Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–23–04U

М. Дудка, Д. Шаповал, Ю. Головач

КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА СТРУКТУРНО-НЕВПОРЯДКОВАНИХ СИСТЕМ З ДАЛЕКОСЯЖНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

ЛЬВІВ

УДК: 538.9; 538.91; 538.955

PACS: 64.60.ae, 75.10.-b, 75.40.-s

Критична поведінка структурно-невпорядкованих систем з далекосяжною взаємодією

М. Дудка, Д. Шаповал, Ю. Головач

Анотація. Досліджено вплив структурної невпорядкованості на універсальні характеристики критичної поведінки систем з далекосяжною взаємодією. На прикладі n-векторної моделі у d-вимірному просторі розглянуто феромагнітне впорядкування в структурно невпорядкованих магнетиках з далекосяжною взаємодією $J(x) \sim x^{-d-\sigma}$. Продемонстровано, що існує така ділянка цих параметрів, коли далекосяжна взаємодія і структурний безлад приводять до синергетичного ефекту і появи нового, "випадкового далекосяжного" (random long-range) класу універсальності. Отримано ренормалізаційно-групові функції і на їх основі розраховано критичний показник кореляційної довжини $\nu(\epsilon', n)$ як ряд теорії збурень за $\varepsilon' = 2\sigma - d$. Кількісні оцінки отримано пересумовуванням асиптотичних рядів.

Critical behavior of structurally disordered systems with long-range interaction

M. Dudka, D. Shapoval, Yu. Holovatch

Abstract. We study the impact of structural disorder on the universal characteristics of the critical behavior of long-range-interacting systems. As a case study, we use the n-vector model in d space dimensions to consider ferromagnetic ordering in structurally disordered magnets with long-range interaction $J(x) \sim x^{-d-\sigma}$. It has been demonstrated that there exists such a region of these parameters where the long-range interaction and structural disorder lead to a synergistic effect and to the emergence of a new "random long-range" universality class. We obtain renormalization-group functions and based on them calculate the correlation length critical exponent $\nu(\epsilon', n)$ as perturbation theory series in $\varepsilon' = 2\sigma - d$. Quantitative estimates are obtained using resummation of asymptotic series.

Подається в Журналу фізичних досліджень
Submitted to Journal of Physical Studies

Максим Леонідович Дудка
Дмитро Юрійович Шаповал
Юрій Васильович Головач

Критична поведінка структурно-невпорядкованих систем з далекосяжною взаємодією

Роботу отримано 19 листопада 2023 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом статистичної теорії конденсованих систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

1. Вступ

Одним із найбільш вражаючих наслідків взаємодії між елементарними складовими речовини (частинками, атомами, молекулами) є раптова зміна її макроскопічних властивостей – фазовий перехід [1–3]. Незважаючи на те, що "золотим віком" теорії фазових переходів та критичних явищ прийнято вважати останню чверть минулого століття, у цій ділянці продовжуються активні дослідження, що дають постійний потік цікавих результатів [2]. Сьогодні, окрім дослідження критичних точок в рідинах та рівноважних фазових переходів другого роду, дослідження охоплюють нерівноважні фазові переходи, зокрема процеси формування дисипативних структур, чи явища перколяції, як приклад геометричного фазового переходу, коли в системі виникає нескінченний кластер [4]). Однак навіть у теорії рівноважних фазових переходів багато питань залишаються нез'ясованими і це стосується не лише кращого узгодження теорії з експериментальнии даними. Як приклад можна привести ефекти кросоверу у складних рідинах, де потрібно враховувати вплив різних типів критичної поведінки [5] чи дослідження магнітних систем під впливом різних типів безладу (безлад заміщення, випадкова анізотропія, фрустрації тощо) [6,7], зокрема коли взаємодія носить далекосяжний характер [8, 9].

Відомо, що степенева поведінка термодинамічних величин (скейлінґ) в околі точок неперервного фазового переходу (таких, як точка Кюрі у феромагнетиках чи точка Нееля в антиферомагнетиках) має універсальний характер: відповідні критичні показники чи відношення критичних амплітуд не залежать від специфічних деталей досліджуваних систем. Натомість ці універсальні величини залежать від глобальних храктеристик ситеми: характер взаємодії, вимірність простору, симетрія та кількість компонент параметру порядку. Тому великі класи різних за своєю мікроскопічною природою систем, характеризуються однаковими характеристиками в околі критичної точки, формуючи класи універсалності [10].

При побудові фундаментальної теорії фазових переходів необхідно зокрема розрізняти ті системи, в яких взаємодія між компонентами є короткосяжною, і ті, в яких взаємодія носить далекосяжний характер. Звісно для електромагнітної взаємодії, на відміну від гравітаційної, зазвичай присутні механізми екранування, що робить її ефективно короткосяжною. Однак, як було показано у численних дослідженнях (див. наприклад огляди [11]), у багатьох фізичних, хімічних та біологічних [12] системах взаємодія може мати далекосяжний характер. Тому застосування моделей з далекосяжною взаємодією можна відшукати не тільки у дослідженнях гравітуючих систем [13], але й для кулонівських систем та магнетиків з диполь-дипольною взаємодією [14], у фізиці плазми [15], гідродинаміці чи геофізичній механіці рідин [11, 16–18], чи у дослідженнях квантових систем (див. нещодавній огляд [19]).

Аналіз моделей з далекосяжною взаємодією показав, що вони демонструють нові якісні властивості та поведінку, яка відмінна від аналогічних з короткосяжною взаємодією [20, 21]. До прикладу, системи із сильною далекосяжною взаємодією не є адитивними, що зокрема призводить до порушення ергодичності [22]. З іншого боку, хоча системи зі слабкою далекосяжною взаємодією є адитивними, взаємодія ефективно змінює критичні властивості та може зумовити далекосяжне впорядкування в одновимірних системах чи впливати на перехід до поведінки передбаченої теорією середнього поля при високій вимірності [8, 9, 16, 17].

Поряд із характером взаємодії, клас універсальності визначається також симетрією системи, зокрема симетрією відповідного ефективного гамільтоніану. Прикладом такої зміни класу універсальності, що буде предметом нашого досдіження, може бути внесення в магнітну систему структурної невпорядкованості. Ми зосередимось на випадку слабкого структурного безладу, оскільки сильний безлад, очевидно, впливає на критичну поведінку – супроводжується перколяційними та фрустраційними ефектами, що призводить до відсутності далекосяжного магнітного впорядкування. Як було показано у численних теоретичних та експериментальних роботах, слабкий безлад може змінити характер критичної поведінки чи навіть модифікувати впорядкування, спричинивши появу низькотемпературної фази з квазідалекосяжним впорядкуванням чи фази спінового скла [6, 23]. Клас універсальності чи навіть рід фазового переходу може змінюватись при зміні кількості компонент (вимірності) параметру порядку n в системах зі складними внутрішніми симетріями. Таке значення вимірності параметру порядку, при якому відбувається зміна класу універсальності, називається марґінальною чи граничною вимірністю n_c і становить окремий предмет досліджень при побудові кількісної теорії фазових переходів [24].

Метою нашого дослідження є проаналізувати зміни критичної поведінки багаточастинкової магнітної системи, коли конкурують два фактори: слабка далекосяжна взаємодія та слабкий структурний безлад. Аналіз проведемо за допомогою методу теоретико-польової ренормалізаційної групи, що дасть нам змогу ідентифікувати класи

універсальності досліджуваної системи, їх стійкість до змін глобальних параметрів та визначити універсальні характеристики критичної поведінки – критичні показники та граничні вимірності. Структура статті так: у розділі 2 ми зробимо короткий огляд попередніх робіт, опишемо метод дослідження і введемо основні характеристики досліджуваної моделі. В розділі 3 приведемо аналіз магнітної системи зі слабкою далекосяжною взаємодією між її магнітними моментами та слабким безладом у структурі ґратки, перейшовши до ефективної теорії та обчислюючи відповідні ренормгрупові функції у третьому порядку теорії збурень. Підсумки нашого дослідження приведені в розділі 4.

2. Огляд

В цьому розділі ми розглянемо особливості аналізу критичної поведінки при застосуванні методу ренормалізаційної групи, поступово ускладнюючи ефективні гамільтоніани досліджуваних систем. Аналіз розпочнемо із розгляду структурно-впорядкованого магнетика з короткосяжною взаємодією (підрозділ 2.1), деталізуючи зміни у критичній поведінці, що можуть викликатися далекосяжною взаємодією чи структурним безладом у підрозділах 2.2 і 2.3, відповідно.

2.1. Магнетик з короткосяжною взаємодією

Розглянемо систему взаємодіючих n-компонентних класичних векторів – "спінів" (магнітних моментів) $\vec{S}_{\mathbf{x}} = (S^1_{\mathbf{x}}, \ldots, S^n_{\mathbf{x}})$, розташованих у вузлах d-вимірної ґратки (Рис. 1), що маркуються вектором $\mathbf{x}$. Гамільтоніан такої багаточастинкової системи за відсутності зовнішнього магнітного поля запишеться:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)\vec{S}_{\mathbf{x}}\vec{S}_{\mathbf{x}'} \tag{2.1}$$

де підсумовування проводиться за всіма вузлами, $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) > 0$ – феромагнітна взаємодія між спінами $\vec{S}_{\mathbf{x}}$ та $\vec{S}_{\mathbf{x}'}$. У цьому підрозділі вважатимемо її короткосяжною, а саме ненульовою тільки для пар найближчих сусідів:

$$J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) = \begin{cases} J, & |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \text{стала ґратки}, \\ 0, & \text{у інших випадках.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Така модель є узагальненням відомої короткосяжної моделі Ізінга ($n = 1$) [25] на випадок n-компонентних спінів і є базовою моделлю

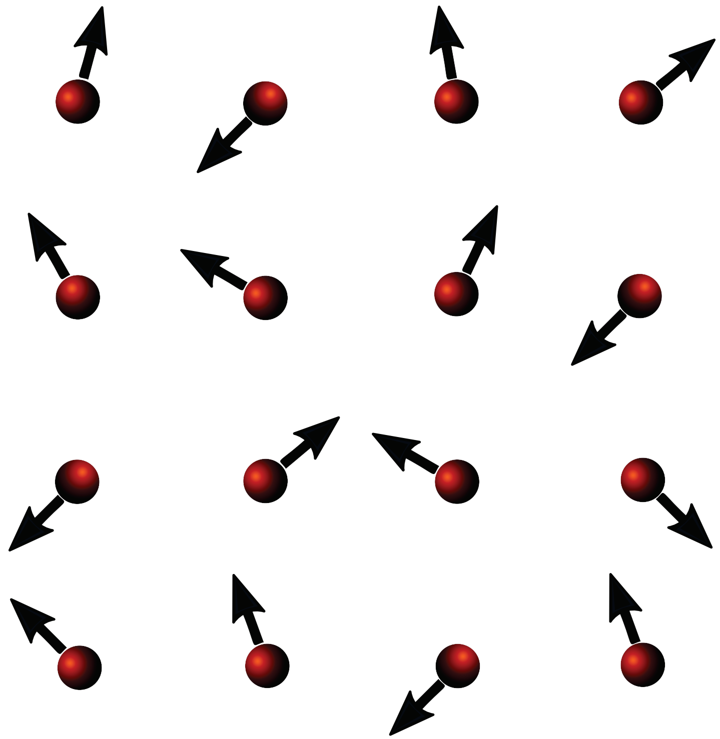

Рис. 1. Двовимірна ($d = 2$) ґратка, де червоні диски зображують вузли $\mathbf{x}$ ґратки з n-компонентними спінами $\vec{S}_{\mathbf{x}} = (S^1_{\mathbf{x}}, \ldots, S^n_{\mathbf{x}})$ (чорні стрілки).

для опису фазових переходів у системах з багатокомпонентним параметром порядку (її також називають n-векторною моделлю Стенлі чи, при $n = 3$, класичною моделлю Гайзенберґа) [26].

Сучасна теорія критичних явищ значною мірою зформована завдяки методу ренормалізаційної групи (РГ) [10], застосування якого базується на ідеї масштабної інваріантності в околі критичної точки, де поведінка системи визначається лише кореляційною довжиною. Кількісний опис критичних явищ з високою точністю здійснюється в рамках теоретико-польової РГ, коли статистична сума Z записується у вигляді функціонального інтегралу з відповідним ефективним гамільтоніаном [10]. У такому формулюванні універсальні критичні властивості фізичної системи отримуються з довгохвильової поведін-

ки теоретико-польових гамільтоніанів. Зокрема спіновому гамільтоніану (2.1), відповідатиме ефективний гамільтоніан теорії ϕ^4 :[1]

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}[\tau|\vec{\phi}|^2 + |\nabla\vec{\phi}|^2] + \frac{u_0}{4!}|\vec{\phi}|^4 \right\}, \tag{2.3}$$

де $\vec{\phi}(x)$ – n-компонентне векторне поле, $\tau \sim |T - T_c|$ визначає відстань до критичної точки, а $u_0 > 0$ – неперенормована константа зв'язку.

Для усунення характерних розбіжностей теорії поля (т.з. ультрафіолетових розбіжностей) [10, 27] використовують різні схеми перенормування – ренормалізаційно-групові перетворення. Зміна константи зв'язку при цьому описується рівнянням

$$\left. \frac{du}{d \ln \ell} \right|_{u_0, \tau} = \beta(u), \tag{2.4}$$

де ℓ – параметр РГ потоку, який може служити мірою відстані до критичної точки T_c ($T \to T_c$ відповідає $\ell \to 0$). β-функції, що стоять у правій частині рівняння дають інформацію про нерухомі точки u^* (НТ) РГ перетвореня, що відповідають ефективному гамільтоніану (2.3):

$$\beta(u^*) = 0. \tag{2.5}$$

Якщо існує стійка НТ, яка при цьому є досяжною з початкових умов, заданих ефективним гамільтоніаном (2.3), то вона відповідає наявності критичної точки в системі. Якщо такої НТ немає, то це свідчить про відсутність неперевного фазового переходу. НТ u^* є стійкою, якщо

$$\left. \frac{\partial \beta(u)}{\partial u} \right|_{u = u^*} > 0. \tag{2.6}$$

Для ефективного гамільтоніану (2.3) існують дві НТ:

(i) гаусова $\mathcal{G}$ ($u^* = 0$), яка для $d \geq 4$ є стійкою і приводить до значень критичних показників, передбачених теорією середнього поля;

(ii) НТ Вільсона-Фішера (надалі, розглядаючи системи з домішками, ми називатимемо цю НТ "чиста" – pure) $\mathcal{P}$ ($u^* \neq 0$), яка є стійкою для $d < 4$, [28].

[1] Такий ефективний гамільтоніан можна отримати з мікроскопічного гамільтоніану (2.1) за допомогою перетворення Стратоновича-Габарда, див. наприклад [27].

Значення $d_{\text{uc}} = 4$, вище якого стійкою є гаусова НТ і справедлива середньо-польова поведінка, називається верхньою критичною вимірністю, див. однак [29]. Для тривимірних $d = 3$ систем НТ $\mathcal{P}$ зі зміною кількості компонент n параметру порядку описує такі класи універсальності як модель Ізінга ($n = 1$), XY-модель ($n = 2$), модель Гайзенберґа ($n = 3$), сферична модель ($n = \infty$), детальніше див. [10, 23] Значення константи зв'язку u^* у нерухомій точці $\mathcal{P}$ дозволяє розрахувати критичні показники для тривимірного n-компонентного магнетика з короткосяжною взаємодією, підставивши u^* у так звані вільсонівські РГ функції γ які описують перенормування поля та відстані до критичної точки. Оскільки і β- і γ-функції отримані за допомогою теорії збурень, одним з способів отримати і нерухому точку, і критичні показники є їх пошук у вигляді ряду за відхиленням від верхньої критичної вимірності $\epsilon = 4 - d$. Нещодавно відповідні результати були отримані у шостому [30] та сьомому (!) [31] порядках теорії збурень. Приведемо два перших нетривіальних члени ϵ-розкладу для критичного показника кореляційної довжини:

$$\nu_P = \frac{1}{2} + \frac{(n+2)\epsilon}{4(n+8)} + \frac{(n+2)(n+3)(n+20)\epsilon^2}{8(n+8)^3} + \dots . \tag{2.7}$$

Ряди теорії збурень, такі як розклад за константою звязку чи ϵ-розклад мають нульовий радіус збіжності, для деяких рядів доведена їх асимптотична природа [10]. Тому для отримання чисельних оцінок на їх основі були розвинуті різні методи пересумовування [7, 32, 33].

Отриманий вираз для критичного показника кореляційної довжини (2.7) свідчить про те, що критична поведінка моделі (2.3) нетривіальним чином залежить від вимірності простору d та кількості компонент параметру порядку n. В наступному підрозділі, модифікувавши спіновий гамільтоніан (2.1), ми розглядемо ще один чинник, який може змінювати універсальні характеристики критичної поведінки.

2.2. Далекосяжна взаємодія

У цьому підрозділі ми знов розглядаємо магнетик, який моделюватимемо регулярною d-вимірною ґраткою, Рис. 1. Спіновий гамільтоніан буде мати попередній вигляд (2.1), однак тепер розглядемо випадок, коли взаємодія $J(x)$ степенево згасає з відстаню x:

$$J(x) \sim \frac{1}{x^{d+\sigma}}, \qquad x \to \infty . \tag{2.8}$$

Таку взаємодію називатимемо далекосяжною. Як згадувалося у вступі, системи з далекосяжною взаємодією можна поділити на дві групи: системи із сильною далекосяжною взаємодією, коли $-d \le \sigma \le 0$ (неадитивні) та ті, в яких параметр взаємодії є додатнім $\sigma > 0$ – системи зі слабкою далекосяжною взаємодією. Саме останні й розглядаються у цій роботі. Як побачимо із результатів досліджень приведених нижче, вплив такої взаємодії буде домінуючим при $0 < \sigma \le \sigma^*$, де σ^* – порогове значення, і критична поведінка моделі (2.1) з (2.8) визначатиметься тепер трійкою параметрів: вимірністю простору d, кількістю компонент параметру порядку n та параметром σ, який описує характер згасання взаємодії. Залежно від значень цих параметрів, може відбуватися низькотемпературне впорядкування, яке належить до нового далекосяжного (long-range – LR) класу універсальності, відмінного від корокосяжного (short-range – SR) випадку, розглянутого в попередньому підрозділі. Зокрема для тривимірної $d = 3$ сферичної моделі, коли $n = \infty$ [34], критична поведінка для $\sigma > 2$ визначається критичними показниками короткосяжного аналога, у той час як для $\sigma < 2$ можливі два режими, залежно від значення показника взаємодії σ: (i) середньо-польова поведінка та (ii) σ-залежні критичні показники. Більш того, встановлено, що у одновимірній $d = 1$ моделі Ізінга ($n = 1$) з далекосяжною взаємодією (2.8) при ненульовій температурі відбувається фазовий перехід у фазу далекосяжного впорядкування [35].

У теоретико-польовому представлені критичні властивості n-векторної моделі (2.1) з далекосяжною степенево-згасною взаємодією (2.8) описуються таким ефективним гамільтоніаном [21]:

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}[\tau|\vec{\phi}|^2 + a|\nabla\vec{\phi}|^2 + b|\nabla^{\sigma/2}\vec{\phi}|^2] + \frac{u_0}{4!}|\vec{\phi}|^4 \right\}, \tag{2.9}$$

де позначення такі ж як у (2.3) а відмінністю є ще один оператор, дія якого в імпульсному просторі така: $\nabla^{\sigma/2} e^{i\vec{k}\vec{x}} = -|k|^{\sigma/2} e^{i\vec{k}\vec{x}}$, a і b – додатні параметри.

Аналіз довгохвильових властивостей ефективного гамільтоніану (2.9) методами теоретико-польової РГ, показав наступне [21]:

- (i) для параметра згасання взаємодії, що перевищує деяке граничне значення $\sigma > \sigma_*$ критичні властивості описуються теорією з $b = 0$. В цьому випадку клас універсальності співпадає з класом універсальності моделі з короткосяжною взаємодією (2.3), що визначається звичайною НТ Вільсона-Фішера. Надалі позначатимемо його як SR – short-range;

- для $\sigma < \sigma_*$ критичні властивості систем з далекосяжною взаємодією описуються теорією з $a = 0$. У цьому випадку спостерігаються два класи універсальності:

  (ii) для $\sigma < d/2$ стійкою є далекосяжка гаусова НТ $\mathcal{G}^{LR}$ $(u^* = 0)$ і універсальна поведінка описується середньо-польовими критичними показниками (крім критичних показників кореляційної довжини та парної кореляційної функції, які дорівнюють $\nu = 1/\sigma$ і $\eta = 2 - \sigma$, відповідно). Верхня критична вимірність у цьому випадку $d_{\mathrm{uc}} = 2\sigma$, при $\sigma = 2$ вона співпадає з традиційною $d_{\mathrm{uc}} = 4$;

  (iii) для $d/2 < \sigma < \sigma_*$ стійкою є далекосяжна НТ Вільсона-Фішера $\mathcal{P}^{LR}$ $(u^* \neq 0)$ і критичні показники залежать від σ. В цій ділянці параметрів критичні показники n-векторної спінової моделі не відповідають ні моделі з короткосяжною взаємодією, ні середньо-польовій моделі [8, 9, 20, 21] – спостерігається новий нетривіальний LR клас універсальності.

Значення параметру σ^*, яке визначає границю між LR та SR класами універсальності визначається критичним показником парної кореляційної функції системи з короткосяжною взаємодією: $\sigma^* = 2 - \eta_{SR}$ [8, 21, 36, 37]. Розрахунок критичних показників у цьому випадку проводиться у вигляді ряду за відхиленнями від нової верхньої критичної вимірності $\epsilon' = 2\sigma - d$. Зокрема, критичний показник ν відомий у третьому порядку теорії збурень [38] (ми подаємо тільки два перші нетривіальні члени розкладу):

$$\nu_{LR} = \frac{1}{\sigma} + \frac{(n+2)\epsilon'}{(n+8)\sigma^2} + \frac{(n+2)[(n+2)(n+8) + (7n+20)\sigma\mathcal{D}_\sigma]\epsilon'^2}{(n+8)^3\sigma^3} + \ldots . \tag{2.10}$$

Тут $\mathcal{D}_\sigma = \psi(\sigma) - 2\psi(\sigma/2) + \psi(1)$ і $\psi(x) = \Gamma(x)/\Gamma'(x)$ – дигамма-функції.

Порівнюючи вирази (2.7) та (2.10) бачимо, як засяг взаємодії, поряд із вимірністю простору та параметра порядку, може чинити вплив на універсальні характеристики фазового переходу. Ще одним чинником, що може змінювати клас універсальності, є структурний безлад. З його впливом ознайомимося в наступному підрозділі.

2.3. Структурний безлад

Структурний безлад часто моделюється введенням випадкових змінних у гамільтоніани взаємодії. В залежності від задачі, змінні, які

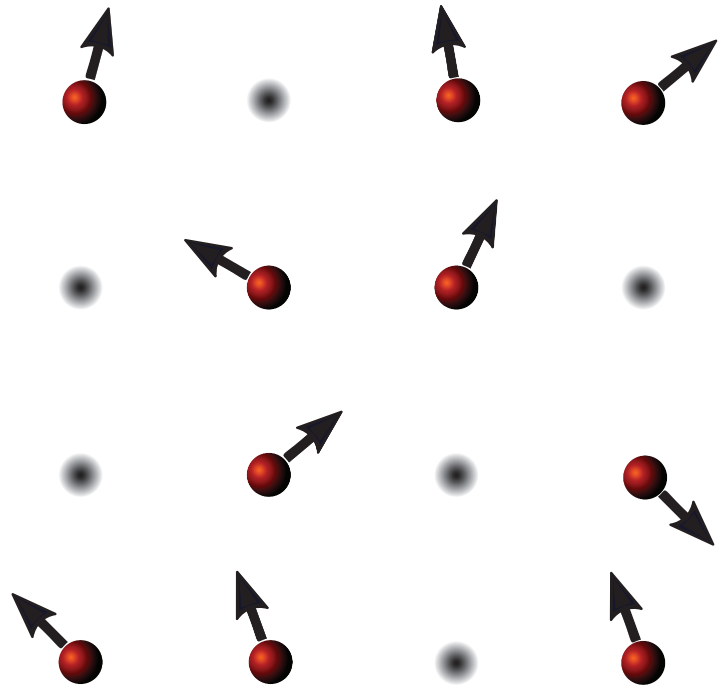

Рис. 2. Структурно-невпорядкована двовимірна $(d = 2)$ ґратка (розведення). Червоні диски зображають вузли $\mathbf{x}$ ґратки з n-компонентними спінами $\vec{S}_{\mathbf{x}} = (S^1_{\mathbf{x}}, \ldots, S^n_{\mathbf{x}})$ (чорні стрілки), а сірі – вузли, які містять немагнітні домішки.

описують домішки або дефекти структури, вважаються такими, що перебувають у рівновазі з системою (відпалений – annealed – безлад), або, коли їхні часи релаксації перевищують час спостережень, зафіксованими у певній конфігурації (заморожений – quenched – безлад) [39]. У цій роботі розглядаються зміни критичної поведінки, викликані замороженим безладом. Сильний безлад може істотно змінити критичну поведінку магнетика, привівши, наприклад до відсутності феромагнітного впорядкування за скінчених температур. Слабкий безлад менш кардинальний, зокрема він може й не руйнувати низькотемпературний феромагнітний основний стан [23]. Тому розглянемо випадок слабкого замороженого безладу у вигляді розведення моделі (2.1) точковими нескорельованими замороженими немагнітними домішками (див. Рис. 2). Вплив такого безладу на фазовий перехід у магнето-впорядкований стан визначається критерієм Гаріса [40]: якщо критичний показники теплоємності “чистої” (без домішок) системи є додатнім $\alpha_P > 0$, тобто теплоємність ($C \sim |T - T_c|^{-\alpha_P}$) розбігається у критичній точці, то структурний безлад змінює критичні показник та призводить до нового класу універсальності магнітного фазового переходу. Відповідно, безлад є несуттєвим, тобто не змінює класу універсальності магнітного фазового переходу якщо $\alpha_P < 0$.

Спіновий гамільтоніан (2.1) у цьому випадку запишеться як:

$$\mathcal{H} = -\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}'} J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) c_{\mathbf{x}} c_{\mathbf{x}'} \vec{S}_{\mathbf{x}} \vec{S}_{\mathbf{x}'} \tag{2.11}$$

де $J(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ задається (2.2), а числа заповнення $c_{\mathbf{x}} = 1$, якщо вузол $\mathbf{x}$ є зайнятим спіном та $c_{\mathbf{x}} = 0$, якщо вузол $\mathbf{x}$ зайнятий немагнітною домішкою. При цьому вважається, що концентрація домішок набагато менша від концентрації магнітної складової.

Теоретико-польове представлення для замороженого безладу має свою особливість. Зокрема, у системі присутні випадкові конфігурації заморожених “дефектів” ґратки і щоб отримати вільну енергію F для замороженої системи, потрібно усереднювати логарифм конфігураційно залежної статистичної суми $Z_{\rm conf}$ за всіма можливими випадковими конфігураціями, що є нетривіальною задачею. Обійти усереднення логарифма можна, використовуючи метод реплік [41].

$$\overline{F} = \overline{\ln Z_{\rm conf}} = \lim_{m\to 0} \frac{\overline{Z^m_{\rm conf} - 1}}{m}. \tag{2.12}$$

При цьому задача зводиться до обчислення середнього від m копій або реплік системи. Властивості оригінальної системи відтворюються в границі $m \to 0$. У теоретико-польовому описі це приводить до модифікації симетрії параметру порядку і ефективний гамільтоніан містить дві константами зв’язку з різними симетріями:

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{m} [\tau|\vec{\phi}^\alpha|^2 + |\nabla \vec{\phi}^\alpha|^2] + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^{m} |\vec{\phi}^\alpha|^4 + \frac{v_0}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^{m} (\vec{\phi}^\alpha)^2 \right)^2 \right\}, \tag{2.13}$$

де $\vec{\phi}^\alpha(\vec{x}) = \{\phi_1^\alpha(\vec{x}), \ldots, \phi_n^\alpha(\vec{x})\}$ – це m разів реплікований n-компонентний параметр порядку; підсумовування за грецькими індексами відповідає різним реплікам; коефіцієнти при доданках ϕ^4 різної симетрії $u_0 > 0$ та $v_0 < 0$ – це неперенормовані константи зв’язку.

Ефективний гамільтоніан (2.13) описує вплив домішок на критичну поведінку магнетика. Він відрізняється від ефективного гамільтоніану “чистої” моделі (2.3) тим, що має дві константи зв’язку.

Тому рівняння РГ потоку (2.4) тепер перепишеться як система двох диференційних рівнянь, що відповідно містять дві β-функції і НТ знаходяться як розв’язок системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta_u(u^*, v^*) &= 0, \\ \beta_v(u^*, v^*) &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Умова стійкості нерухомих точок (2.14) узагальнюється за допомогою матриці стійкості:

$$B_{ij} = \frac{\partial \beta_{u_i}}{\partial u_j}. \tag{2.15}$$

НТ буде стійкою, якщо усі власні значення λ_i матриці стійкості (2.15), які пораховані у цій точці, мають додатні дійсні частини.

Структура β-функцій для структурно-невпорядкованого магнетика свідчить про те, що в параметричному просторі (u, v) існують чотири нерухомі точки (u^*, v^*) [42], див. Рис. 3. Фізичними є

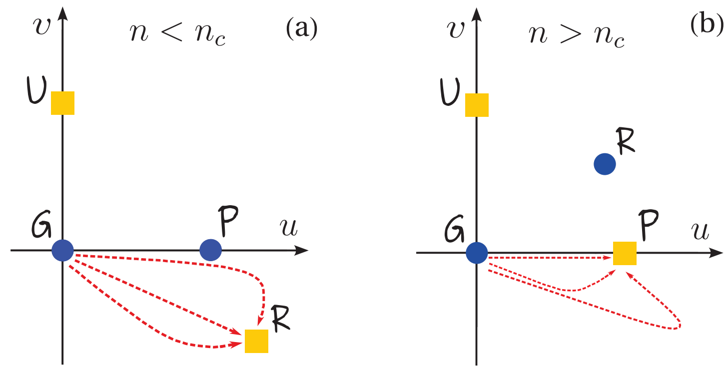

Рис. 3. Чотири НТ, що відповідають з точністю до числових значень їх координат моделям (2.13) і (3.1) для випадку $d = 3$: (i) гаусова $\mathcal{G}$; (ii) нефізична $\mathcal{U}$; (iii) чиста $\mathcal{P}$; (iv) зумовлена безладом (випадкова – random) $\mathcal{R}$. Жовтими квадратами позначено стійкі НТ, синіми кружками – нестійкі, червоні пунктирні лінії зображають РГ потоки. Як видно з рисунка, стійкість $\mathcal{P}$ та $\mathcal{R}$ змінюється при переході через граничну вимірність n_c: (a) при $n < n_c$ $\mathcal{R}$ є стійкою, а $\mathcal{P}$ – нестійка; (b) при $n > n_c$ $\mathcal{P}$ є стійкою, а $\mathcal{R}$ – нестійка. Нефізична НТ $\mathcal{U}$ стійка завжди при $\epsilon > 0$, однак недосяжна з початкових умов $u > 0$ та $v < 0$.

ті НТ, які відповідають початковим умовам ефективного гамільтоніану (2.13) $u > 0$ та $v < 0$. Для тривимірної системи у реплічній границі ($d = 3$, $m = 0$) це:

(i) гаусова $\mathcal{G}$ ($u^* = 0$, $v^* = 0$) – завжди нестійка при $d < 4$;

(ii) нефізична $\mathcal{U}$ ($u^* = 0$, $v^* \neq 0$) – стійка, але недосяжна з фізичних початкових умов $u > 0$ та $v < 0$, заданих (2.13);

(iii) чиста (система без домішок – pure) $\mathcal{P}$ ($u^* \neq 0$ та $v^* = 0$) – стійкійсть залежить від значення кількості компонент параметра порядку n (стійка для $n > n_c^{SR}(d)$);

(iv) випадкова (зумовлена безладом – random) $\mathcal{R}$ ($u^* \neq 0$ та $v^* \neq 0$) – стійкійсть залежить від значення кількості компонент параметра порядку n (стійка для $n < n_c^{SR}(d)$).

Одразу бачимо цікаву особливість, спричинену присутністю слабкого структурного безладу: стійкість двох НТ (чистої $\mathcal{P}$ та випадкової $\mathcal{R}$), які визначають критичну поведінку моделі при $\epsilon > 0$, залежить від кількості компонент n параметру порядку. Вираз для критичного показника обчисленого у точці $\mathcal{P}$ у формі ϵ-розкладу співпадає з (2.7), у той час як для точки $\mathcal{R}$ результат буде таким:

$$\nu_R = \frac{1}{2} + \frac{3n\epsilon}{32(n-1)} + \frac{n(127n^2 - 572n - 32)\epsilon^2}{(16(n-1))^3} + \ldots , \qquad n \neq 1 . \quad (2.16)$$

У вступі згадувалось про вимірності параметра порядку при яких система може змінювати клас універсальності – так звані граничні чи марґінальні (marginal) вимірності. Для розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією гранична вимірність n_c залежить лише від вимірності простору $n_c \equiv n_c^{SR}(d)$ і контролює два різні критичні режими. При $n > n_c$ критичні показники моделі (2.13) будуть такі ж як для “чистої” моделі (2.3), іншими словами, критичні показники “чистої” моделі не змінюються при впровадженні структурного безладу. В наступному розділі, див. Рис. 4, цей клас універсальності позначатимемо як SR – short-range. Інший режим спостерігається при коли $n < n_c^{SR}$: безлад впливає на критичну поведінку і критичні показники набувають нових значень (клас універсальності, зумовлений структурним безладом і позначений на Рис. 4 як RSR – random short-range). Більш того, значення $n_c^{SR}(d = 3) = 1.912$, тобто менше ніж 2, що означає, що при цілих n новий клас універсальності для тривимірного випадку спостерігається тільки у випадку моделі Ізінга ($d = 3, n = 1$): див. панель (а) на Рис. 4.

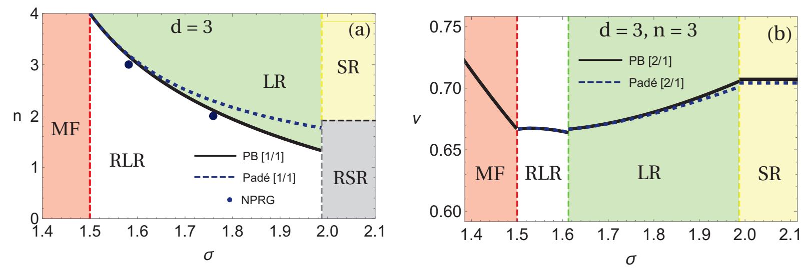

Рис. 4. **(a)**: Класи універсальності структурно-невпорядкованого магнетика із далекосяжною взаємодією у параметричному просторі $\sigma - n$ для $d = 3$. Гранична вимірність параметру порядку $n_c^{LR}(\sigma, 3)$ для $d = 3$ відділяє клас універсальності “чистої” моделі з далекосяжною взаємодією (LR), від класу універсальності, зумовленого структурним безладом (RLR). Синя пунктирна лінія: пересумовання з використанням апроксимації Паде[1/1], чорна суцільна лінія: пересумовування методом Паде-Бореля. Середньо-польова (MF) поведінка спостерігається для $\sigma < d/2 = 1.5$. Точками позначено результати методу непертурбативної РГ [8]. При при $\sigma > \sigma^* = 2 - \eta_{SR}$ реалізується поведінка моделі з короткосяжною взаємодією: при $n > n_c^{SR}(3) = 1.912$ – клас універсальності “чистої” моделі (SR) та при $n < n_c^{SR}(3)$ – клас універсальності, зумовлений структурним безладом (RSR) [23].
(b): Показник кореляційної довжини ν для $d = n = 3$ як функція σ. Зі зміною σ відбувається перехід (кросовер) між різними класами універсальнотсі: MF ($\sigma < d/2$), RLR ($d/2 < \sigma < \hat{\sigma} = 1.6127$), LR ($\hat{\sigma} < \sigma < \sigma^* = 2 - \eta_{SR}$), SR ($\sigma > \sigma^*$).

Ситуація, коли при певному значенні вимірності параметра порядку n структурний безлад не впливає на критичну поведінку і коли він є суттєвим при іншому значенні n відповідає згаданому вище критерію Гаріса. Таким чином критерій Гаріса дозволяє прогнозувати зміни у класі універсальності “чистої” системи при додаванні структурного безладу без явного розрахунку РГ функцій для розведеної моделі. І справді, структурний безлад змінює клас універсальності лише тоді, коли теплоємність “чистої” системи розбігається ($\alpha_p > 0$). Тоді можна використати умову $\alpha_p = 0$ та співвідношення гіперскейлінґу $\alpha_p = 2 - d\nu_p$ (де ν_p – показник кореляційної довжини “чистої” моделі) як рівняння для визначення параметрів (d, n), що розрізнятимуть різні класи універсальності.

У тривимірому ($d = 3$) просторі клас універсальності викликаний безладом реалізується тільки для одновісних магнетків (модель Ізінга $n = 1$), але у цьому випадку ми не можемо скористатись виразом (2.16) для числової оцінки. Присутність степенів $(n-1)^{-1}$ є наслідком виродження системи рівнянь на нерухому точку у першому порядку теорії збурень. У цьому випадку був розроблений метод $\sqrt{\epsilon}$-розкладу [43]. В рамках цього розкладу перші доданки ряду для критичного показника кореляційної довжини структурно-невпорядкованої моделі Ізінга мають вигляд

$$\nu_R = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{318}}{212}\sqrt{\epsilon} + \ldots\,, \qquad n = 1\,. \tag{2.17}$$

Збіжність $\sqrt{\epsilon}$-розкладу ще гірша, ніж у ϵ-розкладу [44]. Тому на практиці для цього випадку використовуть підхід перенормування при фіксованій вимірності простору [45]. Відповідно, методи пересумовування застосовують безпосередньо до β-функцій при фісованому d, ров'язують рівняння на нерухому точку чисельно, а знайдений розв'язок підставлять у (пересумовані) γ-функції для знаходження критичних показників [33, 42].

У цьому розділі ми коротко зупинились на змінах у критичній поведінці магнетика, які можуть викликатися слабкою далекосяжною взаємодією (підрозділ 2.2) чи слабким структурним безладом (підрозділ 2.3). Природно виникає запитання: яких змін слід чекати, коли ці два чинники присутні разом? Пошуку відповіді на це запитання присвячений наступний розділ.

3. Спільний вплив структурної невпорядкованості та далекосяжної взаємодії

Спіновий гамільтоніан для розведеного магнетика з далекосяжною взаємодією має вигляд (2.11), однак тепер характер взаємодії задається формулою (2.8). Одразу обумовимось, що, подібно як у підрозділі 2.2, ми розглядатимемо випадок слабкої далекосяжної взаємодії, коли значення параметру згасання взаємодії знаходиться в області $d/2 < \sigma < 2 - \eta_{SR}$, де η_{SR} – показник парної кореляційної функції моделі з короткосяжною взаємодією (див. підрозділ 2.2). Як і в попередніх підрозділах, після усереднення за конфігураціями з допомогою методу реплік можна отримати ефективний гамільтоніан структурно-невпорядкованого магнетика (2.11) із взаємодією

(2.8) [46]:

$$\mathcal{H}_{eff}=\int d^dx \left\{ \frac{1}{2}[\tau|\vec{\phi}^\alpha|^2+|\nabla^{\sigma/2}\vec{\phi}^\alpha|^2]+\frac{u_0}{4!}\sum_{\alpha=1}^{m}|\vec{\phi}^\alpha|^4+\frac{v_0}{4!}\left(\sum_{\alpha=1}^{m}(\vec{\phi}^\alpha)^2\right)^2\right\}. \tag{3.1}$$

Тут усі позначення є такими ж як у (2.9) та (2.13). Оскільки нас цікавитиме тільки випадок $\sigma < 2-\eta_{SR}$ ми не враховуємо член $|\nabla\vec{\phi}^\alpha|^2$, що відповідає $a = 0$ у (2.9).

Використовуючи РГ функції отримані для чистої і кубічної моделей із далеклсяжною взаємодією у трипетлевому наближенні [38] та розраховані у цьому ж наближенні тензорні множники для короткосяжної mn-моделі [47], ми отримали ренормгрупові функції, що відповідають теорії (3.1) у трипетлевому наближенні для довільних значень n та m [48]. У параметричному просторі констант зв'язку (u, v) структура нерухомих точок для ефективного гамільтоніану (3.1) при $m = 0$ є подібною до нерухомих точок ефективного гамільтоніану (2.13). Зокрема існують чотири нерухомі точки (u^*, v^*), які залежать від значень $\epsilon' = 2\sigma - d$ та кількості компонент n параметру порядку [46, 49], див. також Рис. 3:

(i) далекосяжна гаусова $\mathcal{G}^{LR}$ $(u^* = 0, v^* = 0)$ – завжди нестійка при $\epsilon' > 0$ тобто для $d < 2\sigma$;

(ii) далекосяжна нефізична $\mathcal{U}^{LR}$ $(u^* = 0, v^* \neq 0)$ – стійка при $\epsilon' > 0$, однак недосяжна за відповідних початкових умов;

(iii) далекосяжна "чиста" $\mathcal{P}^{LR}$ $(u^* \neq 0, v^* = 0)$ – стійка при $\epsilon' > 0$ та $n > n_c^{LR}(\sigma, d)$;

(iv) далекосяжна випадкова $\mathcal{R}^{LR}$ $(u^* \neq 0, v^* \neq 0)$ – стійка при $\epsilon' > 0$ та $n < n_c^{LR}(\sigma, d)$.

Подібно як і для розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією (підрозділ 2.3), стійкість чистої та випадкової нерухомих точок $\mathcal{P}^{LR}$ та $\mathcal{R}^{LR}$ залежить від значення вимірності параметру порядку n: гранична вимірність $n_c^{LR}(\sigma, d)$ розділяє два критичні режими. При $n > n_c^{LR}(\sigma, d)$ стійкою є $\mathcal{P}^{LR}$ і критичні показники моделі (3.1) будуть такі ж як і для "чистої далекосяжної" моделі (2.9) у підрозділі 2.2. У цьому випадку структурний безлад не змінює критичну поведінку моделі (2.9) і відповідний клас універсальності позначений на рис. 4 як LR. Однак при $n < n_c^{LR}(\sigma, d)$ стійкою є $\mathcal{R}^{LR}$ – структурний безлад змінює критичні показники і вони відрізняються від значень"чистої далекосяжної” моделі (2.9). Іншими словами, ми маємо новий “далекосяжний” клас універсальності зумовлений структурним безладом. На Рис. 4 цей клас універсальності позначений як RLR.

Для розглянутого у підрозділі 2.3 тривимірного розведеного магнетика з короткосяжною взаємодією новий клас універсальності реалізується тільки у випадку моделі Ізінга ($n = 1$). На Рис. 4(a) цей клас універсальиості позначений як RSR – random short-range. Для розведеного магнетика з далекосяжною взаємодією ситуація цікавіша. Якщо знову ж таки скористатись критерієм Гаріса, використовуючи умову $\alpha_p(d, n, \sigma) = 0$, то можна знайти граничне значення параметру порядку $n_c = n_c^{LR}(d, \sigma)$, що відділяє різні класи універсальності. Так використовуючи трипетлеві результати для критичних показників чистої n-векторної моделі з далекосяжною взаємодією [38], ми отримали вираз для граничної вимірності параметра порядку $n_c^{LR}(d, \sigma)$ у вигляді ряду за ϵ' [50]. Оцінки для тривимірних і двовимірних систем були отримані за допомогою пересумовування з використанням апроксимант Паде та методом Паде-Бореля (для деталей див. опис в [50]). Результати для випадку $d = 3$ представлено на Рис. 4(a) синьою пунктирною лінією (Паде-апроксиманти) та чорною суцільно лінією (метод Паде-Бореля). Синіми точками на графіку показані інтерпольовані дані ще одного варіанту теоретико-польового підходу, а саме непертурбативної РГ [8]. Вище кривої ($n > n_c^{LR}$) реалізується “далекосяжний” клас універсальності LR і критичні показники розведеної моделі з далекосяжною взаємодією співпадають з “чистою далекосяжною” моделлю – структурний безлад не впливає на критичну поведінку. Однак нижче кривої $n_c(d = 3, \sigma)$ ($n < n_c^{LR}$) безлад змінює критичні показники “чистої далекосяжної” моделі і реалізується новий клас універсальності, зумовлений структурним безладом, random long-range – DLR. Для розведеної моделі з короткосяжною взаємодією при цілих значеннях n тільки модель Ізінга ($n = 1$) належить до класу універсальності, зумовленого безладом: на Рис. 4 класи універсальності RSR та SR розділені граничною вимірністю $n_c^{SR} = 1.912$. На відміну від цього, у випадку розведеної моделі з далекосяжною взаємодією до нового “далекосяжного” класу універсальності для різних значень контролюючого параметру взаємодії σ можуть належати модель Ізінга ($n = 1$), XY-модель ($n = 2$) та модель Гайзенберґа ($n = 3$).

Обчисливши значення РГ γ-функцій у стійкій нерухомій точці $\mathcal{R}^{LR}$ ми отримали вираз для критичного показника ν структурно-невпорядкованого магнетика із далекосяжною взаємодією у вигляді ряду за ϵ' до порядку ϵ'^3 включно. Тут приводимо результат для

$n = 3$:

$$\nu_{RLR} = \frac{1}{\sigma} + \frac{9\epsilon'}{16\sigma^2} + \frac{3(515\mathcal{D}_\sigma\sigma + 432){\epsilon'}^2}{4096\sigma^3} + \mathcal{E}_\sigma{\epsilon'}^3 + \ldots, \qquad n = 3\,, \tag{3.2}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\sigma \;=\; & \frac{3}{524288\sigma^3}\Bigg(\left(169991\mathcal{D}_\sigma^2\sigma + 74160\mathcal{D}_\sigma + 206\pi^2\sigma\right) - 1236\sigma\psi^{(1)}(\sigma) \\
+ \; & \frac{3526\sigma\Gamma\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}+1\right)^3\left(\pi^2 - 6\psi^{(1)}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)}{\Gamma(\sigma)} + \frac{72960\Gamma\left(-\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma(\sigma+1)^2}{\Gamma\left(\frac{3\sigma}{2}\right)\sigma} \\
+ \; & \frac{31104}{\sigma}\Bigg),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

а $\Gamma(x)$ і $\psi^{(1)}(x)$ гамма-функція і перша похідна дигамма-функції, відповідно.

Зазначимо, що при $n = 1$ в реплічній границі $m = 0$, спостерігається така ж ситуація як в розведеній моделі з короткосяжною взаємодією: система рівнянь на нерухому точку вироджена у першому порядку теорії збурень. У цьому випадку ми скористались $\sqrt{\epsilon'}$-розкладом і отримали такий вираз:

$$\nu_{RLR} = \frac{1}{\sigma} - \frac{\sqrt{\epsilon'}}{3\sigma^2\sqrt{\mathcal{D}_\sigma}} + \frac{(2 + \mathcal{D}_\sigma(5 - 12\,\mathcal{G}_\sigma)\sigma)\epsilon'}{18\mathcal{D}_\sigma\sigma^3} + \ldots, \qquad n = 1\,, \tag{3.4}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\sigma = & \frac{1}{432\mathcal{D}_\sigma^2}\left(25\pi^2 - 918\mathcal{D}_\sigma^2 + 336\psi^{(1)}\left(\frac{\sigma}{2}\right) - 486\psi^{(1)}(\sigma) + 336J_0\right. \\
& \left. - \frac{\Gamma\left(-\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma(\sigma)}\left(\frac{752\Gamma(\sigma)^3}{\Gamma\left(\frac{3\sigma}{2}\right)} + 17\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)^3\left(\pi^2 - 6\psi^{(1)}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$\mathcal{D}_\sigma$ виражається через дигамма функції, див. (2.10), а J_0 [38]:

$$\begin{aligned}
J_0 \;=\; & \frac{1}{\Gamma(\frac{\sigma}{2})^2}\sum_{j\geq 1}\frac{\Gamma(j+\sigma)\Gamma(j+\frac{\sigma}{2})^2}{j(j!)\Gamma(2j+\sigma)}\Big[2\psi(j+1) - \psi(j) - 2\psi\left(j+\frac{\sigma}{2}\right) \\
- \; & \psi(j+\sigma) + 2\psi(2j+\sigma)\Big].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

На Рис. 4 (b) зображена залежність критичного показника кореляційної довжини тривимірного гайзенбергівського d=n=3 структурно-невпорядкованого магнетика від параметра згасання взаємодії

σ. Для отримання чисельних оцінок виразу (3.2) ми застосували дві техніки пересумовування: апроксимацію Паде [2/1] (синя пунктирна лінія на Рис. 4) та метод Паде-Бореля з апроксимантою Паде [2/1] (чорна суцільна лінія). Прослідкуємо за поведінкою показника кореляційної довжини $\nu(\sigma, d)$ зі зміною контролюючого параметру згасання взаємодії σ при $d = 3$. Для $\sigma < d/2$ спостерігається середньо-польова поведінка з показником $\nu = 1/\sigma$ (ділянка MF на рисунку). Для $\sigma > d/2$ реалізується "далекосяжний" клас універсальності, який зумовлений наявністю структурного безладу (RLR). Переходячи через граничну вимірність $\hat{\sigma} \approx 1.61$, критичний показник кореляційної довжини $\nu(\sigma, d)$ для розведеної моделі з далекосяжною взаємодією співпадає з критичним показником для "чистої" моделі з далекосяжною взаємодією (LR) [38]. Далі зі збільшенням значення σ при $\sigma^* = 2 - \eta_{SR}$ реалізується "короткосяжний" клас універсальності з критичними показниками, як у моделі з короткосяжною взаємодією (2.3) з підрозділу 2.1.

4. Висновки

Великі класи, на перший погляд різних за своєю мікроскопічною природою систем, можуть мати однакові термодинамічні та структурні характеристики в околі критичної точки, що описуються універсальними степеневими законами. Такі системи об'єднують у т.з. класи універсальності. Їх формування визначається такими глобальними характеристиками як тип взаємодії, вимірність простору, симетрія та кількість компонент параметру порядку. Тому цікаво дослідити як взаємний вплив цих характеристик може позначитись на критичних особливостях системи. Зокрема, у цій роботі ми дослідили як може змінюватися критична поведінка багаточастинкової системи, коли конкурують два фактори, а саме далекосяжна взаємодія та структурний безлад. З цією метою ми розглянули систему взаємодіючих n-компонентних класичних спінів та як метод дослідження використали підхід теоретико-польової ренормалізаційної групи. В результаті, ми прослідкували як на критичну поведінку n-векторної моделі впливає така взаємна гра глобальних характеристик. Зокрема, далекосяжна взаємодія зумовлює "далекосяжний" клас універсальності, з критичними показниками відмінним від моделі з короткосяжною взаємодією, у той час як структурний безлад зумовлює появу нового "випадкового" класу універсальності. Таку зміну ми простежили, змінюючи кількість компонент параметру порядку n та параметр згасання взаємодії σ. В нашій роботі продемонстровано,

що існує така ділянка параметрів n, σ коли далекосяжна взаємодія і структурний безлад приводять до синергетичного ефекту і появи нового, "випадкового далекосяжного" (random long-range, RLR на Рис. 4) класу універсальності. Зображена на Рис. 4(a) фазова діаграма свідчить про різноманітність типів критичної поведінки структурно-невпорядкованого магнетика із далекосяжною взаємодією: залежно від кількості компонент параметра порядку та параметра згасання взаємодії, тривімирний магнетик може належати до п'яти (!) різних класів універсальності.

Для кількісного опису критичної поведінки в новому класі універсальності, ми отримали вирази для граничної вимірності [50] та критичного показника кореляційної довжини. Формули (3.2), (3.4) отримані в найвищому на сьогодні, третьому порядку теорії збурень для такої задачі. Для їх чисельної оцінки ми застосували різні способи аналізу асимтотичних рядів. Один із отриманих результатів для моделі Гайзенберґа приведений на Рис. 4(b). Детальний виклад аналітичних розрахунків та чисельного аналізу буде предметом окремої публікації [48].

Ми вдячні колегам з лабораторії статистичноґї фізики складних систем ІФКС НАН України за дружні обговорення представлених тут результатів. Ця робота виконувалась за підтримки проекту КП-КВК 6541030 НАН України "Емерджентність у м'якій речовині" (МД, ДШ, ЮГ), гранту від U.S. Department of Energy (DOE), Office of Science, Basic Energy Sciences, Materials Science and Engineering Division, under Award No. DE-SC0013599 (Subaward No. UTAUS-SUB00000795) (МД, ДШ) та UMR CNRS 7600 (ЮГ).

Література

1. C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, London, 1996)
2. *Order, Disorder and Criticality. Advanced Problems of Phase Transition Theory.* Yu. Holovatch (editor). vols. 1–7, World Scientific, Singapore, 2004–2022
3. Ю. Головач, М. Дудка, В. Блавацька, В. Пальчиков, М. Красницька, О. Мриглод. *Статистична фізика складних систем у світі та у Львові. ЖФД* **22** (2018) 2801
4. M. Henkel, H. Hinrichsen and S. Lübeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions* (Heidelber, Springer, 2008); G. Odor, *Universality in Nonequilibrium Lattice Systems: Theoretical Foundations* (Singapore, World Scientific, 2008)
5. R. Folk and G .Moser, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) R207; I. Herbut, *A Modern Approach to Critical Phenomena* (Cambridge University Press, 2007); M. A. Anisimov, A. A. Povodyrev, V. D. Kulikov, and J. V. Sengers, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3146; M. Anisimov, A. Povodyrev, J. Sengers, *Fluid Phase Equilib.* **158-160** (1999) 537
6. Vik. S. Dotsenko, *Phys. Usp.* **38** (1995) 457; *Usp. Fiz. Nauk* **165** (1995) 481
7. Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka, C. von Ferber, R. Folk, and T. Yavors'kii, Int. J. Mod. Phys. B **16** (2002) 4027.
8. N. Defenu, A. Trombettoni, and A. Codello, *Phys. Rev. E* **92** (2015) 052113
9. N. Defenu, A. Codello, S. Ruffo, A. Trombettoni, J. Phys. A: Math. Theor. 53 (2020) 143001
10. D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*, World Scientific, Singapore (1989); J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford (1996); H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4-Theories*, World Scientific, Singapore (2001)
11. *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*, edited by T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens, Lect. Not. in Phys. **602**, Springer-Verlag, New York (2002); A. Campa, T. Dauxois and S. Ruo, *Phys. Rep.* **480**, 57 (2009)
12. A. Cavagna, L. Del Castello, S. Dey, I. Giardina, S. Melillo, L. Parisi, M. Viale, *Phys. Rev. E* **92** (2015) 012705
13. T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* **188** (1990) 285
14. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, London, 1960)

15. D. Nicholson, *Introduction to plasma theory* (Wiley, New-York, 1983)
16. A. Campa, T. Dauxois, D. Fanelli, S. Ruffo, *Physics of long-range interacting systems*, Oxford University Press, Oxford (2014)
17. D. Mukamel, *Notes on the statistical mechanics of systems with long-range interactions* [arXiv:0905.1457] (2009)
18. E. Bayong, H. T. Diep, and Viktor Dotsenko, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 14
19. N. Defenu, T. Donner, T. Macrì, G. Pagano, S. Ruffo, A. Trombettoni, *Rev. Mod. Phys.* **95** (2023) 035002
20. M. E. Fisher, S. K. Ma, and B. G. Nickel, *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 917
21. J. Sak, *Phys. Rev. B* **8** (1973) 281;
22. F. Bouchet, S. Gupta, and D. Mukamel, *Physica A* **389** (2010) 4389
23. A. Pelissetto and E. Vicari, *Phys. Rept.* **368** (2002) 549;
24. M. Dudka, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, *J. Phys. Stud.* **5(3/4)** (2001) 233;. M. Dudka, Yu. Holovatch, and T. Yavorskii, *Acta Physica Slovaca* **52** (2002) 323; M. Dudka, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, *J. Phys. A* **37** (2004) 10727; D. Ivaneyko, J. Ilnytskyi, B. Berche, Yu. Holovatch, *Physica A* **370** (2006) 163; D. Shapoval, M. Dudka, A. A. Fedorenko, and Yu. Holovatch, *Phys. Rev. B* **101** (2020) 064402
25. T. Ising, R. Folk, R. Kenna, B. Berche, Yu. Holovatch, *Journ. Phys. Stud.* **21** (2017) 4001.
26. H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.*, **20** (1968) 589
27. Yu. Holovatch, *Condens. Matter Phys.*, (2006) 237
28. K. G. Wilson, M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 240
29. B. Berche, T. Ellis, Yu. Holovatch, R. Kenna, *SciPost Phys. Lect. Notes* 60 (2022).
30. M. V. Kompaniets, E. Panzer, *Phys. Rev. D* **96** (2017) 036016.
31. O. Schnetz, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 085018; O. Schnetz, *Phys. Rev. D* **107** (2023) 036002.
32. J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B* **21** (1980) 3976
33. B. Delamotte, Yu. Holovatch, D. Ivaneyko, D. Mouhanna, and M. Tissier, *J. Stat. Mech.* (2008) P03014; B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, and D. Mouhanna, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 104432; B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, and D. Mouhanna, *Condens. Matter Phys.* **13** (2010) 43703;
34. G. S. Joyce, *Phys.Rev.* **146** (1966) 349
35. F. J. Dyson, *Commun. Math. Phys.* **12** (1969) 91
36. E. Luijten and H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 025703 (2002)

37. C. Behan, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 075401 (2019)
38. D. Benedetti, R. Gurau, S. Harribey, K. Suzuki, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 445008 (2020)
39. R. Brout, Phys. Rev. **115** (1959) 824
40. A. B. Harris, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** (1974) 1671
41. V. J. Emery, Phys. Rev. B **11** (1975) 239; M. Mézard, G. Parisi, M.A. Virasoro, *Spin glass theory and beyond. An Introduction to the Replica Method and Its Applications.*, World Scientific (Singapore 1987); G. Parisi, *On the replica approach to glasses* [arXiv:cond-mat/9701068] (1997); V. Dotsenko, *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems.*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
42. R. Folk, Yu. Holovatch, and T. Yavors'kii, *Physics-Uspekhi* **46** (2003) 169 [*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **173** (2003) 175].
43. D. E. Khmel'nitskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68** (1975) 1960 [Sov. Phys. JETP **41** (1975) 981]; T. C. Lubensky, *Phys. Rev. B* **11** (1975) 3573; G. Grinstein, A. Luther, *Phys. Rev. B* **13** (1976) 1329.
44. R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *Phys. Rev. B* **61** (2000) 15114.
45. G. Parisi, unpublished; *J. Stat. Phys.* **23** (1980) 49; R. Schloms, V. Dohm, *Europhys. Lett.* **3** (1987) 413; R. Schloms, V. Dohm, *Nucl. Phys. B* **328** (1989) 639; Yu. Holovatch, M. Shpot, *J. Stat. Phys.* **66** (1992) 867; Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, *J. Stat. Phys.* **92** (1998) 785.
46. Y. Yamazaki, *Physica A* **90**, 547 (1978)
47. Yu. Holovatch, *unpublished*
48. D. Shapoval, M. Dudka, Yu. Holovatch, *unpublished,* (2023).
49. A. Theumann, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14**, 2759 (1981)
50. D. Shapoval, M. Dudka, Yu. Holovatch, *Low Temp. Phys.* **48** (2022) 1049.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; “Referatyvnyj Zhurnal”; “Dzherelo”.

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua   http://www.icmp.lviv.ua