Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–17–03U

П.П. Костробій*, Б.М. Маркович*,
О.В. Візнович*, М.В. Токарчук

УЗАГАЛЬНЕНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИФУЗІЇ З ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЮ ФРАКТАЛЬНІСТЮ

*Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, Львів

ЛЬВІВ

УДК: 538.93
PACS: 05.20.-y, 05.60.Cd

Узагальнені рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю

П.П. Костробій, Б.М. Маркович, О.В. Візнович, М.В. Токарчук

Анотація. Отримано нові немарковські рівняння електродифузії іонів в просторово неоднорідному середовищі з фрактальною структурою та узагальнені рівняння дифузії типу Кеттано з врахуванням просторово-часової фрактальності. Розглянуто різні моделі частотної залежності для функцій пам'яті, які приводять до відомих рівнянь дифузії з просторово-часовою фрактальністю, а також їх узагальнень.

Generalized electrodiffusion equation with fractality of space-time

P.P. Kostrobij, B.M. Markovych, O.V. Viznovych, M.V. Tokarchuk

Abstract. The new non-Markovian electrodiffusion equations of ions in spatially heterogeneous environment with fractal structure and generalized Cattaneo-type diffusion equation with taking into account fractality of space-time are obtained. Different models of the frequency dependence of memory functions, which lead to known diffusion equations with fractality of space-time and their generalizations are considered.

Подається в J Phys. Chem
Submitted to J Phys. Chem

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Петро Петрович Костробій
Богдан Михайлович Маркович
Олександра Василівна Візнович
Михайло Васильович Токарчук

Узагальнені рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю

Роботу отримано 4 квітня 2017 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом теорії м'якої речовини

Виготовлено при ІФКС НАН України

1. Вступ

У дослідженнях явищ аномальної дифузії у пористих середовищах [1–15], у невпорядкованих системах [16–27], фізиці плазми [28–33], турбулентних [34–36], кінетичних і реакційно-дифузійних процесах [36–44], та ін. [1, 45] інтеграли і похідні дробового порядку [1, 46–49] знайшли своє природне і необхідне застосування. На даний час поряд із феноменологічними підходами побудови рівнянь Фоккера-Планка, рівняння дифузії, його узагальнення — рівняння Кеттано у дробових похідних, існують два підходи побудови таких рівнянь: ймовірнісний, виходячи із рівнянь Чепмена-Колмогорова в стохастичній теорії випадкових процесів [1, 36, 50] і статистичний підхід, який базується на методі проекційних операторів (функцій памяті) в роботах [18–24, 40], а також на основі рівняння Ліувілля в дробових похідних, який розвиває Тарасов [51–64]. Зокрема, у такому підході отримано ланцюжок кінетичних рівнянь ББГКІ у дробових похідних [52, 53, 59], рівняння переносу, рівняння дифузії та рівняння Гайзенберга [55–57] у дробових похідних. Такий підхід формулюється для негамільтонових систем, і у випадку виконання умов Гельмгольца для координатних та імпульсних похідних, переходимо до гамільтонових систем з оборотним у часі рівнянням Ліувілля у дробових похідних. У роботі [65] запропоновано необоротні у часі рівняння руху Гамільтона та рівняння Ліувілля для динаміки класичних частинок у просторі з мультифрактальним часом. Використавши означення дробової похідної і інтегралу Рімана-Ліувілля, отримано необоротне у часі рівняння Ліувілля у дробових похідних з мультифрактальною часовою розмірністю. У роботах [66, 67] отримано кінетичні рівняння у підході Клімонтовича для систем з фрактальною структурою, зокрема для опису дифузійних процесів у просторі координат та імпульсу. Подібний підхід побудови дробово-часового узагальнення для рівняння Ліувілля та рівняння Цванцига (у формалізмі проектування) був запропонований у роботі [68].

Підхід на основі методу проекційних операторів (функцій пам'яті), який розвинутий у роботах [18–25, 40] базується на моделюванні частотної залежності функцій памяті з використанням математичного апарату дробових похідних та інтегралів [1, 46–49]. У роботах Нігматулліна [18–20] фактично вперше отримані рівняння типу дифузії у дробових похідних по часу для середнього значення густини спіну [18], середнього значення вектора поляризації [19] та концентрації носіїв заряду [20]. У роботі [21] дано обгрунтування рівнянь у дробових похідних, та приведено необоротне у часі рівняння Ліувілля з дробовою похідною по часу. У такому підході отримано важливі результати, зокрема побудована мікроскопічна модель недебаєвської діелектричної релаксації, узагальнивши закон Cola-Cola [24], Cola-Davidson [22]. У [25] на основі фрактальної природи процесів переносу носіїв заряду досліджена низькочастотна поведінка провідності з врахуванням ефектів поляризації електрода, що добре узгоджується з експериментальними дослідженнями.

У недавній нашій роботі [69], використовуючи метод нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [70–73] та принцип максимуму для ентропії Рені, розглянуто спосіб отримання узагальненого (немарковського) рівняння дифузії з дробовими похідними. Використання рівняння Ліувілля з дробовими похідними, яке запропонував Тарасов у працях [51–54] є важливим та фундаментальним кроком для отримання цього рівняння.

Використовуючи метод нерівноважного статистичного оператора Зубарєва та принцип максимуму для ентропії Рені, знайдено розв'язок рівняння Ліувілля з дробовими похідними за обраного набору спостережуваних змінних, нерівноважне середнє значення густини частинок вибрано за параметр скороченого опису і тоді отримано узагальнене (немарковське) рівняння дифузії з дробовими похідними. У наступному розділі на основі підходу [69] отримано нові немарковські рівняння електродифузії іонів в просторово неоднорідному середовищі з фрактальною структурою. Розглянуто різні моделі частотної залежності для функцій пам'яті та отримано рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю.

2. Рівняння Ліувілля у дробових похідних для класичної системи частинок

Будемо виходити із рівняння Ліувілля у дробових похідних для нерівноважної функції частинок $\rho(x^N;t)$ класичної системи, отриманого у роботах Тарасова [51–54]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t)+\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}(\rho(x^N;t)\mathbf{v}_j)+\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}(\rho(x^N;t)\mathbf{F}_j)=0, \tag{2.1}$$

де $x^N=x_1,\dots,x_N$, $x_j=\{\mathbf{r}_j,\mathbf{p}_j\}$ — розмірні узагальнені координати $\mathbf{r}_j=r_{j1},\dots,r_{jm}$ і розмірні узагальнені імпульси $\mathbf{p}_j=p_{j1},\dots,p_{jm}$ [55] j-ої частинки у фазовому просторі з фрактальним диференціальним елементом об'ємом [51, 74] $d^{\alpha}V=d^{\alpha}x_1\dots d^{\alpha}x_N$. Тут, $m=\frac{Mr_0}{p_0t_0}$, M — маса частинок, r_0 — характерна довжина в конфігураційному просторі, p_0 — характерне значення імпульсу і t_0 — характерний час. d^{α} — фрактальний диференціал [74], що означений наступним чином:

$$d^{\alpha}f(x)=\sum_{j=1}^{2N}D^{\alpha}_{x_j}f(x)(dx_j)^{\alpha},$$

де

$$D^{\alpha}_{x}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x\frac{f^{(n)}(z)}{(x-z)^{\alpha+1-n}}dz \tag{2.2}$$

— фрактальна похідна Капуто [46, 47, 75, 76], $n-1<\alpha<n$, $f^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}f(z)$ з властивостями: $D^{\alpha}_{x_j}1=0$ і $D^{\alpha}_{x_j}x_l=0$, $(j\neq l)$.

Якщо поля сил $\mathbf{F}_j$ не залежать від $\mathbf{p}_j$, а поля швидкості $\mathbf{v}_j$ не залежать від $\mathbf{r}_j$, то отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t)+\sum_{j=1}^{N}\mathbf{v}_jD^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}\rho(x^N;t)+\sum_{j=1}^{N}\mathbf{F}_jD^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}\rho(x^N;t)=0,$$

$$\mathbf{v}_j=D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p}),\quad \mathbf{F}_j=-D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p}),$$

де $H(\mathbf{r},\mathbf{p})$ — гамільтоніан системи в дробових похідних. Тому отримаємо рівняння Ліувілля у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t)&+\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p})D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}\rho(x^N;t)-\\&-\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p})D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}\rho(x^N;t)=0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t)+iL_{\alpha}\rho(x^N;t)=0, \tag{2.4}$$

де iL_{α} — оператор Ліувілля у дробових похідних:

$$iL_{\alpha}\rho(x^N;t)=\left(\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p})D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}-\sum_{j=1}^{N}D^{\alpha}_{\mathbf{r}_j}H(\mathbf{r},\mathbf{p})D^{\alpha}_{\mathbf{p}_j}\right)\rho(x^N;t). \tag{2.5}$$

Розв'язок рівняння Ліувілля (2.5) будемо шукати методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [70–72], у якому, коли вибрані основні параметри скороченого опису, $\rho\left(x^N;t\right)$ може бути представлений (як розв'язок рівняння Ліувілля) в загальній формі з врахуванням проектування:

$$\rho(x^N;t) = \rho_{rel}\left(x^N;t\right) - \\ - \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)} T(t,t')(1-P_{rel}(t'))iL_\alpha \rho_{rel}\left(x^N;t'\right)dt', \quad (2.6)$$

де $T(t,t') = \exp_+\left(-\int\limits_{t'}^{t}(1-P_{rel}(t'))iL_\alpha dt'\right)$ — оператор еволюції з врахуванням проектування;$\varepsilon \to +0$ після граничного термодинамічного переходу, $\exp_+$ — впорядкована експонента, $P_{rel}(t')$ — узагальнений оператор проектування Кавасакі-Гантона, структура якого залежить від структури $\rho_{rel}(x^N;t')$ — релевантного (функції розподілу) статистичного оператора. У методі нерівноважного статистичного оператора [70–72], $\rho_{rel}\left(x^N;t'\right)$ будемо шукати на основі підходу [73] із екстремуму функціоналу ентропії Рені при фіксованих значеннях спостережуваних величин $\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha$ і збережені умови нормування $\langle 1\rangle^t_{\alpha,rel} = 1$, де нерівноважні середні значення знаходяться відповідно [32, 33, 53, 54]:

$$\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha = \hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)\hat{T}(1,\ldots,N)\hat{P}_n\rho(x^N;t), \quad (2.7)$$

де для системи N частинок $\hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)$ має наступний вигляд:

$$\hat{I}^\alpha(1,\ldots,N) = \hat{I}^\alpha(1),\ldots,\hat{I}^\alpha(N), \quad \hat{I}^\alpha(j) = \hat{I}^\alpha(\mathbf{r}_j)\hat{I}^\alpha(\mathbf{p}_j)$$

і означають операції інтегрування:

$$\hat{I}^\alpha(x)f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu_\alpha(x), \quad d\mu_\alpha(x) = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha)}dx. \quad (2.8)$$

Оператор $\hat{T}(1,\ldots,N) = \hat{T}(1),\ldots,\hat{T}(N)$ означає операцію:

$$\hat{T}(x_j)f(x_j) = \frac{1}{2}\big(f(\ldots,x'_j - x_j,\ldots) + f(\ldots,x'_j + x_j,\ldots)\big).$$

Відповідно середні значення за релевантною функцією розподілу означаються як

$$\langle(\ldots)\rangle^t_{\alpha,rel} = \hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)\hat{T}(1,\ldots,N)(\ldots)\rho_{rel}(x^N;t).$$

Тоді релевантна функція розподілу відповідно [73] буде мати наступний вигляд:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)}\left[1 - \frac{q-1}{q}\beta\left(H - \sum_n\int d\mu_\alpha(x)F_n(x;t)\delta\hat{P}_n(x;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (2.9)$$

де $\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$, k_B — константа Больцмана, T — рівноважна температура, $Z_R(t)$ — статистична сума розподілу Рені, що визначається із умови нормування і має вигляд:

$$Z_R(t) = \hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)\hat{T}(1,\ldots,N)\times \\ \times\left[1 - \frac{q-1}{q}\beta\left((H - \sum_n\int d\mu_\alpha(x)F_n(x;t)\delta\hat{P}_n(x;t))\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (2.10)$$

а параметри $F_n(x;t)$ визначаються із умов самоузгодження:

$$\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha = \langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_{\alpha,rel}. \quad (2.11)$$

В загальному випадку параметрів скороченого опису $\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha$ нерівноважних процесів відповідно до (2.6) і (2.9) отримуємо нерівноважний статистичний оператор у вигляді:

$$\rho(t) = \rho_{rel}(t) + \\ + \sum_n\int d\mu_\alpha(x)\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')I_n(x;t')\rho_{rel}(t')\beta F^*_n(x;t')dt', \quad (2.12)$$

де

$$F^*_n(x;t') = \frac{F_n(x;t')}{1 + \frac{q-1}{q}\sum_n\int d\mu_\alpha(x)F_n(x;t')\left\langle P_n(x)\right\rangle^t_\alpha},$$

$$I_n(x;t') = (1-P(t))\,\frac{1}{q}\psi^{-1}(t)iL_\alpha\hat{P}_n(x) \quad (2.13)$$

— узагальнені потоки, $P(t)$ — проекційний оператор Морі [69], а функція $\psi(t)$ має наступну структуру

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q}\sum_n\int d\mu_\alpha(x)F_n(x;\dot{t})P_n(x).$$

За допомогою нерівноважного статистичного оператора (2.12) отримується узагальнене рівняння переносу для параметрів скороченого опису $\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{P}_n(x)\rangle^t_\alpha = \langle iL_\alpha\hat{P}_n(x)\rangle^t_{\alpha,rel}+$$
$$+\sum_{n'}\int d\mu_\alpha(x')\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}\varphi_{P_nP_{n'}}(x,x';t,t')\beta F^*_{n'}(x';t')dt', \quad (2.14)$$

де

$$\varphi_{P_nP_{n'}}(x,x';t,t') = \hat{I}^\alpha(1,\dots,N)\hat{T}(1,\dots,N)\times$$
$$\times\Big(iL_\alpha\hat{P}_n(x)T(t,t')I_{n'}(x';t')\rho_{rel}(x^N;t')\Big) \quad (2.15)$$

— узагальнені ядра переносу (функції пам'яті), які описують дисипативні процеси в системі. Для розкриття структури рівнянь переносу (2.14) і ядер переносу (2.15) розглянемо для прикладу електродифузійні процеси.

У наступному розділі отримаємо узагальнені рівняння переносу у дробових похідних і розглянемо конкретний приклад процесів електродифузії іонів у неоднорідних середовищах.

3. Узагальнені рівняння електродифузії іонів у дробових похідних

Для опису електродифузійних процесів заряджених іонів у неоднорідних середовищах основним параметром скороченого опису є нерівноважна густина числа заряджених іонів сорту b $n_b(\mathbf{r}_\alpha;t) = \langle\hat{n}_b(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha$, де $\hat{n}_b(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_b}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$ — мікроскопічна густина заряджених іонів сорту b. При такому наборі параметрів скороченого опису релевантна функція розподілу буде мати вигляд:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_b(\mathbf{r};t)\delta\hat{n}_b(\mathbf{r}_\alpha;t))\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (3.1)$$

де

$$Z_R(t) = \hat{I}^\alpha(1,..,N)\hat{T}(1,..,N)\times$$
$$\times\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_b(\mathbf{r};t)\delta\hat{n}_b(\mathbf{r}_\alpha;t)\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (3.2)$$

— статистична сума релевантної функції розподілу, $\delta\hat{n}_b(\mathbf{r}_\alpha;t) = \hat{n}_b(\mathbf{r})-\langle\hat{n}_b(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha$ — флуктуації густини, а параметр $\nu_b(\mathbf{r};t) = \gamma_b(\mathbf{r};t)+Z_be\varphi(\mathbf{r};t)$ — електрохімічний потенціал іонів валентності Z_b, який визначається із умови самоузгодження:

$$\langle\hat{n}_b(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha = \langle\hat{n}_b(\mathbf{r})\rangle^t_{\alpha,rel}. \quad (3.3)$$

Важливо зазначити, що при $q=1$ релевантна функція розподілу (3.1) в статистиці Рені переходить в розподіл статистики Гіббса. Розподіл (3.1) можна подати у вигляді:

$$\rho_{rel}(t) = \frac{1}{Z_R(t)}\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu^*_b(\mathbf{r};t)\hat{n}_b(\mathbf{r})\right)\right]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (3.4)$$

де

$$Z_R(t) = \hat{I}^\alpha(1,\dots,N)\hat{T}(1,\dots,N)\times$$
$$\times\left[1-\frac{q-1}{q}\beta\left(H-\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu^*_b(\mathbf{r};t)\hat{n}_b(\mathbf{r})\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (3.5)$$

$$\nu^*_b(\mathbf{r};t) = \frac{\nu_b(\mathbf{r};t)}{1+\frac{q-1}{q}\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_b(\mathbf{r};t)\,\langle\hat{n}_b(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha}.$$

Підставивши (3.4) у (2.6), для нерівноважного статистичного оператора отримаємо:

$$\rho(t) = \rho_{rel}(t)+$$
$$+\sum_b\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')I^b_n(\mathbf{r}'_\alpha,t')\rho_{rel}(t')\beta\nu^*_b(\mathbf{r}';t')dt', \quad (3.6)$$

де

$$I_n^b(\mathbf{r}_\alpha;t) = (1-P(t))\,\frac{1}{q}\psi^{-1}(t) iL_\alpha \hat{n}_b(\mathbf{r}) \tag{3.7}$$

— узагальнений потік, у якому функція $\psi(t)$ дорівнює

$$\psi(t) = 1 - \frac{q-1}{q}\beta\left(H - \sum_b \int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_b^*(\mathbf{r};t)\hat{n}_b(\mathbf{r})\right),$$

$P(t)$ — проекційний оператор, що має таку структуру:

$$P(t)\ldots = \sum_{ab}\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\,\langle\ldots\hat{n}_a(\mathbf{r})\rangle^t_{\alpha,rel}\times \\ \times[\langle\hat{n}(\mathbf{r})\delta\{[q\psi(t)]^{-1}\hat{n}(\mathbf{r}')\}\rangle^t_{\alpha,rel}]^{-1}_{ab}\delta\{[q\psi(t)]^{-1}n_b(\mathbf{r}')\},$$

де $\delta\{A\} = A - \langle A\rangle^t_{\alpha,rel}$.

За допомогою нерівноважного статистичного оператора (3.6) для параметра скороченого опису можна отримати узагальнене рівняння електродифузії для іонів:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_a(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha = \sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}\phi^{ab}_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\beta\nu_b^*(\mathbf{r}';t')dt', \tag{3.8}$$

де

$$\phi^{ab}_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)\hat{T}(1,\ldots,N)\times \\ \times iL_\alpha\hat{n}_a(\mathbf{r})T(t,t')I_n^b(\mathbf{r}'_\alpha;t')\rho_{rel}(x^N;t') = \\ = \frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}^\alpha}\cdot D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}'^\alpha}$$

— узагальнене ядро переносу, в якому усереднення виконується із степеневим розподілом (3.4). В результаті отримуємо немарковське рівняння електродифузії у дробових похідних

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_a(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}^\alpha}\cdot\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\times \\ \times\int_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}'^\alpha}\beta\nu_b^*(\mathbf{r}';t')dt', \tag{3.9}$$

$$D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \langle\hat{\mathbf{v}}_a(\mathbf{r})T(t,t')\hat{\mathbf{v}}_b(\mathbf{r}')\rangle^t_{\alpha,rel} = \\ = \hat{I}^\alpha(1,\ldots,N)\hat{T}(1,\ldots,N)\hat{\mathbf{v}}_a(\mathbf{r})T(t,t')\hat{\mathbf{v}}_b(r')\frac{1}{Z_R(t)}\times \\ \times\left[1 - \frac{q-1}{q}\beta\left(H - \sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_b^*(\mathbf{r};t)\hat{n}_b(\mathbf{r})\right)\right]^{\frac{1}{q-1}} \tag{3.10}$$

— узагальнений коефіцієнт взаємної дифузії іонів сортів a і bв статистиці Рені, в якому усереднення виконується із степеневим розподілом (3.4), де $\hat{\mathbf{v}}_a(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_a}\mathbf{v}_j\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)$ — мікроскопічна густина потоку числа частинок. При $q=1$ узагальнене рівняння електродифузії в статистиці Рені переходить в узагальнене рівняння електродифузії статистики Гіббса у дробових похідних. Коли ж $q=1$ і $\alpha=1$, то приходимо до узагальненого рівняння електродифузії статистики Гіббса. У наближені Маркова для узагальненого коефіцієнта взаємної дифузії у часі і просторі $D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') \approx D_q^{ab}\delta(t-t')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, виключивши параметр $\nu_a^*(\mathbf{r}';t')$ за допомогою умови самоузгодження, із (3.10) отримуємо рівняння електродифузії у дробових похідних:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_a(\mathbf{r})\rangle^t_\alpha = \sum_b D_q^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial r^{2\alpha}}\nu_b^*(\mathbf{r}';t') \tag{3.11}$$

Отже, на основі рівняння Ліувілля у дробових похідних, запропонованого Тарасовим [51–54] для класичної заряджених іонів з використанням методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [70–73], отримано узагальнене (немарковське) рівняння електродифузії у дробових похідних. Використано також принцип максимуму ентропії Рені.

Узагальнене рівняння електродифузії враховує просторову фрактальність системи та ефекти пам'яті в узагальненому коефіцієнті взаємної дифузії іонів $D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ в статистиці Рені. Просторова фрактальність системи очевидно впливає на процеси переносу іонів, що може проявлятися як часова мультифрактальність із характерними часами релаксації. Відомо, що нерівноважні кореляційні функції $D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ точно неможливо розрахувати, тому використовують певні наближення, виходячи із фізичних міркувань. У часовому інтервалі $-\infty \div t$ процеси переносу іонів у просторово неоднорідній системі можуть характеризуватись сукупністю часів релаксації, які пов'язані із характером взаємодії заряджених іонів з частинками середовища з фрактальною структурою, що пов'язані з поляризаційними ефектами, впливом електромагнітного поля. Зокрема, у недавній роботі' [25] автори враховували ефекти поляризації електрода при дослiджені частотної залежності провідності, правильна поведінка якої була отримана врахуванням фрактальності процесів переносу носіїв заряду шляхом моделювання функцій пам'яті. Для розкриття часової мультифрактальності в узагальненому рівнянні електродифузії використаємо наступне наближення для узагальненого коефіцієнта взаємної дифузії іонів:

$$D_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = W_a(t,t')\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{3.12}$$

де $W_a(t,t')$ можна означити як функцію пам'яті у часі. З врахуванням цього рівняння (3.8) можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \hat{n}_a(\mathbf{r})\right\rangle_\alpha^t = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon(t'-t)}W_a(t,t')\Psi_a(\mathbf{r};t')dt', \tag{3.13}$$

де

$$\Psi_a(\mathbf{r};t') = \sum_b \int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}^\alpha}\cdot\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}'^\alpha}\beta\nu_b^*(\mathbf{r}';t'). \tag{3.14}$$

Далі застосуємо перетворення Фур'є до рівняння (3.13), в результаті у частотному зображенні отримаємо:

$$i\omega n_a(\mathbf{r};\omega) = W_a(\omega)\Psi_a(\mathbf{r};\omega). \tag{3.15}$$

Частотну залежність функції пам'яті подамо у вигляді, із введенням часу релаксації τ_a (який характеризує процеси переносу іонів в системі):

$$W_a(\omega) = \frac{(i\omega)^{1-\xi}}{1+i\omega\tau_a}, 0<\xi\leq 1. \tag{3.16}$$

Тоді рівняння (3.15) можна подати у вигляді:

$$(1+i\omega\tau_a)i\omega n_a(\mathbf{r};\omega) = (i\omega)^{1-\xi}\Psi_a(\mathbf{r};\omega). \tag{3.17}$$

Далі використаємо перетворення Фур'є до дробових похідних від функцій:

$$L\left({}_0D_t^{1-\xi}f(t);i\omega\right) = (i\omega)^{1-\xi}L(f(t);i\omega). \tag{3.18}$$

З використанням його, зворотне перетворення у рівнянні (3.17) до часової залежності, дає узагальнене рівняння електродифузії типу Каттано з врахуванням просторово-часової фрактальності:

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t) + \frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t) = {}_0D_t^{1-\xi}\Psi_a(\mathbf{r};t) = \frac{\partial^{1-\xi}}{\partial t^{1-\xi}}\Psi_a(\mathbf{r};t), \tag{3.19}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t) + \frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t) = {}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}^\alpha}\cdot\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}'^\alpha}\beta\nu_b^*(\mathbf{r}';t), \tag{3.20}$$

— узагальнене (нове) рівняння типу Кеттано в статистиці Рені із часовою мультифрактальністю і просторовою фрактальністю. При $q=1$ із (3.20) отримаємо

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t) + \frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t) = {}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}^\alpha}\cdot\overline{D}^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}'^\alpha}\beta(\gamma_b(\mathbf{r}';t) + Z_b e\varphi(\mathbf{r}';t)), \tag{3.21}$$

узагальнене рівняння типу Кеттано в статистиці Гібса із часовою мультифрактальністю і просторовою фрактальністю. Важливо зазначити, що у правих частинах у рівняннях (3.19), (3.21) входить дробова похідна від скалярного потенціалу електромагнітного поля $\frac{\partial^\alpha}{\partial \mathbf{r}'^\alpha}\beta Z_b e\varphi(\mathbf{r}';t)$, що вказує на необхідність врахування системи рівнянь Максвела у дробових похідних для системи з просторовою фрактальністю для повноти опису процесів переносу іонів у такому середовищі. Рівняння (3.19), (3.21) містять суттєву просторову неоднорідність у $\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$. Якщо знехтувати просторовою неоднорідністю:

$$\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \overline{D}_q^{ab}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{3.22}$$

то отримаємо

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t) + \frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t) = {}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}_q^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial \mathbf{r}^{2\alpha}}\beta\nu_b^*(\mathbf{r};t), \tag{3.23}$$

— рівняння дифузії типу Кеттано із просторовою і часовою фрактальністю із сталими коефіцієнтами взаємної дифузії в статистиці

Рені, або в розгорнутому вигляді:

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t)+\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}_q^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial\mathbf{r}^{2\alpha}}\times$$

$$\times\,\beta\frac{\nu_a(\mathbf{r};t)}{1+\dfrac{q-1}{q}\sum\limits_a\int d\mu_\alpha(\mathbf{r})\nu_a(\mathbf{r};t)\left\langle\hat{n}_a(\mathbf{r})\right\rangle_\alpha^t},\quad(3.24)$$

і при $q=1$

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t)+\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial\mathbf{r}^{2\alpha}}\nu_a(\mathbf{r};t),\quad(3.25)$$

— узагальнене рівняння типу Кеттано із просторовою і часовою фрактальністю із сталими коефіцієнтами взаємної дифузії в статистиці Гібса. Важливо зазначити, що коли у рівняннях (3.23) (3.25) покласти $\alpha=1$, тобто знехтувати просторовою фрактальністю, то отримаємо рівняння дифузії типу Кеттано, які були отримані у роботах [5, 14]:

$$\tau_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}n_a(\mathbf{r};t)+\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}^{ab}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\nu_a(\mathbf{r};t).\quad(3.26)$$

При $\tau_a=0$ ми отримуємо важливий частковий випадок — узагальнені рівняння електродифузії іонів з врахуванням часової і просторової фрактальності:

$$\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\int d\mu_\alpha(\mathbf{r}')\frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}^\alpha}\cdot\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\frac{\partial^\alpha}{\partial\mathbf{r}'^\alpha}\beta\nu_b^*(\mathbf{r}';t),\quad(3.27)$$

і при нехтуванні просторової неоднорідності коефіцієнтів взаємної дифузії $\overline{D}_q^{ab}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ також отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}_q^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial\mathbf{r}^{2\alpha}}\beta\nu_b^*(\mathbf{r};t),\quad(3.28)$$

— рівняння електродифузії із сталими коефіцієнтами взаємної дифузії у дробових похідних в статистиці Рені. При $\alpha=1$, $\tau_a=0$ отримуємо рівняння електродифузії із сталими коефіцієнтами взаємної дифузії без врахування просторової фрактальності в статистиці Рені

$$\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\sum_b\overline{D}_q^{ab}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\beta\nu_b^*(\mathbf{r};t),\quad(3.29)$$

При $\alpha=1$, $\tau_a=0$, $q=1$, $\xi=1$ ми отримуємо звичайні рівняння електродифузії для іонів у статистиці Гіббса.

$$\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)=\sum_b\overline{D}^{ab}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2}\beta\nu_b(\mathbf{r};t).\quad(3.30)$$

Розглянемо ще одну модель для функції пам'яті:

$$W_a(\omega)=\frac{(i\omega)^{1-\xi}}{1+(i\omega\tau_a)^{\gamma-1}},0<\gamma<1,0<\xi\le1,\quad(3.31)$$

тоді у частотному зображенні отримуємо:

$$\left(1+(i\omega\tau_a)^{\gamma-1}\right)i\omega n_a(\mathbf{r};\omega)=(i\omega)^{1-\xi}\Psi_a(\mathbf{r};\omega).\quad(3.32)$$

З використанням (3.18), зворотне перетворення у рівнянні (3.32) до часової залежності, дає узагальнене рівняння електродифузії типу з врахуванням часової мультифрактальності та просторової фрактальності:

$$\tau_a^{\gamma-1}\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}n_a(\mathbf{r};t)+\frac{\partial}{\partial t}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\Psi_a(\mathbf{r};t)=\frac{\partial^{1-\xi}}{\partial t^{1-\xi}}\Psi_a(\mathbf{r};t)\quad(3.33)$$

подібні за структурою до рівнянь Кеттано роботи [77]. У випадку моделі для функції пам'яті:

$$W_a(\omega)=\frac{(i\omega)^{1-\xi}}{(i\omega\tau_a)^{\gamma-1}},\quad(3.34)$$

отримуємо рівняння узагальненої електродифузії для іонів з просторово-часовою фрактальністю в статистиці Рені.

$$\tau_a^{\gamma-1}\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}n_a(\mathbf{r};t)={}_0D_t^{1-\xi}\Psi_a(\mathbf{r};t)=\frac{\partial^{1-\xi}}{\partial t^{1-\xi}}\Psi_a(\mathbf{r};t).\quad(3.35)$$

При $\xi=1$ дане рівняння, матиме вигляд

$$\tau_a^{\gamma-1}\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}n_a(\mathbf{r};t)=\Psi_a(\mathbf{r};t),\quad(3.36)$$

і у випадку нехтування просторовою залежністю коефіцієнтів взаємної дифузії, отримуємо

$$\tau_a^{\gamma-1}\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}n_a(\mathbf{r};t)=\sum_b\overline{D}_q^{ab}\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial\mathbf{r}^{2\alpha}}\beta\nu_b^*(\mathbf{r};t).\quad(3.37)$$

Розв'язки рівнянь типу (3.37) досліджувались у роботі [78].

4. Висновки

На основі підходу [69] були отримані нові немарковські рівняння електродифузії іонів в просторово неоднорідному середовищі з фрактальною структурою. Використавши наближення для функцій пам'яті та апарат дробового числення [1, 46–49], отримано узагальнені рівняння дифузії типу Кеттано з врахуванням просторово-часової фрактальності. Розглянуто різні моделі частотної залежності для функцій памяті, які приводять до відомих результатів типу рівнянь дифузії з просторово-часовою фрактальністю [5,14,20,77,78], а також їхніх узагальнень.

Література

1. *Uchaikin V. V.* Fractional Derivatives Method / V. V. Uchaikin. — Uljanovsk: Artishock-Press, 2008. — P. 500.
2. *Sahimi M.* Non-linear and non-local transport processes in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and materials breakdown / M. Sahimi // *Physics Reports.* — 1998. — Vol. 306, no. 4-6. — Pp. 213–395.
3. Fractional calculus applied to the analysis of spectral electrical conductivity of clay–water system / D. Korošak, B. Cvikl, J. Kramer et al. // *Journal of Contaminant Hydrology.* — 2007. — Vol. 92, no. 1–2. — Pp. 1–9.
4. *Hobbie R. K.* Intermediate Physics for Medicine and Biology / R. K. Hobbie, B. J. Roth. — New York: Springer, 2007.
5. *Compte A.* The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport processes / A. Compte, R. Metzler // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* — 1997. — Vol. 30, no. 21. — Pp. 7277–7289.
6. *Metzler R.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // *Physics Reports.* — 2000. — Vol. 339, no. 1. — Pp. 1–77.
7. *Hilfer R.* Fractional dynamics, irreversibility and ergodicity breaking / R. Hilfer // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 1995. — Vol. 5, no. 8. — Pp. 1475 – 1484.
8. *Hilfer R.* Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives / R. Hilfer // *The Journal of Physical Chemistry B.* — 2000. — Vol. 104, no. 16. — Pp. 3914–3917.
9. *Hilfer R.* Fractional Time Evolution / R. Hilfer // Applications of

Fractional Calculus in Physics / Ed. by R. Hilfer. — Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2000. — Pp. 87–130.
10. *Kosztołowicz T.* Measuring subdiffusion parameters / T. Kosztołowicz, K. Dworecki, S. Mrówczy ński // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 041105.
11. *Kosztołowicz T.* Subdiffusive random walk in a membrane system: the generalized method of images approach / T. Kosztołowicz // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* — 2015. — Vol. 2015, no. 10. — P. P10021.
12. Doubling Exponent Models for the Analysis of Porous Film Electrodes by Impedance. Relaxation of TiO_2 Nanoporous in Aqueous Solution / J. Bisquert, G. Garcia-Belmonte, F. Fabregat-Santiago et al. // *The Journal of Physical Chemistry B.* — 2000. — Vol. 104, no. 10. — Pp. 2287–2298.
13. *Bisquert J.* Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion / J. Bisquert, A. Compte // *Journal of Electroanalytical Chemistry.* — 2001. — Vol. 499, no. 1. — Pp. 112–120.
14. *Kosztołowicz T.* Hyperbolic subdiffusive impedance / T. Kosztołowicz, K. D. Lewandowska // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2009. — Vol. 42, no. 5. — P. 055004.
15. Models of mass transfer in gas transmission systems / Y. D. Pyanylo, M. G. Prytula, N. M. Prytula, N. B. Lopuh // *Mathematical Modeling and Computing.* — 2014. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 84–96.
16. *Berkowitz B.* Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks / B. Berkowitz, H. Scher // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 57. — Pp. 5858–5869.
17. *Bouchaud J.-P.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications / J.-P. Bouchaud, A. Georges // *Physics Reports.* — 1990. — Vol. 195, no. 4. — Pp. 127–293.
18. *Nigmatullin R. R.* To the Theoretical Explanation of the "Universal Response" / R. R. Nigmatullin // *physica status solidi (b).* — 1984. — Vol. 123, no. 2. — Pp. 739–745.
19. *Nigmatullin R. R.* On the Theory of Relaxation for Systems with "Remnant" Memory / R. R. Nigmatullin // *physica status solidi (b).* — 1984. — Vol. 124, no. 1. — Pp. 389–393.
20. *Nigmatullin R. R.* The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry / R. R. Nigmatullin // *physica status solidi (b).* — 1986. — Vol. 133, no. 1. — Pp. 425–430.
21. *Nigmatullin R. R.* Fractional integral and its physical interpretation / R. R. Nigmatullin // *Theoretical and Mathematical Physics.* —

1992. — Vol. 90, no. 3. — Pp. 242–251.
22. *Nigmatullin R. R.* Cole-Davidson dielectric relaxation as a self-similar relaxation process / R. R. Nigmatullin, Y. E. Ryabov // *Physics of the Solid State.* — 1997. — Vol. 39, no. 1. — Pp. 87–90.
23. *Nigmatullin R. R.* Dielectric relaxation phenomenon based on the fractional kinetics: theory and its experimental confirmation / R. R. Nigmatullin // *Physica Scripta.* — 2009. — Vol. 2009, no. T136. — P. 014001.
24. *Khamzin A. A.* Microscopic model of a non-debye dielectric relaxation: The Cole-Cole law and its generalization / A. A. Khamzin, R. R. Nigmatullin, I. I. Popov // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2012. — Vol. 173, no. 2. — Pp. 1604–1619.
25. The generalized Jonscher's relationship for conductivity and its confirmation for porous structures / I. I. Popov, R. R. Nigmatullin, E. Y. Koroleva, A. A. Nabereznov // *Journal of Non-Crystalline Solids.* — 2012. — Vol. 358, no. 1. — Pp. 1–7.
26. Fizychni protsesy ta yikh mikroskopichni modeli v periodychnykh neorhanichno/ orhanichnykh klatratakh / I. I. Grygorchak, P. P. Kostrobiy, I. V. Stasyuk et al. — L'viv: Rastr-7, 2015. — P. 285.
27. Mathematical modeling of subdiffusion impedance in multilayer nanostructures / P. P. Kostrobij, I. I. Grygorchak, F. O. Ivaschyshyn et al. // *Mathematical Modeling and Computing.* — 2015. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 154–159.
28. *Balescu R.* Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks / R. Balescu // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 51. — Pp. 4807–4822.
29. *Tribeche M.* Charging of a dust particle in a plasma with a non extensive electron distribution function / M. Tribeche, P. K. Shukla // *Physics of Plasmas.* — 2011. — Vol. 18, no. 10. — P. 103702.
30. *Gong J.* Dust charging processes in the nonequilibrium dusty plasma with nonextensive power-law distribution / J. Gong, J. Du // *Physics of Plasmas.* — 2012. — Vol. 19, no. 2. — P. 023704.
31. *Carreras B. A.* Anomalous diffusion and exit time distribution of particle tracers in plasma turbulence model / B. A. Carreras, V. E. Lynch, G. M. Zaslavsky // *Physics of Plasmas.* — 2001. — Vol. 8, no. 12. — Pp. 5096–5103.
32. *Tarasov V. E.* Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles / V. E. Tarasov // *Physics of Plasmas.* — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 082106.
33. *Tarasov V. E.* Magnetohydrodynamics of fractal media / V. E. Tarasov // *Physics of Plasmas.* — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 052107.

34. *Monin A. S.* Uravnenija turbulentnoj difuzii / A. S. Monin // *DAN SSSR, ser. geofiz.* — 1955. — Vol. 2. — Pp. 256–259.
35. *Klimontovich J. L.* Vvedenie v fiziku otkrytyh sistem / J. L. Klimontovich. — Moskva Janus, 2002.
36. *Zaslavsky G.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport / G. Zaslavsky // *Physics Reports.* — 2002. — Vol. 371, no. 6. — Pp. 461–580.
37. *Zaslavsky G.* Fractional kinetic equation for hamiltonian chaos / G. Zaslavsky // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 1994. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 110–122.
38. *Saichev A. I.* Fractional kinetic equations: solutions and applications / A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky // *Chaos.* — 1997. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 753–764.
39. *Zaslavsky G.* Fractional kinetics: from pseudochaotic dynamics to Maxwell's demon / G. Zaslavsky, M. Edelman // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2004. — Vol. 193, no. 1–4. — Pp. 128–147.
40. *Nigmatullin R.* 'fractional' kinetic equations and 'universal' decoupling of a memory function in mesoscale region / R. Nigmatullin // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2006. — Vol. 363, no. 2. — Pp. 282–298.
41. *Chechkin A. V.* Fractional kinetics for relaxation and superdiffusion in a magnetic field / A. V. Chechkin, V. Y. Gonchar, M. Szydłowski // *Physics of Plasmas.* — 2002. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 78–88.
42. *Gafiychuk V. V.* Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems / V. V. Gafiychuk, B. Y. Datsko // *Phys. Rev. E.* — 2007. — Vol. 75. — P. 055201.
43. *Kosztołowicz T.* Time evolution of the reaction front in a subdiffusive system / T. Kosztołowicz, K. D. Lewandowska // *Phys. Rev. E.* — 2008. — Vol. 78. — P. 066103.
44. *Shkilev V. P.* Subdiffusion of mixed origin with chemical reactions / V. P. Shkilev // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 2013. — Vol. 117, no. 6. — Pp. 1066–1070.
45. *Uchaikin V. V.* Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion / V. V. Uchaikin // *Physics-Uspekhi.* — 2013. — Vol. 56, no. 11. — Pp. 1074–1119.
46. *Oldham K. B.* The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order / K. B. Oldham, J. Spanier. Dover Books on Mathematics. — Dover Publications, 2006.

47. *Samko S. G.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — 1 edition. — Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
48. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications / I. Podlubny, V. T. E. Kenneth. Mathematics in Science and Engineering 198. — 1st edition. — Academic Press, 1998.
49. *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of nature / B. B. Mandelbrot. — 1 edition. — W. H. Freeman and Company, 1982.
50. *Stanislavsky A. A.* Probability Interpretation of the Integral of Fractional Order / A. A. Stanislavsky // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2004. — Vol. 138, no. 3. — Pp. 418–431.
51. *Tarasov V. E.* Fractional generalization of Liouville equations / V. E. Tarasov // *Chaos.* — 2004. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 123–127.
52. *Tarasov V. E.* Fractional Liouville and BBGKI equations / V. E. Tarasov // *Journal of Physics: Conference Series.* — 2005. — Vol. 7, no. 1. — P. 17.
53. *Tarasov V. E.* Fractional systems and fractional Bogoliubov hierarchy equations / V. E. Tarasov // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 011102.
54. *Tarasov V. E.* Fractional statistical mechanics / V. E. Tarasov // *Chaos.* — 2006. — Vol. 16, no. 3. — P. 033108.
55. *Tarasov V. E.* Transport equations from Liouville equations for fractional systems / V. E. Tarasov // *International Journal of Modern Physics B.* — 2006. — Vol. 20, no. 03. — Pp. 341–353.
56. *Tarasov V. E.* Fractional diffusion equations for open quantum system / V. E. Tarasov // *Nonlinear Dynamics.* — 2013. — Vol. 71, no. 4. — Pp. 663–670.
57. *Tarasov V. E.* Fractional Heisenberg equation / V. E. Tarasov // *Physics Letters A.* — 2008. — Vol. 372, no. 17. — Pp. 2984 – 2988.
58. *Tarasov V. E.* Fractional hydrodynamic equations for fractal media / V. E. Tarasov // *Annals of Physics.* — 2005. — Vol. 318, no. 2. — Pp. 286 – 307.
59. *Tarasov V. E.* Liouville and Bogoliubov equations with fractional derivatives / V. E. Tarasov // *Modern Physics Letters B.* — 2007. — Vol. 21, no. 05. — Pp. 237–248.
60. *Tarasov V. E.* The fractional Chapman–Kolmogorov equation / V. E. Tarasov // *Modern Physics Letters B.* — 2007. — Vol. 21, no. 04. — Pp. 163–174.
61. *Tarasov V. E.* Fractional generalization of the quantum Markovian

master equation / V. E. Tarasov // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2009. — Vol. 158, no. 2. — Pp. 179–195.
62. *Tarasov V. E.* Quantum dissipation from power-law memory / V. E. Tarasov // *Annals of Physics.* — 2012. — Vol. 327, no. 6. — Pp. 1719–1729.
63. *Tarasov V. E.* Power-law spatial dispersion from fractional Liouville equation / V. E. Tarasov // *Physics of Plasmas.* — 2013. — Vol. 20, no. 10. — P. 102110.
64. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media / V. E. Tarasov. Nonlinear Physical Science. — 1st edition. edition. — Springer Berlin Heidelberg, 2010.
65. *Kobelev L. Y.* The Multifractal Time and Irreversibility in Dynamic Systems. — 2000.
66. *Kobelev Y. L.* Kinetic equations for large systems with fractal structures / Y. L. Kobelev, L. Y. Kobelev, E. P. Romanov // *Doklady Physics.* — 2000. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 194–197.
67. Description of diffusion in fractal media on the basis of the Klimontovich kinetic equation in fractal space / Y. L. Kobelev, L. Y. Kobelev, V. L. Kobelev, E. P. Romanov // *Doklady Physics.* — 2002. — Vol. 47, no. 8. — Pp. 580–582.
68. *Lukashchuk S. Y.* Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equations / S. Y. Lukashchuk // *Central European Journal of Physics.* — 2013. — Vol. 11, no. 6. — Pp. 740–749.
69. Generalized diffusion equation with fractional derivatives within Renyi statistics / P. Kostrobij, B. Markovych, O. Viznovych, M. Tokarchuk // *Journal of Mathematical Physics.* — 2016. — Vol. 57, no. 9. — P. 093301.
70. *Zubarev D. N.* Modern methods of the statistical theory of nonequilibrium processes / D. N. Zubarev // *Journal of Soviet Mathematics.* — 1981. — Vol. 16, no. 6. — Pp. 1509–1571.
71. *Zubarev D. N.* Statistical mechanics of nonequilibrium processes / D. N. Zubarev, V. G. Morozov, G. Röpke. — Fizmatlit, 2002. — Vol. 1.
72. *Zubarev D. N.* Statistical mechanics of nonequilibrium processes / D. N. Zubarev, V. G. Morozov, G. Röpke. — Fizmatlit, 2002. — Vol. 2.
73. Nonequilibrium statistical operator method in Renyi statistics / B. B. Markiv, R. M. Tokarchuk, P. P. Kostrobij, M. V. Tokarchuk // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2011. — Vol. 390, no. 5. — Pp. 785–791.

74. *Cottrill-Shepherd, K.* Fractional differential forms / K. Cottrill-Shepherd, M. Naber // *Journal of Mathematical Physics.* — 2001. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 2203–2212.
75. *Mainardi F.* Fractional Calculus / F. Mainardi // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Ed. by A. Carpinteri, F. Mainardi. — Vienna: Springer Vienna, 1997. — Pp. 291–348.
76. *Caputo M.* A new dissipation model based on memory mechanism / M. Caputo, F. Mainardi // *pure and applied geophysics.* — 1971. — Vol. 91, no. 1. — Pp. 134–147.
77. *Qi H.* Solutions of the space-time fractional Cattaneo diffusion equation / H. Qi, X. Jiang // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2011. — Vol. 390, no. 11. — Pp. 1876–1883.
78. Fractional differential models for anomalous diffusion / H. Sun, W. Chen, C. Li, Y. Chen // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2010. — Vol. 389, no. 14. — Pp. 2719–2724.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; “Referatyvnyj Zhurnal”; “Dzherelo”.

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua http://www.icmp.lviv.ua