Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ІФКС–96–15U

В.Г.Морозов*, М.В.Токарчук, І.М.Ідзик, О.Є.Кобрин

МОДИФІКОВАНА КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОВІЛЬНИХ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*Інститут радіоелектроніки і автоматики,
фізичний факультет.
Росія, 117454 м. Москва, просп. Вернадського, 78.

ЛЬВІВ

УДК: 536.75, 536-12.01
PACS: 05.70.L, 47.70

Модифікована кінетична теорія з врахуванням повільних гідродинамічних процесів

В.Г.Морозов, М.В.Токарчук, І.М.Ідзик, О.Є.Кобрин

Анотація. Пропонується підхід для узгодженого опису кінетичних та гідродинамічних флуктуацій у класичних системах. Отримується зв'язана система рівнянь для нерівноважної функції розподілу та функції розподілу гідродинамічних змінних: густини маси, імпульсу та енергії для опису кінетичних та гідродинамічних процесів в класичних рідинах.

Modified kinetic theory with consideration for slow hydrodynamical processes

V.G.Morozov, M.V.Tokarchuk, I.M.Idzyk, A.E.Kobryn

Abstract. One approach of unified description of kinetic and hydrodynamic fluctuations for classical systems is proposed. The coupled system of equations for nonequilibrium oneparticle distribution function and distribution function of hydrodynamic variables: masse density, momentum and energy for the description of kinetic and hydrodynamic processes in classical liquids is obtained.

Подається до Physica A
Submitted to Physica A

1. Вступ

Побудова кінетичних рівнянь з врахуванням повільних гідродинамічних процесів [1–4] є важливою проблемою в теорії процесів переносу в рідинах. Зокрема, ця проблема виникає при описі низькочастотних аномалій в кінетичних рівняннях та пов'язаних з ними "довгих хвостів" кореляційних функцій [5], а також при узгодженому описі колективних ефектів у плазмі [4,6].Головна трудність проблеми полягає в тому, що кінетика та гідродинаміка цих процесів є сильно пов'язані й повинні розглядатись одночасно.

В роботах [7–9] був запропонований узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів переносу в густих газах і рідинах на основі нерівноважного статистичного оператора Д.М.Зубарєва [10,11]. Зокрема, цей підхід був застосований для отримання з ланцюжка рівнянь ББГКІ кінетичного рівняння ревізованої теорії Енскога [8] для твердих кульок та кінетичного рівняння Енскога-Ландау однокомпонентної системи заряджених твердих кульок [8]. В роботі [9] було отримано узагальнене кінетичне рівняння для гідродинамічних змінних (густини числа частинок, імпульсу та повної енергії), що пов'язане з кінетичним рівнянням для нерівноважної одночастинкової функції розподілу. Пізніше ці рівняння використовувались для дослідження часових кореляційних функцій слабо нерівноважних систем [9].

Очевидно, підхід [7–9] може бути застосований для опису як слабо, так і сильно нерівноважних систем. Але щоб описати кінетичні процеси та нелінійні гідродинамічні флуктуації узгоджено зручно переформулювати цю теорію таким чином, щоб отримати зв'язаний набір рівнянь для нерівноважної одночастинкової функції розподілу та функціоналу розподілу гідродинамічних змінних: густини числа частинок, імпульсу та енергії. Ідея такого підходу була сформульована в роботі [12].

2. Нерівноважна функція розподілу

Для послідовного опису кінетичних та гідродинамічних флуктуацій в однокомпонентній класичній рідині слід вибрати параметри опису для одночастинкових та колективних процесів. У якості цих параметрів виберемо нерівноважну одночастинкову функцію розподілу $f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t$ та функцію розподілу гідродинамічних змінних

$f(a;t) = \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle^t$. Тут фазова функція

$$\hat{n}_1(x) = \sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j) = \sum_{j=1}^{N}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_j)$$

є мікроскопічною густиною числа частинок, $x_j = \{\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p}_j\}$ є набором фазових змінних – координати та імпульсу. Мікроскопічний фазовий розподіл гідродинамічних полів задається рівним

$$\hat{f}(a) = \delta(\hat{a}-a) = \prod_{m=1}^{3}\prod_{\boldsymbol{k}}\delta(\hat{a}_{m\boldsymbol{k}} - a_{m\boldsymbol{k}}),$$

де фазові функції $\hat{a}_{1\boldsymbol{k}} = \hat{n}_{\boldsymbol{k}}$, $\hat{a}_{2\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}$, $\hat{a}_{3\boldsymbol{k}} = \hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}$ є Фур'є-образами густини числа частинок, імпульсу та енергії:

$$\hat{n}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j},$$

$$\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{p}_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j},$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}} = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq j}^{N}\Phi(|\boldsymbol{r}_{jl}|)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j},$$

ну а $a_{m\boldsymbol{k}} = \{n_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\}$ є відповідними колективними змінними. $\Phi(|\boldsymbol{r}_{jl}|) = \Phi(|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_l|)$ є парним потенціалом взаємодії між частинками. Середні значення $\langle\hat{n}_1(x)\rangle^t$, $\langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t$ отримуються з N-частинковою функцією розподілу $\varrho\left(x^N;t\right)$, що задовільняє рівняння Ліувіля й у відповідності до ідеї скороченого опису нерівноважного стану є функціоналом

$$\varrho\left(x^N;t\right) = \varrho\Big(\ldots f_1(x;t), f(a;t)\ldots\Big). \tag{2.1}$$

Таким чином задача полягає в тому, щоб знайти частинний розв'язок рівняння Ліувіля для $\varrho\left(x^N;t\right)$, що має форму (2.1). Щоб зробити це будемо слідувати методу нерівноважного статистичного оператора Д.М.Зубарєва [10,11] і розглянемо рівняння Ліувіля з нескінченно малим джерелом, що порушує інваріантність цього рівняння по відношенню до обертання часу

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho\left(x^N;t\right) + \mathrm{i}L_N\varrho\left(x^N;t\right) = -\varepsilon\Big(\varrho\left(x^N;t\right) - \varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)\Big), \tag{2.2}$$

де $\varepsilon \to +0$ після термодинамічної границі, а $\mathrm{i}L_N$ – N-частинковий оператор Ліувіля [7–9]. Джерело правильно відбирає загайні розв'язки у відповідності до скороченого опису нерівноважного стану системи. Квазірівноважна функція розподілу $\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)$ визначається стандартним чином [10,11] з умови максимуму функціоналу інформаційної ентропії при одночасному збереженні умови нормування

$$\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = 1, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{d}\Gamma_N = \frac{(\mathrm{d}x)^N}{N!} = \frac{(\mathrm{d}x_1,\ldots,\mathrm{d}x_N)}{N!}, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

а також того, що параметри скороченого опису

$$f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t, \tag{2.4}$$

$$f(a;t) = \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle^t \tag{2.5}$$

є фіксованими. Тоді квазірівноважна функція розподілу може бути записана як

$$\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \exp\left\{-\varPhi(t) - \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x) - \int \mathrm{d}a\ \mathscr{F}(a;t)\hat{f}(a)\right\}, \tag{2.6}$$

де

$$\mathrm{d}a \equiv \mathrm{d}a_{m\mathbf{k}} = \{\mathrm{d}n_{\boldsymbol{k}},\ \mathrm{d}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}},\ \mathrm{d}\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}\}.$$

Функціонал Масьє-Планка $\varPhi(t)$ визначається з умови нормування квазірівноважного розподілу:

$$\varPhi(t) = \ln \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \exp\left\{-\int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x) - \int \mathrm{d}a\ \mathscr{F}(a;t)\hat{f}(a)\right\}.$$

Функції $\gamma(x;t)$ та $\mathscr{F}(a;t)$ відіграють роль множників Лагранжа і можуть бути визначені з умов самоузгодження

$$\begin{aligned} f_1(x;t) &= \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t = \langle \hat{n}_1(x)\rangle^t_{\mathrm{q}}, \\ f(a;t) &= \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle^t = \langle \delta(\hat{a}-a)\rangle^t_{\mathrm{q}}, \\ \langle\ldots\rangle^t &= \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \ldots\varrho\left(x^N;t\right), \\ \langle\ldots\rangle^t_{\mathrm{q}} &= \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \ldots\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Зручно переписати квазірівноважну функцію розподілу (2.6) в формі

$$\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \exp\left\{-\varPhi(t) - \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\right\}\int \mathrm{d}a\ \exp\left\{-\mathscr{F}(a;t)\hat{f}(a)\right\}.$$

Використовуючи далі умову (2.7) знайдемо функцію $\mathscr{F}(a;t)$

$$\exp\{-\mathscr{F}(a;t)\} = \frac{f(a;t)}{W(a;t)},$$

де

$$W(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \exp\left\{-\varPhi(t) - \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\right\}\hat{f}(a)$$

є структурною функцією гідродинамічних флуктуацій, що може розглядатись як якобіан [13] $\hat{f}(a)$ для переходу в простір колективних змінних $n_{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}$, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}$ засереднених з "кінетичною" квазірівноважною функцією розподілу

$$\varrho^{kin}_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \exp\left\{-\varPhi(t) - \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\right\}. \tag{2.8}$$

Ото ж ми можемо записати

$$W(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \varrho^{kin}_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)\hat{f}(a). \tag{2.9}$$

Враховуючи далі (2.8) та (2.9) квазірівноважну функцію розподілу (2.6) можна представити у формі

$$\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \varrho^{kin}_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)\left.\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right|_{a=\hat{a}}. \tag{2.10}$$

Квазірівноважному розподілу (2.10) відповідає ентропія

$$\begin{aligned} S(t) &= -\langle \ln \varrho_{\mathrm{q}}\rangle^t_{\mathrm{q}} \\ &= \varPhi(t) + \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\langle\hat{n}_1(x)\rangle_t + \int \mathrm{d}a\ f(a;t)\ln\frac{f(a;t)}{W(a;t)}. \end{aligned}$$

У поєднанні з умовами самоузгодження (2.4) та (2.5) вона може розглядатись як ентропія нерівноважного стану.

Маючи квазірівноважний розподіл (2.10) перепишемо рівняння Ліувіля (2.2) для функції $\Delta\varrho\left(x^N;t\right) = \varrho\left(x^N;t\right) - \varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)$, яка обертається в нуль при $t \to -\infty$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}L_N + \varepsilon\right)\Delta\varrho\left(x^N;t\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}L_N\right)\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right). \tag{2.11}$$

Часова похідна у правій частині цього рівняння може бути виражена через проекційний оператор Кавасакі-Гантона $\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)$ [11]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = -\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)\mathrm{i}L_N\varrho\left(x^N;t\right). \tag{2.12}$$

У нашому випадку проекційний оператор $\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)$ діє на будь-яку фазову функцію ϱ' за правилом

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)\varrho' = \varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \varrho' + \\
\int \mathrm{d}x\ \frac{\partial\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)}{\partial\langle\hat n_1(x)\rangle_t}\left[\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \hat n_1(x)\varrho' - \langle\hat n_1(x)\rangle_t\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \varrho'\right] + \\
\int \mathrm{d}a\ \frac{\partial\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)}{\partial(f/W)}\frac{1}{W(a;t)}\left[\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \hat f(a)\varrho' - f(a;t)\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \varrho'\right] + \\
\int \mathrm{d}a\ \int \mathrm{d}x\ \frac{\partial\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)}{\partial(f/W)}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\frac{\partial\ln W(a;t)}{\partial\langle\hat n_1(x)\rangle_t}\times \\
\left[\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \hat n_1(x)\varrho' - \langle\hat n_1(x)\rangle_t\int \mathrm{d}\varGamma_N\ \varrho'\right].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Враховуючи співвідношення (2.13) перепишемо рівняння (2.11) у формі

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)\Big)\mathrm{i}L_N + \varepsilon\right)\Delta\varrho\left(x^N;t\right) = \\
-\Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t)\Big)\mathrm{i}L_N\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right).
\end{aligned}$$

Його формальний розв'язок є

$$\Delta\varrho\left(x^N;t\right) = -\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t;t')\Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t')\Big)\mathrm{i}L_N\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t'\right), \tag{2.14}$$

де

$$T_q(t;t') = \exp_+\left\{-\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t'\ \Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t')\Big)\mathrm{i}L_N\right\}$$

є узагальненим оператором часової еволюції з врахуванням проектування. З (2.14) знайдемо нерівноважну функцію розподілу

$$\begin{aligned}
\varrho\left(x^N;t\right) = \varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) - \\
\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t;t')\Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t')\Big)\mathrm{i}L_N\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t'\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Розглянемо дію оператора Ліувіля $\mathrm{i}L_N$ на квазірівноважну функцію розподілу (2.15). Матимемо

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}L_N\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \\
-\int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\dot{\hat n}_1(x)\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) + \left[\mathrm{i}L_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\bigg|_{a=\hat a}\right]\varrho_{\mathrm{q}}^{kin}\left(x^N;t\right),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

де $\dot{\hat n}_1(x) = \mathrm{i}L_N\hat n_1(x)$ (також $\dot{\hat{\boldsymbol J}}_{\boldsymbol k} = \mathrm{i}L_N\hat{\boldsymbol J}_{\boldsymbol k}$, $\dot{\hat{\mathcal E}}_{\boldsymbol k} = \mathrm{i}L_N\hat{\mathcal E}_{\boldsymbol k}$). Використовуючи після цього співвідношення

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}L_N\hat f(a) = \mathrm{i}L_N\hat f(n_{\boldsymbol k},\boldsymbol J_{\boldsymbol k},\mathcal E_{\boldsymbol k}) = \\
-\sum_{\boldsymbol k}\left(\frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol k}}\hat f(a)\dot{\hat n}_{\boldsymbol k} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol J_{\boldsymbol k}}\hat f(a)\dot{\hat{\boldsymbol J}}_{\boldsymbol k} + \frac{\partial}{\partial\mathcal E_{\boldsymbol k}}\hat f(a)\dot{\hat{\mathcal E}}_{\boldsymbol k}\right),
\end{aligned}$$

останній вираз в (2.16) може бути представлений у такій формі

$$\begin{aligned}
\left[\mathrm{i}L_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\bigg|_{a=\hat a}\right]\varrho_{\mathrm{q}}^{kin}\left(x^N;t\right) = \\
\int \mathrm{d}a\ \sum_{\boldsymbol k}\left\{\dot{\hat n}_{\boldsymbol k}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol k}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right] + \dot{\hat{\boldsymbol J}}_{\boldsymbol k}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol J_{\boldsymbol k}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right] + \right. \\
\left.\dot{\hat{\mathcal E}}_{\boldsymbol k}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial\mathcal E_{\boldsymbol k}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right\}\varrho_L\left(x^N,a;t\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Тут введено нову квазірівноважну функцію розподілу $\varrho_L\left(x^N;t\right)$ з мікроскопічним розподілом крупномасштабних колективних змінних:

$$\varrho_L\left(x^N,a;t\right) = \varrho_{\mathrm{q}}^{kin}\left(x^N;t\right)\frac{\hat f(a)}{W(a;t)}. \tag{2.18}$$

Ця квазірівноважна функція розподілу пов'язана з $\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right)$ (2.10) співвідношенням

$$\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \int \mathrm{d}a\ f(a;t)\varrho_L\left(x^N,a;t\right), \tag{2.19}$$

і є, очевидно, нормованою:

$$\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \varrho_L\left(x^N;t\right) = 1.$$

Використовуючи співвідношення (2.19) зручно представити середні по квазірівноважному розподілу у формі

$$\langle\ldots\rangle^t_{\mathrm{q}} = \int \mathrm{d}a\ \langle\ldots\rangle^t_L f(a;t), \qquad \langle\ldots\rangle^t_L = \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \ldots\varrho_L\left(x^N;t\right).$$

Тепер у відповідності до (2.17) та (2.19) дію оператора Ліувіля на $\varrho_{\mathrm{q}}(x^N;t)$ можна представити як

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}L_N\varrho_{\mathrm{q}}\left(x^N;t\right) = \qquad (2.20)\\
&-\int \mathrm{d}a\int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\dot{\hat{n}}_1(x)\varrho_L\left(x^N,a;t\right)f(a;t) +\\
&\int \mathrm{d}a\sum_{\boldsymbol{k}}\left\{\dot{\hat{n}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right] + \dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right] +\right.\\
&\left.\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t)\left[\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\right]\right\}\varrho_L\left(x^N;t\right).
\end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз в (2.14) для нерівноважної функції розподілу можна отримати такий результат:

$$\begin{aligned}
&\varrho\left(x^N;t\right) = \int \mathrm{d}a\ f(a;t)\varrho_L\left(x^N,a;t\right) + \qquad (2.21)\\
&\int \mathrm{d}a\int \mathrm{d}x\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t,t')\Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t')\Big)\times\\
&\dot{\hat{n}}_1(x)\varrho_L\left(x^N,a;t'\right)f(a;t')\gamma(x;t') -\\
&\int \mathrm{d}a\sum_{\boldsymbol{k}}\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T_q(t,t')\Big(1-\mathscr{P}_{\mathrm{q}}(t')\Big)\times\\
&\left\{\dot{\hat{n}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right] + \dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right] +\right.\\
&\left.\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\boldsymbol{k}}W(a;t')\left[\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\right]\right\}\varrho_L\left(x^N,a;t'\right).
\end{aligned}$$

Ця формула дає нерівноважну функцію розподілу, що описує узгоджено як кінетичні, так і нелінійні гідродинамічні флуктуації класичних рідин. При нехтуванні гідродинамічними флуктуаціями можна повернутись до традиційної схеми прийнятої в кінетичній теорії. Відповідний квазірівноважний розподіл $\varrho^k_q(x^N;t)$ отримується з (2.19) якщо здійснити підстановку $f(a;t)\sim\delta(a-\overline{a})$, де $\overline{a} = \mathrm{e}a = \{\overline{a}_{\boldsymbol{k}}\}$ є набором середніх значень гідродинамічних величин. Тоді нерівноважний розподіл (2.21) набирає виду

$$\begin{aligned}
&\varrho^k\left(x^N;t\right) = \varrho^k_q\left(x^N;t\right) +\\
&\int \mathrm{d}x\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T^k_q(t,t')\Big(1-\mathscr{P}^k_q(t')\Big)\dot{\hat{n}}_1(x)\varrho^k_q\left(x^N;t'\right)\gamma(x;t'),\\
&\varrho^k_q\left(x^N;t\right) = \exp\left\{-\varPhi^k(t) - \int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\right\}, \qquad (2.22)\\
&\varPhi^k(t) = \ln\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \exp\left\{-\int \mathrm{d}x\ \gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\right\}.
\end{aligned}$$

$T^k_q(t,t')$ має таку ж структуру, що і $T_q(t,t')$ з заміною $\mathscr{P}_q(t)$ на $\mathscr{P}^k_q(t)$. І також $\mathscr{P}^k_q(t)$ має структуру подібну до (2.13), але з заміною $\varrho_q\left(x^N;t\right)$ на $\varrho^k_q\left(x^N;t\right)$. Обчислюючи далі множник Лагранжа в (2.22) $\gamma(x;t)$ з умови масоузгодження $\langle\hat{n}_1(x)\rangle^t = \langle\hat{n}_1(x)\rangle^t_q$ отримаємо

$$\varrho^k_q\left(x^N;t\right) = \prod_{j=1}^{N}\frac{f_1(x_j;t)}{\mathrm{e}}, \qquad (2.23)$$

де $f_1(x_j;t)$ є нерівноважною одночастинковою функцією розподілу. Можна показати [14,15], що рівняння Ліувіля з джерелом вираженим через квазірівноважний розподіл (2.23) веде до добре відомого ланцюжка рівнянь ББГКІ для звідних s-частинкових функцій розподілу з умовою Боголюбова повного загасання початкових кореляцій.

Результат (2.21) може бути застосований для отримання набору рівнянь для одночастинкової функції розподілу $f_1(x;t)$ та функції розподілу гідродинамічних змінних $f(a;t)$. Розпочнемо це з очевидних рівностей

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}f_1(x;t) &= \langle\dot{\hat{n}}(x)\rangle^t = \langle\dot{\hat{n}}(x)\rangle^t_q + \langle I_n(x;t)\rangle^t,\\
\frac{\partial}{\partial t}f(a;t) &= \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \varrho\langle x^N;t\rangle\mathrm{i}L\hat{f}(a),
\end{aligned}$$

де $I_n(x;t)$ є узагальненим потоком густини (див. далі). Тоді підстановка явного виразу (2.23) в ці співвідношення після простих, проте дещо тривалих перетворень дасть

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right] f_1(x;t) - \int \mathrm{d}x' \ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Phi\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}'}\right] f_2(x,x';t) =$$

$$\int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}a \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\phi_{nn}(x,x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t') -$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \int \mathrm{d}a \int \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \left\{\phi_{n\boldsymbol{J}}(x,\boldsymbol{k},a;t,t')W(a;t')\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}} + \right.$$

$$\left. \phi_{n\mathcal{E}}(x,\boldsymbol{k},a;t,t')W(a;t')\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}}\right\} \frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a;t) + \sum_{\boldsymbol{k}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_{\boldsymbol{k}}} v_n(a;t)f(a;t) + \right. \tag{2.25}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t)f(a;t) + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}} v_{\mathcal{E}}(a;t)f(a;t)\right\} =$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}} \int \mathrm{d}a' \int \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \phi_{\boldsymbol{J}n}(\boldsymbol{k},x',a,a';t,t')f(a';t')\gamma(x';t') -$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}} \int \mathrm{d}a' \int \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \phi_{\mathcal{E}n}(\boldsymbol{k},x',a,a';t,t')f(a';t')\gamma(x';t') +$$

$$\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}} \int \mathrm{d}a' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}} \phi_{\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t')W(a';t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{q}}}\left[\frac{f(a';t'}{W(a';t')}\right] +$$

$$\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}} \int \mathrm{d}a' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \ \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}} \phi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t')W(a';t) \ \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{q}}}\left[\frac{f(a';t'}{W(a';t')}\right] +$$

$$\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}} \int \mathrm{d}a' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t' \ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}} \phi_{\boldsymbol{J}\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t')W(a';t)\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{q}}} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}} \phi_{\mathcal{E}\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t')W(a';t)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{q}}}\right\}\left[\frac{f(a';t'}{W(a';t')}\right].$$

При цьому введено двочастинкову функцію розподілу $f_2(x_1,x_2;t)$ в квазірівноважному стані

$$f_2(x_1,x_2;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_{N-2} \ \varrho_q\left(x^N;t\right).$$

Вклад мікроскопічної динаміки описується ядрами переносу $\phi_{\alpha\beta}$, що виражаються через кореляційні функції узагальнених потоків I_α, I_β:

$$\begin{aligned}
\phi_{nn}(x,x',a;t,t') &= \langle I_n(x;t)T_q(t,t')I_n(x';t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{n\boldsymbol{J}}(x,\boldsymbol{k},a;t,t') &= \langle I_n(x;t)T_q(t,t')I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{n\mathcal{E}}(x,\boldsymbol{k},a;t,t') &= \langle I_n(x;t)T_q(t,t')I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\boldsymbol{J}n}(\boldsymbol{k},x,a;t,t') &= \langle I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_n(x;t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\mathcal{E}n}(\boldsymbol{k},x,a;t,t') &= \langle I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_n(x;t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t') &= \langle I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q};t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\boldsymbol{J}\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t') &= \langle I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q};t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\mathcal{E}\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t') &= \langle I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q};t')\rangle_L^{t'}, \\
\phi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q},a,a';t,t') &= \langle I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t)T_q(t,t')I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q};t')\rangle_L^{t'},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
I_n(x;t) &= \Big(1-\mathscr{P}(t)\Big)\dot{\hat{n}}_1(x), \\
I_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t) &= \Big(1-\mathscr{P}(t)\Big)\dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{k}}, \\
I_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t) &= \Big(1-\mathscr{P}(t)\Big)\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\boldsymbol{k}}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Проекційний оператор Морі $\mathscr{P}(t)$, що зустрічається у виразах для потоків, пов'язаний з проекційним оператором Кавасакі-Гантона (2.13)через співвідношення

$$\mathscr{P}_q(t)a(x)\varrho_q\left(x^N;t\right) = \varrho_q\left(x^N;t\right)\mathscr{P}(t)a(x).$$

Слід наголосити, що в формулі (2.26) середні обчислюються з функцією розподілу $\varrho_L\left(x^N,a;t\right)$ (2.18), таким чином ядра переносу є деякими функціями колективних змінних $a_{\boldsymbol{k}}$. В рівнянні (2.25) функції $v_n(a;t)$, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t)$, $v_{\mathcal{E}}(a;t)$ представляють потоки в просторі колективних змінних і визначаються таким чином:

$$v_n(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N \ \dot{\hat{n}}_{\boldsymbol{k}} \ \varrho_L\left(x^N,a;t\right) = \langle \dot{\hat{n}}_{\boldsymbol{k}}(a)\rangle_L^t,$$

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N \; \dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{k}} \; \varrho_L\left(x^N, a; t\right) = \langle \dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{\boldsymbol{k}}(a) \rangle_L^t, \tag{2.28}$$
$$v_{\mathcal{E}}(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N \; \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\boldsymbol{k}} \; \varrho_L\left(x^N, a; t\right) = \langle \dot{\hat{\mathcal{E}}}_{\boldsymbol{k}}(a) \rangle_L^t.$$

Підведемо підсумки цього підрозділу. Набір рівнянь (2.24) та (2.25) дає узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів класичних рідин при наявності довготривалих флуктуацій. Ядра переносу ϕ_{nn} описують дисипацію кінетичних флуктуацій, тоді як ядра $\phi_{n\boldsymbol{J}}$, $\phi_{\boldsymbol{J}n}$, $\phi_{n\mathcal{E}}$ та $\phi_{\mathcal{E}n}$ описують дисипацію кореляцій між кінетичною та гідродинамічною степенями вільності. І, накінець, ядра переносу $\phi_{\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}}$, $\phi_{\boldsymbol{J}\mathcal{E}}$, $\phi_{\mathcal{E}\boldsymbol{J}}$, та $\phi_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ відповідають дисипативним процесам пов'язаним з кореляціями між в'язкими та тепловими гідродинамічними модами. Зв'язаний набір рівнянь кінетики та гідродинаміки забезпечує основу для обчислення низькочастотних аномалій в нейтральних класичних рідинах та деяких інших системах, скажімо, в густій плазмі. Хоча ці рівняння також можна застосовувати для дослідження вкладу крупномасштабних флуктуацій в кінетичних процесах в околі точки фазового переходу.

3. Обчислення структурної функції $W(a;t)$ та гідродинамічних швидкостей $v_i(a;t)$

При аналізі рівнянь переносу (2.24), (2.25) та ядер переносу (2.26) важливою задачею є обчислення структурної функції колективних змінних $W(a;t)$ та гідродинамічних швидкостей $v_n(a;t)$, а також $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t)$, $v_{\mathcal{E}}(a;t)$. В теорії нелінійних флуктуацій Кавасакі [16] структурна функція $W(a;t)$ апроксимується гаусівською залежністю від колективних змінних. У тому випадку, як можна показати, гідродинамічні швидкості $v_i(a;t)$ $(i = n, \boldsymbol{J}, \mathcal{E})$ є лінійними функціями a. Інший шлях для отримання гідродинамічних величин $v_i(a;t)$ на основі локальної термодинаміки був запропонований в [17]. Ці співвідношення справедливі, очевидно, при низьких частотах та для малих значень хвильового вектора, коли справедливі співвідношення локальної термодинаміки. Структурна функція $W(a;t)$ та гідродинамічні швидкості $v_i(a;t)$ у випадку дослідження нелінійних гідродинамічних флуктуацій обчислювались в роботах [13,18] з використанням методу колективних змінних [19]. Основна ідея цього підходу полягає в тому, що структурна функція $W(a;t)$ та гідродинамічні швидкості $v_i(a;t)$ можуть бути розраховані у наближеннях вищих, ніж гаусових. Далі ми застосуємо метод колективних змінних [13,18,19] для обчислення структурної функції $W(a;t)$ (2.9) та гідродинамічних швидкостей $v_n(a;t)$, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t)$, $v_{\mathcal{E}}(a;t)$ (2.28).

Спочатку розрахуємо структурну функцію $W(a;t)$ для колективних змінних. Для цього застосуємо інтегральне представлення δ-функції

$$\hat{f}(a) = \int \mathrm{d}\omega \; \exp\Big\{ -\mathrm{i}\pi\omega_{l\boldsymbol{k}}(\hat{a}_{l\boldsymbol{k}} - a_{l\boldsymbol{k}})\Big\}, \quad l = n, \boldsymbol{J}, \mathcal{E}.$$

Далі, використовуючи кумулянтний розклад [13,18,19] в $W(a;t)$, отримаємо

$$W(a;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N \; \varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right) \hat{f}(a) = \tag{3.1}$$
$$\int \mathrm{d}\omega \exp\left\{ \mathrm{i}\pi \sum_{l,\boldsymbol{k}} \omega_{l\boldsymbol{k}}\bar{a}_{l\boldsymbol{k}} - \frac{\pi^2}{2} \sum_{l_1,l_2} \sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} \mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)\omega_{l_1\boldsymbol{k}_1}\omega_{l_2\boldsymbol{k}_2} \right\}$$
$$\times \exp\left\{ \sum_{n\geqslant 3} D_n(\omega;t) \right\},$$

де

$$\bar{a}_{l\boldsymbol{k}} = a_{l\boldsymbol{k}} - \langle \hat{a}_{l\boldsymbol{k}} \rangle_{kin},$$

$$d\omega = \prod_{l\boldsymbol{k}} d\omega_{l\boldsymbol{k}}^c \, d\omega_{l\boldsymbol{k}}^s, \quad \omega_{l\boldsymbol{k}} = \omega_{l\boldsymbol{k}}^c - i\omega_{l\boldsymbol{k}}^s, \quad \omega_{l,-\boldsymbol{k}} = \omega_{l\boldsymbol{k}}^*,$$

$$\mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n;t) = \langle \hat{a}_{l_1\boldsymbol{k}_1} \cdots \hat{a}_{l_n\boldsymbol{k}_n} \rangle_{kin}^c,$$

$$D_n(\omega;t) = \frac{(-\mathrm{i}\pi)^n}{n!} \sum_{l_1,\ldots,l_n} \sum_{\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n} \mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n;t)\omega_{l_1\boldsymbol{k}_1,\ldots,l_n\boldsymbol{k}_n},$$

$$\omega_{l_1\boldsymbol{k}_1,\ldots,l_n\boldsymbol{k}_n} = \omega_{l_1\boldsymbol{k}_1} \cdots \omega_{l_n\boldsymbol{k}_n}.$$

$\mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n;t)$ – є n-ним кумулянтом. Верхній індекс c означає кумулянтне середнє; $\langle \ldots \rangle_{kin} = \int \mathrm{d}\Gamma_n \; \ldots \varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right)$. Як можна зауважити, кумулянтне середнє обчислюється з "кінетичною" квазірівноважною функцією розподілу (2.8). Тоді структурну функцію (3.1) можна обчислити як суму гаусових моментів розподілу колективних змінних {a}, тобто представити $W(a;t)$ у формі

$$W(a;t) = \int \mathrm{d}\omega \; \exp\left\{ \mathrm{i}\pi \sum_{l\boldsymbol{k}} \omega_{l\boldsymbol{k}}\bar{a}_{l\boldsymbol{k}} - \right. \tag{3.2}$$

$$\frac{\pi^2}{2!}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}\mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)\omega_{l_1\boldsymbol{k}_1}\omega_{l_2\boldsymbol{k}_2}\Bigg\}\times$$
$$\left\{1+B+\frac{1}{2!}B^2+\frac{1}{3!}B^3+\ldots+\frac{1}{n!}B^n+\ldots\right\},$$

де $B=\sum\limits_{n\geqslant 3}D_n(\omega;t)$. Якщо в розкладі в ряд експоненти (3.2), тобто $\exp\left\{\sum\limits_{n\geqslant 3}D_n(\omega;t)\right\}$, зберегти лише перший член рівний одиниці, то можна отримати гаусове наближення:

$$W^G(a;t)=\int(\mathrm{d}\omega)\exp\Bigg\{\mathrm{i}\pi\sum_{l,\boldsymbol{k}}\omega_{l\boldsymbol{k}}\bar{a}_{l\boldsymbol{k}}- \tag{3.3}$$
$$\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{3}\sum_{\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)\omega_{l_1\boldsymbol{k}_1}\omega_{l_2\boldsymbol{k}_2}\Bigg\}.$$

де $\mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)$ – елемент матриці кореляційних функцій:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)=\begin{bmatrix}\langle\hat{n}\hat{n}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{n}\hat{\boldsymbol{J}}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{n}\hat{\mathcal{E}}\rangle^c_{kin}\\ \langle\hat{\boldsymbol{J}}\hat{n}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{J}}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\mathcal{E}}\rangle^c_{kin}\\ \langle\hat{\mathcal{E}}\hat{n}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{\mathcal{E}}\hat{\boldsymbol{J}}\rangle^c_{kin} & \langle\hat{\mathcal{E}}\hat{\mathcal{E}}\rangle^c_{kin}\end{bmatrix}_{(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)}, \tag{3.4}$$

причому, наприклад, кумулянтне середнє $\langle\hat{n}\hat{n}\rangle^c_{kin}$ рівне

$$\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}=\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}-\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}\langle\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}.$$

Для проведення інтегрування за $(\mathrm{d}\omega)$ у (3.3) необхідно привести вираз у експоненті до квадратичної діагональної форми за $\omega_{l\boldsymbol{k}}$. У зв'язку з цим треба знайти власні значення матриці (3.4) $\tilde{\mathfrak{M}}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)$, розв'язавши рівняння

$$\det\left|\tilde{\mathfrak{M}}_2(\boldsymbol{k};t)-\tilde{E}(\boldsymbol{k};t)\right|=0,$$

де $\tilde{E}(\boldsymbol{k};t)$ – діагональна матриця. Згідно з структурою матриці $\tilde{\mathfrak{M}}_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2;t)$ (3.4) елементи діагональної матриці $\tilde{E}(\boldsymbol{k};t)$ знаходяться як коренікубічного рівняння

$$E^3(\boldsymbol{k})-A(\boldsymbol{k};t)E^2(\boldsymbol{k})+B(\boldsymbol{k};t)E(\boldsymbol{k})-C(\boldsymbol{k};t)=0,$$

де вирази для коефіцієнтів $A(\boldsymbol{k};t)$, $B(\boldsymbol{k};t)$ та $C(\boldsymbol{k};t)$ приведені в додатку А.

Далі, визначивши власні значення $E_1(\boldsymbol{k};t)$, $E_2(\boldsymbol{k};t)$ та $E_3(\boldsymbol{k};t)$, вираз (3.3) представимо у наступному вигляді:

$$W^G(a;t)=\int(\mathrm{d}\tilde{\omega})\,\det\tilde{W}\exp\Bigg\{\mathrm{i}\pi\sum_{n,\boldsymbol{k}}\tilde{a}_{n\boldsymbol{k}}\tilde{\omega}_{n\boldsymbol{k}}- \tag{3.5}$$
$$\frac{\pi^2}{2}\sum_{n}\sum_{\boldsymbol{k}}E_n(\boldsymbol{k};t)\tilde{\omega}_{n\boldsymbol{k}}\tilde{\omega}_{n,-\boldsymbol{k}}\Bigg\},$$

де нові змінні $\tilde{a}_{n\boldsymbol{k}}$, $\tilde{\omega}_{n\boldsymbol{k}}$ зв'язані зі старими змінними співвідношеннями

$$\tilde{a}_{n\boldsymbol{k}}=\sum_{l}\bar{a}_{l\boldsymbol{k}}\omega_{ln},\quad \omega_{l\boldsymbol{k}}=\sum_{m=1}^{3}\omega_{lm}\tilde{\omega}_{m\boldsymbol{k}},$$

ω_{lm} – елементи матриці $\tilde{W}(\boldsymbol{k};t)=\begin{bmatrix}\omega_{11}&\omega_{12}&\omega_{13}\\ \omega_{21}&\omega_{22}&\omega_{23}\\ \omega_{31}&\omega_{32}&\omega_{33}\end{bmatrix}_{(\boldsymbol{k};t)}$, вирази для яких представлені в додатку В.

Підінтегральний вираз у (3.5) є квадратичною функцією $\tilde{\omega}_{n\boldsymbol{k}}$, тому виконуючи інтегрування за $(\mathrm{d}\tilde{\omega}_{n\boldsymbol{k}})$ для структурної функції в гаусовому наближенні $W^G(a;t)$ отримаємо:

$$W^G(a;t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n,\boldsymbol{k}}E_n^{-1}(\boldsymbol{k};t)\tilde{a}_{n\boldsymbol{k}}\tilde{a}_{n,-\boldsymbol{k}}\right\}\times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\pi\det\tilde{E}(\boldsymbol{k};t)\right\}\exp\left\{\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\det\tilde{W}(\boldsymbol{k};t)\right\},$$

або через змінні $\bar{a}_{l\boldsymbol{k}}$:

$$W^G(a;t)=\varOmega(t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{l,\boldsymbol{k}}\bar{E}_l(\boldsymbol{k};t)\bar{a}_{l\boldsymbol{k}}\bar{a}_{l,-\boldsymbol{k}}\right\},$$

де

$$\bar{E}_l(\boldsymbol{k};t)=\sum_{n}\omega_{ln}E_n^{-1}(\boldsymbol{k};t)\omega_{nl},$$

$$\varOmega(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\pi\det\tilde{E}(\boldsymbol{k};t)+\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\det\tilde{W}(\boldsymbol{k};t)\right\}.$$

Структурна функція $W^G(a;t)$ в гаусовому наближенні дає можливість розрахувати (3.2) у вищих наближеннях за гаусовими моментами [18]:

$$W(a;t) = W^G(a;t)\exp\left\{\sum_{n\geqslant 3}\langle\tilde{D}_n(a;t)\rangle_G\right\},$$

де $\langle\tilde{D}_n(a;t)\rangle_G$ наближено представимо так:

$$\langle\tilde{D}_3(a;t)\rangle_G = \langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G,$$

$$\langle\tilde{D}_4(a;t)\rangle_G = \langle\bar{D}_4(a;t)\rangle_G,$$

$$\langle\tilde{D}_6(a;t)\rangle_G = \langle\bar{D}_6(a;t)\rangle_G - \frac{1}{2}\langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G^2,$$

$$\langle\tilde{D}_8(a;t)\rangle_G = \langle\bar{D}_8(a;t)\rangle_G - \langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G\langle\bar{D}_5(a;t)\rangle_G - \frac{1}{2}\langle\bar{D}_4(a;t)\rangle_G^2,$$

$$\langle\bar{D}_n(a;t)\rangle_G = \frac{1}{W^G(a;t)}\sum_{l_1,\dots,l_n}\sum_{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n}\bar{\mathfrak{M}}_n^{l_1,\dots,l_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n;t)\times$$
$$\frac{1}{(\mathrm{i}\pi)^n}\frac{\delta^n}{\delta\bar{a}_{l_1\boldsymbol{k}_1}\dots\delta\bar{a}_{l_n\boldsymbol{k}_n}}W^G(\bar{a};t).$$

$\bar{\mathfrak{M}}_n^{l_1,\dots,l_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n;t)$ – перенормовані n-ті кумулянти змінних $\hat{a}_{l\boldsymbol{k}}$ вищих порядків. Оскільки всі непарні моменти рівні нулю, у виразі (3.5) залишаються лише парні степені за $\{a\}$.

Метод розрахунку структурної функції $W(a;t)$ може бути застосований для наближеного розрахунку гідродинамічних швидкостей $v_n(a;t)$, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{J}}(a;t)$ та $v_{\mathcal{E}}(a;t)$. Відповідно до означення гідродинамічних швидкостей (2.28) представимо загальну формулу у вигляді

$$v_{l\boldsymbol{k}}(a;t) = \frac{1}{W(a;t)}\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \dot{\hat{a}}_{l\boldsymbol{k}}\varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right)\hat{f}(a).$$

Далі введемо функцію $W(a,\lambda;t)$

$$W(a,\lambda;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \exp\left\{-\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\lambda_{m\boldsymbol{k}}\dot{\hat{a}}_{m\boldsymbol{k}}\right\}\varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right)\hat{f}(a)$$

так, щоб

$$v_{l\boldsymbol{k}}(a;t) = \left.\frac{\partial}{\partial\left(-\mathrm{i}\pi\lambda_{m\boldsymbol{k}}\right)}\ln W(a,\lambda;t)\right|_{\lambda_{m\boldsymbol{k}}=0}. \tag{3.6}$$

Проведемо розрахунок функції $W(a,\lambda;t)$ використовуючи попередні результати розрахунку структурної функції $W(a;t)$. Запишемо $W(a,\lambda;t)$ у вигляді

$$W(a,\lambda;t) = \int \mathrm{d}\Gamma_N\int(\mathrm{d}\omega)\ \exp\left\{-\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\lambda_{m\boldsymbol{k}}\dot{\hat{a}}_{m\boldsymbol{k}}\right\}\times \tag{3.7}$$
$$\exp\left\{-\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\omega_{m\boldsymbol{k}}\left(\hat{a}_{m\boldsymbol{k}}-a_{m\boldsymbol{k}}\right)\right\}\varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right),$$

Далі виконаємо в (3.7) засереднення з $\varrho_q^{kin}\left(x^N;t\right)$, використовуючи кумулянтний розклад:

$$W(a,\lambda;t) =$$
$$\int(\mathrm{d}\omega)\exp\left\{\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\omega_{m\boldsymbol{k}}a_{m\boldsymbol{k}}+\sum_{n\geqslant 1}\left[D_n(\omega)+D_n(\lambda)+\sum_{\substack{l=1\\ n\geqslant 2}}D_n(\omega,\lambda^l)\right]\right\},$$

де

$$D_n(\omega) = \frac{(-\mathrm{i}\pi)^n}{n!}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n\\ m_1,\dots,m_n}}\mathfrak{M}_n^{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n)\omega_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\omega_{m_n\boldsymbol{k}_n},$$

$$D_n(\lambda) = \frac{(-\mathrm{i}\pi)^n}{n!}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n\\ m_1,\dots,m_n}}\mathfrak{M}_n^{(1)\,m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n)\lambda_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\lambda_{m_n\boldsymbol{k}_n},$$

$$D_n(\omega,\lambda^l) = \frac{(-\mathrm{i}\pi)^n}{n!}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n\\ m_1,\dots,m_n}}\mathfrak{M}_n^{(2)\,m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n)\times$$
$$\omega_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\omega_{m_{n-l}\boldsymbol{k}_{n-l}}\dots\lambda_{m_{n-l+1}\boldsymbol{k}_{n-l+1}}\dots\lambda_{m_n\boldsymbol{k}_n},$$

в яких відповідні кумулянти мають таку структуру:

$$\mathfrak{M}_n^{m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n) = \langle\hat{a}_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\hat{a}_{m_n\boldsymbol{k}_n}\rangle_{kin}^c,$$

$$\mathfrak{M}_n^{(1)\,m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n) = \langle\dot{\hat{a}}_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\dot{\hat{a}}_{m_n\boldsymbol{k}_n}\rangle_{kin}^c,$$

$$\mathfrak{M}_n^{(2)\,m_1,\dots,m_n}(\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_n) = n[(n-l)+(l-n+1)\delta_{m_1,\dots,m_{n-l}}]\times$$
$$\langle\hat{a}_{m_1\boldsymbol{k}_1}\dots\hat{a}_{m_{n-l}\boldsymbol{k}_{n-l}}\dot{\hat{a}}_{m_{n-l+1}\boldsymbol{k}_{n-l+1}}\dots\dot{\hat{a}}_{m_n\boldsymbol{k}_n}\rangle_{kin}^c.$$

Розглянемо спочатку гаусове наближення для $W(a,\lambda;t)$, тобто в експоненті підінтегрального виразу залишимо лише доданки з $n=2$ і лінійні по $\lambda_{m\boldsymbol{k}}$:

$$W^G(a,\lambda;t)=\int(\mathrm{d}\omega)\ \exp\Bigg\{\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\omega_{m\boldsymbol{k}}\bar a_{m\boldsymbol{k}}-\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\langle\dot{\hat a}_{m\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}\lambda_{m\boldsymbol{k}}+$$
$$\frac{(-\mathrm{i}\pi)^2}{2!}\sum_{m_1,m_2,\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}_2^{m_1,m_2}(\boldsymbol{k};t)\omega_{m_1\boldsymbol{k}}\omega_{m_2,-\boldsymbol{k}}+$$
$$\frac{(-\mathrm{i}\pi)^2}{2!}\sum_{m_1,m_2,\boldsymbol{k}}\mathfrak{M}_2^{(2)\,m_1,m_2}(\boldsymbol{k};t)\omega_{m_1\boldsymbol{k}}\lambda_{m_2,-\boldsymbol{k}}\Bigg\}.$$

Приводячи цей вираз в експоненті за змінними $\omega_{m\boldsymbol{k}}$ до діагональної квадратичної форми, подібно як для $W^G(a)$, після інтегрування за новими змінними $\tilde\omega_{m\boldsymbol{k}}$ отримаємо:

$$W^G(a,\lambda;t)=\exp\Bigg\{-\mathrm{i}\pi\sum_{m,\boldsymbol{k}}\langle\dot{\hat a}_{m\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}\lambda_{m\boldsymbol{k}}-\frac{\pi^2}{2}\sum_{m,\boldsymbol{k}}E_m^{-1}(\boldsymbol{k};t)b_{m\boldsymbol{k}}b_{m,-\boldsymbol{k}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\pi\det\tilde E(\boldsymbol{k};t)+\sum_{\boldsymbol{k}}\ln\det\tilde W(\boldsymbol{k};t)\Bigg\},$$

де

$$b_{m\boldsymbol{k}}=\sum_l\omega_{ml}\tilde a_{l\boldsymbol{k}}=\sum_l\omega_{ml}\left[\bar a_{l\boldsymbol{k}}+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\sum_{l'}\mathfrak{M}_2^{(2)\,l,l'}(\boldsymbol{k};t)\lambda_{l'\boldsymbol{k}}\right]$$

і ω_{ml}, $\mathfrak{M}_2^{(2)\,l,l'}(\boldsymbol{k};t)$ та $E_m(\boldsymbol{k};t)$ не залежать від $\lambda_{m\boldsymbol{k}}$. Тут кумулянти $\mathfrak{M}_2^{(2)\,l,l'}(\boldsymbol{k};t)$ мають таку структуру:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_2^{(2)\,l,l'}(\boldsymbol{k};t)&=\langle\dot{\hat a}_{l\boldsymbol{k}}\hat a_{l',-\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}-\langle\dot{\hat a}_{l\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}\langle\hat a_{l',-\boldsymbol{k}}\rangle_{kin},\\ \dot{\hat a}_{l\boldsymbol{k}}&=\mathrm{i}L_N\hat a_{l\boldsymbol{k}}.\end{aligned}$$

Тепер розрахуємо гідродинамічні швидкості $v_{l\boldsymbol{k}}(a;t)$ за формулою (3.6) у гаусовому наближенні:

$$\begin{aligned}v_{l\boldsymbol{k}}(a;t)&=\frac{\partial}{\partial\,(-\mathrm{i}\pi\lambda_{l\boldsymbol{k}})}\ln W^G(a,\lambda;t)\Big|_{(-\mathrm{i}\pi\lambda_{l\boldsymbol{k}}=0)}\\ &=\langle\dot{\hat a}_{l\boldsymbol{k}}\rangle_{kin}-\frac{1}{2}\sum_{m,m'}E_l^{-1}(\boldsymbol{k};t)\omega_{ml}\omega_{m'l}\mathfrak{M}_2^{(2)\,m',l}(\boldsymbol{k};t)\bar a_{l\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

і в явному вигляді

$$\begin{aligned}v_{n\boldsymbol{k}}(a)&=\langle\dot{\hat n}\rangle_{kin}+E_1^{-1}(\boldsymbol{k};t)\left(\omega_{11}\bar n_{\boldsymbol{k}}+\omega_{21}\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}+\omega_{31}\bar{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\right)\varOmega_n(\boldsymbol{k};t),\\ v_{\boldsymbol{J}\boldsymbol{k}}(a)&=\langle\dot{\hat{\boldsymbol{J}}}\rangle_{kin}+E_2^{-1}(\boldsymbol{k};t)\left(\omega_{12}\bar n_{\boldsymbol{k}}+\omega_{22}\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}+\omega_{32}\bar{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\right)\varOmega_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t),\\ v_{\mathcal{E}\boldsymbol{k}}(a)&=\langle\dot{\hat{\mathcal{E}}}\rangle_{kin}+E_3^{-1}(\boldsymbol{k};t)\left(\omega_{13}\bar n_{\boldsymbol{k}}+\omega_{23}\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}+\omega_{33}\bar{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\right)\varOmega_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t),\end{aligned}\tag{3.8}$$

де

$$\begin{aligned}\varOmega_n(\boldsymbol{k};t)&=\omega_{11}\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{21}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{31}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin},\\ \varOmega_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k};t)&=\omega_{12}\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{22}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{32}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\boldsymbol{J}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin},\\ \varOmega_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k};t)&=\omega_{13}\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{23}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\omega_{33}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\dot{\hat{\mathcal{E}}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin},\end{aligned}\tag{3.9}$$

ω_{lj} – елементи матриці $\tilde W(\boldsymbol{k};t)$. Як бачимо, гідродинамічні швидкості (3.7) в гаусовому наближенні для $W(a,\lambda;t)$ є лінійними функціями колективних змінних $n_{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{k}}$ та $\mathcal{E}_{\boldsymbol{k}}$. Важливо відзначити, що якщо не враховувати кінетичні процеси, то тоді $\varrho_q^{kin}=1$ і $\langle\ldots\rangle_{kin}\to\langle\ldots\rangle_0$ – є засередненням з мікроканонічним ансамблем в $W(a)$ (2.9); в цьому випадку вирази (3.7) для гідродинамічних швидкостей повністю переходять в результати робіт [18,20], в яких досліджувались нелінійні гідродинамічні флуктуації простих рідин. Очевидно, метод колективних змінних, як це було показано в [13,18,20], дає можливість розрахувати гідродинамічні швидкості у вищих наближеннях, ніж гаусове.

Наступним важливим кроком є дослідження системи рівнянь переносу (2.24), (2.25) та ядер переносу (2.26) в гаусовому наближенні для $W(a;t)$ та $v_{l\boldsymbol{k}}(a;t)$. Такі задачі розглядатимуться у наступних роботах.

Додаток А. Вирази для коефіцієнтів $A(\boldsymbol{k};t)$, $B(\boldsymbol{k};t)$ та $C(\boldsymbol{k};t)$

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{k};t)&=\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\hat n_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin},\\ B(\boldsymbol{k};t)&=\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\hat n_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}+\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\right)+\\ &\quad\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}-\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat n_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}-\\ &\quad\langle\hat n_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat n_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}-\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{k};t) \quad = \quad & \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \\
& \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \\
& \langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \\
& \langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} + \\
& 2\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}.
\end{aligned}
$$

Додаток B. Елементи матриці $\tilde{W}(\boldsymbol{k};t)$

$$
\frac{\omega_{12}}{\omega_{22}} = \frac{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_2(\boldsymbol{k};t)\right) - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}}{\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_2(\boldsymbol{k};t)\right) - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}},
$$

$$
\frac{\omega_{21}}{\omega_{11}} = \frac{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_1(\boldsymbol{k};t)\right)}{\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_1(\boldsymbol{k};t)\right)},
$$

$$
\frac{\omega_{13}}{\omega_{33}} = \frac{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right)}{\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right)\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right) - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}},
$$

$$
\frac{\omega_{23}}{\omega_{33}} = \frac{\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right)\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}}{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right)\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_3(\boldsymbol{k};t)\right)},
$$

$$
\frac{\omega_{31}}{\omega_{11}} = \frac{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_1(\boldsymbol{k};t)\right)\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_1(\boldsymbol{k};t)\right)}{\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_1(\boldsymbol{k};t)\right) - \langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}},
$$

$$
\frac{\omega_{32}}{\omega_{22}} = \frac{\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_2(\boldsymbol{k};t)\right)\left(\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_2(\boldsymbol{k};t)\right) - \langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{J}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}}{\langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - \langle\hat{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{k}}\hat{\mathcal{E}}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin}\left(\langle\hat{n}_{\boldsymbol{k}}\hat{n}_{-\boldsymbol{k}}\rangle^c_{kin} - E_2(\boldsymbol{k};t)\right)}.
$$

Література

[1] Боголюбов Н.Н. О стохастических процессах в динамических системах. // ФЭЧАЯ, 1978, том 9, No 4, с. 501-579.

[2] Dorfman J.R. Advances and challenges in the kinetic theory of gases. // Physica A, 1981, vol. 106, No 1/2, p. 77-101.

[3] Климонтович Ю.Л. О необходимости и возможности единого описания кинетических и гидродинамических процессов. // ТМФ, 1992, том 92, No 2, с. 312-330.

[4] Cohen E.G.D. Fifty years of kinetic theory. // Physica A, 1993, vol. 194, p. 229-257.

[5] Résibois P, M.de Leener, Classical kinetic theory of fluids. New York, John Willey and Sons, 1977.

[6] Klimontovich Yu.L. The unified description of kinetic and hydrodynamic processes in gases and plasmas. // Phys. Lett. A, 1992, vol. 170, p. 434.

[7] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. Формулировка граничных условий к цепочке уравнений ББГКИ с учетом локальных законов сохранения. // ТМФ, 1984, том 60, No 2, с. 270-279.

[8] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. О кинетических уравнениях для плотных газов и жидкостей. // ТМФ, 1991, том 87, No 1, с. 113-129.

[9] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей. // ТМФ, 1993, том 96, No 1, с. 325-350.

[10] Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. Москва, Наука, 1971.

[11] Зубарев Д.Н. Современные методы статистической теории неравновесных процессов. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М., ВИНИТИ, 1980, том 15, с. 131-220.

[12] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. Неравновесные статистические ансамбли в кинетической теории и гидродинамике. В кн. Научные труды Математического института им. В.А.Стеклова. М., Наука, 1989, том 191, с. 140-151.

[13] Зубарев Д.Н. Статистическая термодинамика турбулентных процессов переноса. // ТМФ, 1982, том 53, No 1, с. 93-107.

[14] Bogoliubov N.N. Problems of a dynamical theory in statistical physics. In: Studies in statistical mechanics, vol. 1 (eds. J. de Boer and G.E.Uhlenbeck), Amsterdam, North-Holland, 1962.

[15] Зубарев Д.Н., Новиков М.Ю. Обобщенная формулировка граничного условия к уравнению Лиувилля и цепочке ББГКИ. // ТМФ, 1972, том 13, No 3, с. 406-419.

[16] Kawasaki K. In: Phase transitions and critical phenomena, 1976, vol. 5A, p. 165-411.

[17] Zubarev D.N., Morozov V.G. Statistical mechanics of nonlinear hydrodynamic fluctuations. // Physica A, 1983, vol. 120, No 3, p. 411-467.

[18] Ідзик І.М., Токарчук М.В. До статистичної теорії нелінійних гідродинамічних флуктуацій I. Обчислення статистичної ваги, термодинамічних сил, функціоналу ентропії та гідродинамічних швидкостей. / Препринт ІФКС-92-3У, Львів 1992, 20 с.

[19] Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. К., Наукова думка, 1980.

[20] Ідзик І.М., Ігнатюк В.В., Токарчук М.В. Рівняння Фоккера-Планка для нерівноважної функції розподілу колективних змінних I. Обчислення статистичної ваги, функціоналу ентропії та гідродинамічних швидкостей. // УФЖ, 1996, (у друці).

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Володимир Григорович Морозов
Михайло Васильович Токарчук
Ігор Михайлович Ідзик
Олександр Євгенійович Кобрин

Модифікована кінетична теорія з врахуванням повільних гідродинамічних процесів

Роботу отримано 19 липня 1996 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України