

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-23-06U

Й.А. Гуменюк

АСИМЕТРИЧНИЙ ЧАСТКОВО-ВИКЛЮЧНИЙ ПРОЦЕС
ІЗ ВІДКРИТИМИ КРАЯМИ

УДК: 538.93, 536.763, 536.764, 532.592, 532.593

PACS: 05.70.Fh, 05.70.Ln, 02.50.Ga

Асиметричний частково-виключний процес із відкритими краями

Й.А. Гуменюк

Анотація. Розглянуто стохастичну ґраткову модель одновимірного переносу з асиметричними стрибками на сусідні вузли, яка допускає щонайбільше дві частинки на вузол. У наближенні середнього поля проаналізовано стаціонарні стани для періодичних та відкритих крайових умов і результати порівняно із комп'ютерними моделюваннями монте-карло. Знайдено, що фазова діаграма складається із трьох областей, а саме, фаз високої густини, низької густини і найбільшого потоку. Ще аналізуються хвиля розрідження і ударна хвиля профілю густини, що розвиваються в необмеженому ланцюжку на великих масштабах простору і часу.

Asymmetric partial exclusion process with open boundaries

Y.A. Humenyuk

Abstract. We consider a stochastic lattice model of one-dimensional transport with asymmetric hops to neighbouring sites which admits at most two particles per site. We analyse steady states for periodic and open boundary conditions in the mean-field approximation and we compare our results with Monte Carlo computer simulations. The phase diagram is found to consist of three regions, namely, phases of high density, low density, and maximal current. We also analyse the rarefaction and shock density-profile waves which develop in the infinite chain on large distance and time scales.

Подається в Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment
Submitted to Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Йосип Андрійович Гуменюк

АСИМЕТРИЧНИЙ ЧАСТКОВО-ВИКЛЮЧНИЙ ПРОЦЕС ІЗ ВІДКРИТИМИ
КРАЯМИ

Роботу отримано 27 грудня 2023 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом комп'ютерного моделювання
багаточастинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

Процеси одновимірного переносу зустрічаються на різних масштабах явищ — від дорожнього руху машин чи пішоходів до внутріклітинних процесів чи руху частинок через мембрани і вузькі канали. Міжчастинкова взаємодія тут доволі складна, а стани далекі від рівноваги. Тому ефективним засобом їх опису стають стохастичні моделі.

Засадиною моделлю одновимірного переносу є асиметричний простий виключний процес (asymmetric simple exclusion process, ASEP) [1–3]. Ця модель включає в себе основні риси одновимірного переносу, а саме, асиметричні стрибки частинок на сусідні вузли з умовою, що кожен вузол може вмістити не більше однієї частинки (ця умова — так звана в'язь виключення). Незважаючи на простоту, модель виявляє незвичайні властивості: нерівноважні фазові переходи 2-го і 1-го роду в одному вимірі, зумовлені умовами на краях; стаціонарні стани у формі ударної хвилі [4]; точний розв'язок для стаціонарного стану відкритої системи [5, 6]. Простота моделі дала пізніше змогу отримати тонші характеристики, зокрема, флуктуації інтегрованого потоку частинок, профілю густини та функцію великих відхилень і функціонал вільної енергії [7, 8].

Ці успіхи стимулювали появу численних видозмін та узагальнень. Зокрема, це моделі з 3-вузловою (і більше) взаємодією [9–19], частинки із внутрішніми ступенями вільності [20, 21], дво- і кількатортні суміші [22], системи з дефектами [23], моделі з просторово-неоднорідними інтенсивностями стрибків [24–26], довгі частинки (що займають одночасно два чи більше вузлів одновимірного ланцюжка) [27–30], моделі із адсорбцією та десорбцією [31–33] та ін. У всіх наведених випадках динаміка частинок підпорядковується в'язі виключення. В'язь ця є також одним з вирішальних факторів при отриманні точних результатів у методі матричного добутку [1, 5, 34] та підстановці Бете [35–37].

У реальних ситуаціях (напр., у вузьких каналах) в'язь виключення може порушуватися тоді як перенос і далі залишається одновимірним. Модель, яка відповідає послабленій властивості виключення, допускає, що дві частинки (чи більше) можуть одночасно займати той самий вузол. У літературі її називають частково-виключним процесом (ЧВП) [38] (інші назви — К-виключний процес [39–41], узагальнено-виключний процес [42, 43]). В'язь часткового виключення змінює розв'язність. На відміну від повного виключення, стаціонарний стан асиметричного частково-виключного процесу на кільці не має добуткової форми [44], а отже присутні кореляції. Виня-

тками в цьому відношенні є мізантропний процес [45, 46] та модель "стрибай-штговхай" [47, 48], для яких додаткова умова на динаміку забезпечує добутковий стаціонарний стан на кільці.

Крім того, процес із частковим виключенням вже не є градієнтним [42] (тобто, для частинок із симетричними стрибками локальний мікроскопічний потік вздовж зв'язка не зображається у вигляді дискретного градієнта від функції густини). Тим не менше, гідродинамічна границя для моделі з частковим виключення існує [41] і дає змогу коректно аналізувати її на рівні опису суцільного середовища.

Для моделі часткового виключення із симетричними стрибками було детально досліджено коефіцієнти дифузії та самодифузії для місткості вузла від 2 до 5 за допомогою незалежних методів [42, 43, 49], а також вивчено хід густини та кореляційні функції при відкритих крайових умовах [42]. Асиметричний варіант часткового виключення досліджено значно менше. Симетричні властивості кореляційних функцій аналізувалися у праці [38]. Однак навіть прості характеристики асиметричного частково-виключного процесу недостатньо відображені у літературі. Наша ціль тут — подати детальні відомості про фазову діаграму стаціонарних станів для відкритих країв та кінематичні хвилі на великих масштабах. За цими результатами можна прослідкувати, які зміни викликає послаблення в'язі виключення у порівнянні з відповідниками асиметричного простого виключного процесу, зокрема, положення ліній фазових переходів, форма масштабних хвиль та ін.

Опис моделі часткового виключення наведено у розд. 2. У розд. 3 подано результати для стаціонарного потоку частинок при періодичних крайових умовах, які отримано в наближенні середнього поля і за допомогою моделювань монте-карло. У розд. 4 аналізується фазова діаграма для відкритого ланцюжка. У розд. 5 розглянуто кінематичні хвилі — розрідження і ударну, — що поширюються на великих масштабах простору і часу.

2. Одновимірна модель з частковим виключенням

Опис моделі. Маємо одновимірний ланцюжок із L вузлів, кожний місткості 2. Індекс $i = \{1, \dots, L\}$ нумерує вузли, а змінна $s_i = \{0, 1, 2\}$ задає кількість частинок на вузлі i . Частинки випадково і незалежно стрибають вздовж зв'язків ланцюжка. Окрема частинка може стрибнути на сусідні правий чи лівий вузол. Інтенсивність стрибка не залежить від розташування вузла, але залежить від його зайнятості. Для стрибка вправо чи вліво вона відповідно дорівнює p_1 чи q_1

для однократно зайнятого вузла і p_2 чи q_2 для двократно зайнятого ($p_0 = q_0 = 0$). Величина $p_s dt$ задає імовірність того, що за малий проміжок часу dt відбудеться стрибок вправо з вузла, зайнятого s частинками. Ще накладається умова часткового виключення: стрибок може відбутися тоді, коли на вузлі призначення є вільне місце (він порожній чи містить одну частинку). Динаміка задається правилами:

$$\begin{array}{lll} 10 & \xrightarrow{p_1} & 01, \\ 11 & \xrightarrow{p_1} & 02, \\ 20 & \xrightarrow{p_2} & 11, \end{array} \quad \begin{array}{lll} 10 & \xleftarrow{q_1} & 01, \\ 20 & \xleftarrow{q_1} & 11, \\ 11 & \xleftarrow{q_2} & 02, \end{array}$$

де 0, 1 і 2 позначають порожній, одно- і двократно зайнятий вузол. Ця динаміка зберігає число частинок.

У загальному випадку стрибки асиметричні: $q_1 \neq p_1$ та $q_2 \neq p_2$. Якщо інтенсивності однакові, $q_1 = p_1$ і $q_2 = p_2$, то модель повністю симетрична. Коли нема, напр., стрибків вліво $q_s = 0|_{s=\{1,2\}}$, модель повністю асиметрична. Інтенсивності p_s та q_s додатні, а вибір їхніх числових значень не обмежений. Ми розглядаємо випадок, коли інтенсивності пропорційні до зайнятості ($p_s = sp$, $q_s = sq$, де p і q — базові інтенсивності).

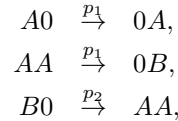
$$\dots \circ \bullet \xrightarrow{p} \circ \bullet \xrightarrow{2q} \bullet \xrightarrow{2p} \circ \circ \xleftarrow{q} \bullet \xleftarrow{p} \bullet \xleftarrow{2q} \bullet \bullet \circ \bullet \circ \dots$$

Крайові умови. Макроскопічні властивості і поведінка системи вирішальним чином залежать від крайових умов. При *періодичних крайових умовах* частинка, стрибаючи з вузла L вправо, опиняється на вузлі 1, а частинка, що стрибає з вузла 1 вліво, опиняється на вузлі L . Це топологія *кільця*. При *відкритих крайових умовах* частинки з'являються на вузлі 1 з деякою інтенсивністю (якщо вузол 1 має вільне місце), а частинки на вузлі L зникають з деякою іншою інтенсивністю. У випадку *нескінченно віддалених крайових умов* край формально відсунуто на $\pm\infty$. Вони трапляються при вивченні поширення хвиль у ланцюжках скінченної довжини, коли область макроскопічної неоднорідності ще не досягла країв ланцюжка.

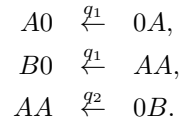
Відображення на двосортну модель з реакцією. Умову часткового виключення можна звести до *повного виключення*. Для цього ми переформулюємо описану модель як двосортну стохастичну модель з *реакцією об'єднання—розпаду*. Частинку, що самостійно займає вузол, позначмо через A ; дві частинки на тому самому вузлі

позначмо як нову частинку сорту B . Тоді будь-який вузол може бути порожнім, зайнятим частинкою A чи зайнятим частинкою B . Вузол не може містити дві частинки, які б вони не були, тобто, має місце умова цілковитого виключення.

Стрибки вправо з однократно зайнятого вузла (попередньої моделі) зображаються як стрибок частинки A чи об'єднання двох частинок A вправо з утворенням частинки B ; стрибок вправо з двократно зайнятого вузла — це розпад частинки B вправо:



де 0 , як і раніше, позначає порожній вузол. Якщо у моделі з частковим виключенням є стрибки *вліво* з інтенсивностями q_1 і q_2 , то двосортна модель має ще такі мікропроцеси:



Тут зображення початкових станів поміщено *справа від стрілок* заради наглядності, а процеси ідуть вліво. Частинки A стрибають і об'єднуються, частинки B не стрибають, а лише розпадаються. Стрибки та реакції вправо і вліво мають загалом різні інтенсивності. Асиметрія виникає, якщо чинна хоча б одна з нерівностей:

$$p_1 \neq q_1, \quad p_2 \neq q_2.$$

Динаміка нової моделі теж двовузлова.

Хоч ми досягли умови повного виключення, проте динамічні правила нової моделі не зберігають чисел частинок кожного сорту. Однак зберігається їх локальна лінійна комбінація. Якщо позначити сумарні сортові числа частинок на двох сусідніх вузлах через $\hat{n}_A^{(2)}$ та $\hat{n}_B^{(2)}$, то динаміка на цих вузлах не змінює величини:

$$\hat{n}_A^{(2)} + 2\hat{n}_B^{(2)}.$$

Для циклічних крайових умов отримуємо звідси макроскопічну в'язь на повні числа частинок обох сортів N_A й N_B : $N_A + 2N_B = N$, де N — фіксоване число, що дорівнює повному числу частинок N у моделі з частковим виключенням на кільці.

Відобразивши попередню модель на двосортну повністю виключенну модель з реакцією, ми позбулися часткового виключення. Це можна розглядати як спрощення. Однак плата за це — поява двох сортів, небереження чисел частинок у динамічних правилах і в'язь на двовузлові числа частинок. Якщо би вдалося точно розв'язати одну з цих моделей, напр., при циклічних крайових умовах, то це дало би розв'язок і для другої.

3. Стаціонарний стан на кільці

Керівне рівняння у наближенні середнього поля. Спочатку ми подамо керівне рівняння для одновузлових ймовірностей, а потім розглянемо стаціонарний стан на кільці. Ймовірність P_s^i стану вузла i , зайнятого s частинками, змінюється в часі завдяки стрибкам з цього вузла і на нього. Внески походять від стрибків на лівому (L) і правому (R) зв'язках, що з'єднують вузол i з його сусідами:

$$d_t P_s^i = x_L^- + x_L^+ + x_R^- + x_R^+, \quad (3.1)$$

де взято до уваги, що стрибки зумовлюють зникнення ($-$) чи появу ($+$) стану вузла i з s частинками. Для двочастинкової динаміки внески x^\mp виражаються через двовузлові ймовірності $P_{s's}^{(2)}$ та $P_{ss''}^{(2)}$, що стосуються лівого і правого зв'язків вузла i . Вони також враховують кореляції між сусідніми вузлами. Ми приймаємо наближення середнього поля, яке цими кореляціями нехтує. Напр., для лівого зв'язка вузла i це нехтування означає, що

$$P_{s's}^{(2)} \approx P_{s'}^{i-1} P_s^i.$$

У наближенні середнього поля внески x^\mp набувають вигляду:

$$\begin{aligned} x_L^- & \equiv -q_s P_s^i (P_0^{i-1} + P_1^{i-1}) - \tilde{\delta}_{s,k} P_s^i (p_1 P_1^{i-1} + p_2 P_2^{i-1}), \\ x_L^+ & \equiv \tilde{\delta}_{s,k} q_{s+1} P_{s+1}^i (P_0^{i-1} + P_1^{i-1}) + \tilde{\delta}_{s,0} P_{s-1}^i (p_1 P_1^{i-1} + p_2 P_2^{i-1}), \\ x_R^- & \equiv -p_s P_s^i (P_0^{i+1} + P_1^{i+1}) - \tilde{\delta}_{s,k} P_s^i (q_1 P_1^{i+1} + q_2 P_2^{i+1}), \\ x_R^+ & \equiv \tilde{\delta}_{s,k} p_{s+1} P_{s+1}^i (P_0^{i+1} + P_1^{i+1}) + \tilde{\delta}_{s,0} P_{s-1}^i (q_1 P_1^{i+1} + q_2 P_2^{i+1}). \end{aligned}$$

Для прикладу, перший внесок в x_L^- описує стрибки з вузла i вліво на незаповнений вузол $i-1$, а другий — стрибки на вузол i зліва з непорожнього вузла $i-1$. Додаткові множники, напр., $\tilde{\delta}_{s,k} \equiv 1 - \delta_{s,k}$, виражені через символ Кронекера ($\delta_{s,k} = 1$, якщо $s = k$ і 0 якщо ні), скасовують доданки для станів $s = \{0; k\}$.

Одноузлові ймовірності мають задовольняти макроскопічні умови нормування і відтворення локальної густини:

$$P_0^i + P_1^i + P_2^i = 1, \quad P_1^i + 2P_2^i = \rho_i. \quad (3.2)$$

Середньо-польовий потік частинок вздовж зв'язка $(i, i + 1)$ має вигляд:

$$j_{i,i+1} = [p_1 P_1^i + p_2 P_2^i](P_0^{i+1} + P_1^{i+1}) - [q_1 P_1^{i+1} + q_2 P_2^{i+1}](P_0^i + P_1^i). \quad (3.3)$$

Наведені керівне рівняння і вираз для потоку підходять для циклічних та нескінченно віддалених крайових умов і для внутрішніх вузлів при відкритих крайових умовах.

При циклічних крайових умовах ланцюжок замкнений і число частинок N не змінюється. Стационарний стан трансляційно-інваріантний і просторово-однорідний зі середньою густиною числа частинок $\rho \equiv N/L$. Стационарні ймовірності незмінні $d_t P_s = 0$ і не залежать від номера вузла i . Попередня формула для середнього потоку, постійного вздовж ланцюжка, спрощується:

$$j = [(p_1 - q_1)P_1 + (p_2 - q_2)P_2](P_0 + P_1).$$

Макроумови не залежать від номера вузла: $P_0 + P_1 + P_2 = 1$ та $P_1 + 2P_2 = \rho$. Керівні рівняння для стационарних ймовірностей теж спрощуються:

$$P_0 : 0 = (p_1 + q_1)P_1 l - P_0 u, \quad (3.4)$$

$$P_1 : 0 = [-(p_1 + q_1)P_1 + (p_2 + q_2)P_2]l + [-P_1 + P_0]u, \quad (3.5)$$

$$P_2 : 0 = -(p_2 + q_2)P_2 l + P_1 u, \quad (3.6)$$

де $l \equiv P_0 + P_1$ і $u \equiv (p_1 + q_1)P_1 + (p_2 + q_2)P_2$. У згоді з макроумовами лише одне з рівнянь (3.4)–(3.6) лінійно незалежне.

Щоб відшукати стационарні ймовірності, візьмімо рівняння для P_0 , яке зводиться до

$$0 = P_1^2 - h P_0 P_2, \quad (3.7)$$

де $h \equiv (p_2 + q_2)/(p_1 + q_1)$. Виражаємо P_0 і P_2 з макроумов

$$P_0 = \frac{1}{2}[2 - \rho - P_1], \quad P_2 = \frac{1}{2}[\rho - P_1] \quad (3.8)$$

і підставляємо у ф. (3.7). Тоді отримуємо кінцеве рівняння для P_1 :

$$P_1^2(4/h - 1) + 2P_1 - \rho(2 - \rho) = 0. \quad (3.9)$$

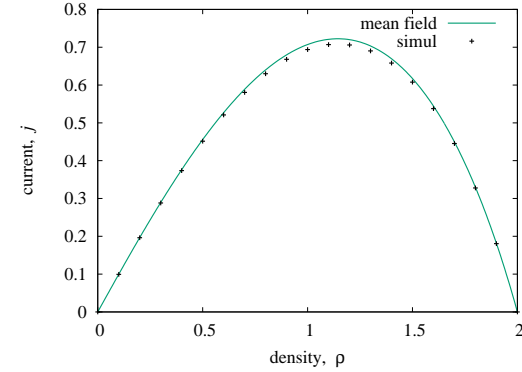


Рис. 1. Залежність потоку від густини $j(\rho)$ для $\{p_1, p_2, q_1, q_2\} = \{1, 2, 0, 0\}$. Лінія — наближення середнього поля, символи — моделювання монте-карло для 500 вузлів з усередненням за 10^3 історій для кожної точки густини.

Квадратичний доданок зберігається при $h \neq 4$ і розв'язок має вигляд:

$$P_1 = -\frac{h}{4-h} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{4-h}\right)^2 + \frac{h}{4-h}\rho(2-\rho)}, \quad (3.10)$$

де “+” відповідає випадку $h < 4$, а “-” — випадку $h > 4$ згідно обмежень $0 \leq P_1 \leq 1$.

Для пропорційних інтенсивностей $\{p, 2p, q, 2q\}$ виходить $h = 2$ і тоді:

$$P_0(\rho) = \frac{1}{2}[3 - \rho - \sqrt{1 + \rho(2 - \rho)}], \quad (3.11)$$

$$P_1(\rho) = -1 + \sqrt{1 + \rho(2 - \rho)}, \quad (3.12)$$

$$P_2(\rho) = \frac{1}{2}[1 + \rho - \sqrt{1 + \rho(2 - \rho)}]. \quad (3.13)$$

За допомогою цих виразів наближено розраховуємо потік:

$$j(\rho) = \frac{1}{2}(p - q)\rho[1 - \rho + \sqrt{1 + \rho(2 - \rho)}]. \quad (3.14)$$

Він досягає найбільшого значення $j^* = 0.7224\dots$ в точці $\rho^* = 1.1446\dots$ (взято $p - q = 1$). Нахили дотичних у крайніх точках: $j'(\rho = 0) = 1$ і $j'(\rho = 2) = -2$. Нехтування кореляцій завищує значення потоку в порівнянні з результатами моделювань на 2–3% для проміжних густин (рис. 1). Графік для потоку асиметричний, бо нема симетрії “частинка–порожнина”.

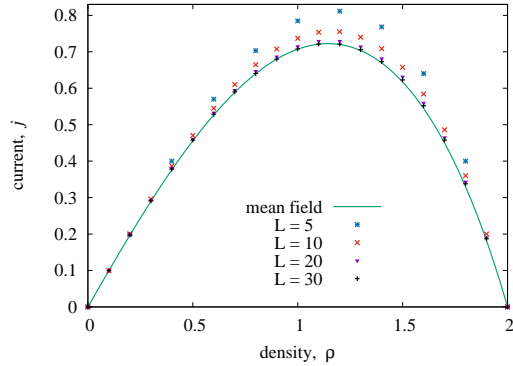


Рис. 2. Залежність потік–густина для пропорційних інтенсивностей $\{p_1, p_2\} = \{1, 2\}$ і $q_s = 0$. Символи — моделювання монте-карло для ланцюжка малої довжини з усередненням за 10^3 історій для кожної густини. Лінія — наближення середнього поля.

Зіставмо отримані результати безкореляційного наближення для потоку з результатами для моделі повного виключення. (Для останньої найбільший потік $j_{\text{ASEP}}^* = 1/4$ досягається при $\rho_{\text{ASEP}}^* = 1/2$.) Вищенаведене значення найбільшого потоку майже втричі перевершує значення j_{ASEP}^* . Однак воно досягається при вищому значенні густини. При густині ρ_{ASEP}^* значення потоку $j(1/2) = 0.45572\dots$, розраховане за ф. (3.14), майже вдвічі більше за j_{ASEP}^* . Таким чином перенос у моделі часткового виключення помітно ефективніший. Це зумовлено двома причинами: (а) вищою інтенсивністю стрибка з двозайнятого вузла і (б) більшою кількістю станів вузла призначення, які допускають стрибок (стани 0 і 1). Друга причина виглядає важливішою, оскільки при повному виключенні частинка, присутня на вузлі призначення, повністю блокує стрибок, а в моделі часткового виключення — ні.

При малих довжинах кільця значення потоку вищі, ніж у границі довгих кілець. Саме таким є прояв скінченного розміру. Вони також вищі за результати в наближенні середнього поля (рис. 2). При проміжних довжинах $L \sim 30 \div 40$ відхилення середньо-польової залежності $j(\rho)$ від результатів комп'ютерних моделювань найменші. Різниця між ними служить у деякій мірі характеристикою парних кореляцій між найближчими сусідами. Кореляції між найближчими сусідами змінюють свій характер саме при вказаних довжинах кільця.

4. Відкритий ланцюжок

Крайові інтенсивності та резервуари. Є дві інтерпретації забезпечення відкритих крайових умов [34]: (а) через інтенсивності подачі й вилучення частинок та (б) за допомогою контакту ланцюжка з резервуарами частинок. Ми розглянемо тут найпростіші варіанти, прийнявши $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $q_s = 0$. У цьому разі потік частинок (3.3) (між сусідніми нескорельованими вузлами) дорівнює $j_{\text{uncor}} = \rho_i[1 - P_2^{i+1}]$, де було використано умову нормування (3.2).

У випадку (а) частинки подаються через лівий край з інтенсивністю α . Середній потік на вузол 1 зліва дорівнює $j^L \equiv \alpha[1 - P_2(\rho_1)]$. Для вилучення частинок на правому краї з інтенсивністю β середній потік з вузла L вправо дорівнює $j^R \equiv \beta\rho_L$. У випадку (б) лівий край ланцюжка перебуває в контакті з резервуаром із густиною ρ^L , а правий — з резервуаром із густиною ρ^R , причому $0 \leq \rho^L, \rho^R \leq 2$. Потоки через краї дорівнюють $j^L = \rho^L[1 - P_2(\rho_1)]$ та $j^R = \rho^R[1 - P_2(\rho^R)]$. Зіставлення двох варіантів для крайових потоків дає зв'язок між інтенсивностями та густинами резервуарів:

$$\alpha = \rho^L, \quad \beta = 1 - P_2(\rho^R). \quad (4.1)$$

Отже, β має зміст імовірності вільного місця у правому резервуарі, а α і β можна зв'язати з резервуарами, якщо обмежити $\alpha \leq 2$ і $\beta \leq 1$. Використавши для P_2 вираз (3.13), отримуємо зв'язок між β і ρ^R :

$$\beta(\rho^R) = \frac{1}{2}[1 - \rho^R + \sqrt{1 + \rho^R(2 - \rho^R)}], \quad \rho^R(\beta) = 1 - \beta + \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (4.2)$$

Друге співвідношення отримується, якщо обернути перше.

4.1. Фазова діаграма стаціонарного стану

Форма залежності $j(\rho)$ для часткового виключення якісно подібна до відповідника для повного виключення — це опукла вгору крива. Тому фазова діаграма теж якісно подібна. Її можна отримати різними методами: в рамках максимізаційних принципів [4, 9], за допомогою теорії доменних стінок [50] чи з аналізу поширення кінематичних хвиль [34]. Фазова діаграма складається з трьох фаз: низькогустинної (LD), високогустинної (HD) і фази найбільшого потоку (MC). Ми подаємо фазову діаграму на площині густин резервуарів (рис. 3) і на площині крайових інтенсивностей (рис. 4), вказуючи

значення густини ρ_{bulk} далеко від країв (об'ємне) та вираз для стаціонарного потоку. Криву фазових переходів першого роду $\rho_1^R(\rho^L)$ прокоментовано пізніше.

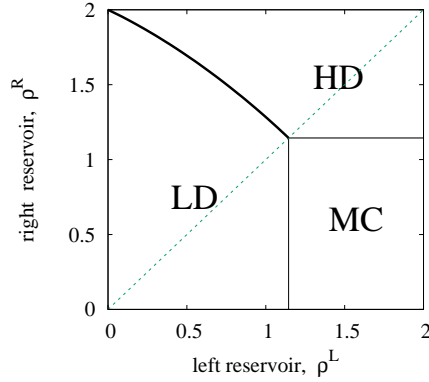


Рис. 3. Фазова діаграма у змінних густин резервуарів. Фази: низької (LD) і високої (HD) густини та найбільшого потоку (MC). Фазові лінії сходяться в у точці (ρ^*, ρ^*) . Насичена суцільна — лінія переходів I-го роду, штрихова діагональ — лінія плоских профілів.

На площині густин резервуарів ρ^L та ρ^R області фаз задаються так (рис. 3):

- фаза LD: $\rho^L < \rho^*$, $\rho^R < \rho_1^R(\rho^L)$; постачання повільніше за вилучення, $\rho_{\text{bulk}} = \rho^L$, $j = \frac{1}{2}\rho^L [1 - \rho^L + \sqrt{1 + \rho^L(2 - \rho^L)}]$;
- фаза HD: $\rho^L < \rho^*$, $\rho^R > \rho_1^R(\rho^L)$ та $\rho^L > \rho^*$, $\rho^R > \rho^*$; постачання швидше за вилучення, $\rho_{\text{bulk}} = \rho^R$, $j = \frac{1}{2}\rho^R [1 - \rho^R + \sqrt{1 + \rho^R(2 - \rho^R)}]$;
- фаза MC: $\rho^L > \rho^*$, $\rho^R < \rho^*$; постачання і вилучення швидші за перескок в об'ємі, $\rho_{\text{bulk}} = \rho^*$, $j = j^*$.

Фазу HD можна ще задати як $\rho^L > \rho_1^L(\rho^R)$, $\rho^R > \rho^*$, де $\rho_1^L(\rho^R)$ — обернена функція до $\rho_1^R(\rho^L)$. Лінія $\rho^L = \rho^*$, $\rho^R < \rho^*$, що розділює фази LD і MC та лінія $\rho^R = \rho^*$, $\rho^L > \rho^*$ розділення фаз HD і MC зображають переходи II-го роду. Лінія фазових переходів I-го роду між фазами LD і HD описує стаціонарні стани, у яких профіль густини має дві області — низької і високої густини, — розділені доменною стінкою (стаціонарною ударною хвилею). Ця лінія задається умовою

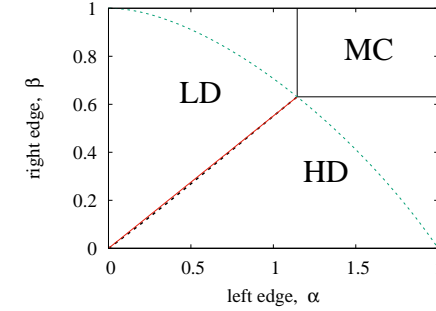


Рис. 4. Фазова діаграма у змінних крайових інтенсивностей. Фазові лінії сходяться у точці $(\rho^*; \beta^*)$. Лінія переходів I-го роду (насичена штрихова), отримана з ф. (4.4), слабо відрізняється від прямої (тонка червона). Штрихова дуга — лінія плоских профілів.

однакових потоків у названих областях $j(\rho^L) = j(\rho^R)$ для $\rho^L < \rho^*$ і $\rho^R > \rho^*$:

$$\rho^L [1 - \rho^L + \sqrt{1 + \rho^L(2 - \rho^L)}] = \rho^R [1 - \rho^R + \sqrt{1 + \rho^R(2 - \rho^R)}], \quad (4.3)$$

Розв'язавши це рівняння відносно, напр. ρ^R , отримаємо залежність $\rho^R = \rho_1^R(\rho^L)$. Її властивості можна добути з аналізу потоку у випадку кільця: $j(\rho)$ має нахил 1 при малих значеннях ρ і нахил -2 в околі $\rho = 2$ (рис. 1). Біля $\rho = \rho^*$ потік $j(\rho)$ можна наблизити параболою з вітками вниз. Тому лінія $\rho_1^R(\rho^L)$ має нахил $-1/2$ біля точки $(0; 2)$ і нахил -1 біля точки (ρ^*, ρ^*) , див. рис. 3. Функцію $\rho_1^R(\rho^L)$ отримуємо, розв'язавши рівняння (4.3) чисельно.

Фазову діаграму у змінних крайових інтенсивностей зображено на рис. 4. Лінію фазових переходів I-го роду, що задається залежністю $\beta_1(\alpha)$, ми розглянемо після опису фаз. Фазові області задаються так:

- фаза LD: $\alpha < \rho^*$, $\beta > \beta_1(\alpha)$; вилучення домінує, $\rho_{\text{bulk}} = \alpha$, $j = \frac{1}{2}\alpha [1 - \alpha + \sqrt{1 + \alpha(2 - \alpha)}]$;
- фаза HD: $\alpha < \rho^*$, $\beta < \beta_1(\alpha)$ та $\alpha > \rho^*$, $\beta < \beta^*$; постачання домінує, $\rho_{\text{bulk}} = 1 - \beta + \sqrt{1 - \beta^2}$, $j = \beta [1 - \beta + \sqrt{1 - \beta^2}]$;
- фаза MC: $\alpha > \rho^*$ і $\beta > \beta^*$; постачання і вилучення швидші за перескок в об'ємі ланцюжка, $\rho_{\text{bulk}} = \rho^*$, $j = j^*$.

Особливе значення $\beta^* = 0.631109\dots$ знайдено за ф. (4.2) як $\beta(\rho^R = \rho^*)$. Лінії $\alpha = \rho^*$, $\beta > \beta^*$ та $\alpha > \rho^*$, $\beta = \beta^*$ зображують фазові переходи II-го роду. Залежність для лінії фазових переходів I-го роду $\beta = \beta_I(\alpha)$, $\alpha < \rho^*$, $\beta < \beta^*$, яка розділює фази LD і HD, знаходимо з умови рівності потоків на краях, виражених через α і β . Підставляючи у ф. (4.3) співвідношення зв'язку (4.1) і вираження (4.2) β через ρ^R , одержуємо рівняння:

$$\alpha[1 - \alpha + \sqrt{1 + \alpha(2 - \alpha)}] = 2\beta[1 - \beta + \sqrt{1 - \beta^2}]. \quad (4.4)$$

Середньо-польову залежність $\beta = \beta_I(\alpha)$ знаходимо чисельно. Вона дещо відрізняється від прямолінійного відрізка, що сполучає точки $(0, 0)$ і (ρ^*, β^*) . Хоча, це відхилення може бути артефактом наближення.

Розгляньмо лінію плоских профілів. Коли густини обох резервуарів однакові $\rho^L = \rho^R$, хід густини постійний вздовж відкритого ланцюжка (стаціонарний плоский профіль). Цей стан подібний до стану на кільці. На відміну від лінії $\alpha + \beta = 1$ для повного виключення [1, 5, 51], наближення середнього поля не задає точно цієї лінії через кореляції. Отримаємо рівняння для лінії плоских профілів на площині (α, β) , рис. 4. Підстановка першої формули зв'язку (4.1) в умову плоского профілю дає $\alpha = \rho^R$. Далі виражаємо ρ^R через β , за допомогою другого співвідношення ф. (4.2):

$$\alpha(\beta) \equiv 1 - \beta + \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta(\alpha) \equiv \frac{1}{2}[1 - \alpha + \sqrt{1 + \alpha(2 - \alpha)}], \quad (4.5)$$

де друга залежність обернена до першої.

5. Кінематичні хвилі на нескінченному ланцюжку

Ми розглядаємо хвилі густини $\rho(x, t)$, що розвиваються з початкового профілю у формі сходинок, локалізованої в точці $x = 0$:

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_-, & x < 0; \\ \rho_+, & x > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Можливі випадки низхідної $\rho_- > \rho_+$ та висхідної $\rho_- < \rho_+$ сходинок, які розглянемо нижче.

У границі великих просторових і часових масштабів [52] огрублена локальна густина частинок $\rho(x, t)$ задовольняє рівняння неперервності $\partial_t \rho + \partial_x j = 0$, де $j(x, t)$ — потік частинок, зв'язаний з полем ρ . Для потоку $j(x, t)$ застосовуємо локальне стаціонарне наближення, яке означає, що він залежить від координати і часу лише через

$\rho(x, t)$ так, як задано у виразі (3.14). Тоді поле густини задовольняє диференціальне рівняння у частинних похідних першого порядку:

$$\partial_t \rho + u(\rho) \partial_x \rho = 0, \quad (5.2)$$

де $u(\rho) \equiv \partial_\rho j(\rho)$ — групова швидкість, яка характеризує поширення локальних густинних збурень [9, 50]. Максимум залежності $j(\rho)$ відповідає нульовій швидкості поширення збурень густини.

Рівняння (5.2) для $\rho(x, t)$ можна розв'язати за допомогою методу характеристик [53]. Він дає, що густина постійна вздовж прямих ліній на площині (x, t) , нахил яких задається залежністю $u(\rho)$. Початковий розрив густини у ф. (5.1) може розмиватися, формуючи перехідну область з рухомими краями $x_-(t)$ та $x_+(t)$. Однак для заданої початкової сходиноквої умови (5.1) проміжні профілі, взяті у різні моменти часу, геометрично подібні, тому розв'язок залежить від x і t лише у комбінації $v \equiv x/t$. Це кінематична масштабна змінна. Вслід за [15, 16] записуємо:

$$\rho(v) = \begin{cases} \rho_-, & v \leq v_-; \\ I(v), & v_- \leq v \leq v_+; \\ \rho_+, & v \geq v_+. \end{cases} \quad (5.3)$$

Тут v означає локальну швидкість зміщення хвилі, а значення v_- і v_+ відповідають просторовим розташуванням x_- та x_+ країв хвилі; перехідна область хвилі описується залежністю $I(v) \equiv u^{-1}(v)$, яка є оберненою функцією до $v = u(\rho)$.

Для моделі часткового виключення групова швидкість в наближенні середнього-поля має вигляд:

$$u(\rho) = (p - q) \frac{1}{2} [1 - 2\rho + (1 + 3\rho - 2\rho^2) / \sqrt{1 + \rho(2 - \rho)}]. \quad (5.4)$$

Вона спадає з густиною, зануляючись при ρ^* . Тому на великих просторово-часових масштабах низхідна початкова сходинок розвивається у хвилю розрідження, а висхідна — в рухому ударну хвилю.

У першому випадку має місце $u(\rho_-) < u(\rho_+)$ — область зліва (ρ_-) відстає від області справа (ρ_+) і формується хвиля розрідження (рис. 5). Її проміжна область опукла вгору (на відміну від лінійного ходу для повного виключення). Розташування країв хвилі v_- та v_+ знаходимо з умови неперервності $v_{\mp} = u(\rho_{\pm})$. “Точка” хвилі з густиною ρ^* , що досягається при $v = 0$, нерухома. Для $\rho_- > \rho^* > \rho_+$, краї хвилі розрідження рухаються в різні боки, для $\rho_+ > \rho^*$, обидва краї рухаються вліво і для $\rho_- < \rho^*$ — обидва вправо.

Ударна хвиля (рис. 5) виникає, коли область зліва (ρ_-) має більшу групову швидкість, ніж область справа (ρ_+): $u(\rho_-) > u(\rho_+)$. Саме

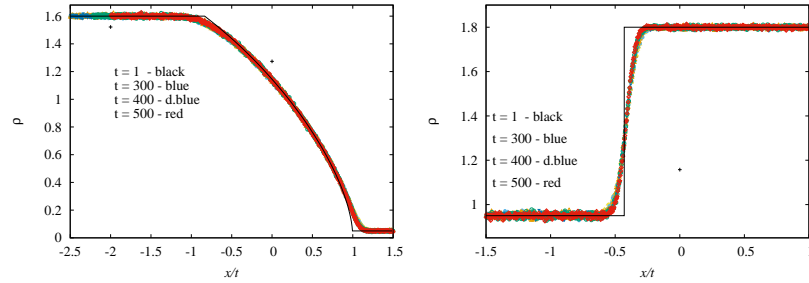


Рис. 5. Масштабні хвилі, що розвиваються з початкових сходящивих профілів. Зліва: хвиля розрідження при $\rho_- = 1.6$, $\rho_+ = 0.05$. Справа: ударна хвиля при $\rho_- = 0.95$, $\rho_+ = 1.8$. Моделювання монте-карло ланцюжка із 10^3 вузлами усереднено за $8.1 \cdot 10^3$ історіями; лінії — аналітичний опис. Накладання профілів у різні моменти часу підтверджує масштабність хвиль.

це має місце для висхідної початкової сходящивки. Розташування зони перепаду густини знаходимо з виразу $v_{sh} = (j_- - j_+)/(\rho_- - \rho_+)$, див. напр. [52, 53]. Для часткового виключення це дає:

$$v_{sh} = \frac{p - q}{2} \left[1 - \rho_- - \rho_+ + \frac{\rho_- \sqrt{1 + \rho_- (2 - \rho_-)} - \rho_+ \sqrt{1 + \rho_+ (2 - \rho_+)}}{\rho_- - \rho_+} \right].$$

При $\rho_- > \rho^*$ маємо високогустинну ударну хвилю, що рухається ліворуч, а при $\rho_+ < \rho^*$ — низькогустинну, що рухається праворуч; коли ж $\rho_- < \rho^* < \rho_+$, напрямок поширення хвилі визначається з виразу для v_{sh} . Скінченна ширина ударної хвилі зумовлена дифузією і не охоплюється прийнятним наближенням локальної стаціонарності.

6. Висновки

Ми представили найпростіші характеристики асиметричної моделі одновимірного переносу із в'язю часткового виключення для різних крайових умов. Розрахунок проведено у безкореляційному наближенні, тобто, в середньому полі.

У випадку періодичних крайових умов середньо-польова залежність потоку від густини частинок завищує дані комп'ютерного моделювання для великих довжин кілець на 2–3%. Для довжин до 30 вузлів наближення середнього поля занижує результати комп'ютерного моделювання. Фазову діаграму для відкритих країв представ-

лено на площині густин резервуарів і на площині крайових інтенсивностей подачі та вилучення частинок. Вона складається з низькогустинної і високогустинної фаз і фази найбільшого потоку. Лінії розмежування фаз описують переходи II-го і I-го роду. Отримані кінематичні хвиля розрідження і ударна хвиля характеризують поведінку моделі на великих масштабах простору і часу. На відміну від лінійного ходу для моделі повного виключення, хвиля розрідження для часткового виключення опукла вгору.

Наведені результати відображають зміни, зумовлені умовою часткового виключення, у порівнянні з асиметричним простим виключенням процесом.

Література

1. B. Derrida. An exactly soluble non-equilibrium system: The asymmetric simple exclusion process. *Phys. Rep.*, 301:65–83, 1998.
2. G. M. Schütz. Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. In: *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and J. L. Lebowitz (eds.), vol. 19, pp. 1–251, Academic Press, 2001.
3. T. Chou, K. Mallick, and R. K. P. Zia. Non-equilibrium statistical mechanics: From a paradigmatic model to biological transport. *Rep. Prog. Phys.*, 74:116601, 2011.
4. J. Krug. Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems. *Phys. Rev. Lett.*, 67(14):1882–1885, 1991.
5. B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26(7):1493–1517, 1993.
6. G. M. Schütz and E. Domany. Phase transitions in an exactly soluble one-dimensional exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 72:277–296, 1993.
7. B. Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech.: Theory Exper.*, page P07023, 2007.
8. Bernard Derrida. Microscopic versus macroscopic approaches to non-equilibrium systems. *J. Stat. Mech.: Theor. Exper.*, page 01030, 2011.
9. V. Popkov and G. M. Schütz. Steady-state selection in driven diffusive systems with open boundaries. *Europhys. Lett.*, 48(3):257–263, 1999.
10. K. Klauack and A. Schadschneider. On the ubiquity of matrix-product

- states in one-dimensional stochastic processes with boundary interactions. *Physica A*, 271:102–117, 1999.
11. T. Antal and G. M. Schütz. Asymmetric exclusion process with next-nearest-neighbor interaction: Some comments on traffic flow and a nonequilibrium reentrance transition. *Phys. Rev. E*, 62:83–93, 2000.
 12. C. Bahadoran, H. Guiol, K. Ravishankar, and E. Saada. A constructive approach to Euler hydrodynamics for attractive processes. Application to k -step exclusion. *Stoch. Process. Appl.*, 99(1):1–30, 2002.
 13. M. V. Freire, H. Guiol, K. Ravishankar, and E. Saada. Microscopic structure of the k -step exclusion process. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 33(3):319–339, 2002.
 14. U. Basu and P. K. Mohanty. Active-absorbing-state phase transition beyond directed percolation: A class of exactly solvable models. *Phys. Rev. E*, 79:041143, 2009.
 15. A. Gabel, P. L. Krapivsky, and S. Redner. Facilitated asymmetric exclusion. *Phys. Rev. Lett.*, 105:210603, 2010.
 16. A. Gabel and S. Redner. Cooperativity-driven singularities in asymmetric exclusion. *J. Stat. Mech.: Theory Exper.*, P06008, 2011.
 17. G. Bunin, Y. Kafri, and D. Podolsky. Large deviations in boundary-driven systems: numerical evaluation and effective large-scale behavior. *Europhys. Lett.*, 99:20002, 2012.
 18. P. L. Krapivsky. Dynamics of repulsion processes. *J. Stat. Mech.: Theory Exper.*, P06012, 2013.
 19. Uttam Bhat and P. L. Krapivsky. Exclusion processes with avalanches. *Phys. Rev. E*, 90:012133, 2014.
 20. F. Tabatabaei and G. M. Schütz. Shocks in the asymmetric exclusion process with internal degree of freedom. *Phys. Rev. E*, 74:051108, 2006.
 21. U. Basu and P. K. Mohanty. Totally asymmetric exclusion process on a ring with internal degrees of freedom. *Phys. Rev. E*, 82:041117, 2010.
 22. G. M. Schütz. Critical phenomena and universal dynamics in one-dimensional driven diffusive systems with two species of particles. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36:R339–R379, 2003.
 23. J. Schmidt, V. Popkov, and A. Schadschneider. Defect-induced phase transition in the asymmetric simple exclusion process. *Europhys. Lett.*, 110:20008, 2015.
 24. J. Krug and P. A. Ferrari. Phase transitions in driven diffusive systems with random rates. *J. of Phys. A: Math. Gen.*, 29(18):L465–L471, 1996.

25. R. J. Harris and R. B. Stinchcombe. Disordered asymmetric simple exclusion process: mean-field treatment. *Phys. Rev. E*, 70:016108, 2004.
26. G. Lakatos, J. O’Brien, and T. Chou. Hydrodynamic mean-field solutions of 1D exclusion processes with spatially varying hopping rates. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:2253–2264, 2006.
27. F. C. Alcaraz and R. Bariev. Exact solution of the asymmetric exclusion model with particles of arbitrary size. *Phys. Rev. E*, 60:79, 1999.
28. G. Lakatos and T. Chou. Totally asymmetric exclusion process with particles of arbitrary size. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 36:2027, 2003.
29. L. B. Shaw, R. K. P. Zia, and K. H. Lee. Totally asymmetric exclusion process with extended objects: a model for protein synthesis. *Phys. Rev. E*, 68:021910, 2003.
30. S. Gupta, M. Barma, U. Basu, and P. K. Mohanty. Driven k -mers: Correlations in space and time. *Phys. Rev. E*, 84:041102, 2011.
31. A. Parmeggiani, T. Franosch, and E. Frey. Phase coexistence in driven one-dimensional transport. *Phys. Rev. Lett.*, 90:086601, 2003.
32. A. Parmeggiani, T. Franosch, and E. Frey. Totally asymmetric simple exclusion process with Langmuir kinetics. *Phys. Rev. E*, 70:046101, 2004.
33. V. Popkov, A. Rákos, R. D. Willmann, A. B. Kolomeisky, and G. M. Schütz. Localization of shocks in driven diffusive systems without particle number conservation. *Phys. Rev. E*, 67:066117, 2003.
34. R. A. Blythe and M. R. Evans. Nonequilibrium steady states of matrix-product form: A solver’s guide. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 40:R333–R441, 2007.
35. J. de Gier and F. H. L. Essler. Bethe ansatz solution of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *Phys. Rev. Lett.*, 95:240601, 2005.
36. J. de Gier and F. H. L. Essler. Exact spectral gaps of the asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Stat. Mech.: Theor. Exper.*, P12011, 2006.
37. O. Golinelli and K. Mallick. Spectral gap of the totally asymmetric exclusion process at arbitrary filling. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:1419, 2005.
38. G. Schütz and S. Sandow. Non-Abelian symmetries of stochastic processes: Derivation of correlation functions for random-vertex models and disordered-interacting-particle systems. *Phys. Rev. E*, 49:2726–2741, 1994.
39. C. Kipnis, C. Landim, and S. Olla. Hydrodynamic limit for a

- nongradient system: The generalized symmetric exclusion process. *Commun. Pure Appl. Math.*, 47(11):1475–1545, 1994.
40. C. Kipnis, C. Landim, and S. Olla. Macroscopic properties of a stationary non-equilibrium distribution for a nongradient interacting particle system. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 31:191–221, 1995.
 41. T. Seppäläinen. Existence of hydrodynamics for the totally asymmetric simple K-exclusion process. *Ann. Probab.*, 27(1):361–415, 1999.
 42. C. Arita, P. L. Krapivsky, and K. Mallick. Generalized exclusion processes: Transport coefficients. *Phys. Rev. E*, 90:052108, 2014.
 43. C. Arita, P. L. Krapivsky, and K. Mallick. Variational calculation of transport coefficients in diffusive lattice gases. *Phys. Rev. E*, 95:032121, 2017.
 44. Y. A. Humenyuk, M. Kotrla, K. Netočný, and F. Slanina. Separation of dense colloidal suspensions in narrow channels: A stochastic model. *Phys. Rev. E*, 101:032608, 2020.
 45. C. Coccozza-Thivent. Processus des misanthropes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 70:509–523, 1985.
 46. C. Arita and C. Matsui. Phase coexistence phenomena in an extreme case of the misanthrope process with open boundaries. *Europhys. Lett.*, 114:60012, 2016.
 47. G. M. Schütz, R. Ramaswamy, and M. Barma. Pairwise balance and invariant measures for generalized exclusion processes. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:837–843, 1996.
 48. M. Barma and R. Ramaswamy. In: *Nonlinearity and Breakdown in Soft Matter*, B. K. Chakrabarti, K. K. Baradhan, and A. Hansen (eds.), Springer, Berlin, 1994.
 49. T. Becker, K. Nelissen, B. Cleuren, B. Partoens, and C. Van den Broeck. Diffusion of interacting particles in discrete geometries. *Phys. Rev. Lett.*, 111:110601, 2013.
 50. A. B. Kolomeisky, G. M. Schütz, E. B. Kolomeisky, and J. P. Straley. Phase diagram of one-dimensional driven lattice gases with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31(33):6911–6919, 1998.
 51. B. Derrida, E. Domany, and D. Mukamel. An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries. *J. Stat. Phys.*, 69(3-4):667–687, 1992.
 52. H. Spohn. *Large scale dynamics of interacting particles*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1991.
 53. G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New York, 1974.
-

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlachy, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>