *Condens. Matt. Phys.*, 27(3):33603:1–10, 2024.
 15. M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Critical behavior on complex networks: inhomogeneous mean-field vs Lee-Yang-Fisher formalism. In *42nd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics*, page 27, Lyon, France, February 8-10 2017.
 16. M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states. In *42nd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics*, page 119, Lyon, France, February 8-10 2017.

17. M. Krasnytska, B. Berche, and Yu. Holovatch. Ising model with power-law spin length distribution. In *Christmas Discussions 2018, Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv*, page 10, Lviv, Ukraine, January 11-12 2018.
18. M. Krasnytska, B. Berche, and Yu. Holovatch. Ising model with a power-law spin length distribution on different graphs. In *43rd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics*, page 70, Krakow, Poland, May 1-4 2018.
19. М. Красницька, Б. Берш, and Ю. Головач. Модель Ізінга зі змінною довжиною спіна. In *18-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, Україна, Червень 7-8 2018. Тези доповідей*.
20. M. Krasnytska, B. Berche, and Yu. Holovatch. New critical behaviour in a complex system induced by two competing power laws. In *Workshop on Current Problems in Physics*, page 11, Lviv, Ukraine, July 3-4 2018.
21. Ю. Головач, Ю. Гончар, М. Красницька, and М. Дудка. Фізика і фізики в НТШ у Львові. In *Різдвяні дискусії – 2019, кафедра теоретичної фізики ЛНУ ім. І. Франка*, page 4, Львів, Україна, January 10-11 2019.
22. M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Self-averaging on annealed networks. In *5th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications, dedicated to the 110th Anniversary of the Birth of M. M. Bogolyubov*, page 40, Lviv, Ukraine, July 3-6 2019.
23. P. Sarkanych and M. Krasnytska. Ising model with invisible states on scale-free networks. In *5th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications, dedicated to the 110th Anniversary of the Birth of M. M. Bogolyubov*, page 61, Lviv, Ukraine, July 3-6 2019.
24. P. Sarkanych and M. Krasnytska. Critical behaviour of the Ising model with invisible states on a scale-free network. In *45th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics*, page 32, Online, September 14-16 2020.
25. B. Berche, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, R. Kenna, M. Krasnytska, O. Mryglod, P. Sarkanych, and J. Sznajd. Middle European Cooperation in Statistical Physics: a historical overview. In *45th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics*, page 20, Online, September 14-16 2020.
26. M. Krasnytska and P. Sarkanych. Potts model with invisible states: critical behaviour on a scale-free network. In *46th International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (MECO46)*, page 103, Online, May 11-13 2021.
27. М. Красницька and Ю. Головач. Модель Ізінга зі змінною довжиною спіна на безмасштабній мережі. In *XXI Всеукраїнська школа-семінар і Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*, page 18, Львів, Україна, Жовтень 11-12 2021.

28. M. Krasnytska and P. Sarkanych. Potts model with invisible states on a scale-free network. In *13th Workshop on Current Problems in Physics*, page 11, Lviv, Ukraine, October 26-27 2021.
29. M. Krasnytska. Ising model with varying spin strength on a scale-free network: scaling functions and critical amplitudes ratios. In *47th International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (MECO47)*, Online, June 12-16 2022.
30. M. Krasnytska. Degree vs strength: an interplay of power laws for the ising model on networks. In *Statistical Physics and Low-Dimensional Systems – 2022*, Pont-à-Mousson, France, May 11-13 2022.
31. M. Dudka, M. Krasnytska, J. Ruiz-Lorenzo, and Yu. Holovatch. On the criticality of structurally disordered magnets. In *DPG Meetings 2023*, Dresden, Germany, March 20-24 2023. DY 49.2.
32. M. Krasnytska and P. Sarkanych. Potts model with invisible states on a scale-free network. In *DPG Meetings 2023*, Dresden, Germany, March 20-24 2023. DY 45.15.
33. M. Krasnytska, Yu. Holovatch, B. Berche, and R. Kenna. Ising model with variable spin/agent strengths on graphs. In *DPG Meetings 2023*, Dresden, Germany, March 20-24 2023. DY 45.15.
34. M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna. Potts model with invisible states, old and new. In *48th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (MECO48)*, page 57, Stará Lesná, Slovakia, May 22-26 2023.
35. M. Krasnytska. Potts model with invisible states: changeover to the percolation transition. In *SigmaPhi2023 Conference*, Chania-Crete, Greece, July 10-14 2023.
36. М. Красницька, П. Сарканич, Б. Берш, Ю. Головач, and Р. Кенна. Модель Поттса з невидимими станами: огляд. In *XXIII Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*, page 16, Львів, Україна, Жовтень 26-27 2023.
37. Mariana Krasnytska, Petro Sarkanych, Yuriy Holovatch, Bertrand Berche, and Ralph Kenna. Invisible states Potts model. In *Bogolyubov Kyiv Conference Problems of Theoretical and Mathematical Physics*, page 40, Kyiv, Ukraine, September 24-26 2024.
38. Ю. Гончар, М. Красницька, Б. Берш, Ю. Головач, and Р. Кенна. Ефективна критична поведінка в моделі Блюме-Капля на повному графі. In *XXIV Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини*, page 35, Львів, Україна, Жовтень 24-25 2024.

АНОТАЦІЯ

Красницька М.Б. Колективна поведінка на складних мережах: фундаментальні аспекти та застосування. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук (доктора наук) за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика, Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2025.

Дисертаційна робота стосується дослідження колективної поведінки складних систем, а саме з'ясування особливостей фазових переходів у магнетиках з нетривіальною архітектурою, явища впорядкування у класичних моделях статистичної фізики та для їхніх модифікацій на складних мережах. Було проаналізовано критичну поведінку моделі Поттса з невидимими станами на графах різної топології і показано, що велика кількість невидимих станів здатна змінювати рід фазового переходу. Зокрема, було знайдено критичну кількість невидимих станів, що здатна змінювати рід фазового переходу на перший, навіть для перколяції (в границі $q \rightarrow 1$). Запропоновано нове узагальнення моделі Ізінга зі змінною довжиною спіну. Для такої моделі на різних типах графів було розраховано універсальні критичні характеристики фазового переходу другого роду, а саме – критичні показники, показники логарифмічних поправок, скейлінгові функції, відношення критичних амплітуд. Знайдено два нові класи універсальності для логарифмічних поправок моделі на відпаленій безмасштабній мережі. Для цієї ж моделі на тривимірній ґратці отримано представлення для ефективного гамільтоніана (який належить до класу універсальності розведеної моделі Ізінга), а також, застосовуючи теорію ренормгрупи, знайдено асимптотичні та ефективні критичні показники. Доведено, що домішки не обов'язково повинні бути немагнітними, щоб викликати однакові ефекти в критичній поведінці. Для моделі Блюма-Капеля вперше проаналізовано критичну поведінку на повному графі використовуючи формалізм нулів статистичної суми. Було застосовано методи теорії складних мереж для аналізу та візуалізації соціальної мережі співавторства авторів журналу та семантичної мережі понять. У роботі показано як механізми росту мереж і їх динаміка реалізуються на практиці і до чого вони призводять, а також продемонстровано, як реальні мережі описуються запропонованими моделями при дослідженні колективних ефектів та структури самої складної мережі.

Ключові слова: складна мережа, фазові переходи, критичні показники, спінові системи, перколяція, нулі статистичної суми, структурно-невпорядковані магнетики, мережі співавторства, семантичні мережі.

ABSTRACT

Krasnytska M.B. Collective behavior on complex networks: fundamental aspects and applications. — Manuscript.

Thesis submitted for the degree of Doctor of Sciences in physics and mathematics on specialization 01.04.02 – theoretical Physics, Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2025.

The present thesis focuses on studying the collective behavior of complex systems, specifically exploring the characteristics of phase transitions in magnets with

non-trivial architecture, the phenomenon of ordering in classical models of statistical physics, and their modifications on complex networks. The critical behavior of the Potts model with invisible states on graphs of various topologies was analyzed, demonstrating that a large number of invisible states can change the nature of the phase transition. In particular, the critical number of invisible states capable of altering the transition type to first-order, even in percolation (in the limit $q \rightarrow 1$), was determined. A novel generalization of the Ising model with variable spin length was proposed. For this model on different types of graphs, universal critical characteristics of second-order phase transitions were calculated, including critical exponents, logarithmic correction exponents, scaling functions, and critical amplitude ratios. Two new universality classes for logarithmic corrections were identified for the model on annealed scale-free networks. For the same model on a three-dimensional lattice, a representation of the effective Hamiltonian (belonging to the universality class of the diluted Ising model) was obtained. Additionally, using renormalization group theory, asymptotic and effective critical exponents were determined. It was proven that impurities do not necessarily have to be non-magnetic to produce similar effects on critical behavior. For the Blume-Capel model, the critical behavior on a complete graph was analyzed for the first time using the formalism of partition function zeros. Methods of complex network theory were applied for the analysis and visualization of the co-authorship social network of journal authors and the semantic network of concepts. The study demonstrated how network growth mechanisms and their dynamics are realized in practice, what they lead to, and how real networks are described by the proposed models when investigating collective effects and the structure of complex networks themselves.

Key words: complex network, phase transitions, critical indices, spin systems, percolation, partition function zeros, structurally disordered magnets, co-authorship networks, semantic networks.