Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–98–03U

В. І. Третяк

ІНТЕҐРАЛИ ДІЇ ТИПУ ФОККЕРА ТА КЛАСИЧНІ РЕЛЯТИВІСТИЧНІ ПОЛЯ

ЛЬВІВ

УДК: 531/533;530.12:531.18
PACS: 03.20, 03.65.+p

Інтеґрали дії типу Фоккера та класичні релятивістичні поля

В. І. Третяк

Анотація. Основний результат роботи — побудова інтеґралів дії типу Фоккера для довільного релятивістичного поля фіксованої маси і спіну. Робота містить теж деякі загальні міркування щодо взаємозв'язку теоретико-польового та далекодійного підходів до аналізу релятивістичної системи взаємодіючих частинок

Fokker-type action integrals and classical relativistic fields

V. I. Tretyak

Abstract. The main result of the paper consists in the construction of the Fokker-type action integrals for arbitrary relativistic field with given mass and spin. The paper contains also some general reflections about interrelation between field theory and action-at-a-distance approaches to the investigation of relativistic interacting particle system

Подається в International Journal of Theoretical Physics
Submitted to International Journal of Theoretical Physics

Вступ

Інтеґрали дії типу Фоккера [1-3] становлять історично перший та дуже важливий підхід до послідовного опису релятивістичної системи N частинок у термінах прямої взаємодії (дії на віддалі). Забезпечуючи явну Пуанкаре- та репараметризаційну (хронометричну) інваріянтність, вони можуть служити вихідною базою для розвитку інших формалізмів релятивістичної теорії прямих взаємодій, зокрема, тривимірного лаґранжевого [4,5], гамільтонового [6,7] чи ньютонового. Тісний зв'язок інтеґралів Фоккера з теоретико-польовим описом дозволяє надавати фізичного змісту загальним конструкціям, притаманним вказаним формалізмам. Для феноменологічної за своєю суттю теорії прямих взаємодій велике значення має можливість виділити з широкого класу виразів, допустимих з точки зору загальних вимог (Пуанкаре- інваріянтности, причинности і под.), деякий підклас, що має теоретико-польові аналоги. У даній роботі розглядається побудова інтеґралу дії типу Фоккера, що відповідає класичним релятивістичним полям довільного цілого спіну n і маси κ.

Для $n = 0, 1$ результати добре відомі. Значення $n = 1, \kappa = 0$ відповідають випадку електромагнетної взаємодії, який розглядав Фоккер ще у 1929 році. Прагнення поширити цей розгляд на опис процесів випромінювання привело до побудови електродинаміки Вілера-Фейнмана [8,9], що є взірцевою конструкцією такого типу теорій. Узагальнення на випадок скалярного та векторного масивних полів дано Гавасом [10]. Інтеґрал дії типу Фоккера для безмасового тензорного поля ранґу $n = 2$ відповідає лінійному за взаємодією наближенню загальної теорії відносности [11-13,3]. Аналізові загального випадку тензорного поля довільного ранґу n присвячено ряд робіт [12-16], але всі вони іґнорують одну важливу обставину. Число незалежних ступенів вільности поля, яке описує обмін віртуальними масивними бозонами спіну $n > 0$, рівне $2n + 1$, завжди менше, ніж число компонент (симетричного) тензорного поля ранґу n. У теорії поля для вилучення зайвих компонент застосовується техніка проєкційних операторів [17-19]. Тут ми використовуватимемо цю техніку в контексті теорії джерел Швінґера [19], переходячи від запропонованого цим автором квантового формалізму до класичної дії типу Фоккера.

Викладові основного результату роботи — побудові дії типу Фоккера для релятивістичного поля маси κ та спіну n — передує обговорення деяких загальних обставин, що характеризують взаємовідношення між теорією поля та релятивістичною дією на віддалі. Особливо підкреслюється значення тих елементів довільности, які виникають в обох підходах при застосуванні до опису системи N взаємодіючих тіл. Саме в прийнятті (не завжди явному) певних додаткових фізичних припущень, які не випливають безпосередньо із формалізму, і може лежати причина розбіжности між передбаченнями обох теорій. Ці питання обговорюються в розділі 1.

Розділ 2 присвячений побудові інтеґралу дії типу Фоккера для масивного поля спіну n. Виходячи з дії Швінґера [19] для тензорного джерела ранґу n, виражаємо останнє в термінах частинкових змінних і після підставляння у формулу для дії одержуємо вираз, залежний (хоча й у не дуже явний спосіб) від координат та швидкостей взаємодіючих точкових частинок. Показано явну Пуанкаре-інваріянтність отриманого результату та його погодженість з відомими раніше виразами для $n = 0, 1$. Незалежний розгляд взаємодій, що переносяться безмасовими полями фіксованої спіральности $\lambda = \pm n$, проведено в розділі 3. Він приводить до явного виразу інтеґралу дії в термінах інваріянтів, сформованих із 4-координат та 4-швидкостей частинок. На завершення роботи розглядаються деякі узагальнення та модифікації розвинутого формалізму.

1. Проблема руху частинок у лінійних теоріях поля

У рамках класичної теорії поля для опису взаємодії системи N релятивістичних частинок вводиться новий об'єкт — (класичне) поле Φ, що зображається функцією точки простору Мінковського $\mathbb{M}_4$, або, більш абстрактно, перетином векторної в'язки $\pi : \mathrm{E} \to \mathbb{M}_4$ з типовим волокном F ($\pi \circ \Phi = id$, $x \mapsto \Phi^A(x)$, $A = 1, ..., \dim \mathrm{F}$, $x \in \mathbb{M}_4$) [20,21]. Нехай система точкових частинок описується параметричними рівняннями їхніх світових ліній у просторі Мінковського $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_4$, $\tau \mapsto x(\tau)$:

$$x^\nu = x^\nu_a(\tau_a), \qquad a = \overline{1, N}, \nu = \overline{0, 3}, \tag{1.1}$$

τ_a — деякі параметри. З точки зору теорії поля ця система характеризується дією S, що є сумою трьох доданків:

$$S = S_f + S_{fl} + S_{int}, \tag{1.2}$$

які описують, відповідно, систему вільних (невзаємодіючих) частинок (S_f), вільних полів (S_{fl}) та взаємодію між ними (S_{int}).

Перший доданок, за припущенням, не залежить від польових змінних і для системи точкових (безструктурних) частинок має вигляд

$$S = -\sum_a m_a \int d\tau_a \sqrt{u_a^2(\tau_a)}, \tag{1.3}$$

де m_a — маса спокою частинки a,

$$u_a^\nu \equiv \frac{dx_a^\nu(\tau_a)}{d\tau_a} \tag{1.4}$$

— її 4-швидкість, $u_a^2 \equiv \eta_{\mu\nu} u_a^\mu u_a^\nu \equiv u_{a\nu} u_a^\nu$. Грецькі індекси піднімаються та опускаються тензором Мінковського $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Розглядаємо лише часоподібні світові лінії, для яких

$$u_a^2 > 0. \tag{1.5}$$

Важливою властивістю дії (1.3) є її незалежність від конкретної параметризації світових ліній (1.1), яка проявляється в інваріянтності S_f відносно перетворень

$$\tau_a \mapsto \tau_a' = f_a(\tau_a), \tag{1.6}$$

де f_a — довільні монотонні функції: $df_a/d\tau_a > 0$. В явно коваріянтних чотиримірних описах в ролі параметрів τ_a звичайно виступають інваріянтні власні часи частинок. Тоді тотожньо $u_a^2(\tau_a) = 1$. Хоча це співвідношення можна беззастережно використовувати в рівняннях руху та інтеґралах руху, в рамках лаґранжевого опису його слід трактувати як (неголономну) в'язь, проявляючи відповідну обережність. Тут, однак, ми воліємо дотримуватись хронометрично-інваріянтного формалізму, навіть ціною деякого ускладнення відповідних формул, маючи на думці перехід до одночасового тривимірного опису [4,5]. Зауважимо, що у випадку довільного вибору параметрів τ_a 4-швидкість (1.4) не буде 4-вектором відносно перетворень Лоренца. Трансформаційні властивості 4-вектора матиме хронометрично-інваріянтна величина $\hat{u}_a^\mu \equiv u_a^\mu/\sqrt{u_a^2}$.

Другий доданок у (1.2) залежить тільки від польових функцій,

$$S_{fl} = S_{fl}[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\Phi], \tag{1.7}$$

а третій має вигляд

$$S_{int} = \int d^4x J_A(x) \Phi^A(x), \tag{1.8}$$

де $J_A(x)$ — "струм", створений частинками. Припускається, що він не залежить від польових змінних. Це обмеження в основному й характеризує лінійність польової теорії.

Варіяція дії (1.2) за змінними поля $\Phi^A(x)$ дає рівняння поля із заданими джерелами,

$$\frac{\delta S_{fl}}{\delta \Phi^A} = -J_A; \tag{1.9}$$

тоді як варіяція за частинковими змінними $x_a^\nu(\tau_a)$ приводить до рівнянь руху частинок

$$\frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \int d^4x \frac{\delta J_A(x)}{\delta x_{a\nu}(\tau_a)} \Phi^A(x). \tag{1.10}$$

Візьмемо $J_A(x)$ у вигляді

$$J_A(x) = \sum_a g_a \int d\tau_a Q_A(\tau_a) \delta[x - x_a(\tau_a)]. \tag{1.11}$$

де $Q_A(\tau_a)$ — функції, що залежать тільки від характеристик частинок, g_a — константа взаємодії частинки a з полем Φ^A. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_A(x)}{\delta x_{a\nu}(\tau_a)} &= g_a \mathcal{E}_a^\nu [Q_A(\tau_a) \delta(x - x_a(\tau_a))] \\ &= g_a \Big\{ \delta(x - x_a) \mathcal{E}_a^\nu Q_A - Q_A \partial^\nu \delta(x - x_a) \\ &\quad - \frac{\partial Q_A}{\partial u_{a\nu}} \frac{d}{d\tau_a} \delta(x - x_a) \Big\}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

де $\mathcal{E}_a^\nu$ — оператор Ойлера-Лаґранжа

$$\mathcal{E}_a^\nu = \frac{\partial}{\partial x_{a\nu}} - \frac{d}{d\tau_a} \frac{\partial}{\partial u_{a\nu}}; \qquad \partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu. \tag{1.13}$$

Підставивши (1.12) у рівняння руху частинок (1.10), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} &= \frac{\delta J_A(x)}{\delta x_{a\nu}(\tau_a)} \\ = \ g_a \int d^4x \Phi^A(x) &\Big\{ \delta(x - x_a) \mathcal{E}_a^\nu Q_A(\tau_a) - Q_A(\tau_a) \partial^\nu \delta(x - x_a) \\ &+ \frac{\partial Q_A(\tau_a)}{\partial u_{a\nu}} u_{a\mu} \partial^\mu \delta(x - x_a) \Big\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Вважаючи, що поля зникають на гіперповерхні, яка обмежує область інтеґрування, можна скористатися формулою

$$\int d^4x) \Phi^A(x) \partial^\nu \delta(x - x_a) = \int d^4x) \delta(x - x_a) \partial^\nu \Phi^A(x). \tag{1.15}$$

Тоді отримається

$$\frac{d}{d\tau_a}\frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \frac{\delta J_A(x)}{\delta x_{a\nu}(\tau_a)} = g_a\left\{\left[Q_A(\tau_a)\delta_\mu^\nu\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial Q_A(\tau_a)}{\partial u_{a\nu}}u_{a\mu}\right]\partial^\mu\Phi^A(x_a(\tau_a)) + \Phi^A(x_a(\tau_a))\mathcal{E}_a^\nu Q_A(\tau_a)\right\}. \qquad (1.16)$$

Розв'язавши рівняння поля (1.9), можна виразити $\Phi^A(x)$ через частинкові змінні. Якщо підставити ці вирази у (1.16), то отримаємо рівняння руху частинок виключно у термінах змінних $x_a(\tau_a)$ вигляду

$$\frac{d}{d\tau_a}\frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = F_a^\nu[x_a(\tau_a)]. \qquad (1.17)$$

Тепер можна було б забути взагалі про всякі поля і розглядати рівняння (1.17) як основу опису взаємодіючих релятивістичних частинок. Так приходимо до теорії прямої взаємодії.

Однак рівняння (1.17) у виведеній нами з теорії поля формі (1.16) ще не є повністю означеними. Для їх доозначення необхідно надати чіткого сенсу величинам $\Phi^A(x_a(\tau_a))$, які входять у праву частину (1.16). Це і привносить нові елементи, що розрізняють теорію поля та дію на віддалі по суті.

Перший із них пов'язаний з тим, що польові рівняння (1.9) мають однозначний розв'язок лише при заданні певних граничних умов, різний вибір яких приведе до різних форм функціоналу $F_a^\nu[x_a(\tau_a)]$ у правій частині рівнянь руху (1.17). Звичайно у класичній релятивістичній теорії поля рівняння (1.9) утворюють лінійну систему диференційних рівнянь

$$\mathcal{F}_{AB}\Phi^B(x) = -J_A(x), \qquad (1.18)$$

де $\mathcal{F}_{AB}$ — деякий формально самоспряжений диференційний оператор. Розв'язок цих рівнянь можна подати через функцію Ґріна $G_B^A(x)$:

$$\Phi^A(x) = \int d^4x' G_B^A(x-x')J^A(x'), \qquad (1.19)$$

де

$$\mathcal{F}_{AB}G_C^B(x) = -\delta_{AC}\delta(x). \qquad (1.20)$$

Ця функція Ґріна означена з точністю до деякого розв'язку G_{0B}^A однорідного рівняння,

$$\mathcal{F}_{AB}G_{0C}^B(x) = 0. \qquad (1.21)$$

Вказана довільність усувається конкретизацією граничних умов.

Вважатимемо тепер, що якась функція Ґріна вибрана, і підставимо у (1.19) вираз (1.11) для струму $J^A(x)$. Одержимо:

$$\Phi^A(x) = \sum_a g_a \int d\tau_a Q^B(\tau_a)G_B^A(x - x_a(\tau_a)), \qquad (1.22)$$

що можна записати у вигляді

$$\Phi^A(x) = \sum_a \Phi_{(a)}^A(x) \qquad (1.23)$$

та інтерпретувати як суму полів $\Phi_{(a)}^A(x)$, створених частинками системи. Ці поля,

$$\Phi_{(a)}^A(x) = g_a \int d\tau_a Q^B(\tau_a)G_B^A(x - x_a(\tau_a)), \qquad (1.24)$$

синґулярні на світовій лінії частинки, яка їх створює. Відповідно, особливості можуть проявлятися і в рівняннях (1.16), так що для визначености останніх слід вказати способи усунення цих синґулярностей. Це другий елемент, який може приводити до розходження між теорією поля та прямої взаємодії.

Припустимо знову, що якось ця проблема розв'язана. Тоді, підставивши (1.22) у (1.16), отримаємо

$$F_a^\nu[x_a(\tau_a)] = g_a\sum_b g_b\int d\tau_b\left\{Q^B(\tau_b)\left[Q_A(\tau_a)\delta_\mu^\nu - \frac{\partial Q_A(\tau_a)}{\partial u_{a\nu}}u_{a\mu}\right]\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial x_{a\mu}}G_B^A(x_a - x_b) + G_B^A(x_a - x_b)\mathcal{E}_a^\nu Q_A(\tau_a)\right\}$$
$$\equiv \sum_b F_{ab}^\nu. \qquad (1.25)$$

Для сумісности теорії необхідно у формулі (1.25) конкретизувати вигляд функції Ґріна $G_B^A(x)$ і надати сенсу виразам при $a = b$.

У класичній теорії поля вибирається запізнювальна функція Ґріна $G_B^{A\,ret}(x)$, яка зникає, коли $x^0 < 0$, а проблема синґулярностей "розв'язується" за допомогою перенормування маси [23,25]. Для цього у розгляді доданку з $b = a$ у (1.25) використовується певна реґуляризація. Наприклад, можна покласти $x_a - x_b = \alpha n$, де n —

деякий 4-вектор, а α — дійсний параметер, що прямуватиме до нуля; або замінити функцію Ґріна $G_B^A(x)$ деякою гладкою функцією, $G_B^A(x,\alpha)$, із властивістю

$$\lim_{\alpha\to 0} G_B^A(x,\alpha) = G_B^{Aret}(x). \tag{1.26}$$

Тоді вираз (1.25) для $F_a^\nu[x_a(\tau_a)]$ можна подати у вигляді

$$F_a^\nu[x_a(\tau_a)] = \sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu ret} + F_a^{\nu rad} - \frac{d}{d\tau_a}\frac{m_a(\alpha)u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} + O(\alpha), \tag{1.27}$$

де вектор $F_a^{\nu rad}$ залежить лише від змінних частинки a, $m_a(\alpha)$ — константа (незалежна від змінних частинок), яка розбігається у межі $\alpha\to 0$, і через $O(\alpha)$ позначено доданки, що зникають, коли $\alpha\to 0$. Переносячи член з $m_a(\alpha)$ у ліву частину рівняння руху (1.17), проводячи перенормування маси $m_a \to m_a + m_a(\alpha)$ і переходячи після цього до межі $\alpha\to 0$, приходимо до рівнянь руху

$$\frac{d}{d\tau_a}\frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu\, ret} + F_a^{\nu\, rad}, \tag{1.28}$$

права частина яких позбавлена синґулярностей. Для випадку електродинаміки ця процедура описана в книжках [22,23] і приводить до відомих рівнянь Лоренца-Дірака. Альтернативний підхід до проблеми отримання останніх можна знайти в працях [24,25]. Зазначимо, що у поширенні цього виведення на інші безмасові поля виявляється корисною техніка, яка базується на поняттях прямої взаємодії у формалізмі інтеґралів дії типу Фоккера [26].

Можливість вибору випереджувальної функції Ґріна, $G_B^{A\,adv}(x)$, яка зникає, коли $x^0 > 0$, у теоретико-польовому підході виключається з міркувань причинности.

У теоріях прямої взаємодії, для яких найбільш відомим та опрацьованим прикладом може служити електродинаміка Вілера-Фейнмана [8,9], вибирається симетрична функція Ґріна

$$G_B^{Asym} = \frac{1}{2}\left(G_B^{Aret} + G_B^{Aadv}\right). \tag{1.29}$$

При цьому члени з $a = b$ у (1.25) пропускаються (частинка не діє сама на себе). Отримані рівняння руху

$$\frac{d}{d\tau_a}\frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu\, sym} \tag{1.30}$$

будуть еквівалентними до (1.28) за виконання деяких додаткових умов. Із ланцюжка рівностей

$$\begin{aligned}
\sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu\, sym} &= \frac{1}{2}\sum_{b\neq a}(F_{ab}^{\nu\, ret} + F_{ab}^{\nu\, adv}) \\
&= \sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu\, ret} - \frac{1}{2}\sum_{b\neq a}(F_{ab}^{\nu\, ret} - F_{ab}^{\nu\, adv}) \\
&= \sum_{b\neq a} F_{ab}^{\nu\, ret} + \frac{1}{2}(F_{aa}^{\nu\, ret} - F_{aa}^{\nu\, adv}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{b}(F_{ab}^{\nu\, ret} - F_{ab}^{\nu\, adv})
\end{aligned} \tag{1.31}$$

випливає, що достатні умови такої еквівалентности виражаються співвідношеннями

$$F_a^{\nu\, rad} = \frac{1}{2}(F_{aa}^{\nu\, ret} - F_{aa}^{\nu\, adv}), \tag{1.32}$$

$$\sum_b (F_{ab}^{\nu\, ret} - F_{ab}^{\nu\, adv}) = 0. \tag{1.33}$$

Відзначимо, що функція

$$G_B^{A\, rad} = \frac{1}{2}(G_B^{A\, ret} - G_B^{A\, adv}) \tag{1.34}$$

має скінченне значення в точці $x = 0$, так що права частина (1.32) не є синґулярною. Для електродинаміки виконання рівности (1.32) довів Дірак (див. [22,23]).

Враховуючи (1.16) і (1.23), можна ствердити, що достатньою умовою виконання (1.33) є

$$\sum_b (\Phi_{(b)}^{A\, ret} - \Phi_{(b)}^{A\, adv}) = 0, \tag{1.35}$$

де величини $\Phi_{(b)}^{A\, ret}$ і $\Phi_{(b)}^{A\, adv}$ означені формулою (1.24) із, відповідно, запізнювальною $G_B^{A\, ret}$ та випереджувальною $G_B^{A\, adv}$ функціями Ґріна. Рівність (1.35) пов'язана з відомими умовами повного поглинання Вілера-Фейнмана [8,9]. Обговоренням їхнього фізичного статусу для електромагнетної та ґравітаційної взаємодій присвячена широка література (див. [2,3] і посилання, що містяться у цих монографіях). Тут лише зауважимо, що ліва сторона рівности (1.35) як функція точки $x \in \mathbb{M}_4$ задовольняє однорідне польове рівняння (1.21) без джерел. Тому, якщо (1.35) виконується на відповідно вибраних асимптотичних гіперповерхнях в $\mathbb{M}_4$, то воно виконуватиметься і в усьому просторі Мінковського.

Таким чином, підхід, що ґрунтується на релятивістичній дії на віддалі, дозволяє уникнути процедури перенормування маси ціною накладання додаткових умов (1.35). При цьому поля (1.22) розглядаються не як самостійні фізичні об'єкти, а як формальні (хоча й важливі) конструкції, побудовані із змінних частинок, що задовольняють польові рівняння (1.18) тотожньо. Еквівалентність результатів теорії поля та дії на віддалі — формулу (1.32) — можна довести для довільного безмасового поля (випадок ґравітаційної взаємодії обговорено в [3]). Однак для скалярного й векторного масивних полів Гавас [10] відзначив порушення рівности (1.32). Ця обставина в принципі могла б служити для експериментального вирішення питання про справедливість одного чи другого підходів, але відповідні розходження між ними надто малі [27,28], а сама класична модель сильних взаємодій на базі скалярного й векторного мезонних полів, у рамках якої виконано цитовані роботи, надто далека від фізичної реальности.

Відзначимо також, що вибір симетричної функції Ґріна (1.29) є необхідним для того, щоб відповідні рівняння руху частинок (1.17) можна було б отримати з інтеґралу дії, вираженого в термінах лише взаємодіючих частинок (без польових змінних) [16]. До обговорення таких інтеґралів дії ми й переходимо у наступному розділі.

2. Інтеґрали дії типу Фоккера і релятивістичні поля фіксованої маси та спіну

Один із можливих явно коваріянтних описів релятивістичної системи N частинок у термінах прямої взаємодії базується на інтеґралах дії типу Фоккера [1-3]

$$S = S_f - S_I, \tag{2.1}$$

де S_f визначається формулою (1.3), а

$$S_I = \sum_{a<b}\sum \int d\tau_a \int d\tau_b \Lambda_{ab}(x_a(\tau_a) - x_b(\tau_b), u_a(\tau_a), u_b(\tau_b)). \tag{2.2}$$

з деякими (узагальненими) функціями Λ_{ab}, що описують взаємодію між частинками. Взагалі кажучи, ці функції не мусять бути симетричними відносно переставляння індексів частинок a і b [13].

Пуанкаре- та хронометрична інваріянтність дії (2.1) забезпечується вибором підінтеґральної функції Λ_{ab} у вигляді

$$\Lambda_{ab} = \sqrt{u_a^2 u_b^2} R_{ab}(x_a, x_b, \hat{u}_a, \hat{u}_b), \tag{2.3}$$

з деякими Лоренц-інваріянтними функціями R_{ab} [12,13,15,4]:

$$R_{ab} = R_{ab}(\rho_{ab}, \sigma_{ab}, \sigma_{ba}, \omega_{ab}), \qquad a < b, \tag{2.4}$$

залежними від трансляційно-інваріянтних скалярів

$$\rho_{ab} = (x_a - x_b)^2, \quad \sigma_{ab} = \epsilon_{ab}(x_a - x_b) \cdot \hat{u}_a, \quad \omega_{ab} = \hat{u}_a \cdot \hat{u}_b, \tag{2.5}$$

Для деякого спрощення подальших перетворень у означення інваріянтів (2.5) введено знаковий множник $\epsilon_{ab} = \mathrm{sgn}(b-a)$ [4]; крапка позначає звичайний внутрішній добуток у $\mathbb{M}_4$.

Оскільки інтеґрали за $\tau_a \in \mathbb{R}$, які входять у (2.1), (2.2), явно розбігаються (це очевидно вже для вільночастинкових доданків), для надання математичної означености опису, що базується на дії (2.1), поступають таким чином [1,29]. Розглядається допоміжний скінченний вираз $S[\tau_a', \tau_a'']$, який має вигляд (2.1), (2.2) за умови, що інтеґрування за τ_a відбувається на скінченних інтервалах $[\tau_a', \tau_a'']$. Проводячи варіяцію $S[\tau_a', \tau_a'']$ за $x_a(\tau_a)$ за умов $\delta x_a(\tau_a') = \delta x_a(\tau_a'') = 0$, отримують деякі рівняння руху, в яких покладають $\tau_a' \to -\infty$, $\tau_a'' \to \infty$. Остаточно рівняння руху системи частинок, взаємодія між якими описується дією (2.1), (2.2), мають вигляд [13]

$$\frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \sum_{b(>a)} \int d\tau_b \mathcal{E}_a^\nu \Lambda_{ab} + \sum_{b(<a)} \int d\tau_b \mathcal{E}_a^\nu \Lambda_{ba}. \tag{2.6}$$

Для симетричних взаємодій ($\Lambda_{ab} = \Lambda_{ba}$) отримуємо

$$\frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a u_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{u_a^2(\tau_a)}} = \sum_{b(\neq a)} \int d\tau_b \mathcal{E}_a^\nu \Lambda_{ab}. \tag{2.7}$$

Від часу робіт Вілера і Фейнмана [8,9] добре відомо, що у випадку

$$R_{ab} = e_a e_b \omega_{ab} \delta(\rho_{ab}) \tag{2.8}$$

вираз (2.1) описує взаємодію між зарядами e_a, яка переноситься електромагнетним полем (маси 0 і спіну 1). Можна теж побудувати відповідну дію для взаємодій, що переносяться скалярним і векторним масивними полями [10,15]:

$$\text{скалярний випадок :} \qquad R_{ab} = g_a g_b G^{sym}(\rho_{ab}); \tag{2.9}$$

векторний випадок : $\quad R_{ab} = g_a g_b \omega_{ab} G^{sym}(\rho_{ab}).$ (2.10)

Тут g_a — константи зв'язку частинки з полем, $G^{sym}(\rho_{ab})$ — симетрична функція Ґріна рівняння Кляйна-Ґордона:

$$(\partial^2 + \kappa^2) G^{sym}(x) = 4\pi\delta(x), \tag{2.11}$$

де $\partial^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu$ і κ — маса кванта поля.

Цікаво узагальнити ці результати на взаємодії, що переносяться довільними тензорними полями. Всі відомі нам роботи у цьому напрямку [12-16] іґнорують одну важливу обставину. Нехай ми хочемо побудувати дію типу Фоккера, що відповідає взаємодії, яка мовою теорії поля могла б описуватися як обмін віртуальними бозонами маси κ і спіну n. Тоді слід врахувати, що релятивістичне тензорне поле ранґу n описує більш широку систему: число незалежних компонент поля повинно дорівнювати $2n+1$. Для того, щоб вилучити зайві компоненти, які відповідають нижчим спінам, використовується відома техніка проєкційних операторів [17-19]. Результати застосування цієї техніки до теорії джерел Швінґера [19] можна перенести на теорію прямих міжчастинкових взаємодій.

У теорії Швінґера дія для тензорного джерела ранґу n, що описує взаємодію, яка здійснюється шляхом обміну бозонами маси κ і спіну n, має вигляд [19]

$$S_I(J) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J^{\mu_1\ldots\mu_n}(-p) J^{\nu_1\ldots\nu_n}(p) G(p) \mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}(p). \tag{2.12}$$

Тут $J(p)$ і $G(p)$ — Фур'є-образи джерела ("струму") та функції Ґріна, відповідно, а симетричний проєкційний тензор $\mathit{\Pi}$, що є поліноміяльною функцією від p степеня n, визначається із співвідношення

$$x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n} \mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n} y^{\nu_1}\ldots y^{\nu_n} = \beta^n P_n(\alpha/\beta), \tag{2.13}$$

де P_n — многочлен Лежандра,

$$\alpha \equiv x \odot y, \qquad \beta \equiv \sqrt{(x \odot x)(y \odot y)} \tag{2.14}$$

і знак $\odot$ позначає згортку відповідних векторів з тензором

$$g_{\mu\nu}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/\kappa^2. \tag{2.15}$$

У формулі (2.13), як і далі в (3.1), ми опускаємо деякі числові множники (залежні від n), які не узгоджуються із прийнятим нами нормуванням нерелятивістичного потенціялу взаємодії.

Теорія джерел Швінґера (призначена в своїй основі для послідовного релятивістичного квантового опису з особливим наголошенням ролі взаємних перетворень частинок) виходить із критичного ставлення до концепцій теорії поля та теорії частинок. Під останньою автор розуміє теорію S-матриці, однак його критика може бути віднесена і до теорії прямих взаємодій. Положення теорії джерел на лінії, що містить теорію поля й теорію прямих міжчастинкових взаємодій, можна окреслити так. Якщо вихідним пунктом теорії прямих взаємодій є спостереження, що у багатьох фізичних ситуаціях реальне значення має лише поведінка частинок, і для її опису поля служать хоча й важливими, але допоміжними об'єктами, які можна в тій чи іншій мірі виключити з опису як самостійні сутності, то Швінґер йде в цьому напрямку ще далі. Аналізуючи експериментальну ситуацію, характерну для фізики високих енерґій, він приходить до висновку, що реально спостережуваними є лише пучки частинок у їх реакції на різні детектори. Такий пучок, у якому можуть відбуватися процеси взаємного перетворення частинок, займає деяку область простору-часу й характеризується певною функцією — джерелом $J(x)$. Принцип причинности та теоретико-групова класифікація джерел приводять до теорії, яка може бути виведена з дії (2.12). У Швінґера вираз $S_I(J)$ характеризує амплітуду перетворення вакууму при дії джерела $J(x)$:

$$< 0_+ | 0_- >^J = \exp[iS_I(J)]. \tag{2.16}$$

Якщо тепер звернутися до того класу фізичних процесів, коли можливий індивідуальний опис частинок, які утворюють дане джерело, а явища народження та знищення частинок не грають суттєвої ролі (саме ці процеси є природною областю застосування релятивістичної теорії прямих взаємодій), то, конкретизуючи вигляд джерел у термінах частинкових змінних, можна перетворити дію (2.12) у функціонал на світових лініях частинок, перейшовши від теорії джерел до теорії прямих міжчастинкових взаємодій.

Обмежуючись розглядом системи N точкових (безструктурних) частинок, для тензорного джерела ранґу n виберемо таке параметрично-інваріянтне зображення [12,13]

$$J^{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = \sum_a g_a \int d\tau_a (\sqrt{u_a^2})^{1-n} u_a^{\mu_1}\ldots u_a^{\mu_n} \delta[x - x_a(\tau_a)], \tag{2.17}$$

що має вигляд (1.11). Враховуючи, що

$$J(p) = \int d^4x e^{-i(p\cdot x)} J(x), \tag{2.18}$$

можна за допомогою (2.17) надати дії (2.12) форми

$$\begin{aligned} S_I(J) &= \frac{1}{2}\sum_a g_a \sum_b g_b \int d\tau_a \int d\tau_b \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4x' \\ &\times e^{ip\cdot(x-x')}(\sqrt{u_a^2 u_b^2})^{1-n} u_a^{\mu_1}...u_a^{\mu_n} \Pi_{\mu_1...\mu_n\nu_1...\nu_n}(p) \\ &\times u_b^{\mu_1}...u_b^{\mu_n} G(p)\delta[x-x_a(\tau_a)]\delta[x'-x_b(\tau_b)] \end{aligned} \tag{2.19}$$

Виконавши тривіяльне інтеґрування за x та x', одержимо

$$\begin{aligned} S_I(J) &= \frac{1}{2}\sum_a g_a \sum_b g_b \int d\tau_a \int d\tau_b (\sqrt{u_a^2 u_b^2})^{1-n} u_a^{\mu_1}...u_a^{\mu_n} \\ &\times u_b^{\mu_1}...u_b^{\mu_n} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Pi_{\mu_1...\mu_n\nu_1...\nu_n}(p) G(p). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Оскільки $\Pi(p)$ — поліном, його можна винести за знак останнього інтеґралу, замінюючи p на $\partial/i\partial x_a$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\Pi(p)G(p) &= \Pi\left(\frac{\partial}{i\partial x_a}\right)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}G(p) \\ &= \Pi\left(\frac{\partial}{i\partial x_a}\right)G(x_a-x_b). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Таким чином, (2.20) набирає вигляду

$$\begin{aligned} S_I(J) &= \frac{1}{2}\sum_a g_a \sum_b g_b \int d\tau_a \int d\tau_b (\sqrt{u_a^2 u_b^2})^{1-n} u_a^{\mu_1}...u_a^{\mu_n} \\ &\times \Pi_{\mu_1...\mu_n\nu_1...\nu_n}(p) u_b^{\mu_1}...u_b^{\mu_n} G(x_a-x_b). \end{aligned} \tag{2.22}$$

У виразі для дії (2.12), що відповідає квантовій теорії Швінґера [19], міститься причинна функція Ґріна G^c. У переході до відповідної класичної теорії прямої взаємодії вона, природньо, замінюється симетричною функцією Ґріна G^{sym} рівняння Кляйна-Ґордона (2.11) [10,15]

$$G^{sym}(x) = \delta(x^2) - \theta(x^2)\frac{\kappa}{2\sqrt{x^2}}J_1(\kappa\sqrt{x^2}), \tag{2.23}$$

де $\theta(x)$ — функція Гевісайда і J_1 — функція Бесселя. Віднотуємо рівність

$$G^{sym} = \mathrm{Re}G^c, \tag{2.24}$$

яка може служити додатковим евристичним арґументом на користь такої заміни.

Відповідно до концепції прямої взаємодії, доданок з $a=b$ у (2.22) повинен пропускатися.

Використовуючи тепер у формулі (2.22) співвідношення (2.13), що визначають проєкційний тензор Π, одержимо остаточний вираз для дії

$$\begin{aligned} S_I = \sum_{a<b}\sum g_a g_b \int d\tau_a \int d\tau_b (\sqrt{u_a^2 u_b^2})^{1-n}[(u_a*u_a)(u_b*u_b)]^{n/2} \\ \times P_n(\bar{\omega}_{ab})G^{sym}(\rho_{ab}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Тут позначено

$$\bar{\omega}_{ab} = \frac{(u_a*u_b)}{\sqrt{(u_a*u_a)(u_b*u_b)}},$$

$$(u_a*u_a) = u_a^2 + d_a^2/\kappa^2, \quad (u_a*u_b) = (u_a\cdot u_b) - d_a d_b/\kappa^2; \tag{2.26}$$

$$d_a \equiv u_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}. \tag{2.27}$$

і враховано, що похідні за координатами x_a беруться від функції, залежної від різниці координат $x_a - x_b$. Оскільки многочлен Лежандра можна подати у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} c_{nk}x^{2n-k} \tag{2.28}$$

з деякими числовими коефіцієнтами c_{nk}, то легко бачити, що операторний вираз, який діє на $G^{sym}(\rho_{ab})$ у (2.25), буде поліномом за степенями операторів d_a і d_b:

$$\begin{aligned} &[(u_a*u_a)(u_b*u_b)]^{n/2}P_n(\bar{\omega}_{ab}) \\ &= \sum_{k=0}[n/2]c_{nk}(u_a*u_b)^{2n-k}[(u_a*u_a)(u_b*u_b)]^k. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Функція R_{ab} з (2.3), що відповідає інтеґралові дії (2.25), матиме вигляд

$$R_{ab} = g_a g_b\left[\frac{(u_a*u_a)}{(u_a^2)}\frac{(u_b*u_b)}{(u_b^2)}\right]^{n/2} P_n(\bar{\omega}_{ab})G^{sym}(\rho_{ab}). \tag{2.30}$$

Ввівши хронометрично-інваріянтні оператори

$$\bar{d}_a = \frac{1}{\sqrt{u_a^2}}d_a, \tag{2.31}$$

можна записати усі величини, які фігурують у (2.30), у вигляді, явно інваріянтному відносно репараметризації (1.6):

$$\begin{aligned} \frac{(u_a * u_a)}{u_a^2} &= 1 + \bar{d}_a^2/\kappa^2, \\ \bar{\omega}_{ab} &= \frac{\omega_{ab} - \bar{d}_a \bar{d}_b/\kappa^2}{\sqrt{(1+\bar{d}_a^2/\kappa^2)(1+\bar{d}_b^2/\kappa^2)}}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Множина інваріянтів (2.5) замкнена відносно дії операторів (2.31):

$$\begin{aligned} &\bar{d}_a \rho_{ab} = 2\sigma_{ab}, \qquad \bar{d}_a \sigma_{ab} = 1, \\ &\bar{d}_a \sigma_{ba} = -\omega_{ab}, \qquad \bar{d}_a \omega_{ab} = 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Тому функція (2.30) справді має структуру (2.4), володіючи явною Пуанкаре- та репараметризаційною інваріянтністю. Вона симетрична відносно переставляння індексів частинок ($R_{ab} = R_{ba}$).

Для скалярного масивного поля ($n = 0$) вираз (2.30) зводиться до (2.9), оскільки $P_0(x) = 1$. Для векторного поля ($n = 1$), враховуючи, що $P_1(x) = x$, маємо

$$R_{ab}(1) = g_a g_b [\omega_{ab} - \bar{d}_a \bar{d}_b/\kappa^2] G^{sym}(\rho_{ab}). \tag{2.34}$$

Тут другий доданок, пропорційний до κ^{-2}, дає у функцію Λ_{ab} з (2.2) вклад $\Lambda'_{ab} = -\kappa^{-2} g_a g_b d_a d_b G^{sym}(\rho_{ab})$, що є “повною похідною” за τ_a, яка не впливає на рівняння руху (2.7). Тому отримана формула еквівалентна до (2.10).

Для ілюстрації розглянемо ще випадок масивного поля спіну 2. Враховуючи, що $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, одержимо

$$\begin{aligned} R_{ab}(2) &= \frac{1}{2} g_a g_b [3\omega_{ab}^2 - 1 - \kappa^{-2}(6\omega_{ab}\bar{d}_a\bar{d}_b + \bar{d}_a^2 + \bar{d}_b^2) \\ &\quad + 2\kappa^{-4}\bar{d}_a^4\bar{d}_b^4] G^{sym}(\rho_{ab}). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Використовуючи (2.3) та (2.31), маємо

$$\begin{aligned} \Lambda_{ab}(2) = \frac{1}{2} g_a g_b \sqrt{u_a^2 u_b^2} \{ &(3\omega_{ab}^2 - 1) - 4\kappa^{-2}[(1 - 3\omega_{ab}^2)G' \\ &+ (\sigma_{ab}^2 + \sigma_{ba}^2 - 6\omega_{ab}\sigma_{ab}\sigma_{ba})G''] - 8\kappa^{-4}[(1 + 3\omega_{ab})G'' \\ &+ 2\sigma_{ab}^2\sigma_{ba}^2 + 4\omega_{ab}\sigma_{ab}\sigma_{ba})G''' + 4\sigma_{ab}^2\sigma_{ba}^2 G^{\mathrm{iv}}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

де штрихи позначають похідні функції G за її арґументом ρ_{ab}.

На закінчення цього розділу розглянемо деякі теоретико-польові аспекти дії (2.25).

Згідно [19], введемо тензорне поле $\Phi_A = \Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}$ співвідношенням

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(p) = G(p) \Pi_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}(p) J^{\nu_1\ldots\nu_n}(p). \tag{2.37}$$

У термінах поля Φ_A дію (2.12) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} J^A(-p)\Phi_A(p) \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x J^A(x)\Phi_A(x) = \frac{1}{2}S_{int}, \end{aligned} \tag{2.38}$$

де остання рівність випливає з (1.8). Використавши у (2.38) рівняння поля (1.18), одержимо

$$S_I = -\frac{1}{2}\int d^4x \Phi_A(x) \mathcal{F}_{AB} \Phi^B(x) = -S_{fl}, \tag{2.39}$$

Вираз для S_I можна подати і як лінійну комбінацію (2.38) і (2.39) [19]:

$$S_I = \int d^4x [J^A(x)\Phi_A(x) + \frac{1}{2}\Phi_A(x)\mathcal{F}_{AB}\Phi^B(x)]. \tag{2.40}$$

Звідси, проводячи варіяцію полів Φ_A, можна отримати польові рівняння (1.18). Відзначимо, що порівняння (2.38) і (2.39) приводить до формули [14]

$$S_{fl} = -\frac{1}{2}S_{int}, \tag{2.41}$$

яка виконується на розв'язках польових рівнянь руху. Це означає, що

$$S_I = S_{fl} + S_{int}, \tag{2.42}$$

так що дія (2.1) чисельно рівна дії (1.2) при підставлянні в останню розв'язків польових рівнянь (1.18).

Перейдемо від (2.37) до координатного зображення

$$\Phi_A(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(p\cdot x)} \Phi_A(p), \tag{2.43}$$

і отримаємо

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(p\cdot x)} G(p) \Pi_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}(p) J^{\nu_1\ldots\nu_n}(p). \tag{2.44}$$

Винесемо проєкційний тензор Π за знак інтеґралу:

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = \Pi_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} e^{i(p\cdot x)} G(p) J^{\nu_1\ldots\nu_n}(p).$$

(2.45)

Використавши під інтеґралом зображення (2.18), одержимо

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = \mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\int d^4x' G(x-x')J^{\nu_1\ldots\nu_n}(x'). \tag{2.46}$$

Підставивши сюди формулу (2.17) для джерела $J^A(x)$, матимемо

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) &= \sum_a g_a \int d\tau_a (\sqrt{u_a^2})^{1-n} u_a^{\nu_1}\ldots u_a^{\nu_n} \\ &\times \mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) G(x-x_a).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Ця формула виражає польові функції у термінах змінних частинок.

Для одержання польових рівнянь (1.18) для полів $\Phi^A(x)$ можна подіяти на (2.46) оператором Кляйна-Ґордона. Враховуючи (2.11), одержимо

$$(\partial^2+\kappa^2)\Phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = 4\pi \mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) J^{\nu_1\ldots\nu_n}(x). \tag{2.48}$$

Рівняння (2.48) не мають вигляду (1.18) (крім випадку $n = 0$), оскільки у правій частині містяться похідні від джерела $J^A(x)$. Для $n = 1, 2$ ці похідні можна виключити за допомогою певних додаткових співвідношень, що випливають з (2.46); у випадку вищих n справа ускладнюється [19]. Однак ця проблема лежить за межами релятивістичної теорії прямих міжчастинкових взаємодій. З точки зору останньої поля $\Phi_A(x)$ є деякими формальними конструкціями, що повністю визначаються формулами (2.47).

3. Випадок безмасових полів. Ґравітаційна взаємодія та можливі узагальнення

У класичній релятивістичній теорії поля опис безмасових полів пов'язаний з додатковими проблемами і не може бути отриманий безпосереднім переходом $\kappa \to 0$. Побудована нами дія (2.25) також не має означеної межі, коли $\kappa \to 0$. Тому ми проведемо незалежний розгляд взаємодій, що переносяться безмасовими полями, спираючись знову на теорію джерел Швінґера [19]. У цьому контексті основна різниця між масивним та безмасовим випадками проявляється у властивостях проєктивного тензора $\mathit{\Pi}$. Замість (2.13) він визначається тепер співвідношенням

$$x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}\mathit{\Pi}_{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n}y^{\nu_1}\ldots y^{\nu_n} = [x^2y^2]^{n/2}T_n(z), \tag{3.1}$$

де $z \equiv (x\cdot y)/\sqrt{x^2y^2}$ і $T_n(z)$ — поліноми Чебишева [$T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$]. У цій формулі, на відміну від (2.13), фіґурують звичайні внутрішні добутки 4-векторів у $\mathbb{M}_4$.

Використовуючи (3.1) у формулі (2.22), приходимо до простого результату

$$S_I = \sum_{a<b}\sum g_a g_b \int d\tau_a \int d\tau_b \sqrt{u_a^2u_b^2}\,T_n(\omega_{ab})\delta(\rho_{ab}). \tag{3.2}$$

який замінює (2.25) у випадку безмасового поля фіксованої спіральности $\lambda = \pm n$. Очевидно, ми використовуємо тепер симетричну функцію Ґріна $G^{sym}(x) = \delta(x^2)$ рівняння д'Аламбера. Її можна отримати із (2.23) переходом до межі $\kappa \to 0$.

Коли $n = 1$, формула (3.2) дає інтеґрал дії електродинаміки Вілера-Фейнмана (2.8). Випадок $n = 2$ природньо пов'язувати із ґравітаційною взаємодією. Покладемо в (3.2) $n = 2$ і замінимо $g_a g_b$ на $-Gm_am_b$, де G — ґравітаційна стала (знак мінус пов'язаний із універсальним характером ґравітаційного притягання). Врахувавши, що $T_2(z) = 2z^2 - 1$, одержимо

$$S_I = -G\sum_{a<b}\sum m_am_b \int d\tau_a \int d\tau_b \sqrt{u_a^2u_b^2}(2\omega_{ab}^2-1)\delta(\rho_{ab}). \tag{3.3}$$

Вираз (3.3) відповідає лінійному за G наближенню загальної теорії відносности [11,3]. Звичайно, ця відповідність має місце з точністю до тих елементів довільности, які, як відзначалося вище, характеризують взаємозв'язок між теоріями поля та прямих взаємодій — вибір функції Ґріна (запізнювальна чи симетрична) та вирішення проблеми самодії ("перенормування" маси чи умови повного поглинання). Стосовно ґравітаційної взаємодії обговорення цих питань можна знайти в [11,2,3].

Рівняння руху (2.7), що відповідають дії (3.2), мають вигляд

$$\begin{aligned}m_a\frac{d\hat{u}_a^\nu}{d\tau_a} &= g_a\sum_{b(\neq a)} g_b \int d\tau_b \Big\{ 2\sqrt{u_a^2u_b^2}\,\delta'(\rho_{ab})\,[r_{ab}^\nu T_n(\omega_{ab}) \\ &- \epsilon_{ab}\sigma_{ab}(\hat{u}_b^\nu T'_n(\omega_{ab}) + \hat{u}_a^\nu Y_n(\omega_{ab}))] \\ &+ \delta(\rho_{ab})\,[(\hat{u}_a^\nu - \hat{u}_b^\nu)\hat{u}_b^\mu T''_n(\omega_{ab})\end{aligned}$$

$$+\left.\sqrt{u_b^2}Y_n(\omega_{ab})\eta^{\mu\nu}\right]\frac{d\hat{u}_{a\mu}}{d\tau_a}\Bigg\} \quad (3.4)$$

Тут $r_{ab}^{\nu} \equiv x_a^{\nu} - x_a^{\nu}$, $Y_n(\omega) \equiv T_n(\omega) - \omega T'{}_n(\omega)$ і штрихи позначають похідні за вказаними арґументами.

Таким чином, нами побудовано інтеґрали дії типу Фоккера для взаємодій, що відповідають релятивістичним полям фіксованої маси κ та спіну n. Такі поля, як відомо, забезпечують незвідне зображення групи Пуанкаре [17-20]. Значний інтерес становить вивчення співвідношення між отриманими виразами для масивних і безмасових полів у випадку $n \geq 2$. Інтеґрали дії для масивних полів містять нетривіяльні синґулярності, коли $\kappa \to 0$. З математичної точки зору їх причина пов'язана з різною структурою малої групи, що індукує відповідні незвідні зображення групи Пуанкаре в масивному та безмасовому випадках [30]. З фізичної точки зору умовою існування безмасової межі у випадку $n \geq 1$ є бездиверґентність відповідних джерел [19]. Для джерел (2.17), створених точковими частинками, умова бездиверґентности виконується тотожньо лише у випадку $n = 1$, коли 4-вектор струму має вигляд

$$J^{\mu}(x) = \sum_a g_a \int d\tau_a u_a^{\mu} \delta[x - x_a(\tau_a)], \quad (3.5)$$

і, отже,

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^{\mu}(x) &= \sum_a g_a \int d\tau_a u_a^{\mu} \partial_\mu \delta[x - x_a(\tau_a)] \\ &= -\sum_a g_a \int d\tau_a \frac{d}{d\tau_a} \delta[x - x_a(\tau_a)] = 0 \quad (3.6)\end{aligned}$$

(див. [10,19]). Якщо $n > 1$, то джерела (2.17) можна вважати бездиверґентними тільки в нульовому наближенні за константою взаємодії (тобто для рухів частинок без врахування взаємодії між ними). Наприклад, розглянемо тензорне джерело другого ранґу, що відповідає ґравітаційній взаємодії,

$$J^{\mu\nu}(x) = \sum_a m_a \int d\tau_a \frac{u_a^{\mu} u_a^{\nu}}{\sqrt{u_a^2}} \delta[x - x_a(\tau_a)], \quad (3.7)$$

Зазначимо, що (3.7) утворює тензор енерґії-імпульсу системи вільних точкових частинок у плоскому просторі-часі $\mathbb{M}_4$ [31]. Тоді з врахуванням рівнянь руху (3.4) маємо

$$\begin{aligned}\partial_\mu J^{\mu\nu}(x) &= -\sum_a m_a \int d\tau_a \frac{u_a^{\nu}}{\sqrt{u_a^2}} \frac{d}{d\tau_a} \delta[x - x_a(\tau_a)] \\ &= \sum_a \int d\tau_a \delta[x - x_a(\tau_a)] \frac{d}{d\tau_a} \frac{m_a u_a^{\nu}}{\sqrt{u_a^2}} = O(G). \quad (3.8)\end{aligned}$$

Природній спосіб дій у описаній ситуації — це модифікація виразу (2.17) для джерела так, щоб умова бездиверґентности виконувалась із врахуванням рівнянь руху першого наближення (3.4), що задаються інтеґралом дії (3.2). Новий вираз для джерела можна підставити в формулу для дії (2.12) для отримання інтеґралу типу Фоккера в наступному наближенні за константою взаємодії. Продовжуючи описану процедуру, приходимо до високо нелінійної теорії, для якої побудовані вище вирази (3.2), (3.4) служать лінійним за взаємодією наближенням. Наведені міркування свідчать, що послідовна теорія взаємодій, які переносяться безмасовими полями цілого спіну $n \geq 2$, повинна бути нелінійною [32]. Відповідні інтеґрали дії типу Фоккера міститимуть, поряд з подвійними сумами типу (2.2), також потрійні і т.д. суми з вищими степенями константи взаємодії. Така програма опису прямої ґравітаційної взаємодії розглядалась у працях [33,34] і реалізована в рамках розвинень за степенями c^{-2} з точністю до c^{-4}. У розкладах за степенями константи взаємодії цей шлях повинен приводити до далекодійного формулювання загальної теорії відносности, розвинутого в працях Владімірова й Туриґіна [3,35] на базі інтеґралів дії типу Фоккера. Вказані автори виходили із загальної теорії відносности й послідовним інтеґруванням рівнянь Гільберта-Айнштайна у калібруванні де Дондера-Фока з використанням часосиметричних функцій Ґріна виключали з опису компоненти метричного тензора $g_{\mu\nu}(x)$ ефективного ріманового простору. Описаний вище шлях мав би приводити до подібних результатів на основі побудови самоузгодженої теорії міжчастинкової взаємодії, що переноситься безмасовим тензорним полем спіну 2 [36]. Подібний спосіб побудови послідовної теорії тяжіння у просторі-часі Мінковського активно обговорювався в польовому підході (див., наприклад, [32,37]).

Інтриґуючою є можливість розгляду в окресленій вище схемі випадку $n > 2$ [32]. В рамках квантової теорії поля загальноприйнятою є думка про неможливість послідовного релятивістичного опису в цьому випадку [38] (*“it seems, at this moment, that Nature stops at spin 2”* [39]). Дослідження вказаної можливости в рамках теорії прямих взаємодій становить значний інтерес.

Новою рисою, яка виникає в описі взаємодій, що відповідають безмасовим полям, і теж зумовлена бездиверґентністю джерел, є калібрувальна свобода. Наведені вище вирази для польових функцій (2.45) і польових рівнянь (2.48) записані у певному конкретному калібруванні (для $n = 1$ це калібрування Лоренца). Перехід до загального випадку можна здійснити, проводячи у вказаних формулах довільне калібрувальне перетворення.

Ще одне можливе узагальнення викладеного формалізму полягає у відході від моделі точкових частинок. Це потребуватиме більш загальних, ніж (2.17), виразів для джерел, які б, поряд із δ-функціями, містили їх вищі похідні [40,41]. Така модифікація формалізму дозволяла б описувати частинки зі спіном та вищими мультипольними моментами [40]. При цьому слід теж узагальнити вільночастинковий вираз для дії (1.3) [41].

Цікава можливість пов'язана із розглядом у рамках запропонованого підходу взаємодій, що описуються калібрувальним полем, яке відповідає певній групі внутрішніх симетрій $\mathcal{G}$ [21,42]. Для випадку точкових частинок (монопольних синґулярностей у термінології робіт [40,43]) вихідні формули для джерел зберігатимуть вигляд (2.17) із заміною констант взаємодії g_a деякими функціями $g_a^\alpha(\tau_a)$, $\alpha = 1, ..., \dim \mathcal{G}$, та розташуванням їх під знаком інтеґралу за τ_a [43]. Таке джерело вже у випадку $n = 1$ не задовольнятиме тотожньо умову бездиверґентности, і процедура, описана вище для $n = 2$, приводитиме до певної нелінійної теорії. Для калібрувальної групи $\mathcal{G} = \mathrm{SU}(2)$ (поля Янґа-Мілса) та наявности скалярного поля Гіґса рівняння руху монопольних і дипольних синґулярностей виведені в польовому підході у працях [43,44] з точністю до другого порядку за константою взаємодії. Можливість отримати такі чи подібні рівняння на базі формалізму інтеґралів дії типу Фоккера заслуговує додаткового вивчення. Це може вимагати й модифікації виразу (1.3) для вільночастинкової дії [41].

Формалізм інтеґралів дії типу Фоккера дозволяє теж вводити у розгляд взаємодії, які не мають теоретико-польового відповідника, хоча й інспіровані структурами, що випливають з теорії поля. Покладаючи в (2.3)

$$R_{ab} = F_{ab}(\sigma_{ab}, \sigma_{ba}, \omega_{ab}) G(\rho_{ab}), \qquad a < b, \tag{3.9}$$

де Φ_{ab} — деяка гладка функція, а $G(\rho_{ab})$ — довільна (можливо, узагальнена) функція, ми очевидним чином забезпечуємо Пуанкареінваріянтність відповідної міжчастинкової взаємодії. Вибір

$$F_{ab}(n, l) = \omega_{ab}^l (\sigma_{ab}\sigma_{ba})^{n-l}, \qquad l = 0, 1, ..., n; \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.10}$$

пропонувався у працях [12,13] як такий, що допускає інтерпретацію в термінах симетричних тензорних полів ранґу n. Однак побудовані на його основі вирази для полів не є незвідними, і структура

(3.10) значно відрізняється від отриманого нами виразу (2.30). Якщо у (3.9) покласти

$$F_{ab} = g_a g_b \sigma_{ab} \sigma_{ba}, \tag{3.11}$$

і $G(\rho) = \delta(\rho)$, то одержимо модель утримувальної взаємодії [45]. Еквівалентний вираз R_{ab} для цієї моделі має вигляд

$$R_{ab} = g_a g_b \omega_{ab} \theta(\rho_{ab}) \tag{3.12}$$

та відрізняється від формули (2.10) для векторної взаємодії заміною симетричної функції Ґріна рівняння Кляйна-Ґордона на феноменологічний пропагатор $\theta(\rho)$.

Коли

$$F_{ab} = g_a g_b f(\omega_{ab}) \tag{3.13}$$

з довільно гладкою функцією $f(\omega)$, такою що $f(1) = 1$, то взаємодії (3.9) у нерелятивістичному наближенні відповідатиме статичний потенціял [4,46]

$$u(r) = \int d\theta G(\theta^2 - r^2) \tag{3.14}$$

(наприклад, для утримувальної взаємодії (3.12) $u(r) \sim r$). Співвідношення (3.14) можна обернути, виражаючи функцію $G(\rho)$ у термінах $u(r)$ [46], так що вирази (3.9), (3.13) забезпечують (звісно, неоднозначну) релятивізацію довільної заданої нерелятивістичної статичної взаємодії u(r) — можливо, й отриманої чисто феноменологічним чином.

Цікавий клас моделей одержується, якщо у (3.9) вважати функцію $G(x)$ рівною запізнювальній (або випереджувальній) функції Ґріна хвильового рівняння

$$G(x) = G^\eta(x) = 2\theta(\eta x^0)\delta(x^2), \qquad \eta = \pm 1. \tag{3.15}$$

Відповідні взаємодії [12,13] також задовольняють умови інваріянтности відносно власної ортохронної групи Пуанкаре, бо знак x^0 є інваріянтом відносно перетворень Лоренца для ізотропних інтервалів [13]. Якщо додатково покласти у (3.9), (3.13)

$$f(\omega) = T_n(\omega), \tag{3.16}$$

то прийдемо до моделей, у яких кожна пара частинок a, b взаємодіє таким чином, що одна з частинок діє на другу своїм, наприклад, випереджувальним безмасовим полем, а друга на першу — запізнювальним. У випадку електродинаміки ($n = 1$) такі взаємодії розглядав ще Фоккер у 30-их роках; інтерес до них відновився після праці

[47], у якій відповідні рівняння руху двох частинок, що відштовхуються ($g_1 g_2 > 0$), були проінтеґровані у випадку одновимірного руху. Тривимірний випадок розглядався у роботі [48]. Одновимірні рівняння руху для скалярної взаємодії ($n = 0$) проінтеґровані в статті [49] теж у обмеженні $g_1 g_2 > 0$. Ці моделі обговорювалися також у роботах [50-52].

4. Висновки

У застосуванні до опису релятивістичної системи N взаємодіючих точкових частинок теорії поля та дії на віддалі приводять до подібних виразів. Встановлення зв'язку між цими двома підходами вимагає аналізу довільности в процесі побудови рівнянь руху частинок. Два основних елементи таких довільностей — це вибір функції Ґріна відповідного польового рівняння та проблема розбіжности функцій поля на світовій лінії частинки, яка його створює. Теорія поля вибирає запізнювальні функції Ґріна і вирішує проблему розбіжности перенормуванням маси. Теорія дії на віддалі в підході Вілера-Фейнмана [8,9] віддає перевагу часосиметричним функціям Ґріна і пропускає самодію в рівняннях руху. Обидва підходи еквівалентні у випадку безмасових полів за виконання умов повного поглинання [8,9,2,3] і приводять до дещо відмінних рівнянь руху у випадку масивних скалярного й векторного полів [10,27,28]. Зрештою, як відзначено в праці [53], підхід Вілера-Фейнмана з використанням часосиметричних функцій Ґріна застосовний і в теоретико-польовому аналізі багаточастинкових систем. З іншого боку, рівняння руху частинок виду (1.17) за наявности сили реакції випромінювання [див. (1.27)], виведені в рамках польового підходу, можуть успішно досліджуватися методами релятивістичної теорії прямих міжчастинкових взаємодій. Саме раціональне поєднання польового й далекодійного підходів до опису релятивістичних систем взаємодіючих частинок обіцяє нові результати в цій галузі.

Обставиною, яка диктує вибір саме часосиметричних функцій Ґріна, є прагнення мати варіяційний принцип, з якого виводяться рівняння руху частинок [16]. Хоча вимога існування варіяційного принципу для рівнянь руху носить скоріше естетичний, ніж фізичний характер, її виконання приводить до суттєвих спрощень у описі фізичних систем — як у рамках класичної механіки, так і, особливо, за її межами: у статистичній фізиці й квантовій теорії. Тому можливості, які забезпечує використання інтеґралів дії типу Фоккера в описі релятивістичних систем [1-3], заслуговують якомога

повнішого вивчення.

У даній роботі побудовано й досліджено інтеґрали дії типу Фоккера для взаємодій, що відповідають релятивістичним полям фіксованої маси κ та (цілого) спіну n. Такі поля, як відомо, забезпечують незвідне зображення групи Пуанкаре [17-20].

За межами нашого розгляду лишилися спінорні джерела й поля, хоча відповідні вирази для дії типу (2.12) записано у [19]. Це виправдано остільки, оскільки носіями взаємодії у квантовій теорії поля вважаються частинки цілого спіну [3]. Однак у суперсиметричних теоріях тяжіння допускаються взаємодії, що переносяться, наприклад, шляхом обміну двома ферміонами [46]. Можливість формулювання відповідної класичної теорії в термінах, скажімо, інтеґралів дії типу Фоккера лишається цілковито нез'ясованою.

Що ж стосується отриманих у роботі виразів для інтеґралів дії типу Фоккера у чотиримірному (явно коваріянтному) зображенні, то вони можуть служити об'єктом подальшого застосування загальних методів релятивістичної теорії прямих взаємодій [54-56]. Це включає, зокрема, перехід до одночасового тривимірного зображення, одержання та дослідження відповідних рівнянь руху та їх перших інтеґралів, розгляд наближень за степенями c^{-2}, побудову предиктивних рівнянь руху другого порядку шляхом розвинень за степенями константи взаємодії, перехід до гамільтонового опису. Становить інтерес поширення методу [26] побудови виразів для сили реакції випромінювання на основі інтеґралів дії типу Фоккера на випадок масивних полів.

Таким чином, запропонований підхід відкриває цікаві перспективи нового погляду на деякі усталені питання сьогочасної теорії релятивістичних явищ, як і дозволяє трансформувати загалом відомі результати до вигляду, більш придатного для застосування різних ітераційних схем та якісного аналізу релятивістичних систем взаємодіючих частинок.

Посилання

1. E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda. Classical Dynamics: A Modern Perspective. — New York: Wiley, 1974. — 615 p.
2. F. Hoyle, J. V. Narlikar. Action-at-a-Distance in Physics and Cosmology. — San Francisco: Freeman, 1974. — 264 p.
3. Ю. С. Владимиров, А. Ю. Турыгин. Теория прямого межчастичного взаимодействия. — Москва: Энергоатомиздат, 1986. — 134 с.

4. R. P. Gaida, V. I. Tretyak. Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics. — Acta Phys. Pol. B 1980, **11**, No 7, p. 502-522.
5. V. I. Tretyak, R. P. Gaida. Symmetries and conservation laws in the single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics. — Acta Phys. Pol. B 1980, **11**, No 7, p. 523-536.
6. X. Jaén, R. Jáuregui, J. Llosa, A. Molina. Hamiltonian formalism for path-dependent Lagrangians. — Phys. Rev. D 1987, **36**, No 8, p. 2385-2398.
7. J. Llosa, J. Vives. Hamiltonian formalism for nonlocal Lagrangians. — J. Math. Phys. 1994, **35**, No 6, p. 2856-2877.
8. J. A. Wheeler, R. P. Feynman. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation. — Rev. Mod. Phys., 1945, **17**, No 2-3, p. 157-181.
9. J. A. Wheeler, R. P. Feynman. Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. — Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, No 3, p. 425-433.
10. P. Havas. The classical equations of motion of point particles. I. — Phys. Rev. 1952, **87**, No 2, p. 309-318.
11. P. Havas, J. N. Goldberg. Lorentz-invariant equations of motion of point masses in the general theory of relativity. — Phys. Rev. 1962, **128**, No 1, p. 398-414.
12. P. Havas. Galilei- and Lorentz-invariant particle systems and their conservation laws. — Problems in the Foundations of Physics. Ed. M. Bunge. Berlin: Springer, 1971, p. 31-48.
13. H. W. Woodcock, P. Havas. Approximately relativistic Lagrangians for classical interacting point particles. — Phys. Rev. D 1972, **6**, No 12, p. 3422-3444.
14. J. V. Narlikar. On the general correspondence between field theories and the theories of direct interparticle action. — Proc. Camb. Phil. Soc. 1968, **64**, No 4, p. 1071-1079.
15. P. Ramond. Action-at-a-distance theories and dual models. — Phys. Rev. D 1973, **7**, No 2, p. 449-458.
16. J. L. Anderson, S. Schiminovich. Relations between field plus source and Fokker-type action principles. — J. Math. Phys. 1967, **8**, No 2, p. 255-264.
17. Ю. В. Новожилов. Введение в теорию элементарных частиц. — Москва: Наука, 1972. — 472 с.
18. М. Б. Менский. Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. — Москва: Наука, 1976. — 287 с.
19. Ю. Швингер. Частицы, источники, поля. — Москва: Мир, 19778 — 502 с.

20. V. Aldaya, J. A. Azcárraga. Geometric formulation of classical mechanics and field theory. — Riv. Nuovo Cimento 1980, **3**, No 10, p. 1-66.
21. T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. — Phys. Repts 1980, **66**, No 6, p. 213-393.
22. F. Rohrlich. Classical Charged Particles. — New York: Addison-Wesley, 1990. — 305 p.
23. С. Р. де Гроот, Л. Г. Сатторп. Электродинамика. — Москва.: Наука, 1982. — 560 с.
24. E. G. P. Rowe, G. Rowe. The classical equations of motion for a spinning point particle with charge and magnetic moment. — Phys. Repts 1987, **149**, No 5, p.287-336.
25. S. Parrott. Relativistic Electrodynamics and Differential Geometry. — New York: Springer, 1987. — 308 p.
26. В. И. Третяк. Тензорные поля и перенормировка массы в классической релятивистской теории прямого взаимодействия. — Мат. методы и физ.-мех. поля 1990, вып. 32, с. 65-67.
27. C. R. Mehl, P. Havas. The classical scattering of neutral mesons. — Phys. Rev. 1953, **91**, No 2, p. 393-397.
28. A. D. Craft, P. Havas. Classical scattering of neutral mesons. II. — Phys. Rev. 1967, **154**, No 5, p. 1460-1468.
29. A. Degasperies. Bohr quantization of relativistic bound states of two point particles. — Phys. Rev. D 1971, **3**, No 2, p.273-280.
30. Ю. Б. Румер, А. И. Фет. Теория групп и квантованные поля. — Москва: Наука, 1977. — 248 с.
31. К. Меллер. Теория относительности. — Москва: Атомиздат, 1975. — 400 с.
32. J. Fang, C. Fronsdal. Deformations of gauge groups. Gravitation. — J. Math. Phys. 1979, **20**, No 11, p. 2264-2271.
33. Я. И. Грановский, А. А. Пантюшин. К релятивистской теории тяготения. — Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. наук 1965, № 2, с. 65-69.
34. А. А. Пантюшин. Теория прямого гравитационного взаимодействия тел. — Гравитация и теория относительности 1969, вып. 6, с. 30-40.
35. A. Yu. Turygin Fokker's type action at a distance theory of gravitation. — Gen. Rel. Grav. 1986, **18**, No 4, p. 333-348.
36. V. Tretyak. Fokker-type action integrals for the gravitational interaction. — 14th International Conference on General Relativity and Gravitation. (Florence, Italy, August 6-12, 1995). Abstracts of Con-

tributed Papers. — Florence, 1995, p. A.160.
37. G. Cavalleri, G. Spinelli. Field-theoretic approach to gravity in the flat space-time. — Riv. Nuovo Cimento 1980, **3**, No 8, p. 1-92.
38. S. Weinberg. Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass. — Phys. Rev. 1964, **135**, No 4B, p. B1049-B1056.
39. P. van Nieuwenhuizen. Supergravity. — Phys. Repts 1981, **68**, No 4, p. 189-398.
40. P. Havas. Multipole singularities in special-relativistic nonlinear field theories. — Phys. Rev. D 1972, **5**, No 12, p. 3048-3065.
41. A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam, A. Stern. Gauge Symmetries and Fibre Bundles: Applications to Particle Dynamics. — Lect. Notes Phys., **188**. Berlin e.a.: Springer, 1983. — 140 p.
42. W. Drechsler, M. E. Mayer. Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories. — Lect. Notes Phys., **67**. - Berlin e.a.: Springer, 1977. — 248 p.
43. W. Drechsler, P. Havas, A. Rosenblum. Theory of motion for monopole-dipole singularities of classical Yang-Mills-Higgs fields. I. Laws of motion. — Phys. Rev. D 1984, **29**, No 4, p. 658-667.
44. W. Drechsler, P. Havas, A. Rosenblum. Theory of motion for monopole-dipole singularities of classical Yang-Mills-Higgs fields. II. Approximation scheme and equations of motion. — Phys. Rev. D 1984, **29**, No 4, p. 668-686.
45. A. Rivacoba. Fokker-action principle for a system of particles interacting through a linear potential. — Nuovo Cimento B 1984, **84**, No 1, p. 35-42.
46. A. Katz. Alternative dynamics for classical relativistic particles. — J. Math. Phys. 1969, **10**, No 10, p.1929-1931.
47. R. A. Rudd, R. N. Hill. Exactly solvable electrodynamic two-body problem. — J. Math. Phys. 1970, **11**, No 9, p. 2704-2710.
48. H. P. Künzle. A relativistic analogue of the Kepler problem. — Int. J. Theor. Phys. 1974, **11**, No 6, p. 395-417.
49. P. Stephas. One-dimensional motion for classical relativistic two-body systems in time-asymmetric Lorentz scalar potentials. — Phys. Rev. D 1985, **31**, No 2, p. 319-324.
50. A. Staruszkiewicz. Lorentz covariant quantum mechanics of charged particles in the two-dimensional space-time. — Ann. Inst. H. Poincaré 1976, **A24**, No 4, p. 359-366.
51. С. Н. Соколов, В. И. Третяк. Фронтовая форма релятивистской лагранжевой динамики в двумерном пространстве-времени и ее связь с гамильтоновым описанием. — Теор. мат. физ. 1986, **67**, № 1, с. 102-114.

52. А. А. Дувіряк, В. І. Третяк. Класична релятивістська динаміка двох тіл на світловому конусі. — Фізика конденсованих систем, 1993, вип. 1, с. 92-107.
53. P. Havas. On the classical equations of motion of point charges. — Phys. Rev. 1948, **74**, No 4, p. 456-463.
54. Р. П. Гайда. Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц. — Физ. ЭЧАЯ 1982, **13**, № 2, с. 427-493.
55. R. P. Gaida, Yu. B. Kluchkovsky, V. I. Tretyak. Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles. — Constraint's Theory and Relativistic Dynamics. Eds. G. Longhi, L. Lusanna. — Singapore: World Scientific Publ., 1987, p. 210-241.
56. R. P. Gaida, V. I. Tretyak. Symmetries of the Fokker-type relativistic mechanics in various forms of dynamics. — J. Nonlin. Math. Phys. 1996, **3**, No 3, p. 357-371.

Володимир Іванович Третяк

Інтеґрали дії типу Фоккера та класичні релятивістичні поля

Роботу отримано 16 лютого 1998 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів і сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України