Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–18–06U

А.А. Дувіряк, Ю.Г. Яремко

РАДІАЦІЙНЕ ГАЛЬМУВАННЯ ТОЧКОВОГО ЗАРЯДУ ТА ДІЯ НА ВІДСТАНІ В ПРОСТОРІ ДЕ СІТТЕРА

ЛЬВІВ

УДК: 531.5; 537.8
PACS: 04.20.-q, 41.60.-m, 04.25.-g

Радіаційне гальмування точкового заряду та дія на відстані в просторі де Сіттера

А.А. Дувіряк, Ю.Г .Яремко

Анотація. Розглядається механіка точкових частинок у просторі-часі де Сіттера. В конформно-пласкій параметризації цього простору-часу побудовано реалізацію групи його симетрії, дію точкової частинки, її лаґранжів та гамільтонів опис. В рамках формалізму інтеґралів дії типу Фоккера будується класична механіка системи взаємодіючих частинок у просторі-часі де Сіттера. Отримано загальний вигляд де Сіттер-інваріантного інтеґралу Фоккера. Показано, що відомі в літературі приклади скалярної та електромагнетної взаємодій узгоджуються з отриманими результатами. Запропоновано рівняння руху точкового заряду в зовнішньому електромагнітному полі з врахуванням реакції випромінювання.

Radiation reaction of a point charge and action-at-a-distance in de Sitter space

A.A. Duviryak, Yu.H. Yaremko

Abstract. A pointlike particle mechanics in the de Sitter space-time is considered. In terms of conformally flat parametrization of this space-time it is constructed the realization of a group of its symmetry O(1,4), the point-like particle action, its Lagrangian and Hamiltonian description. Within the formalism of Fokker action integrals the classical mechanics of interacting particles in the de Sitter space-time is constructed. A general form of de Sitter-invariant Fokker action integral is derived. It is shown that the known in the literature examples of scalar and electromagnetic interactions agree with the results obtained here. Equation of motion of a point charge in an external electromagnetic field where the radiation reaction is taken into account is proposed.

Подається в Physica A
Submitted to Physica A

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Аскольд Андрійович Дувіряк
Юрій Григорович Яремко

Радіаційне гальмування точкового заряду в просторі де Сіттера

Роботу отримано 13 грудня 2018 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом комп'ютерного моделювання багаточастинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

1. Вступ

Інтерес до руху класичного електричного заряду у сильних електромагнітних полях стимулюється дослідженнями космічних променів, випромінювання пульсарів, джетів зарядженої матерії, що генеруються у різноманітних астрофізичних процесах. Рухаючись із прискоренням, заряджена частинка генерує електромагнетне поле яке поділяється на дві частини: причастинкову та радіаційну. Причастинкова частина поля, невіддільна від зарядженої сингулярності, модифікує інерційні властивості заряду. Далекосяжна радіаційна частина поводиться як випромінювання що покидає заряд, забираючи у нього енергію, імпульс та момент імпульсу. Внаслідок радіаційного гальмування заряджена частинка відхиляється від геодезичної [1–3].

Рух безструктурного точкового заряду e з масою m під дією зовнішнього електромагнітного поля з врахуванням радіаційного гальмування у плоскому просторі Мінковського описується рівнянням Лоренца-Абрагама-Дірака [4]:

$$a^\mu = \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu + \tau_0 \left[\dot{a}^\mu - (a\cdot a)u^\mu\right]. \tag{1.1}$$

Тут $u^\mu(\tau) = \mathrm{d}z^\mu(\tau)/\mathrm{d}\tau$ – 4-швидкість заряду, параметризована власним часом τ, $a^\mu(\tau) = \mathrm{d}u^\mu(\tau)/\mathrm{d}\tau$ – його 4-прискорення, $F^\mu{}_\nu$ – тензор напруженості зовнішнього електромагнітного поля. Множник τ_0, що стоїть перед 4-вектором реакції випромінювання Абрагама,

$$\tau_0 = \frac{2e^2}{3mc^3}, \tag{1.2}$$

є малим параметром із розмірністю часу (зокрема для електрона він дорівнює $\tau_0 = 6.24\cdot 10^{-24}s$). Застосувавши до рівняння (1.1) метод послідовних наближень, Ландау та Ліфшиць [5, §76] отримали рівняння другого порядку із стандартною задачею Коші:

$$ma^\mu = f^\mu_{\rm ext} + \tau_0\left(\delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu\right)\frac{\mathrm{d}f^\nu_{\rm ext}}{\mathrm{d}\tau}. \tag{1.3}$$

Тут $f^\mu_{\rm ext} = eF^\mu{}_\nu u^\nu$. Спун показав [6, 7], що множина розв'язків нового рівняння співпадає з множиною фізичних розв'язків вихідного рівняння Лоренца-Абрагама-Дірака. Вплив реакції випромінювання зростає із ростом напруженості зовнішнього електромагнітного поля. Експериментальні роботи [8, 9], де досліджувався рух електрона в ультраінтенсивному полі лазерного променя, це підтверджують.

Рух точкового заряду у просторі з нетривіальною метрикою в зовнішньому електромагнітному полі з урахуванням реакції випромінювання визначається рівнянням ДеВітта-Бреме-Гоббса [2, eq.(1.33)]

$$ma^\mu = f^\mu_{\rm ext} + e^2\left(\delta^\mu{}_\nu + u^\mu u_\nu\right)\left(\frac{2}{3m}\frac{{\rm D}f^\nu_{\rm ext}}{{\rm d}\tau} + \frac{1}{3}R^\nu{}_\lambda u^\lambda\right) + f^\mu_{\rm tail}, \quad (1.4)$$

де зовнішня сила – це сила Лоренца, а нелокальний доданок

$$f^\mu_{\rm tail} = 2e^2 u_\nu(\tau)\int\limits_{-\infty}^{\tau^-}{\rm d}\tau'\nabla^{[\mu}G^{\nu]}_{+\lambda'}\left(z(\tau),z(\tau')\right)u^{\lambda'}(\tau') \quad (1.5)$$

відображає ту обставину, що в просторі з кривиною носії електромагнітної взаємодії (фотони) рухаються в діапазоні швидкостей від нуля до швидкості світла в просторі Мінковського. Тензори в локальних доданках у правій частині рівняння (1.4) є функціоналами миттєвого положення частинки $z(\tau)$, а підінтегральний вираз у (1.5) залежить ще й від від положення заряду $z(\tau')$ у всі попередні моменти часу $\tau' \in]-\infty, \tau - 0^+]$. Формула (1.4) вперше з'являється в роботі [10]; вона була скоректована Гобсом [11] який обгрунтував доданок, пропорційний до тензора Річчі $R^\nu{}_\lambda$. Слід зауважити, що на рімановому многовиді ${\rm D}/{\rm d}\tau$ позначає коваріантну похідну вздовж траєкторії зарядженої частинки, тобто 4-прискорення $a^\mu(\tau) = {\rm D}u^\mu(\tau)/{\rm d}\tau \equiv {\rm d}u^\mu(\tau)/{\rm d}\tau + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda$. Співвідношення $(u\cdot u) = -1$ та $(a\cdot u) = 0$ справедливі також і для величин, що описують світову лінію точкового заряду на рімановому многовиді (див. напр. [12]). У даній роботі будемо досліджувати проблему самодії точкового заряду в просторі де Сіттера.

При розгляді системи частинок у просторі де Сіттера їх взаємодія між собою може виявитися значно сильнішою від реакції випромінювання. У цих випадках систему частинок можна тлумачити як замкнену, а її динаміку описувати з допомогою варіаційного принципу типу Тетроде-Фоккера. Узагальнення цього формалізму на кривий простір-час здійснено у роботах Гойла і Нарлікара [22] та інших. Ключовим елементом опису деякої теоретико-польової взаємодії у фоккерівському формалізмі є симетрична функція Ґріна відповідного хвильового рівняння. Для простору де Сіттера функції Ґріна скалярної та електромагнетної взаємодій отримано Нарлікаром [16]. Загалом, побудова функцій Ґріна в кривому просторі-часі є складною математичною проблемою [2, 10], і навіть формулювання відповідних хвильових рівнянь є неоднозначним. Деяке спрощення цієї

проблеми може дати відповідь на питання: а якою може бути взаємодія у кривому просторі. У просторі де Сіттера критерієм відбору може слугувати вимога інваріантності інтеґралу типу Фоккера щодо перетворень групи O(1,4). Це питання є предметом дослідження цієї роботи.

2. Реакція випромінювання заряду у викривленому просторі-часі

Понад сто років минуло від моменту, коли Альберт Айнштайн сформулював основні постулати загальної теорії відносності, основаної на припущенні Бернгарда Рімана про те, що просторово-часовий континуум – це еластична субстанція що може розтягуватися чи стискатися, вигинатися та скручуватися. Локальні властивості цієї еластичної мембрани (ріманового многовиду M) задаються скалярним добутком на дотичному просторі TM із означеним в кожній точці $p \in M$ метричним тензором $g : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ який парі векторів, дотичних до многовиду в точці p, ставить у відповідність дійсне число. В координатному представленні метричний тензор задає квадрат елемента довжини

$${\rm d}s^2 = g_{\alpha\beta}{\rm d}x^\alpha{\rm d}x^\beta, \quad (2.1)$$

тобто квадрат інтервалу між двома дуже близькими точками (подіями) на многовиді M. На основі матричного тензора конструюються інші величини, які описують деформації еластичної просторово-часової мембрани:

- символи Крістоффеля

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}\right), \quad \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta\gamma};$$

- тензор Рімана

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma};$$

- тензор Річчі

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \quad R^\alpha{}_\delta = g^{\alpha\beta}R_{\beta\delta};$$

- скалярна кривина Річчі

$$\mathcal{R} = g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma}.$$

Комою позначена часткова похідна: $g_{\gamma\alpha,\beta} = \partial g_{\gamma\alpha}/\partial x^\beta$. Скалярна кривина простору Мінковського дорівнює нулю; простори з відмінною від нуля скалярною кривиною $\mathcal{R} \neq 0$ будемо називати просторами з нетривіальною метрикою.

Операція диференціювання означається за допомогою оператора коваріантної похідної ∇_ν і містить символи Крістоффеля. Похідна від векторного поля

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} A^\lambda, \tag{2.2}$$

від поля один-форм

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A_\lambda. \tag{2.3}$$

Ці формули узагальнюються у наступному виразі для коваріантної похідної тензорного поля довільного рангу:

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\alpha\ldots\lambda}{}_{\mu\ldots\rho} &= \partial_\sigma T^{\alpha\ldots\lambda}{}_{\mu\ldots\rho} + \Gamma^\alpha{}_{\chi\sigma} T^{\chi\ldots\lambda}{}_{\mu\ldots\rho} + \ldots + \Gamma^\lambda{}_{\chi\sigma} T^{\alpha\ldots\chi}{}_{\mu\ldots\rho} \\ &- \Gamma^\chi{}_{\mu\sigma} T^{\alpha\ldots\lambda}{}_{\chi\ldots\rho} - \Gamma^\chi{}_{\rho\sigma} T^{\alpha\ldots\lambda}{}_{\mu\ldots\chi}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Досліджуючи задачу самодії (реакції випромінювання) для точкового заряду в просторі з нетривіальною метрикою де Вітт та Бреме [10] розв'язували хвильове рівняння для векторного потенціалу A електромагнітного поля в калібровці Лоренца

$$\Box A^\mu - R^\mu{}_\nu A^\nu = -4\pi j^\mu. \tag{2.5}$$

Тут $\Box = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta$ – коваріантний оператор Даламбера а j^μ – струм точкового заряду, що моделюється чотиривимірною дельта-функцією [10, eq.(1.5)] та задовільняє закон збереження $\nabla_\alpha j^\alpha = 0$, а калібровка має вигляд $\nabla_\alpha A^\alpha = 0$. Рівняння розв'язували шукаючи функцію Гріна

$$A^\alpha(x) = \int \mathrm{d}^4x' \sqrt{-g'} G^\alpha{}_{\beta'}(x,x') j^{\beta'}(x') \tag{2.6}$$

що задовільняє рівняння

$$\Box G^\alpha{}_{\beta'}(x,x') - R^\alpha{}_\beta(x) G^\beta{}_{\beta'}(x,x') = -4\pi g^\alpha{}_{\beta'}(x,x')\delta^4(x,x'), \tag{2.7}$$

де $g^\alpha_{\beta'}(x,x')$ – пропагатор паралельного переносу а $\delta^4(x,x')$ – чотиривимірна дельта-функція Дірака.

Функцію Гріна [10, eq.(2.53)] наведемо у більш інформативному вигляді [2, eq.(15.4)] який підкреслює аспекти, пов'язані із причинністю:

$$G^\alpha_{\pm\beta'}(x,x') = \sqrt{\Delta} g^\alpha{}_{\beta'}(x,x')\delta_\pm(\sigma) + V^\alpha{}_{\beta'}(x,x')\theta_\pm(-\sigma). \tag{2.8}$$

Індексом «+» позначена спізнена функція Гріна, а знаком «−» – випередна. Δ – так званий детермінант Ван-Влека [2, Ch.1.7], а функція $V^\alpha{}_{\beta'}(x,x')$ є розв'язком хвильового рівняння

$$\Box V^\alpha{}_{\beta'}(x,x') - R^\alpha{}_\beta(x) V^\beta{}_{\beta'}(x,x') = 0, \tag{2.9}$$

з крайовою умовою [2, eq.(15.7)], що задає значення цієї функції на поверхні конуса. Аргументом узагальнених функцій є скалярна функція $\sigma(x,x')$ двох точок: точки емісії x' в якій знаходиться заряд, що генерує електромагнітне поле, та польової точки x, в якій вимірюється його напруженість і яка знаходиться в околі $\mathcal{N}(x')$ точки емісії. Ці точки з'єднані сегментом геодезичної, параметризованої координатними функціями $y^\mu(\lambda)$, де афінний параметр λ змінюється від λ_0 до λ_1 так що $y(\lambda_0) = x'$ а $y(\lambda_1) = x$. Її називають світова функція Синга [2, Ch.3] та задають інтегралом

$$\sigma(x,x') = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_0) \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathrm{d}\lambda g_{\mu\nu}(y) t^\mu t^\nu, \tag{2.10}$$

де вектор $t^\mu = \mathrm{d}y^\mu/\mathrm{d}\lambda$ – дотичний до геодезичної. Він задовільняє рівняння геодезичної $\mathrm{D}t^\mu/\mathrm{d}\lambda = 0$. Коли x та x' з'єднані часоподібною геодезичною, світова функція $\sigma(x,x') < 0$.

Окрім доданка, пропорційного до дельта-функції $\delta_\pm(\sigma)$, функція Гріна (2.8) містить також доданок, пропорційний до сходинкової функції $\theta_\pm(-\sigma)$. Надалі нас цікавитиме спізнена функція Гріна $G^\alpha_{+\beta'}(x,x')$. Функції $\theta_+(-\sigma)$ та $\delta_+(\sigma)$ означаються за допомогою узагальненої функції Гевісайда $\theta_+(x,\Sigma)$ що дорівнює одиниці коли точка x належить до області хронологічного майбутнього певним чином обраної просторовоподібної гіперповерхні $\Sigma \subset M$. Отже

$$\theta_+(-\sigma) = \theta_+(x,\Sigma)\theta(-\sigma), \quad \delta_+(\sigma) = \theta_+(x,\Sigma)\delta(\sigma), \tag{2.11}$$

де $x' \in \Sigma$, тобто точка емісії в світовій функції (2.10) лежить на гіперповерхні Σ. Таким чином сходинкова функція $\theta_+(-\sigma)$ рівна 1 коли польові точки x належать до хронологічного майбутнього $I^+(x')$ точки емісії. Область визначення спізненої функції $G^\alpha_{+\beta'}(x,x')$ включає не лише точки на поверхні конуса $I^+(x')$, а й точки всередині цього конусу. Через взаємодію випромінювання із гравітаційним полем швидкість носіїв електромагнітної взаємодії (фотонів) не є фіксованою, а змінюється в інтервалі від 0 до c – швидкості світла у вакуумі.

Маючи функцію Гріна можемо порахувати потенціал (2.6) та тензор напруженості електромагнітного поля $F_{\alpha\beta} = \nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\alpha A_\beta$. Скориставшись алгоритмом Дірака [4], автори [10,11] порахували потік енергії-імпульсу цього електромагнітного поля через тоненьку трубку, що оточує світову лінію заряду в просторі з нетривіальною метрикою. Із рівнянь балансу цих збережних величин отримали рівняння руху точкового заряду у зовнішньому електромагнітному полі з урахуванням реакції випромінювання (1.4). Новий (порівняно з аналогічним рівнянням (1.1) для заряду в плоскому просторі) нелокальний доданок (1.5) описує, як на заряд в момент часу τ діє його власне поле, генероване в усі попередні моменти часу:

$$f^{\mu}_{\rm tail} = e \int\limits_{-\infty}^{\tau^-} {\rm d}\tau' F^{\mu\nu}_{\rm tail}[z(\tau), z(\tau')] u_\nu(\tau). \tag{2.12}$$

Під знаком інтегралу маємо згортку тензора поля, генерованого зарядом в момент часу τ' та виміряного в точці на світовій лінії, параметризованій моментом спостереження τ, із 4-швидкістю в момент часу τ. Тобто силу Лоренца, з якою заряд у момент часу $\tau' < \tau$ діє на той же заряд в точці, в якій він перебуває в момент часу τ. Нелокальне поле $F^{\mu\nu}_{\rm tail}[z(\tau), z(\tau')] = \nabla^{[\mu} G^{\nu]}_{+\lambda'}\left(z(\tau), z(\tau')\right) u^{\lambda'}(\tau')$ де $G^{\nu}_{+\lambda'}$ – нелокальна частина електромагнітного потенціалу, тобто згортка нелокальної частини функції Гріна зі струмом точкового заряду.

Верхня межа інтеграла (2.12) $\tau^- = \tau - 0^+$ відображає ту обставину, що коли польова точка x співпадає з точкою емісії x' функції (2.11) стають неозначеними. Щоб обійти розбіжності, що виникають при спробі поміряти напруженість поля в точці $x = x'$, аргументи узагальнених функцій зміщують на малу величину $0 < \varepsilon \ll 1$: $\theta_+(-\sigma - \varepsilon)$, $\delta_+(\sigma + \varepsilon)$. В процесі обчислень відповідно зміщується і верхня часова межа інтегралу (2.12), при наближенні до якої підінтегральний вираз необмежено зростає.

В роботах [13, 14] досліджується проблема самодії точкового заряду у тривимірному просторі Мінковського. Функція Гріна, що є розв'язком відповідних рівнянь Максвелла з точковим джерелом, пропорційна до функції Гевісайда (як і в просторі з нетривіальною метрикою). Електромагнітні хвилі поширюються у широкому діапазоні швидкостей – від нуля до c. Був порахований потік енергії-імпульсу та моменту імпульсу електромагнітного поля через площину $\Sigma_t = \left\{x \in \mathbb{M}_3 | x^0 = t\right\}$, пов'язану з нерухомим спостерігачем. З аналізу законів збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу отримане ефективне інтегро-диференційне рівняння руху [13, eq. (3.30)], [14, eq. (4.16)], що описує рух точкового заряду у зовнішньому електромагнітному полі з врахуванням реакції випромінювання.

В процесі перенормування в потоках збережних величин були виділені радіаційні частини, які покидають зону взаємодії, забираючи від заряду енергію, імпульс та момент імпульсу [14, P.3]. Саме ці доданки входять в рівняння балансу та з'являються в фінальному рівнянні руху. Причастинкові доданки перенормовуються, модифікуючи інерційні властивості зарядженої частинки (зокрема перенормована маса стає залежною від часу). На основі сформульованого в роботах [13, 14] алгоритму перенормування нелокальних теорій, у [15] було знайдено вираз для реакції випромінювання масивного скалярного поля в чотиривимірному просторі Мінковського. Розв'язок відповідного хвильового рівняння з точковим струмом наведено зокрема у [2, Пар. 12.1]. Застосувавши цей алгоритм до гравітуючого заряду, нелокальний доданок (2.12), що входить у рівняння ДеВітта-Бреме-Гоббса (1.4), замінимо виразом

$$f^{\mu}_{\rm tail,R} = \frac{e}{2} \int\limits_{-\infty}^{\tau} {\rm d}\tau' \left\{ F^{\mu\nu}_{\rm tail}[z(\tau), z(\tau')] u_\nu(\tau) - F^{\mu\nu}_{\rm tail}[z(\tau'), z(\tau)] u_\nu(\tau') \right\}. \tag{2.13}$$

В границі $\tau' \to \tau$ підінтегральний вираз збігається, тому верхньою межею інтегрування є τ. На відміну від інтеграла, що фігурує в рівнянні (1.4), він не розбігається біля верхньої межі. Це означає що він не містить вкладу від поля, локалізованого поблизу заряду. Інтеграл (2.13) описує ту частину «хвоста» електромагнітного випромінювання, що покидає зону взаємодії. В наступному Розділі розглянемо задачу самодії електричного заряду в просторі де Сіттера.

3. Заряд у просторі де Сіттера

Простір де Сіттера належить до класу космологічних моделей, що описують вакуумні стани Всесвіту. Їхня метрика задовільняє рівняння Айнштайна з космологічною сталою Λ за відсутності матерії. Групою ізометрії 4-вимірного простору де Сіттера є узагальнена ортогональна група Лоренца $O(1,4)$. Їй відповідає максимально можливе число (десять) незалежних векторних волів Кіллінга, тому його скалярна кривина є константою: $\mathcal{R} = 4\Lambda$.

Рівняння Максвелла з точковим струмом, що рухається в просторі де Сіттера, розв'язане в роботі [16]. У Розділі 2.21 каталогу [17] наведені всі відомі на сьогодні параметризації цього космологічного простору. В роботі [16] використана параметризація, що з точністю до заміни сферичних координат на декартові співпадає з наведеною у Параграфі 2.21.3 каталогу. Квадрат елемента довжини в ній задається наступним чином

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{R^2}{t^2}\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right). \tag{3.1}$$

Порівнявши з (2.1) бачимо, що метричний тензор є діагональним: $-g_{tt} = g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = R^2/t^2$.

Запишемо рівняння руху точкового заряду з врахуванням реакції випромінювання в просторі де Сіттера. Згідно з рівнянням ДеВітта-Бреме-Гоббса (1.4), для цього потрібен тензор Річчі та символи Крістоффеля, що входять у формулу для коваріантної похідної зовнішньої сили:

$$\frac{\mathrm{D}f^{\nu}_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}f^{\nu}_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}u^{\alpha}f^{\beta}_{\mathrm{ext}}. \tag{3.2}$$

Відмінні від нуля символи мають вигляд

$$\Gamma^t{}_{tt} = \Gamma^t{}_{xx} = \Gamma^t{}_{yy} = \Gamma^t{}_{zz} = -\frac{1}{t}, \quad \Gamma^x{}_{tx} = \Gamma^y{}_{ty} = \Gamma^z{}_{tz} = -\frac{1}{t}.$$

Врахувавши симетрію $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$, другий доданок у правій частині співвідношення для похідної (3.2) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma^t{}_{\alpha\beta}u^{\alpha}f^{\beta}_{\mathrm{ext}} &= -\frac{1}{t}\left(u^t f^t_{\mathrm{ext}} + \sum_i u^i f^i_{\mathrm{ext}}\right), \\ \Gamma^i{}_{\alpha\beta}u^{\alpha}f^{\beta}_{\mathrm{ext}} &= -\frac{1}{t}\left(u^t f^i_{\mathrm{ext}} + u^i f^t_{\mathrm{ext}}\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

де $i = x, y, z$.

В термінах компонент метричного тензора тензор Рімана простору де Сіттера виглядає просто:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{R^2}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}\right). \tag{3.4}$$

Тензор Річчі пропорційний до метричного:

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{R^2}g_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

У рівняння руху (1.4) входить тензор, пропорційний до символу Кронекера

$$R^{\nu}{}_{\lambda} = \frac{3}{R^2}\delta^{\nu}{}_{\lambda}.$$

Тому рівняння (1.4) дещо спрощується:

$$ma^{\mu} = f^{\mu}_{\mathrm{ext}} + \frac{2e^2}{3m}\left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + u^{\mu}u_{\nu}\right)\frac{\mathrm{D}f^{\nu}_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}\tau} + f^{\mu}_{\mathrm{tail}}, \tag{3.6}$$

де коваріантна похідна за параметром еволюції задається співвідношеннями (3.2) та (3.3).

Рівняння (2.9) на нелокальну частину функції Гріна потенціалу електромагнітного поля, генерованого точковим зарядом в просторі з нетривіальною метрикою, є нелінійним. Нечисленні випадки коли вдається розв'язати подібне рівняння стосуються скалярного заряду в конформно інваріантних метриках [18, 19]. У роботі [16] знайдене поле нерухомого електричного заряду, локалізованого в початку координат простору де Сіттера. Спізнена функція Гріна [16, eqs.(54)] є комбінацією локальних та нелокальних доданків. Скориставшись інваріантністю метрики (3.1) стосовно просторових трансляцій, позиційний вектор $\mathbf{r}$ польової точки прирівняємо до різниці $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ де 3-вектор $\mathbf{x}'$ позначає точку емісії; часову координату a, що задає момент народження заряду, позначимо t'. Згорнувши модифіковану таким чином функцію Гріна з 4-швидкістю заряду, отримаємо векторний потенціал його електромагнітного поля:

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{ret}}_0(t,\mathbf{x}) &= \frac{e}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\frac{t^2+t'^2}{2tt'}u^0(t') + \frac{t+t'}{2tt'}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}(t'))\right]_{t'=t^{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x})} \\ &- e\frac{8t}{3}\int\limits_{-\infty}^{t^{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x})}\mathrm{d}t'\left[\left(\frac{3}{D^2} - \frac{\mathbf{r}^2}{D^3}\right)t'u^0(t')\right. \\ &+ \left.\left(\frac{1}{D^2} + \frac{4t'(t+t')}{D^3}\right)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}(t'))\right], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x}) &= -\frac{e}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left[\frac{t+t'}{2tt'}u^0(t')\mathbf{r} + \mathbf{u}(t') + \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}(t'))}{2tt'}\mathbf{r}\right]_{t'=t^{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x})} \\ &+ e\int\limits_{-\infty}^{t^{\mathrm{ret}}(t,\mathbf{x})}\mathrm{d}t'\left\{\frac{8t'}{3}\left[\frac{1}{D^2} + \frac{4t(t+t')}{D^3}\right]\mathbf{r}u^0(t')\right. \\ &+ \left. f\left[\mathbf{u}(t') - \frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}(t'))}{(t+t')^2}\mathbf{r}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де точка емісії $(t', \mathbf{x}')$ поміщена на світову лінію заряду, а

$$
\begin{aligned}
D &= (t+t')^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2, && (3.9)\\
f &= \frac{4(t+t')^2}{3D^2}\left[\ln\frac{4tt'}{D} + \frac{2(t^2+t'^2+\mathbf{r}^2)}{D} + \frac{12tt'(t+t')^2}{D^2}\right.\\
&\quad \left. - \frac{3(t^2+t'^2)}{4tt'} - 1\right]. && (3.10)
\end{aligned}
$$

Звідси знаходимо компоненти напруженості електромагнітного поля $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ які теж є комбінаціями локальних та нелокальних доданків. Внесок локальних доданків у вираз для самодії описується другим доданком в рівнянні (3.6). Він узагальнює відповідний вираз у рівнянні Ландау-Ліфшиця (1.3). Підставивши в рівняння (2.13) нелокальну частину сили Лоренца у якій польова точка $(t, \mathbf{x})$ поміщена на світову лінію заряду, отримаємо нелокальну частину сили самодії.

4. Симетрія простору де Сіттера

Простір-час де Сіттера можна представити як гіперболоїд $\mathbb{H}$: $\eta_{AB}y^Ay^B = R^2$ у 5-вимірному псевдо-евклідовому просторі $\mathbb{E}_{1,4}$ з координатами y^A $(A = 0, 1, \ldots, 4)$ і метричним тензором $||\eta_{AB}|| = \mathrm{diag}(-,+,\ldots,+)$. Константа R визначає скалярну кривину цього часопростору $\mathcal{R} = -12/R^2$.

Гіперболоїд $\mathbb{H}$ інваріантний щодо дії 10-параметричної групи O(1,4), представленої в $\mathbb{E}_{1,4}$ інфінітезимальними перетвореннями:

$$
y'^A = y^A + \tfrac{1}{2}\lambda^{CD}(\delta^A_C\eta_{DB} - \delta^A_D\eta_{CB})y^B, \qquad A = 0,\ldots,4 \qquad (4.1)
$$

де параметри перетворень $\lambda^{CD} = -\lambda^{DC}$ – кути повороту у відповідних (псевдо)гіперплощинах.

Надалі зручно використовувати таку параметризацію гіперболоїда $\mathbb{H}$ координатами $x^0 \equiv t \in \mathbb{R}_-$, $x^i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ [16, 17]:

$$
y^0 = \frac{t^2 - \mathbf{x}^2 - R^2}{2t}, \quad y^i = -\frac{R}{t}x^i, \quad y^4 = \frac{\mathbf{x}^2 - t^2 - R^2}{2t}, \qquad (4.2)
$$

де $\mathbf{x} \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$, $\mathbf{x}^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Тоді представлення (4.1) групи O(1,4) в $\mathbb{E}_{1,4}$ індукує відповідну реалізацію на $\mathbb{H}$:

$$
\begin{aligned}
x'^i &= x^i + \lambda^\alpha\zeta^i_\alpha(x,t),\\
t' &= t + \lambda^\alpha\eta_\alpha(x,t), && (4.3)
\end{aligned}
$$

де групові параметри λ^α $(\alpha = 1, \ldots, 10)$ є лінійними комбінаціями вихідних параметрів λ^{CD}. З огляду на параметризацію (4.2) зручно обрати λ^α так:

$$
\lambda_{\mathrm{D}} \equiv \lambda^{04},\ \lambda^i_{\mathrm{R}} \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon^i{}_{jk}\lambda^{jk},\ \lambda^i_{\mathrm{T}} \equiv R(\lambda^{0i} + \lambda^{i4})/2,\ \lambda^i_{\mathrm{S}} \equiv (\lambda^{0i} - \lambda^{i4})/R.
$$

Тоді компоненти $\zeta^i_\alpha, \eta_\alpha$ перетворень (4.3) мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\text{просторові трансляції} && \zeta^j_{\mathrm{T}\,i} = \delta^j_i, && \eta_{\mathrm{T}\,i} = 0\\
&\text{просторові повороти} && \zeta^j_{\mathrm{R}\,i} = \varepsilon_i{}^j{}_k x^k, && \eta_{\mathrm{R}\,i} = 0\\
&\text{перетворення де Сіттера} && \zeta^j_{\mathrm{S}\,i} = \tfrac{1}{2}\delta^j_i(t^2 - \mathbf{x}^2) + x^j x_i, && \eta_{\mathrm{S}\,i} = tx_i\\
&\text{масштабні перетворення} && \zeta^j_{\mathrm{D}} = -x^j, && \eta_{\mathrm{D}} = -t && (4.4)
\end{aligned}
$$

Відповідні векторні поля на $\mathbb{H}$:

$$
\mathcal{X}_\alpha = \eta_\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \zeta^j_\alpha\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (4.5)
$$

задовольняють комутаційні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{X}^{\mathrm{T}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{T}}_j] = 0,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{R}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{T}}_j] = \varepsilon_{ij}{}^k\mathcal{X}^{\mathrm{T}}_k,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{R}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{R}}_j] = \varepsilon_{ij}{}^k\mathcal{X}^{\mathrm{R}}_k,\\
&[\mathcal{X}^{\mathrm{T}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{S}}_j] = -\delta_{ij}\mathcal{X}^{\mathrm{D}} + \varepsilon_{ij}{}^k\mathcal{X}^{\mathrm{R}}_k,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{R}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{S}}_j] = \varepsilon_{ij}{}^k\mathcal{X}^{\mathrm{S}}_k,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{S}}_i, \mathcal{X}^{\mathrm{S}}_j] = 0,\\
&[\mathcal{X}^{\mathrm{D}}, \mathcal{X}^{\mathrm{T}}_i] = \mathcal{X}^{\mathrm{T}}_i,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{D}}, \mathcal{X}^{\mathrm{R}}_i] = 0,\ [\mathcal{X}^{\mathrm{D}}, \mathcal{X}^{\mathrm{S}}_i] = -\mathcal{X}^{\mathrm{S}}_i. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

5. Механіка точкової частинки у просторі де Сіттера

Згідно із загальною теорією відносності, динаміка вільної точкової частинки у псевдорімановому просторі задається інтеґралом дії

$$
I = -m\int d\tau = -m\int d\lambda\,\sqrt{-g_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{x}^\mu(\lambda)\dot{x}^\nu(\lambda)}, \qquad (5.1)
$$

інваріантним щодо вибору параметру λ, що параметрує світову лінію частинки $x(\lambda)$. Для часопростору де Сіттера, параметризованого координатами (4.2) цей параметр зручно обрати як $\lambda = t$, що відповідає шаруванню гіперболоїда $\mathbb{H}$ гіперплощинами $y^0 + y^4 = -R^2/t$ в $\mathbb{E}_{1,4}$. Кожен шар представляє собою конфіґураційний простір системи – 3-вимірний евклідів простір $\mathbb{E}_3$, як це випливає з 1-ї стрічки (4.4), так що $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}_- \times \mathbb{E}_3$. Тоді дія (5.1) набуває вигляду

$$
I = \int dt\, L(\mathbf{v}, t), \quad \text{де } L = mR\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}/t, \qquad (5.2)
$$

а $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$. Рівняння Ойлера-Лаґранжа: $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = 0$, де

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mathbf{v}} = -\frac{mR\mathbf{v}}{t\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \tag{5.3}$$

звідки $\mathbf{p} = \mathrm{const}$. Цього достатньо, щоб отримати розв'язок рівнянь руху:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \frac{mR\mathbf{p}}{p^2}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{pt_0}{mR}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{pt}{mR}\right)^2}\right\}. \tag{5.4}$$

Окрім імпульсу $\mathbf{p}$ система володіє й іншими інтеґралами руху, що існують внаслідок інваріантності дії (5.2) щодо групи O(1,4). Щоб їх знайти, побудуємо в першу чергу представлення групи O(1,4) на 1-му продовженні $\mathrm{T}\mathbb{E}_3$ конфіґураційного простору частинки. Воно задається інфінітезимальними операторами:

$$X_\alpha = \mathcal{X}_\alpha + \zeta_\alpha^{(1)j}\frac{\partial}{\partial v^j}, \qquad \text{де} \quad \zeta_\alpha^{(1)j} = \dot{\zeta}_\alpha^j - \dot{\eta}_\alpha v^j, \tag{5.5}$$

$\mathcal{X}_\alpha$ означене в (4.5), а символ « $\dot{}$ » означає диференціювання за t. Маємо:

$$\zeta_{\mathrm{T}\,i}^{(1)j} = \zeta_{\mathrm{D}}^{(1)j} = 0,\ \zeta_{\mathrm{R}\,i}^{(1)j} = \varepsilon_i{}^j{}_k v^k,\ \zeta_{\mathrm{S}\,i}^{(1)j} = \delta_i^j(t - \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}) + (x^j - tv^j)v_i. \tag{5.6}$$

Тепер можна переконатися, що функція

$$l \equiv \sqrt{1-\mathbf{v}^2}/t, \tag{5.7}$$

а отже і лаґранжіан $L = mRl$, що входить у дію (5.2), задовольняє умовам інваріантності [21] щодо групи O(1,4):

$$X_\alpha l + l\dot{\eta}_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1,\ldots,10 \tag{5.8}$$

Це означає, що згідно з теоремою Нетер існують 10 інтеґралів руху

$$G_\alpha = (\zeta_\alpha^j - \eta_\alpha v^j)p_j + \eta_\alpha L. \tag{5.9}$$

Після переходу до гамільтонового опису, що здійснюється перетворенням Лежандра (5.3), інтеґрали руху (5.9) стають ґенераторами канонічної реалізації групи O(1,4). Вони мають явний вигляд (для простоти покладаємо $mR = 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\mathrm{T}} &= \mathbf{p}, \qquad \mathbf{G}^{\mathrm{R}} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}, \qquad \mathbf{G}^{\mathrm{S}} = \tfrac{1}{2}(t^2 - \mathbf{x}^2)\mathbf{p} - \mathbf{x}G^{\mathrm{D}}, \\ G^{\mathrm{D}} &= -\sqrt{1+\mathbf{p}^2t^2} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p} \equiv -tH - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

і задовольняють у термінах дужок Пуасона співвідношення, аналогічні до (4.6). Зауважимо, що гамільтоніан системи

$$H = \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} - L = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1/t^2} \tag{5.11}$$

не є інтеґралом руху, оскільки система не є інваріантною щодо часових трансляцій.

6. Фоккерівська механіка двох частинок у просторі де Сіттера

Розглянемо у просторі де Сіттера дві точкові частинки, що взаємодіють між собою. Їх динаміку задаватимемо інтеґралом дії типу Фоккера:

$$I = \sum_a \int \mathrm{d}t_a\, L_a(\mathbf{v}_a, t_a) + \iint \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, \Phi(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \tag{6.1}$$

де $\mathbf{x}_a(t_a)$ – координати a-ї частинки, $\mathbf{v}_a = \mathrm{d}\mathbf{x}_a/\mathrm{d}t_a$. Вільночастинкові лаґранжіани $L_a(\mathbf{v}_a, t_a)$ та фоккеріан взаємодії $\Phi(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ повинні задовольняти умови інваріантності [21] щодо групи O(1.4):

$$X_{a\alpha}L_a + \dot{\eta}_{a\alpha}L_a = 0, \qquad \alpha = 1,\ldots,10, \quad a = 1,2, \tag{6.2}$$

$$\sum_a \{X_{a\alpha}\Phi + \dot{\eta}_{a\alpha}\Phi\} = 0, \tag{6.3}$$

$$\text{де} \quad X_{a\alpha} = \eta_{a\alpha}\frac{\partial}{\partial t_a} + \zeta_{a\alpha}^j\frac{\partial}{\partial x_a^j} + \zeta_{a\alpha}^{(1)j}\frac{\partial}{\partial v_a^j}, \tag{6.4}$$

$\eta_{a\alpha} \equiv \eta_\alpha(x_a, t_a)$ і т.д., де компоненти векторних полів $\eta_\alpha(x,t)$, $\zeta_\alpha^j(x,t)$ задані рівняннями (4.4), а $\zeta_\alpha^{(1)j}(x,t)$ – рівняннями (5.6).

Рівняння (6.2) мають єдиний розв'язок $l_a(\mathbf{v}_a, t_a) = \sqrt{1-\mathbf{v}_a^2}/t_a$, означений з точністю до довільного сталого коефіцієнта. Тому покладаємо $L_a = m_a R l_a$.

Щоб знайти загальний вигляд фоккеріану взаємодії Φ, покладімо:

$$\Phi = R^2 l_1(\mathbf{v}_1, t_1) l_2(\mathbf{v}_2, t_2) F(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \tag{6.5}$$

Тоді з (6.2), (6.3) випливають рівняння на F:

$$\{X_{1\alpha} + X_{2\alpha}\}F(t_1, t_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0, \qquad \alpha = 1,\ldots,10. \tag{6.6}$$

За цих умов існують 10 інтеґралів руху, аналогічних до одночастинкових (5.10):

$$G_\alpha = \sum_a \left\{ (\zeta^i_{a\alpha} - \eta_{a\alpha} v^i_a) \frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial v^i_a} + \eta_{a\alpha} \mathcal{L}_a \right\}$$
$$- \frac{1}{2} \left[\int\limits_{-\infty}^{t_1} \int\limits_{t_2}^{0} - \int\limits_{t_1}^{0} \int\limits_{-\infty}^{t_2} \right] \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, l_1 l_2\, [X_{1\alpha} - X_{2\alpha}]\, F, \quad \alpha = 1,...,10, \quad (6.7)$$

де $$\mathcal{L}_a = R l_a \left\{ m_a + R \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_{\bar a}\, l_{\bar a} F \right\}, \qquad a = 1,2, \quad \bar a = 2,1. \qquad (6.8)$$

Рівняння (6.6) для підгрупи Евкліда ($\alpha = \mathrm{T}i, \mathrm{R}i,\ i = 1,2,3$) обмежують вигляд F до довільної ф-ї від 3-скалярних арґументів $t_1, t_2, \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_1, \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^2$, де $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Рівняння (6.6) для дилатацій ($\alpha = \mathrm{D}$) вимагає, щоб F була однорідною ф-єю 0-го степеня щодо змінних $t_1, t_2, \mathbf{r}$. Нарешті, з рівнянь (6.6) для перетворень де Сіттера ($\alpha = \mathrm{S}i,\ i = 1,2,3$) випливає, що F може бути довільною функцію 4-х арґументів – інваріантів щодо групи O(1,4):

$$F = F(\sigma, \varrho_1, \varrho_2, \omega), \qquad (6.9)$$

де $$\sigma = -\frac{(t_1 - t_2)^2 - r^2}{t_1 t_2}, \qquad (6.10)$$

$$\varrho_1 = \gamma_1 \left\{ \frac{t_1 - t_2 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}}{t_2} + \frac{\sigma}{2} \right\}, \qquad (6.11)$$

$$\varrho_2 = \gamma_2 \left\{ \frac{t_1 - t_2 - \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{t_1} - \frac{\sigma}{2} \right\}, \qquad (6.12)$$

$$\omega = \gamma_1\gamma_2 \{1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 - \sigma/2\} - \gamma_1\varrho_2 + \gamma_2\varrho_1; \qquad (6.13)$$

тут $$\gamma_a = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}, \qquad a = 1,2.$$

Отриманий загальний інтеґрал Фоккера (6.1), (6.5), (6.9) можна подати і в явно коваріантмому вигляді, подібно до того, як з 1-частинкової дії у 3-вимірній формі (5.2) можна отримати її явно коваріантний запис (5.1). Для цього зауважимо, що елемент власного часу у вжитих тут термінах має вираз $\mathrm{d}\tau_a = -R l_a \mathrm{d}t_a$, звідки отримаємо:

$$I = I_{\text{free}} + I_{\text{int}} \equiv -\sum_a m_a \int \mathrm{d}\tau_a + \iint \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2\, F(\sigma, \varrho_1, \varrho_2, \omega). \qquad (6.14)$$

Покажемо, що ця загальна форма включає відомі приклади, подані в [10, 16, 22].

Взаємодія через безмасове скалярне поле описується інтегралом дії (6.14), де $F = -4\pi g_1 g_2 G$, g_a – скалярні «заряди» частинок, а G – симетрична функція Ґріна безмасового поля [16]. Оскільки її можна представити у наших термінах так:

$$G = \frac{1}{4\pi R^2} \{\delta(\sigma) + \tfrac{1}{2}\theta(-\sigma)\}, \qquad (6.15)$$

то O(1,4)–інваріантність дії I_{int} очевидна.

У випадку електромагнетної взаємодії [16, 22] маємо

$$I_{\text{int}} = -4\pi e_1 e_2 \iint \mathrm{d}x_1^\mu\, \mathrm{d}x_2^\nu\, G_{\mu\nu}(x_1, x_2), \qquad (6.16)$$

де $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$, $x_a^0 \equiv t_a$ $(a = 1,2)$, e_a – заряди частинок, а $G_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ – симетрична функція Ґріна рівнянь Максвела у просторі-часі де Сіттера. Вона будується у термінах спізненої та випередної функцій Ґріна у кривому просторі-часі (2.8): $G_{\mu\nu}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} G^\lambda_{+\nu}(x_1, x_2) + \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} G^\lambda_{-\nu}(x_1, x_2)$ і, подібно до скалярної функції Ґріна (6.15), має два доданки: $G_{\mu\nu}(x_1, x_2) = G^\delta_{\mu\nu}(x_1, x_2) + G^\theta_{\mu\nu}(x_1, x_2)$, один з яких містить $\delta(\sigma)$, а інший $\theta(-\sigma)$.

Для простору-часу де Сіттера член $G^\delta_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ легко відтворити на основі спізненої функції Ґріна для точкового джерела, знайденої в [16]. Отримаємо:

$$G^\delta_{00}(x_1, x_2) = \frac{t_1^2 + t_2^2}{8\pi t_1^2 t_2^2} \delta(\sigma),$$
$$G^\delta_{i0}(x_1, x_2) = -\frac{(t_1 + t_2) r_i}{8\pi t_1^2 t_2^2} \delta(\sigma) = -G^\delta_{0i}(x_1, x_2),$$
$$G^\delta_{ij}(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\pi t_1 t_2} \left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{2 t_1 t_2} \right) \delta(\sigma), \qquad i,j = 1,2,3. \quad (6.17)$$

Побудова члену $G^\theta_{\mu\nu}(x_1, x_2)$ вимагає більш тонкого аналізу, і тут не розглядається.

З (6.16), (6.17) отримаємо:

$$\Phi = -e_1 e_2 \{G^\delta_{00} + G^\delta_{i0} v_1^i + G^\delta_{0j} v_2^j + G^\delta_{ij} v_1^i v_2^j\} \qquad (6.18)$$
$$= -e_1 e_2 \left\{ \frac{t_1^2 + t_2^2}{2 t_1^2 t_2^2} - \frac{t_1 + t_2}{2 t_1^2 t_2^2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{t_1 t_2} - \frac{(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})}{2 t_1^2 t_2^2} \right\} \delta(\sigma),$$

що із врахуванням тотожностей $\sigma\delta(\sigma) \equiv 0$, $\sigma^2\delta(\sigma) \equiv 0$ дає вираз:

$$F = -e_1 e_2 (\omega - \tfrac{1}{2}\varrho_1\varrho_2) \delta(\sigma)/R^2. \qquad (6.19)$$

Його O(1,4)–інваріантність очевидна.

7. Висновки

У класичних роботах ДеВітта і Бреме [10] та Гоббса [11] верхня межа інтегрування у нелокальному доданку рівняння руху (1.4) співпадає з моментом спостереження τ. У цей момент часу підінтегральний вираз розбігається. В сучасній літературі [2, 18–20] верхня межа інтегрування у радіаційному «хвості» трохи не дотягує до моменту спостереження, як у виразі (2.12). Заміна τ на $\tau^- = \tau - 0^+$, де 0^+ – малий параметр $0 < 0^+ \ll 1$, дозволяє формально позбутися розбіжності, поглинувши її константою перенормування яка стає залежною від часу [18, 19]. В даній роботі нами запропонована нова форма радіаційного «хвоста» (2.13) що збігається на всьому інтервалі інтегрування $]-\infty, \tau]$. Вираз такого типу був вперше отриманий у роботах [13, 14] де досліджувалась проблема самодії заряду, що рухався в просторі Мінковського трьох вимірів. Перенормована маса такого заряду залежить від часу, як і перенормована маса скалярного заряду в просторі з нетривіальною метрикою [18, 19]. Цікаво що рівняння Максвелла у цьому просторі математично тотожні рівнянням, що описують еволюцію квазічастинок у плівці надплинного гелію [23]. Це відкриває можливість експериментальної перевірки [24] взаємодій, де заряди генерують радіаційні «хвости».

Локальна частина реакції випромінювання пов'язана з тією частиною спізненої функції Ґріна рівнянь Максвела, яка пропорційна до δ-функції, а радіаційні «хвости» – із частиною, пропорційною до θ-функції. Міжчастинкова дія на відстані зарядів виражається через симетричну функція Ґріна. Її δ-частина (6.17) однозначно пов'язана з такою ж частиною спізненої функції Ґріна [2], а відповідний вклад у дію на відстані цілком вписується у загальний вигляд отриманого тут інтеґралу типу Фоккера (6.9)-(6.14), інваріантного щодо групи O(1,4). Нелокальна ж частина електромагнетної дії на відстані вимагає побудови θ-частини симетричної функції Ґріна рівнянь Максвела. Невідомими також є функції Ґріна інших взаємодій у просторі де Сіттера. Дослідження цих проблем планується у наступних роботах.

Література

1. Linz T.M., Friedman J.L., Wiseman A.G. Self force on an accelerated particle. *Phys. Rev. D*, **90**, 024064, 2014.
2. Poisson E., Pound A., Vega I. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Rev. Relativity*, **14**:7-190, 2011.

3. Gal'tsov D.V., Spirin P. Radiation reaction in curved even-dimensional spacetime. *Grav. Cosmol.*, **13**:241-252, 2007.
4. Dirac P.A.M. Classical Theory of Radiating Electrons. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **167**(929):148-169, 1938.
5. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*, 2nd ed. (Pergamon, Oxford, 1962).
6. Spohn H. The critical manifold of the Lorentz-Dirac equation. *Europhys. Lett.*, **50**(3):287–292, 2000.
7. Spohn H. *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
8. Hadad Y., Labun L., Rafelski J., Elkina N., Klier C., Ruhl H. Effects of radiation reaction in relativistic laser acceleration. *Phys. Rev. D*, **82**:096012, 2010.
9. Keitel C. H., Szymanowski C., Knight P. L., Maquet A. Radiative reaction in ultra-intense laser-atom interaction. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **31**:L75–L83, 1998.
10. DeWitt B.S., Brehme R.W. Radiation damping in a gravitational field. *Annals of Physics*, **9**:220-259, 1960.
11. Hobbs J. A vierbein formalism of radiation damping. *Annals of Physics*, **47**(1):141-165, 1968.
12. Iranzo V., Lapiedra R. Classical predictive electrodynamics in a conformally flat universe. *Phys. Rev. D*, **21**(12):3299-3304, 1980.
13. Yaremko Yu. Radiation reaction in 2+1 electrodynamics. *JMP*, **48**:092901, 2007.
14. Yaremko Yu. Self-force in 2+1 electrodynamics. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:13161–13178, 2007.
15. Yaremko Yu. Self-force via energy–momentum and angular momentum balance equations. *JMP*, **52**:012906, 2011.
16. Narlikar J.V. Biscalar and bivector Green's functions in de Sitter space time. *PNAS*, **65**(3):483-490, 1970.
17. Mueller T., Grave F. Catalogue of Spacetimes. *arXiv:0904.4184v3*, 4 Nov. 2010.
18. Burko L.M., Harte A.I., Poisson E. Mass loss by a scalar charge in an expanding universe. *Phys. Rev. D*, **65**, 124006, 2002.
19. Haas R., Poisson E. Mass change and motion of a scalar charge in cosmological spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, **22**:S739-S752, 2005.
20. Foffa S., Sturani R. Tail terms in gravitational radiation reaction via effective field theory. *Phys. Rev. D*, **87**, 044056, 2013.
21. Herman W. N. Formulation of Noether's theorem for Fokker-type variational principles. *J. Math. Phys.*, **26**, 2769, 1985.

22. Hoyle F. and Narilikar J. V. Action at a distance in physics and cosmology. NY, Freemen, 1974.
23. Ambegaokar V., Halperin B.I., Nelson D.R., Siggia E.D. Dynamics of superfluid films. *Phys. Rev. B*, **21**(5):1806–1826, 1980.
24. Loktev V.M., Tomchenko M.D. Electromagnetic and phonon modes for superfluid He^4 with a disk resonator. *Ukr. J. Phys.*, **55**(8):901–910, 2010.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; “Referatyvnyj Zhurnal”; “Dzherelo”.

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua   http://www.icmp.lviv.ua