

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-17-08U

I.V. Stasyuk, O.V. Velychko

БОЗЕ-КОНДЕНСАЦІЯ ТА/АБО МОДУЛЯЦІЯ «ЗМІЩЕНЬ»
У ДВОСТАНОВІЙ МОДЕЛІ БОЗЕ-ХАББАРДА

УДК: 533.9

PACS: 03.75.Nh, 03.75.Lm, 64.70.Tg, 71.35.Lk, 37.10.Jk, 67.85.-d

Бозе-конденсація та/або модуляція «зміщень»
у двостановій моделі Бозе-Хаббарда

I.V. Stasyuk, O.V. Velychko

Анотація. Вивчаються нестійкості у системі квантових частинок, які описуються двостановою моделлю Бозе-Хаббарда, відносно появи бозе-конденсату та/або модуляції «зміщень». Показано, що у системі залежно від співвідношення між енергією збудженого стану та параметром взаємодії зміщень виникає стан з модульованим (з подвоєнням періоду ґратки) або однорідним зміщенням частинок. Проаналізовано умови виникнення фази з бозе-конденсатом. Досліджено поведінку параметрів порядку й побудовано фазові діаграми системи як аналітично (для основного стану), так і числовими методами (при ненульовій температурі). Встановлено, що фаза суперсолід є одним з можливих метастабільних станів, але вона не є термодинамічно стійкою. Натомість реалізуються фазові переходи між нормальною і модульованою фазами, які можуть бути як 1-го так і 2-го роду. Фаза з бозе-конденсатом, при її появі, є проміжною між ними.

Bose–Einstein condensation and/or modulation of “displacements” in the two-state Bose-Hubbard model

I.V. Stasyuk, O.V. Velychko

Abstract. Instabilities resulting in Bose–Einstein condensation and/or modulation of “displacements” in the system of quantum particles described by the two-state Bose-Hubbard model are investigated. A modulation, which doubles the lattice constant, is detected. Conditions for realization of the mentioned instabilities are analyzed, behavior of order parameters is investigated and phase diagrams of the system are calculated both analytically (ground state) and numerically (at non-zero temperatures). It is revealed that the supersolid phase is thermodynamically unstable and does not appear.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Ігор Васильович Стасюк
Олег Володимирович Величко

БОЗЕ-КОНДЕНСАЦІЯ ТА/АБО МОДУЛЯЦІЯ «ЗМІЩЕНЬ» У
ДВОСТАНОВІЙ МОДЕЛІ БОЗЕ-ХАББАРДА

Роботу отримано 21 грудня 2017 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом квантової статистики

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

Фізичні ефекти в системі ультрахолодних бозе-атомів у оптичних ґратках є в полі зору дослідників протягом останніх двох десятиліть. Крім вивчення термодинаміки і опису фазового переходу до надплинної (SF) фази у ґратках різної структури та вимірності, привертають увагу колективні ефекти, пов'язані із взаємодіями різного типу. Основу розгляду складає модель Бозе-Хаббарда, запропонована в [1, 2] і розвинута шляхом включення прямих міжвузлових взаємодій між частинками, відповідальних за появу модульованих та розшарованих фаз [3], а також врахування збуджених одновузлових станів [4]. Розширення одновузлового базису, яке має місце також і у випадку бозонів з ненульовим спіном (наприклад, $S = 1$, [5, 6]) приводить до ускладнення фазових діаграм і зміни, у тому числі, роду фазового переходу до надплинної фази з 2-го на 1-ий. Основною, разом з тим, при такому переході залишається одновузлова кореляція U бозонів хаббардівського типу, яка визначає характерний багатокупольний вигляд фазових (t, μ) – діаграм [2–7], де t – параметр міжвузлового переселення бозонів, а μ – їх хімічний потенціал.

Граничний перехід $U \rightarrow \infty$, який відповідає т.зв. жорстким бозонам (з обмеженням на числа заповнення $n_i \leq 1$), звужує область застосування теорії до ділянок в околі точок дотику (при $T = 0$) згаданих куполів [8]. Тим не менше, модель жорстких бозонів достатньо широко використовується при описі бозе-конденсації в оптичних ґратках (див. [9]). Разом з тим, така модель має свою область застосування в теорії іонних провідників [10], систем інтеркальованих чи адсорбованих (на кристалічних поверхнях) частинок [11–13], а також при описі локально-зв'язаних електронних пар у теорії високотемпературних надпровідників [14].

В рамках моделі жорстких бозонів, доповненої врахуванням першого збудженого локального коливного стану, нами в [4] було проведено дослідження фазового переходу до надплинної фази у випадку, коли перенесення частинок відбувається по збуджених станах; встановлено умови, за яких рід переходу змінюється на 1-ий, описано фазове розшарування на нормальну і надплинну фази. Як продовження, в [15] було розглянуто ефекти неергодичності і їх внесок у розподіл бозе-частинок за імпульсами.

Згадану вище двостанову модель жорстких бозонів було розширено в [16] шляхом включення в розгляд зміщень бозе-частинок від рівноважних положень в оптичній ґратці та їх міжвузлової взаємодії, яка приводить до появи збуджень фононного типу (пов'язаних

на квантовій мові з переходами між основним і збудженим коливними станами бозе-атомів у вузлах ґратки). Розрахунки корелятора (функції Гріна $\langle\langle\hat{x}|\hat{x}\rangle\rangle$) зміщень, який визначає статичну сприйнятливість "дипольного" типу, виявили тенденцію до появи м'яких фононних мод у спектрі та пов'язаних з цим нестійкостей щодо втрати вихідної симетрії і переходу у стан із "замороженими" зміщеннями.

Нашою метою у даній роботі є поглиблене вивчення цієї проблеми. Розглянемо, зокрема, як між собою співвідносяться та взаємно на себе впливають, з одного боку, бозе-конденсація, а з другого – модуляція (або однорідне впорядкування) зміщень бозе-частинок. В основу нашого розгляду буде покладено двостанову модель жорстких бозонів, у якій, на відміну від [4,16], перенесення частинок відбувається по основних станах. Дане наближення, як показано нижче, враховує зокрема особливості перенесення бозе-атомів у оптичних ґратках з подвійними локальними потенціальними ямами [17, 18]. Такі ґратки заслуговують уваги у зв'язку з можливостями легкого керування параметрами, що їх характеризують (такими, як енергія тунельного розщеплення в ямах). Будуть побудовані фазові діаграми, що визначають області існування різних фаз. Обговоримо також інші, крім оптичних ґраток, можливі застосування отриманих результатів.

2. Модель

Гамільтоніан системи жорстких бозонів на ґратці при врахуванні лише двох найнижчих локальних рівнів, розділених енергетичним проміжком δ ($\delta > 0$), можна записати у вигляді

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' + \hat{H}'', \quad (2.1)$$

де

$$\hat{H}_0 = \sum_{ij} t_{ij} b_i^\dagger b_j + \sum_{ij} t'_{ij} c_i^\dagger c_j - \mu \sum_i b_i^\dagger b_i + (\delta - \mu) \sum_i c_i^\dagger c_i$$

–гамільтоніан невзаємодіючих бозонів, який містить доданки, що описують міжвузлове перенесення бозонів по основних (t_{ij}) та збуджених (t'_{ij}) станах

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (2.2)$$

– гамільтоніан взаємодії між зміщеннями частинок від їх рівноважних положень у різних потенціальних мінімумах;

$$\hat{H}'' = -h \sum_i \hat{x}_i \quad (2.3)$$

– гамільтоніан взаємодії із зовнішнім полем, спряженим до зміщень. Тут

$$\hat{x}_i = d(c_i^\dagger b_i + b_i^\dagger c_i) \quad (2.4)$$

де d - матричний елемент оператора координати між основним та збудженим станами; b_i (b_i^\dagger) та c_i (c_i^\dagger) – бозе-оператори, що відносяться до таких станів, відповідно.

Надалі наш розгляд проводимо у границі $t'_{ij} \rightarrow 0$, що відповідає моделі з перенесенням по основних станах. До такого випадку можна звести задачу про динаміку бозе-частинок та бозе-конденсацію у ґратці, утвореній подвійними потенціальними ямами (див. Д.1.1)).

Вважаємо, що у кожній потенціальній ямі може бути не більше одного бозона. Це обмежує базис локальних станів $|n_i^b, n_i^c\rangle$ до трьох: $|0\rangle = |00\rangle$, $|1\rangle = |10\rangle$, $|2\rangle = |01\rangle$ [4]. У цьому випадку у представленні через оператори Хаббарда

$$b_i = X_i^{01}, \quad c_i = X_i^{02}; \quad \hat{x}_i = d(X_i^{21} + X_i^{12}) \\ b_i^\dagger b_i = X_i^{11}; \quad c_i^\dagger c_i = X_i^{21} \quad (2.5)$$

і, в результаті,

$$\hat{H} = \sum_{ij} t'_{ij} X_i^{10} X_j^{01} - \mu \sum_i X_i^{11} + (\delta - \mu) \sum_i X_i^{22} \\ + \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{ij} d^2 (X_i^{21} + X_i^{12}) (X_j^{21} + X_j^{12}) \\ - hd \sum_i (X_i^{21} + X_i^{12}) \quad (2.6)$$

Нашим завданням є дослідження термодинаміки та рівноважних станів даної моделі і вивчення, зокрема, фазових переходів, пов'язаних з бозе-конденсацією та зміщеннями частинок з рівноважних локальних положень у ґратці. Перенесення бозонів та взаємодію Φ_{ij} врахуємо у наближенні середнього поля, замінюючи

$$\sum_{ij} t_{ij} X_i^{10} X_j^{01} \rightarrow t(0)\xi \sum_i (X_i^{10} + X_i^{01}) - Nt(0)\xi^2, \quad (2.7)$$

де $t(0) = \sum_j t_{ij}$, $\xi = \langle X_i^{01} \rangle = \langle X_i^{10} \rangle$, та

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{ij} \hat{X}_i \hat{X}_j \rightarrow \rho \Phi(0) d \sum_i (X_i^{12} + X_i^{21}) - \frac{N}{2} \Phi(0) \rho^2, \quad (2.8)$$

причому $\Phi(0) = \sum_j \Phi_{ij}$, $\rho = \langle \hat{x}_i \rangle = 2d \langle X_i^{12} \rangle$ (тут $\langle X_i^{12} \rangle = \langle X_i^{21} \rangle$)

У цьому наближенні

$$\hat{H}_{MF} = \sum_i \hat{H}_i - N t(0) \xi^2 - \frac{N}{2} \Phi(0) \rho^2, \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= t(0) \xi (X_i^{10} + X_i^{01}) - \mu X_i^{11} + (\delta - \mu) X_i^{22} \\ &+ \rho \Phi(0) d (X_i^{12} + X_i^{21}) - h d (X_i^{12} + X_i^{21}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Енергії локальних бозонів станів визначаються тепер власними значеннями λ_α матриці

$$\|\hat{H}_i\| = \begin{pmatrix} & & t(0)\xi \\ & -\mu & (\rho\Phi(0) - h)d \\ t(0)\xi & (\rho\Phi(0) - h)d & \delta - \mu \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Відповідно, термодинамічний потенціал моделі запишеться як

$$\begin{aligned} \Omega/N &= -t(0)\xi^2 - \frac{1}{2}\Phi(0)\rho^2 \\ &- \theta \ln (e^{-\beta\lambda_1} + e^{-\beta\lambda_2} + e^{-\beta\lambda_3}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Параметри порядку ξ та ρ мають визначатись з умов самоузгодження

$$\frac{\partial \Omega/N}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \Omega/N}{\partial \rho} = 0; \quad (2.13)$$

та відповідати абсолютному мінімуму потенціалу Ω при заданих значеннях хімпотенціалу μ та поля h .

В принципі, є можливість існування (крім нормальної з $\rho = 0$, $\xi = 0$) фаз з ($\rho = 0$, $\xi \neq 0$), ($\rho \neq 0$, $\xi = 0$) та ($\rho \neq 0$, $\xi \neq 0$). Нижче ми розглянемо спочатку, як незалежні, переходи до фаз $\rho \neq 0$ та $\xi \neq 0$.

3. Фаза з $\rho \neq 0$.

Розв'язок системи рівнянь (2.13) з $\rho \neq 0$ і $\xi = 0$ описує фазу із спонтанним однорідним зміщенням частинок. У випадку ґратки з локальними потенціалами у вигляді подвійних потенціальних ям цьому відповідає стан з асиметричною заселеністю позицій у ямах (типу однорідного дипольного впорядкування). При $\xi = 0$ власними значеннями матриці (2.11) є

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \frac{\delta}{2} - \mu \pm \sqrt{\delta^2/4 + B^2}, \quad (3.1)$$

де $B = d(\rho\Phi(0) - h)$.

Термодинамічний потенціал записується у вигляді

$$\Omega/N = \frac{1}{2} \Phi(0) \rho^2 - \theta \ln \left[1 + 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{\delta^2/4 + B^2} e^{-\beta(\delta/2 - \mu)} \right], \quad (3.2)$$

а для параметра ρ отримується за допомогою другої з умов (2.13) рівняння

$$\rho = - \frac{2 \operatorname{sh} \beta R \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}}{1 + 2 \operatorname{ch} \beta R \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}} \cdot \frac{Bd}{R}, \quad (3.3)$$

де запроваджено позначення $R = \sqrt{\delta^2/4 + B^2}$.

За наявності поля h рівняння (3.3) не має нульового розв'язку $\rho = 0$. Він існує лише при $h = 0$; у цьому випадку ненульові розв'язки визначаються з рівняння

$$1 = - \frac{2 \operatorname{sh} \beta R_0 \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}}{1 + 2 \operatorname{ch} \beta R_0 \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}} \cdot \frac{d^2 \Phi(0)}{R_0}, \quad (3.4)$$

де $R_0 = \sqrt{\delta^2/4 + d^2 \Phi^2(0) \rho^2}$.

Як видно, це рівняння може мати розв'язки для ρ лише при $\Phi(0) < 0$. Якщо ж $\Phi(0) > 0$, то однорідне впорядкування зміщень $\langle \hat{x}_0 \rangle$ змінюється на модульоване. Справді, як показано в Додатку 2, при взаємодії лише найближчих сусідів та модуляції з подвоєнням періоду ґратки (коли $\langle \hat{x}_i \rangle$ дорівнює $+\rho$ або $-\rho$ для першої або другої підґраток, відповідно) рівняння, аналогічне до (3.4) має інший знак з правої сторони.

Цей факт дозволяє розглядати єдине рівняння

$$1 = \frac{2 \operatorname{sh} \beta R_0 \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}}{1 + 2 \operatorname{ch} \beta R_0 \cdot e^{-\beta(\delta/2 - \mu)}} \cdot \frac{d^2 |\Phi(0)|}{R_0}, \quad (3.5)$$

яке стосується обох випадків.

Розв'язки рівняння (3.5) отримуються числовим методом. Серед них слід відібрати ті, що відповідають абсолютному мінімуму функції (3.2). У границі нульової температури завдання спрощується і таке дослідження можна провести аналогічно.

3.1. Випадок $T = 0$.

При температурі абсолютного нуля тільки основний стан системи дає внесок у термодинамічний потенціал. Залежно від співвідношень між параметрами моделі основними можуть бути лише одновузлові стани з енергіями λ_1 та λ_3 . У першому з цих випадків

$$\Omega/N = -\frac{1}{2}\Phi(0)\rho^2 + \lambda_1 = -\frac{1}{2}\Phi(0)\rho^2 \quad (3.6)$$

і з умов (2.13) випливає, що $\rho = 0$. Це фаза без зміщень, і більше того – без частинок.

Коли ж основним є стан λ_3 ,

$$\Omega/N = -\frac{1}{2}\Phi(0)\rho^2 + \delta/2 - \mu - \sqrt{\delta^2/4 + B^2}; \quad (3.7)$$

для параметра ρ , виходячи з (2.13), маємо рівняння

$$\rho = -\frac{Bd}{\sqrt{\delta^2/4 + B^2}}; \quad (3.8)$$

Після заміни $\Phi(0) = -|\Phi(0)|$ (для $\Phi(0) < 0$) це рівняння можна записати у вигляді

$$\rho = \frac{\bar{B}d}{\sqrt{\delta^2/4 + \bar{B}^2}}; \quad (3.9)$$

де $\bar{B} = d(\rho|\Phi(0)| + h)$. Згідно із засначенням вище, воно охоплює і випадок $\Phi(0) > 0$.

Врешті, при певних умовах може наступати зміна основного стану. Виходячи із співвідношення $\lambda_1 = \lambda_3$, знаходимо, що це відбувається при

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu(\mu - \delta)}}{|\Phi(0)|d} - \frac{h}{|\Phi(0)|} \quad (3.10)$$

З формули (3.9) випливає, що $\rho \rightarrow \pm d$ при $h \rightarrow \pm\infty$, відповідно. З другого боку, з розв'язку рівняння (3.9) відносно h

$$h = \frac{\delta}{2d} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{d^2 - \rho^2}} - \rho|\Phi(0)| \quad (3.11)$$

видно, що при $\rho \ll d$

$$h \simeq \left(\frac{\delta}{2d^2} - |\Phi(0)| \right) \rho \quad (3.12)$$

Звідси випливає, що залежність ρ від h має S -подібний характер при

$$\delta/2 < d^2|\Phi(0)| \equiv W, \quad (3.13)$$

що є умовою існування при $h = 0$ спонтанного значення

$$\rho_0^s = d\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4W^2}}, \quad (3.14)$$

яке можна отримати з (3.9). Воно описує стан з однорідним або модульованим (залежно від знаку $\Phi(0)$) зміщенням бозе-частинок, що знаходяться у вузлах ґратки. Важливо, що ρ_0^s не залежить від хімічного потенціалу бозонів.

Таким чином, є дві фази, у яких при $T = 0$ може перебувати система: 1) фаза з $\rho = 0$ (коли основним є стан з енергією λ_1); 2) фаза з $\rho = \rho_0^s$ (основний стан має енергію λ_3). Перехід між ними можна описати, дослідивши поведінку термодинамічного потенціалу Ω при зміні μ , коли виконується умова $\lambda_1 = \lambda_3$.

Підставимо значення ρ (формула (3.10)), що випливає з цієї умови, у вираз

$$\Omega/N = +\frac{1}{2}|\Phi(0)|\rho^2 + \lambda_1 = -\frac{1}{2}|\Phi(0)|\rho^2 + \lambda_3 \quad (3.15)$$

Як результат, отримаємо

$$\Omega/N = \frac{1}{2|\Phi(0)|} \left[\frac{\sqrt{\mu(\mu - \delta)}}{d} + h \right]^2 \quad (3.16)$$

Зокрема, при $h = 0$

$$\Omega/N = \frac{\mu(\mu - \delta)}{2W} \quad (3.17)$$

Графіки функцій

$$\begin{aligned} (a) \quad \Omega/N|_{\lambda_1, h=0} &= 0 \\ (b) \quad \Omega/N|_{\lambda_3, h=0} &= -\frac{(W - \delta/2)^2}{2W} - \mu \\ (c) \quad \Omega/N|_{\lambda_1=\lambda_3, h=0} &= \frac{\mu(\mu - \delta)}{2W} \end{aligned} \quad (3.18)$$

наведено на рис... в об'єднаному вигляді. Видно структуру типу "риб'ячого хвоста що вказує на перехід 1-го роду між фазами $\rho = 0$ (гілка(a)) та $\rho \neq 0$ (гілка (b)). Гілка (c) описує нестійкі стани. Точками абсолютної нестійкості першої з них є $\mu = 0$, а другої – $\mu = \delta/2 - W$. Фазовий перехід відбувається при

$$\mu = \mu_1 \equiv -\frac{1}{2W} \left(W - \frac{\delta}{2} \right)^2. \quad (3.19)$$

Залежність параметра порядку $\rho \equiv \tilde{\rho}d$ від хімічного потенціалу бозонів, що описується при $h = 0$ формулами

$$\begin{aligned} (a) \quad & \tilde{\rho} = 0 \\ (b) \quad & \tilde{\rho} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4W^2}} \\ (c) \quad & \tilde{\rho} = \frac{\sqrt{\mu(\mu - \delta)}}{W} \end{aligned} \quad (3.20)$$

представлено на рис... . У точці $\mu = \mu_1$ має місце стрибок із значення $\tilde{\rho} = 0$ до значення $\tilde{\rho} = \rho_0^s/d$.

Цей фазовий перехід супроводжується також стрибком концентрації бозонів $\bar{n}_B = -\frac{\partial(\Omega/N)}{\partial\mu}$, при якому \bar{n}_B змінюється при рості μ від $\bar{n}_B = 0$ до $\bar{n}_B = 1$; це впливає з формул (3.6) і (3.7). Фаза з $\rho = 0$ – це стан з відсутніми бозонами.

3.2. Випадок $T \neq 0$.

Наведене вище стосувалося температури абсолютного нуля. При $T \neq 0$ треба виходити з рівнянь (3.3) чи (3.5) та загального виразу для термодинамічного потенціалу Ω (3.2) і проводити розрахунки числовим способом. Очевидним фактом є зменшення спонтанного (при $h = 0$) значення параметра порядку ρ при рості температури. Перехід до нормальної фази відбувається при цьому шляхом фазового переходу 2-го роду. Його температура визначається з рівняння

$$1 = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\beta\delta}{2} e^{-\beta(\delta/2-\mu)}}{1 + 2 \operatorname{ch} \frac{\beta\delta}{2} e^{-\beta(\delta/2-\mu)}} \cdot \frac{2W}{\delta}, \quad (3.21)$$

яке впливає з (3.5) при граничному переході $\rho \rightarrow 0$.

Графіки, які зображають залежність Ω і ρ від μ при різних температурах, а також фазову діаграму (T, μ) , подано, відповідно, на рис. 3 та 4. Останній ілюструє область існування фази з $\rho \neq 0$ при

певному співвідношенні між параметром W , що описує взаємодію між зміщеннями бозонів, та енергією δ переходів бозонів у збуджений стан на окремому вузлі ґратки. На рис. 4 зображено також лінію спінодалі, на якій нормальна фаза стає абсолютно нестійкою (спінодаль визначається умовою $(\partial\rho/\partial\mu)_{\rho=0} = \infty$).

4. Фаза $\xi \neq 0$.

Розглянемо тепер перехід від нормальної фази до фази з бозе-конденсатом (з $\xi \neq 0$) у моделі (2.1) (де перенесення бозонів відбувається по основному стану), вважаючи, що він відбувається незалежно від переходу з параметром порядку ρ . Це має місце, очевидно, при відсутності взаємодії зміщень Φ_{ij} . Для ненульових значень Φ_{ij} така ситуація також можлива; відповідний критерій буде сформульовано нижче.

Виділимо частину гамільтоніана, яка відповідає за конденсацію. У наближенні середнього поля та при $\rho = 0$ і $h = 0$ одновузловий спектр бозонів для ξ -фази має згідно з (2.10), (2.11) вигляд

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2} \\ z_3 &= \delta - \mu \end{aligned} \quad (4.1)$$

Термодинамічний потенціал Ω записується у цьому випадку як

$$\Omega/N = -t(0)\xi^2 - \theta \ln \left(e^{-\beta(\delta-\mu)} + e^{\frac{\beta\mu}{2}} \cdot \operatorname{ch} \beta \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + t^2(0)\xi^2} \right) \quad (4.2)$$

Відповідно, виходячи з умови рівноваги (2.13), отримуємо наступне рівняння для параметра порядку бозе-конденсату

$$\xi = -\frac{\operatorname{sh} \beta \sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2}}{e^{-\beta\delta} e^{\beta\mu/2} + 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2}} \cdot \frac{t(0)\xi}{\sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2}} \quad (4.3)$$

Дане рівняння відоме для двостанової моделі. У подібній формі воно було отримане в [4] у випадку перенесення бозе-частинок по збуджених станах (що відповідає у нашому розгляді іншому знаку параметра δ).

Рівняння (4.3) має ненульові розв'язки при $t(0) < 0$. Як показано в [4], при $\delta > 0$ фазові переходи до фази з бозе-конденсатом є у границі $T \rightarrow 0$ другого роду. Це видно також з аналізу основного стану

системи бозонів; при будь-яких значеннях μ енергетично найнижчим є рівень z_2 . Термодинамічний потенціал дається виразом

$$\Omega/N = |t(0)|\xi^2 - \mu/2 - \sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2}, \quad (4.4)$$

а рівняння для ненульового ξ зводиться до

$$1 = \frac{|t(0)|}{2\sqrt{\mu^2/4 + t^2(0)\xi^2}} \quad (4.5)$$

Звідси

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{t^2(0)}} \quad (4.6)$$

Даний результат показує, що фаза $\xi \neq 0$ існує в області $|t(0)| < \mu < +|t(0)|$.

Підставляючи (4.6) у вираз для термодинамічного потенціалу, отримаємо

$$\Omega/N = \begin{cases} 0, & \mu < -|t(0)| \\ -\mu & \mu > |t(0)| \\ -\frac{1}{4|t_0|}(\mu + |t(0)|)^2, & -|t(0)| < \mu < |t(0)| \end{cases} \quad (4.7)$$

Похідна $\frac{\partial}{\partial \mu}(\Omega/N) = -\bar{n}_B$, яка визначає концентрацію бозонів, змінюється неперервно в точках $\mu = \pm|t(0)|$. Це підтверджує, що переходи до фази $\xi \neq 0$ є 2-го роду (при $T = 0$).

Графіки залежностей Ω/N та \bar{n}_B від μ подіно на рис. 5,6.

Зауважимо, що при $T \neq 0$ внаслідок часткового заселення збудженого стану рід фазового переходу до фази з $\xi \neq 0$ може змінюватись з 2-го на 1-ий. Така ситуація має місце при невеликих енергіях збудження δ та при проміжних температурах (більш детально це описано в [4]).

5. Повні фазові діаграми.

Встановлені в попередніх параграфах умови реалізації при $T = 0$ фаз $\xi \neq 0$ чи $\rho \neq 0$ отримані в припущенні, що існування однієї з фаз виключає появу іншої. Формально, для першої з них це виконується при $\Phi_{ij} = 0$, а для другої – при $t_{ij} = 0$. Коли ж обидва параметри Φ_{ij} і t_{ij} , відмінні від нуля, може мати місце конкуренція

між згаданими фазами у випадку накладання областей, що їм відповідають. Щоб дослідити це питання, потрібно розглянути поведінку повного термодинамічного потенціалу Ω .

Як показують числові розрахунки, проведені виходячи з виразу (2.12) з використанням власних значень матриці (2.11) і рівнянь самоузгодження (2.13), термодинамічно вигідними залишаються окремі фази ξ і ρ ; фаза, де одночасно $\xi \neq 0$ та $\rho \neq 0$, є нестійкою. Тим самим, області їх існування та умови, при яких відбувається перехід з однієї фази в іншу, можна встановити шляхом порівняння відповідних термодинамічних потенціалів.

При $T = 0$ це вдається здійснити аналітично, використовуючи формули (3.18) і (4.7). Графіки цих функцій суміщено на рис. 7 і виділено два випадки. Перший з них (рис. 7а) реалізується при

$$\frac{W}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2W}\right)^2 > |t(0)| \quad (5.1)$$

Тут фазовий перехід до фази ρ при зростанні μ відбувається раніше, ніж була б можливою поява бозе-конденсату. Станові з $\xi \neq 0$ відповідає гілка Ω_ξ з більшим значенням Ω , ніж для стану $\rho \neq 0$ (гілка Ω_ρ), і фаза ξ не виникає. Існують тим самим, тут дві фази: 1) нормальна ($\rho = 0$, $\xi = 0$) при $\mu < \mu_1$; і 2) фаза з $\rho \neq 0$ – при $\mu > \mu_1$ ($\mu_1 = -\frac{W}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2W}\right)^2$).

Другий випадок, коли виконується обернена нерівність до (5.1), відповідає великим значенням параметра бозонного перенесення $|t(0)|$. Як видно з рис. 7б, мінімальні значення потенціалу Ω досягаються на трьох гілках: 1) $\mu < -|t(0)|$ – гілка $\Omega_0 = 0$, нормальна фаза, 2) $-|t(0)| < \mu < \mu^*$ – гілка Ω_ξ , фаза $\xi \neq 0$; 3) $\mu > \mu^*$ – гілка Ω_ρ , фаза $\rho \neq 0$. Точка μ^* відповідає перетину гілок Ω_ξ і Ω_ρ і визначається з рівняння

$$-\frac{1}{4|t(0)|}(\mu + |t(0)|)^2 = -\frac{(W - \delta/2)^2}{2W} - \mu, \quad (5.2)$$

що дає

$$\mu^* = -|t(0)| - \sqrt{\frac{2|t(0)|}{W}}(W - \delta/2), \quad (5.3)$$

У цьому випадку фаза з бозе-конденсатом існує як проміжна зліва від фази $\rho \neq 0$. Фазовий перехід до фази ξ в точці $\mu = -|t(0)|$ є 2-го роду, а перехід між фазами ξ і ρ при $\mu = \mu^*$ є першого роду.

Подібно до цього, коли виконується, умова (5.1) і фаза з бозе-конденсатом відсутня, перехід до фази ρ також є 1-го роду.

Поведінку бозонної концентрації \bar{n}_B в області цих фазових переходів представлено на рис. 8а і 8б. При переході 1-го роду до фази ρ має місце стрибкоподібна зміна \bar{n}_B , а в області фази ξ з бозе-конденсатом \bar{n}_B змінюється лінійно. Така залежність від μ при $T = 0$ є характерною для надплинної фази в моделі Бозе-Хаббарда [19,20].

Наведені результати стосуються абсолютного нуля температури. При $T \neq 0$, як показують числові розрахунки, фаза ξ залишається проміжною і в цьому випадку. Як видно з фазових діаграм (T, μ) , побудованих при різних значеннях параметра $|t(0)|$ (рис.9), при зменшенні $|t(0)|$ її область звужується. Понижується також максимальна температура, при якій ця область існує. Якщо $|t_0| < |t_0|_{cr}$, фаза з бозе-конденсатом відсутня ($|t_0|_{cr} \approx 0,2$ при $T = 0,1, \delta = -0,9, W = 0,8$; див. рис.10, де подано діаграму $(|t_0|, \mu)$).

Перехід з фази ξ до фази ρ є 1-го роду і при $T \neq 0$. Для невеликих значень $|t(0)|$ таким є також перехід між нормальною і ρ фазами, однак при підвищенні температури рід його змінюється з 1-го на 2-ий (рис.9). Для достатньо великих $|t(0)|$ цей перехід є 2-го роду починаючи з потрійної точки, де у рівновазі між собою перебувають усі три фази.

6. Висновки

Дослідження термодинаміки граткової бозе-системи, проведене в рамках двостанової моделі жорстких бозонів, показує, що міжвузлова взаємодія, яка виникає при зміщеннях частинок з їх рівноважних положень у гратці, може приводити до спонтанного порушення симетрії і появи фази з однорідним або просторово модульованим зміщенням. Матричні елементи зміщень пов'язані з переходами бозонів між основним і збудженим коливним станом і тому згадані впорядкування зміщень є аналогом дипольних впорядкувань у сегнетоелектричних кристалах. У областях значень хімічного потенціалу бозонів, де їх концентрація не є цілочисельною і змінюється, міжвузлове перенесення частинок приводить до нестійкості щодо появи бозе-конденсату. Конкуренція між цим ефектом і тенденцією до "заморожування" зміщень проявляється на формі фазових діаграм, які визначають області існування нормальної фази, фази із спонтанним зміщенням ($\rho \neq 0$) та фази з бозе-конденсатом ($\xi \neq 0$). Числовий аналіз рівноважних станів та умов їх стійкості не виявив фази з ненульовими значеннями обох параметрів порядку ρ і ξ (такий стан

відповідав би фазі "суперсолід відомій із досліджень фазових переходів у оптичних ґратках з бозе-атомами, виконаних на основі простої моделі Бозе-Хаббарда).

При застосуванні до оптичних ґраток наш модельний розгляд має безпосереднє відношення до ґратки, утвореної системою локальних подвійних потенціальних ям. У цьому випадку визначальним є внесок, пов'язаний із перестрибуванням між вузлами, при якому частинки не покидають основного коливного стану. "Заморожене" зміщення, коли $\rho \neq 0$, відповідає у даному випадку локалізації в одному із двох потенціальних мінімумах у ямі. Така ситуація є аналогічною до картини впорядкувань протонів на водневих зв'язках у Н-зв'язаних сегнетоелектричних кристалах. Відмінність, однак, полягає в тому, що у таких кристалах число протонів фіксоване (один протон на зв'язок). Винятком є кристали з т.зв. суперпротонними (суперіонними) фазами, у яких число віртуальних Н-зв'язків перевищує кількість протонів і середня заселеність на зв'язок є дробовою ($\bar{n}_i < 1$). У цьому відношенні наша модель могла б бути застосованою до опису, крім впорядкованих, ще й фаз із суперпротонною провідністю, які існують при температурах вищих за температури, при яких реалізуються впорядковані фази з цілочисельним заповненням водневих зв'язків. Можливість такої ситуації ілюструє рис. 9.... Це питання, однак, потребує окремого і більш детального розгляду.

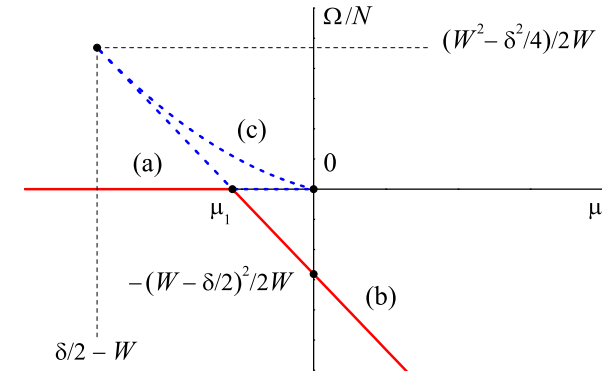


Рис. 1. Залежність термодинамічного потенціалу Ω/N від хімічного потенціалу бозонів μ при $T = 0$ і $t(0) = 0$ в області переходу до фази $\rho \neq 0$. Точка $\mu = \mu_1$ відповідає фазовому переходу першого роду. Тут і на наступних рисунках суцільна лінія позначає стійкі стани, штрихова — метастабільні.

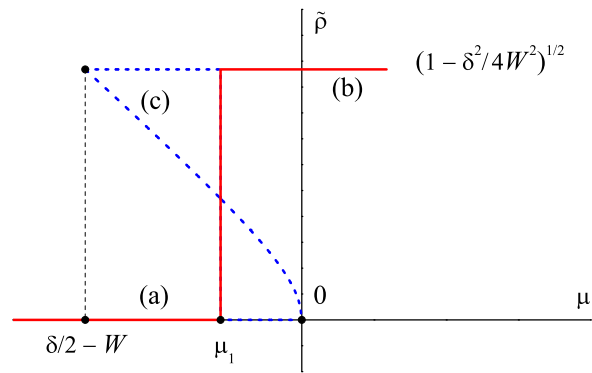


Рис. 2. Залежність параметра порядку ρ від хімічного потенціалу бозонів μ при $T = 0$ і $t(0) = 0$ в околі переходу до фази $\rho \neq 0$.

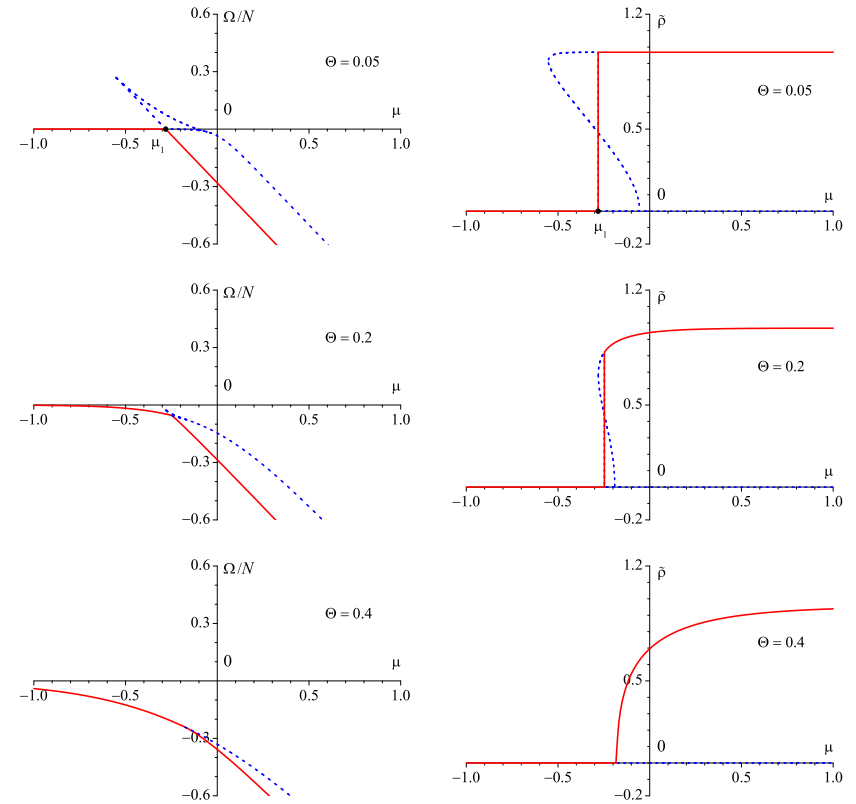


Рис. 3. Залежність термодинамічного потенціалу Ω/N і параметра порядку ρ від хімічного потенціалу бозонів μ при $T \neq 0$ ($t(0) = 0$). Величини, що мають розмірність енергії, подано в одиницях W .

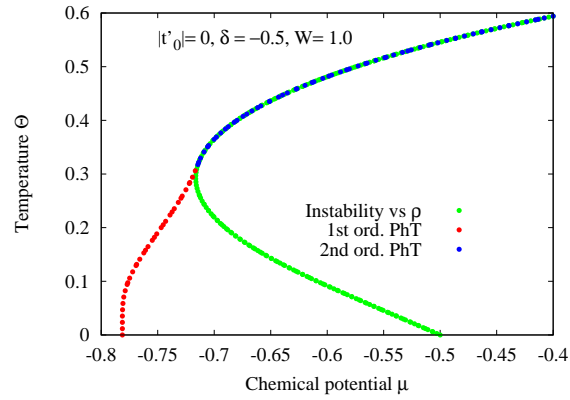


Рис. 4. Фазова діаграма (T, μ) при переході до фази $\rho \neq 0$. Суцільна лінія позначає переходи першого роду, штрихова — другого роду, пунктирна лінія — спінодаль.

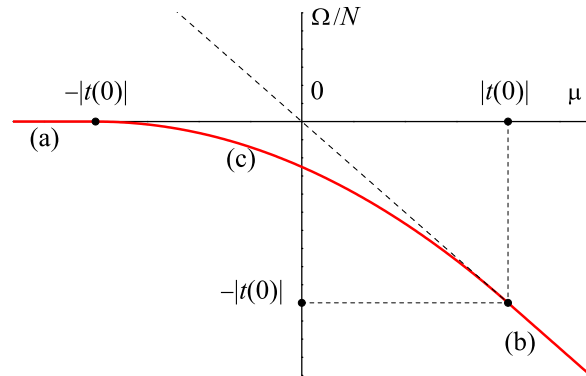


Рис. 5. Залежність термодинамічного потенціалу Ω/N від хімічного потенціалу бозонів μ в околі переходу до фази $\xi \neq 0$ при $T = 0$ ($\Phi_{ij} = 0$).

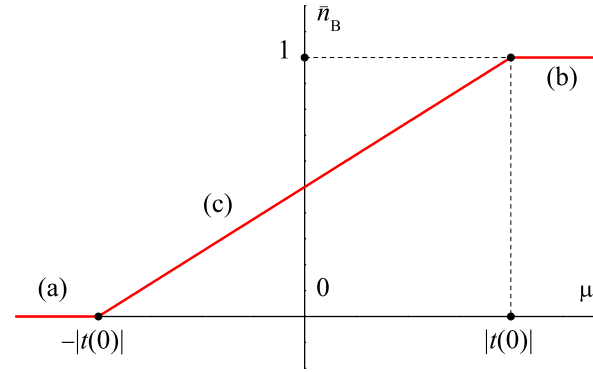


Рис. 6. Залежність концентрації бозонів \bar{n}_B від хімічного потенціалу бозонів μ в околі переходу до фази $\xi \neq 0$ при $T = 0$ ($\Phi_{ij} = 0$).

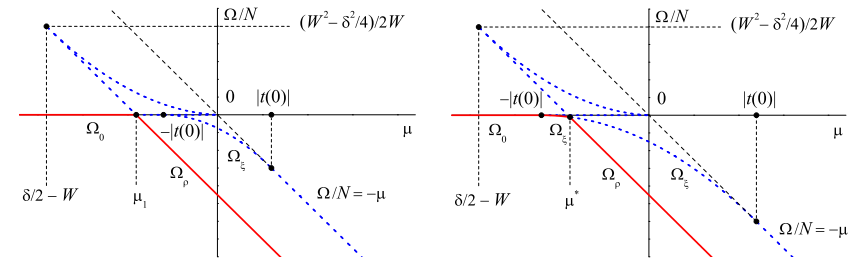


Рис. 7. Термодинамічні потенціали Ω_ρ (формула (3.18)) і Ω_ξ (формула (4.7)) як функції хімічного потенціалу бозонів μ при $T = 0$. Зліва: випадок безпосереднього переходу з нормальної фази до фази $\rho \neq 0$ (виконується нерівність (5.1)). Справа: випадок, коли існує проміжна фаза $\xi \neq 0$ (виконується нерівність, обернена до (5.1)).

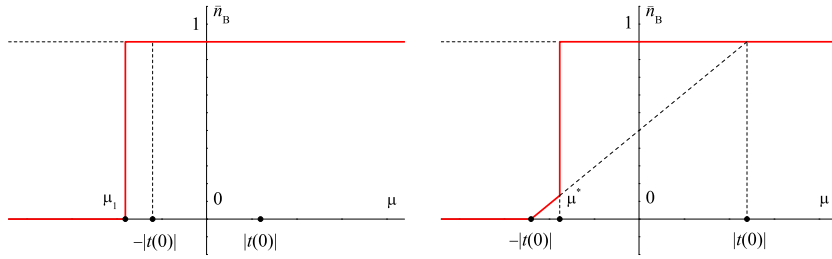


Рис. 8. Концентрація бозонів \bar{n}_B як функція хімічного потенціалу бозонів μ при $T = 0$. Випадки зліва і справа відповідають поданим на рис. 7.

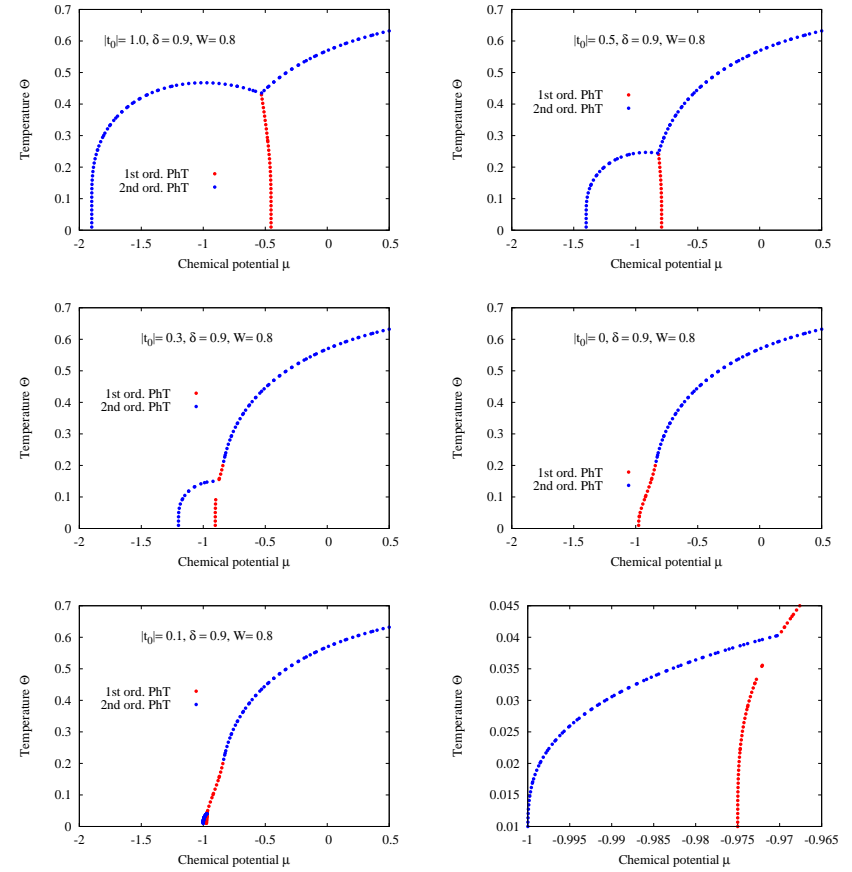


Рис. 9. Фазові діаграми (T, μ) . Показано області існування нормальної фази та фаз $\xi \neq 0$ і $\rho \neq 0$ при різних значеннях $|t(0)|$ ($\delta = 0.9$, $W = 0.8$). Позначення ліній ФП — такі, як на рис. 4.

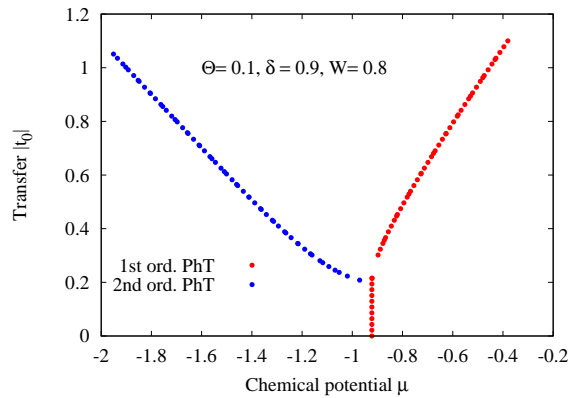


Рис. 10. Фазова діаграма $(|t(0)|, \mu)$ при фіксованій температурі ($T = 0.1$, $\delta = 0.9$, $W = 0.8$). Позначення ліній ФП — такі ж, як на рис. 4.

Д.1. Додатки

Д.1.1. Оптична гратка з подвійними потенціальними ямами.

Як приклад, розглянемо оптичну гратку з подвійними локальними потенціальними ямами. Для простоти обмежимося випадком простої кубічної гратки з періодом R_0 , у якій подвійні мінімуми орієнтовані вздовж однієї з осей (рис. Д1). Прийнемо, як звичайно, що бозеатоми, перебуваючи у потенціальних ямах гратки, локалізуються у енергетично найнижчих коливних станах. Для ями, що знаходиться у вузлі гратки i — це стани $|i, a\rangle$ і $|i, b\rangle$, зосереджені у мінімумах a та b відповідно.

Враховуємо можливість перестрибування бозонів між найближчими позиціями у гратці: 1) перестрибування між положеннями a та b у межах однієї подвійної ями; 2) перестрибування між сусідніми подвійними ямами [21]. У першому з цих випадків гамільтоніан для

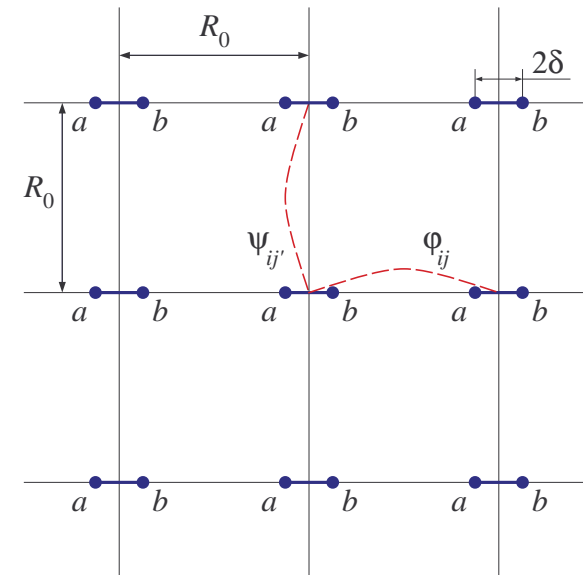


Рис. 11. Взаємодії бозонів у гратці з подвійними локальними мінімумами.

і-ї ями (у і-му вузлі ґратки) має вигляд

$$\hat{H}_0 = \Omega(c_{ia}^+ c_{ib} + c_{ib}^+ c_{ia}) - \mu(c_{ia}^+ c_{ia} + c_{ib}^+ c_{ib}), \quad (\text{Д.1.1})$$

де $c_{ia}(c_{ia}^+)$ та $c_{ib}(c_{ib}^+)$ – оператори знищення (народження) бозонів у потенціальних мінімумах $|i, a\rangle, (|i, b\rangle)$; Ω – параметр перестрибування (тунелювання) між ними, μ – хімічний потенціал бозонів. Шляхом перетворення

$$\begin{aligned} c_{ia} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d_{i1} + d_{i2}) \\ c_{ib} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d_{i1} - d_{i2}), \end{aligned} \quad (\text{Д.1.2})$$

яке еквівалентне до переходу від локалізованих станів $|i, a\rangle$ та $|i, b\rangle$ до їх симетричних $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|i, a\rangle + |i, b\rangle) \equiv |i, 1\rangle\right)$ та антисиметричних $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|i, a\rangle - |i, b\rangle) \equiv |i, 2\rangle\right)$ комбінацій, гамільтоніан (Д.1.1) набуває діагонального вигляду:

$$\hat{H}_i = E_1 d_{i1}^+ d_{i1} + E_2 d_{i2}^+ d_{i2} \quad (\text{Д.1.3})$$

де $E_{1,2} = \pm\Omega - \mu$. При $\Omega < 0$ основним станом є симетричний $|i, 1\rangle$. За рахунок тунельного розщеплення збуджений стан відділений від основного щільною $2|\Omega|$.

Перестрибування між сусідніми подвійними потенціальними ямами (випадок 2) описується оператором

$$\hat{H} = \sum_{ij}^{(\parallel)} \sum_{\alpha\beta} \varphi_{ij}^{\alpha\beta} c_{i\alpha}^+ c_{j\beta} + \sum_{ij}^{(\perp)} \sum_{\alpha\beta} \Psi_{ij}^{\alpha\beta} c_{i\alpha}^+ c_{j\beta}, \quad (\text{Д.1.4})$$

де перший доданок відноситься до переміщень бозонів у поздовжньому напрямку (паралельно до орієнтації подвійних ям), а другий – перпендикулярно до нього ($\alpha, \beta = a$ або b).

У випадку, коли віддаль r_{ab} між позиціями (a) і (b) у потенціальній ямі набагато менша ніж віддаль R_0 між сусідніми ямами [21], можна застосувати розклади за степенями відношення r_{ab}/R_0 . Для параметрів перестрибування отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{aa} &= \varphi_{ij}^{bb} = \varphi(R_0); & \varphi_{ij}^{ab(ba)} &= \varphi(R_0) \pm \varphi'(R_0) \cdot 2r_{ab} \\ \psi_{ij}^{aa} &= \psi_{ij}^{bd} = \psi(R_0); & \psi_{ij}^{ab} &= \psi_{ij}^{ba} = \\ & & &= \psi(R_0) + \psi'(R_0) \cdot \frac{2r_{ab}^2}{R_0} \end{aligned} \quad (\text{Д.1.5})$$

Після переходу до операторів d_{i1}, d_{i2} гамільтоніан (Д.1.4) запишеться як $\hat{H} = \hat{H}_{\parallel} + \hat{H}_{\perp}$, де

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\parallel} &= \sum_{i < j}^{(\parallel)} [2\varphi(R_0) d_{i1}^+ d_{j1} - \varphi'(R_0) 2r_{ab} \cdot d_{i1}^+ d_{j2} \\ &+ \varphi'(R_0) 2r_{ab} \cdot d_{i2}^+ d_{j1}] + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{Д.1.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\perp} &= \sum_{ij}^{(\perp)} \left\{ \left[2\psi(R_0) + \psi'(R_0) \cdot \frac{2r_{ab}^2}{R_0} \right] d_{i1}^+ d_{j1} \right. \\ &\left. - \psi'(R_0) \cdot \frac{2r_{ab}^2}{R_0} d_{i2}^+ d_{j2} \right\} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (\text{Д.1.7})$$

При малому відношенні r_{ab}/R_0 основний внесок належить перестрибуванню між симетричними станами. У наближенні середнього поля поправки починаються з членів другого порядку (лінійні поправки компенсуються). Нехтуючи внесками другого (і вище) порядку, прийемо, що перенесення бозе-частинок описується гамільтоніаном

$$\hat{H}_{\parallel} + \hat{H}_{\perp} = \sum_{ij}^{(\parallel)} t_{ij}^{\parallel} d_{i1}^+ d_{j1} + \sum_{ij}^{(\perp)} t_{ij}^{\perp} d_{i1}^+ d_{j1} \quad (\text{Д.1.8})$$

Покладемо $t_{ij}^{\parallel} = t_{ij}^{\perp} \equiv t_{ij}$, оскільки ефекти локальної анізотропії мало впливають на відповідні матричні елементи ($\varphi(R_0) \approx \psi(R_0)$). В результаті прийдемо до гамільтоніана двостанової моделі

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \Omega \sum_i (d_{i1}^+ d_{i1} - d_{i2}^+ d_{i2}) - \mu \sum_i (d_{i1}^+ d_{i1} + d_{i2}^+ d_{i2}) \\ &+ \sum_{ij} t_{ij} d_{i1}^+ d_{j1}, \end{aligned} \quad (\text{Д.1.9})$$

де перенесення відбувається по основних станах, $a - 2|\Omega| = \delta$ має зміст енергії збудження (різниця між енергіями збудженого і основного станів на вузлі). Після заміни $\mu \rightarrow \mu - \delta/2$ оператор (Д.1.8) переходить у гамільтоніан (2.1)

Д.1.2. Стан з модуляцією зміщень.

Для опису модуляції з подвоєнням періоду використаємо підхід, що ґрунтується на розбитті вихідної ґратки на дві підґратки. Покладемо

$$\langle \hat{x}_{i1} \rangle = \rho_1; \quad \langle \hat{x}_{i2} \rangle = \rho_2 \quad (\text{Д.1.10})$$

для першої і другої з них, відповідно. При врахуванні міжвузлової взаємодії між зміщеннями Φ_{ij} у наближенні середнього поля гамільтоніан системи запишеться при $t_{ij} \rightarrow 0$ та за відсутності зовнішнього поля як

$$\hat{H} = \sum_{i_1} \hat{H}_{i_1} + \sum_{i_2} \hat{H}_{i_2} - \frac{N}{2} \phi(0) \rho_1 \rho_2, \quad (\text{Д.1.11})$$

де

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i_1} &= -\mu X_{i_1}^{11} + (\delta - \mu) X_{i_1}^{22} + \rho_2 \Phi(0) d(X_{i_1}^{12} + X_{i_1}^{21}), \\ \hat{H}_{i_2} &= -\mu X_{i_2}^{11} + (\delta - \mu) X_{i_2}^{22} + \rho_1 \Phi(0) d(X_{i_2}^{12} + X_{i_2}^{21}) \end{aligned} \quad (\text{Д.1.12})$$

Власні значення операторів (Д.1.12), що діють на базисі станів $|0\rangle$, $|1\rangle$ і $|2\rangle$, мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1,2)} &= 0, \quad \lambda_2^{(1,2)} = \frac{\delta}{2} - \mu + \sqrt{\delta^2/4 + B_{(2,1)}^2} \\ \lambda_3^{(1,2)} &= \frac{\delta}{2} - \mu - \sqrt{\delta^2/4 + B_{(2,1)}^2}, \end{aligned} \quad (\text{Д.1.13})$$

причому

$$B_1 = \rho_1 \Phi(0) d; \quad B_2 = \rho_2 \Phi(0) d; \quad (\text{Д.1.14})$$

Відповідно, для термодинамічного потенціалу отримується вираз

$$\begin{aligned} \Omega/N &= -\frac{1}{2} \Phi(0) \rho_1 \rho_2 - \frac{\theta}{2} \left(1 + 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{\delta^2/4 + B_1^2} \cdot e^{-\beta(\frac{\delta}{2} - \mu)} \right) \\ &\quad - \frac{\theta}{2} \ln \left(1 + 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{\delta^2/4 + B_2^2} \cdot e^{-\beta(\frac{\delta}{2} - \mu)} \right) \end{aligned} \quad (\text{Д.1.15})$$

(враховано, що число вузлів у підгратці дорівнює $N/2$).

З умов рівноваги

$$\frac{\partial \Omega/N}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega/N}{\partial \rho_2} = 0 \quad (\text{Д.1.16})$$

впливають рівняння для параметрів самоузгодження ρ_1 і ρ_2

$$\begin{aligned} \rho_{1(2)} &= - \frac{2 \operatorname{sh} \beta \sqrt{\delta^2/4 + B_{2(1)}^2}}{e^{\beta(\frac{\delta}{2} - \mu)} + 2 \operatorname{ch} \beta \sqrt{\delta^2/4 + B_{2(1)}^2}} \\ &\quad \cdot \frac{d^2 \phi(0)}{\sqrt{\delta^2/4 + B_{2(1)}^2}} \cdot \rho_{2(1)} \end{aligned} \quad (\text{Д.1.17})$$

При $\Phi_{ij} \neq 0$ для найближчих сусідів фур'є-образ $\Phi(\vec{q})$ має екстремуми лише в центрі та на межі зони Бриллюена. Можливі, тим самим, два випадки:

1) $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ (однорідне впорядкування зміщень). Рівняння (Д.1.17) зводиться до отриманого вище (4.3) і має ненульові розв'язки при $\Phi(0) < 0$.

2) $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$ (знакозмінна модуляція з подвоєнням періоду гратки).

Тут рівняння (Д.1.17), переписане для ρ має справа знак "+". Ненульові розв'язки присутні при $\Phi(0) > 0$.

Література

1. M.P.A. Fisher, P.B. Weichman, G. Grinstein, and D.S.O. Fisher, Phys. Rev. B, **40**, 546 (1989).
2. D. Jaksch, C. Bruderet et al., Phys. Rev. Lett., **81**, 3108 (1998).
3. H.P. Büchler, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett., **91**, 130404 (2003).
4. I.V. Stasyuk, and O.V. Velychko, Condens. Matter. Phys., **14**, 13004 (2011).
5. E. Demler, and F. Zhou, Phys. Rev. Lett., **88**, 163001 (2012).
6. K.V. Krutitsky, and R. Graham, Phys. Rev. A, **70**, 063610 (2004).
7. Y. Ohashi, M. Kitauri, and H. Matsumoto, Phys. Rev. A, **73**, 033617 (2006).
8. I.V. Stasyuk, and T.S. Mysakovich, Condens. Matter. Phys., **12**, 539 (2009).
9. K. Sengupta, N. Dupuis, and P. Majumdar, Phys. Rev. A, **75**, 063625 (2007).
10. G.D. Mahan, Phys. Rev. B, **14**, 780 (1976).
11. C. Astaldi, A. Bianco, S. Modesti, and E. Tosatti, Phys. Rev. Lett., **68**, 90 (1992).
12. O.V. Velychko, and I.V. Stasyuk, Condens. Matter. Phys., **12**, 249 (2009).
13. T.S. Mysakovich, O.V. Krasnov and I.V. Stasyuk, Ukr. J. Phys., **55**, 228 (2010).
14. R. Micnas, J. Ranninger and S. Robashkiwicz, Rev. Mod. Phys., **62**, 113 (1990).
15. I.V. Stasyuk, and O.V. Velychko, Condens. Matter. Phys., **15**, 33002 (2012).
16. I.V. Stasyuk, and O.V. Velychko, Condens. Matter. Phys., **18**, 43004 (2012).
17. M. Stasyuk, R. Gati et al., Phys. Rev. Lett., **95**, 010402 (2005).

18. I. Danshita, J.E. Williams et al., Phys. Rev. A, **76**, 043606 (2007).
 19. K. Sheshadri, H.R. Krishnamurthy et al., Europhys. Lett., **22**, 257 (1993).
 20. R. Pai, K. Sheshadri, and R. Pundit, Phys. Rev. B, **77**, 014503 (2008).
 21. S. Trotzky, P. Cheinet, et al., Science, **319**, 295 (2008).
-

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlady, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>