

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-17-02U

Й.А. Гуменюк

ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЕЛИЧИНИ ГАЗУ НИЗЬКОЇ ГУСТИНИ
У СЛАБОНЕРІВНОВАЖНОМУ ТЕПЛОПРОВІДНОМУ
СТАЦІОНАРНОМУ СТАНІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТА
СФЕРИЧНІЙ КОНФІГУРАЦІЯХ

УДК: 536.12; 536.71; 536.757

PACS: 05.70.Ln, 51.30.+i, 44.10.+i

Термодинамічні величини газу низької густини у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані в циліндричній та сферичній конфігураціях

Й.А. Гуменюк

Анотація. Розглядається газ низької густини між двома співвісними циліндрами чи двома концентричними сферами, на яких підтримуються різні температури. Для слабонерівноважного випадку з'ясується, як форма посудини впливає на термодинамічні величини — тиск, внутрішню енергію та ентропію. Відповідні вирази отримано в підході суцільного середовища у вигляді розкладів за (середніми) градієнтами температури до 4-го порядку. Результат для ентропії задовольняє II-е начало термодинаміки. Знайдений розклад для середньої радіальної відстані описує внутрішнє зміщення маси, зумовлене стаціонарною неоднорідністю температури.

Thermodynamic quantities of the low-density gas in the weakly nonequilibrium heat-conduction steady state in cylindrical and spherical configurations

Y.A. Humenyuk

Abstract. A low-density gas is considered between two coaxial cylinders or two concentric spheres maintained at different temperatures. For the weakly nonequilibrium case, it is found out how the form of the vessel influences on thermodynamic quantities — pressure, internal energy and entropy. The corresponding expressions are obtained within the continuous media approach in the form of expansions in the (average) temperature gradients up to the 4-th order. The result for the entropy is compatible with the second law of thermodynamics. The expansion calculated for the average radial distance describes the internal mass displacement induced by the stationary nonuniform temperature.

Подається в Український фізичний журнал
Submitted to Ukrainian Journal of Physics

© Інститут фізики конденсованих систем 2017
Institute for Condensed Matter Physics 2017

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Йосип Андрійович Гуменюк

ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЕЛИЧИНИ ГАЗУ НИЗЬКОЇ ГУСТИНИ У
СЛАБОНЕРІВНОВАЖНОМУ ТЕПЛОПРОВІДНОМУ СТАЦІОНАРНОМУ
СТАНІ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ТА СФЕРИЧНІЙ КОНФІГУРАЦІЯХ

Роботу отримано 5 липня 2017 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом комп'ютерного моделювання
багаточастинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

Термодинамічні величини рівноважних газу чи рідини, поміщених у посудину макроскопічних розмірів, зазвичай залежать від її об'єму і не залежать від її форми. У нерівноважних стаціонарних станах (зокр., теплопровідному) присутня просторова неоднорідність. Через це глобальні термодинамічні величини — внутрішня енергія, тиск чи ентропія — мають суттєво залежати від геометричної форми посудини.

Для макроскопічних систем масштаб області, у якій молекули зазнають помітного впливу атомів обмежувальної поверхні, малий у порівнянні з розмірами внутрішньої області. Тому опис поведінки таких систем у термінах глобальних термодинамічних величин добре визначений, а внеском від взаємодії з атомами поверхні можна знехтувати. У рівноважній статистичній механіці для цього введено спеціальну операцію термодинамічного граничного переходу (див. напр. [1, 2]), завдяки якій обмежувальну поверхню віддаляють на нескінченність, щоб усунути її вплив на макроскопічні рівноважні характеристики.

Для теплопровідного стаціонарного стану проблема присутності обмежувальної поверхні набуває додаткової якості. З одного боку, взаємодія молекул з поверхнею посудини впливає на стан системи у приповерхневому прошарку. Але з другого — на обмежувальних поверхнях задаються граничні умови, наприклад, фіксуються значення температури в різних її частинах. Крім цього форма поверхонь та їх взаємне розташування визначають геометричну конфігурацію посудини. Віддаляти граничну поверхню на нескінченність тут вже немає змоги.

Недавно за допомогою комп'ютерних моделювань теплопровідного стану стаціонарної системи твердих дисків, що перебувають між двома різноагрітими паралельними площинами, було показано [3,4], що профілі температури і густини числа частинок у внутрішній області (тобто, без приграничних прошарків біля поверхонь термостатів) підлягають особливим масштабним законам. Виявлення цих законів є прямим наслідком застосування локальних баричного рівняння стану і закону теплопровідності Фур'є. Ці результати наводять на думку, що при розрахунку глобальних термодинамічних характеристик газу чи плинину в границі суцільного середовища можна знехтувати специфічною поведінкою системи у приграничному прошарку.

На цей час відомо кілька підходів до термодинамічного опису систем у нерівноважних стаціонарних умовах, в т.ч. й термічно не-

однорідних. Вони засновані на доволі різних засадничих ідеях. Для *феноменологічних побудов* стаціонарної термодинаміки [5, 6] характерна ідейна близькість з рівноважним відповідником, див. напр. [7, 8]. З концепції розширення [9] (локальної) лінійної необоротної термодинаміки [10–12] розвинуто *розширену необоротну термодинаміку* [13–15]. Тут до локальних термодинамічних змінних долучається потік тепла, який трактується як додатковий термодинамічний ступінь вільності, а локальна густина ентропії відіграє роль локального термодинамічного потенціала. Ідея розширення звичайної гідродинаміки за допомогою рівнянь для вищих гідродинамічних змінних (вищих потоків), що узагальнює метод моментів Греда [9], лежить в основі підходу *розширеної термодинаміки* [16, 17]. Додані рівняння для вищих моментів замикають згідно принципів раціональної термодинаміки [17, 18].

Нерівноважний тиск та густина ентропії розраховувалися також за допомогою *стаціонарного кінетичного рівняння Больцмана* [19, 20] для газу низької густини та на основі *інформаційної теорії* [21–24], коли нерівноважний ансамбль будують з принципу максимізації ентропії при додаткових умовах. Для них характерно використання локально-рівноважного розподілу в ролі найнижчого наближення.

У більшості випадків теплопровідний стаціонарний стан досліджують для системи між двома паралельними площинами різних температур. Однак заради різностороннього вивчення таких станів і апробації пропонованих методів важливо розглянути їх для інших (неплоскопаралельних) геометричних конфігурацій. Найпростіші серед них — циліндрична і сферична, коли газ перебуває між двома співвісними коловими циліндрами чи двома концентричними сферами.

До неплоских конфігурацій було широко застосовано підхід розширеної термодинаміки, розвинутий Мюллером і Рудджері. Теплопровідний стаціонарний стан газу вивчався в круговій циліндричній та сферичній конфігураціях [25, 26] з узагальненням на випадок 2-сортної газової суміші [27], між двома спільнофокусними еліптичними циліндрами [28] з врахуванням нелінійних ефектів [29], між двома неспіввісними коловими циліндрами з паралельними осями [29], а також для довільних тривимірних многовидів [30]. У цих працях основну увагу приділено розрахунку теплового потоку і ходу температури, виявленню ефектів, що не описуються лінійним законом Фур'є, а також особливостям теплопровідного стану, що пов'язані з неплоскою геометрією. Проте, не отримано результатів для повних внутрішньої енергії та ентропії і не показано явно узгодження з дру-

гим началом термодинаміки. Також викликають застереження деякі нефізичні розв'язки для ходу температури, виявлені [29] самими авторами.

Важливо, що засади чи припущення, які лежать в основі згаданих підходів слабо контрольовані. Не можна з певністю сказати, котрі з наслідків зазнають змін, якщо використання цих припущень виявиться не цілком виправданим чи обґрунтованим. Натомість добре було б мати альтернативний спосіб опису з припущеннями, які мають прозоре фізичне тлумачення.

Досить простий опис термодинамічних величин теплопровідного стаціонарного стану можна отримати, якщо ці величини виражати через температурні градієнти різних порядків. Такі результати для тиску, внутрішньої енергії та ентропії у вигляді розкладів за градієнтами температури одержано для газу низької густини [31–33] і системи твердих кульок [34, 35] у конфігурації прямокутного паралелепіпеда. Прозорість припущень, простота розрахунку і те, що вираз для ентропії узгоджується з другим началом термодинаміки, є їхніми позитивними ознаками. Тут ми застосовуємо цей спосіб до циліндричної та сферичної конфігурацій стаціонарного поширення тепла у газі низької густини.

У §2 розглянуто розрахунок макроскопічних величин суцільного середовища, обмеженого циліндричними чи сферичними поверхнями. Введено спосіб опису теплопровідного стану, який дає градієнтні розклади для макровеличин. У §3 ці загальні співвідношення застосовано до розрахунку тиску і внутрішньої енергії. Результати 2-го порядку для тиску проаналізовано в наближенні огрублених градієнтів. У §4 отримано розклад для ентропії і показано, що він задовольняє друге начало термодинаміки. Величину внутрішнього зміщення маси неоднорідно нагрітого газу розраховано у §5. Підсумки (§6) завершують виклад.

2. Підхід суцільного середовища

При описі газів чи рідин за допомогою моделі суцільного середовища їхня молекулярна будова не береться до уваги. Нерівноважний стан системи описується набором густин адитивних величин (числа частинок, внутрішньої енергії, ентропії та ін.) та полів локальних інтенсивних параметрів (температури, тиску, хімічного потенціала). Ці поля залежать від просторових координат і часу. За стаціонарних умов є лише залежність від координат \mathbf{r} .

Ми будемо розраховувати тиск P , внутрішню енергію E та ентропію S газу низької густини у теплопровідному стаціонарному стані. Для цього доведеться інтегрувати густини числа частинок $n(\mathbf{r})$, внутрішньої енергії $\varepsilon(\mathbf{r})$, та енторпії $s(\mathbf{r})$ по всьому об'єму V системи. Отже, для адитивної величини A та її густини $a(\mathbf{r})$ маємо:

$$A \equiv \int_V d\mathbf{r} a(\mathbf{r}). \quad (1)$$

У циліндричній та сферичній конфігураціях буде спрощення.

2.1. Теплопровідний стаціонарний стан

Циліндрична конфігурація. Система перебуває між співвісними циліндрами радіусів r_1 та r_2 (рис. 1). На поверхнях внутрішнього і зовнішнього циліндрів підтримуються різні температури. Тепло тече у радіальних напрямках від більш нагрітої поверхні до менш нагрітої — в доцентровому або відцентровому напрямках. Стан не змінюється при поворотах навколо осі циліндрів. Верхня і нижня кільцеві поверхні циліндрів теплоізовані.

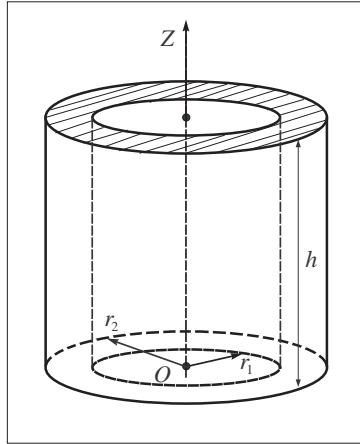


Рис. 1. Газ перебуває у міжциліндровому прошарку, а на бічних поверхнях циліндрів підтримуються різні температури.

Розташування малих елементів об'єму суцільного середовища характеризуємо за допомогою радіальної відстані r , азимутального кута φ й відстані z вздовж осі циліндрів:

$$r \in [r_1; r_2], \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad z \in [0; h],$$

де h — висота циліндрів. Товщину міжциліндрового прошарку в радіальних напрямках позначмо через $L \equiv r_2 - r_1$. Для стаціонарного стану локальні фізичні величини не залежать від φ та z . Тому вираз (1) спрощується:

$$A_{\text{цyl}} = \int_{r_1}^{r_2} dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz a(r) = 2\pi h \int_{r_1}^{r_2} dr r a(r); \quad (2)$$

$a(r) = 1$ дає об'єм міжциліндрового прошарку $V_{\text{цyl}} = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$.

Які часткові випадки тут можуть бути: а) стаціонарний стан для *циліндричного сектора* з величиною секторального кута ψ — у виразах для адитивних величин треба замінити $2\pi \rightarrow \psi$; б) звівши $h \rightarrow 1$, отримуємо випадок *двовимірної системи*, обмеженої двома концентричними колами.

Сферична конфігурація. Система обмежена двома концентричними сферами радіусів r_1 та r_2 , на поверхнях яких підтримуються різні температури (рис. 2). Завдяки сферичній симетрії поширення тепла відбувається у радіальних напрямках. Стан не змінюється при будь-яких поворотах навколо спільного центра сфер.

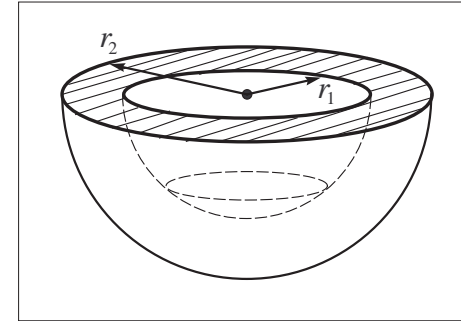


Рис. 2. Сферична конфігурація: екваторіальний переріз. Газ перебуває у міжсферному прошарку.

Положення малого елемента об'єму описуємо за допомогою радіальної відстані r , азимутального φ й полярного θ кутів:

$$r \in [r_1; r_2], \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad \theta \in [0; \pi].$$

Товщину міжсферного прошарку в радіальних напрямках позначмо через $L \equiv r_2 - r_1$. Локальні фізичні величини стаціонарного стану

не залежать від кутів φ та θ , тому ф. (1) зводиться до

$$A_{\text{sph}} = \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi a(r) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} dr r^2 a(r). \quad (3)$$

Об'єм міжсферної області дорівнює $V_{\text{sph}} = \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)$.

Якщо стаціонарний стан розглядати не у всій міжсферній області, а в її частині, додатково обмеженій тілесним кутом величини ω , то у виразах для адитивних величин треба замінити $4\pi \rightarrow \omega$.

Застосування моделі суцільного середовища надійно обґрунтовано, коли характерні геометричні розміри мають значно більший масштаб у порівнянні з міжмолекулярними. У нашому випадку мають задовольнятися такі умови [36, 37]:

$$r_1 \gg l_{\text{free}}, \quad r_2 - r_1 \gg l_{\text{free}}, \quad h \gg l_{\text{free}}|_{\text{cyl}},$$

де l_{free} — середня довжина вільного пробігу в однорідній рівновазі.

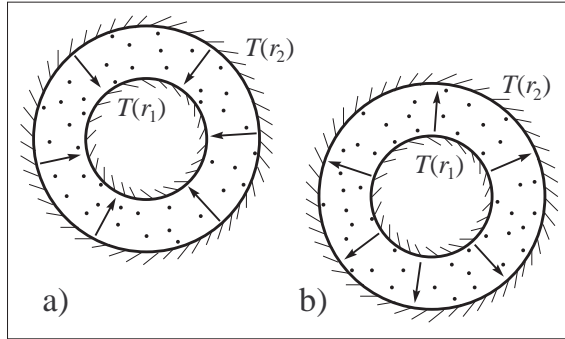


Рис. 3. Радіальне спрямування теплового потоку, коли а) зовнішня температура вища і б) внутрішня температура вища.

Запишімо вирази (2) і (3) спільно:

$$A_{\text{cnf}} = \Omega_{\text{cnf}}^\perp \int_{r_1}^{r_2} dr r^m a(r), \quad \begin{cases} \text{cyl: } \Omega_{\text{cyl}}^\perp = 2\pi h, m = 1; \\ \text{sph: } \Omega_{\text{sph}}^\perp = 4\pi, m = 2, \end{cases} \quad (4)$$

де зазначено, що конфігурація (cnf) може бути циліндричною (cyl) або сферичною (sph). Для паралелепіпедної¹ (par) конфігурації $m =$

¹ Це стаціонарне поширення тепла через середовище між двома паралельними площинами, на яких підтримуються різні температури.

0, $\Omega_{\text{par}}^\perp$ — площа поперечного перетину, а r_1 та r_2 визначають розташування площин термостатів. Зазначмо, що у просторових конфігураціях (cyl) і (sph) зовнішня і внутрішня поверхні нерівноправні, а тепловий потік має радіальне спрямування (рис. 3). З топологічної точки зору відповідні стаціонарні стани принципово інші, ніж в конфігурації (par), яку розглянуто в [31, 33, 34, 38, 39].

2.2. Наближення серединної поверхні

Локальна температура $T(r)$ міняється від точки до точки, набуваючи значень між $T(r_1)$ і $T(r_2)$. Термодинамічні характеристики системи у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані — тиск, внутрішню енергію та ентропію — можна наближено охарактеризувати відповідними значеннями для *рівноважного стану*. Для нього треба вдало вибрати температуру, як якусь “середню” між температурами внутрішньої та зовнішньої поверхонь у циліндричній чи сферичній конфігураціях. Напр., за “середню” можна взяти півсуму внутрішньої та зовнішньої температур.

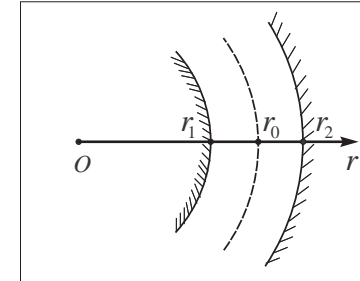


Рис. 4. Геометрично середня поверхня між поверхнями термостатів.

Однак, ми вибираємо в її ролі значення локальної температури на *геометрично середній поверхні* (рис. 4):

$$T_0 \equiv T(r)|_{r=r_0}, \quad (5)$$

де $r_0 \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Крім того, щоб взяти до уваги нерівноважність стану, ми додатково його характеризуємо значеннями градієнтів температури кількох перших порядків

$$G_k \equiv \frac{\partial^k}{\partial r^k} T(r)|_{r=r_0}, \quad (6)$$

взятих на цій серединній поверхні. Хід температури між граничними поверхнями описується за допомогою розкладу Тейлора:

$$T(r) = T_0 + G_1(r - r_0) + \frac{1}{2!}G_2(r - r_0)^2 + \frac{1}{3!}G_3(r - r_0)^3 + \dots \quad (7)$$

Чим більше градієнтів G_k враховано, тим точніше можна його відтворити. Порядок найвищого врахованого градієнта визначає порядок наближення.

Під *слабкою* нерівноважністю стаціонарного стану розуміємо, що кожен наступний внесок у ф. (7) набагато менший за попередній

$$\frac{1}{(k+1)!}G_{k+1}(r - r_0)^{k+1} \ll \frac{1}{k!}G_k(r - r_0)^k$$

для всякого допустимого r . Взявши $\frac{1}{2}L$ як найбільше значення різниці $|r - r_0|$, отримуємо умови слабонерівноважності стану:

$$\frac{1}{2(k+1)}|G_{k+1}|L \ll |G_k| \quad (8)$$

або явно: $\frac{1}{2}|G_1|L \ll T_0$, $\frac{1}{4}|G_2|L \ll |G_1|$, $\frac{1}{6}|G_3|L \ll |G_2|$ і т.д.

Ввівши $R \equiv r - r_0$, із $R \in [-\frac{1}{2}L; \frac{1}{2}L]$, запишімо хід температури так:

$$T(R) = T_0[1 + \delta g_1 R + \delta^2 g_2 R^2 + \delta^3 g_3 R^3 + \dots], \quad (9)$$

де $g_k \equiv \frac{1}{k!} \frac{1}{T_0} G_k$ — приведений градієнт температури порядку k . Введений формальний параметр малости δ покликаний відділяти внески різних порядків, що відповідають умовам (8).

Форма представлення результатів. Кожна макроскопічна величина, що характеризує наш слабонерівноважний стан, також буде мати, відповідно до ф. (9), розклад за параметром δ (фактично — за градієнтами, які є малими):

$$A = A_0[a_0 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots + \delta^k a_k + \dots], \quad (10)$$

де A_0 — амплітуда, а внесок a_k містить доданки, що містять добутки градієнтів порядку k . А саме: у 1-му порядку є лише g_1 ; у 2-му — g_2 та g_1^2 ; у 3-му порядку є три градієнти — g_3 , $g_2 g_1^2$ та g_1^3 ; і т.д. У розрахунках ми обмежуємося 4-им порядком.

Набір градієнтів зручно зобразити у вигляді формального вектора $\mathbf{g} \equiv \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ із $g_0 \equiv 1$, а набір добутків градієнтів — у

вигляді формальної матриці:

$$[\mathbf{g}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ g_1 & & & & & \\ g_2 & g_1^2 & & & & \\ g_3 & g_2 g_1 & g_1^3 & & & \\ g_4 & g_3 g_1 & g_2^2 & g_2 g_1^2 & g_1^4 & \\ & \dots & & \dots & & \end{bmatrix}.$$

У кожному рядку подано всеможливі добутки градієнтів відповідного порядку. Напр., внесок a_3 з ф. (10) матиме вигляд лінійної комбінації:

$$a_3 = g_3 \bar{\alpha}_{33} + g_2 g_1 \bar{\alpha}_{321} + g_1^3 \bar{\alpha}_{31}.$$

Перший індекс в кожному коефіцієнті $\bar{\alpha}$ вказує на порядок внеску, а наступні відповідають індексам своєї комбінації градієнтів. Ці коефіцієнти зручно зібрати у формальну матрицю:

$$[\bar{\alpha}] \equiv \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{00} & & & & & \\ \bar{\alpha}_{11} & & & & & \\ \bar{\alpha}_{22} & \bar{\alpha}_{21} & & & & \\ \bar{\alpha}_{33} & \bar{\alpha}_{321} & \bar{\alpha}_{31} & & & \\ \bar{\alpha}_{44} & \bar{\alpha}_{431} & \bar{\alpha}_{42} & \bar{\alpha}_{421} & \bar{\alpha}_{41} & \\ & \dots & & \dots & & \end{bmatrix}.$$

Тоді, уклавши з коефіцієнтів розкладу (10) формальний вектор-стовпець $\mathbf{a} \equiv \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, можемо записати, що

$$\mathbf{a} = [\mathbf{g}] \cdot [\bar{\alpha}],$$

де крапка означає скалярне перемноження відповідних рядків: $a_k = \sum_{\beta} g_{k\beta} \bar{\alpha}_{k\beta}$.

Наша мета — розрахувати величини $[\bar{\alpha}]$ для тиску, ентропії та деяких інших макроскопічних характеристик.

2.3. Інтегрування густини адитивної величини

Перейшовши у ф. (4) до нової змінної $R \equiv r - r_0$, величину A_{cnf} можна виразити через координатні моменти $J_a^{(k)}$ густини $a(R)$:

$$A_{\text{cnf}} = \Omega_{\text{cnf}}^{\perp} \begin{bmatrix} r_0 J_a^{(0)} + J_a^{(1)} \\ r_0^2 J_a^{(0)} + 2r_0 J_a^{(1)} + J_a^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де верхній рядок у прямокутних дужках стосується циліндричної конфігурації, а нижній — сферичної; введені моменти означають:

$$J_a^{(k)} \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dR a(R) R^k. \quad (12)$$

Для густин адитивних величин (числа частинок, внутрішньої енергії та ентропії) будемо використовувати розклади такого загального вигляду:

$$a(R) = \alpha_{-1} [\alpha_0 + \delta \alpha_1 R + \delta^2 \alpha_2 R^2 + \delta^3 \alpha_3 R^3 + \dots], \quad (13)$$

де α_{-1} — амплітуда, а коефіцієнти $\alpha_i|_{i \geq 1}$ містять комбінації градієнтів температури порядку i . Так зробивши явною залежність густини a від R , ми можемо проінтегрувати у ф. (12) безпосередньо:

$$\begin{aligned} J_a^{(0)} &= \alpha_{-1} L [\alpha_0 + \frac{1}{12} \alpha_2 L^2 + \frac{1}{80} \alpha_4 L^4 + \dots], \\ J_a^{(1)} &= \alpha_{-1} L [\frac{1}{12} \alpha_1 L^2 + \frac{1}{80} \alpha_3 L^4 + \frac{1}{448} \alpha_5 L^6 + \dots], \\ J_a^{(2)} &= \alpha_{-1} L [\frac{1}{12} \alpha_0 L^2 + \frac{1}{80} \alpha_2 L^4 + \frac{1}{448} \alpha_4 L^6 + \dots], \\ J_a^{(3)} &= \alpha_{-1} L [\frac{1}{80} \alpha_1 L^4 + \frac{1}{448} \alpha_3 L^6 + \frac{1}{2304} \alpha_5 L^8 + \dots]. \end{aligned}$$

Кожен момент виражається лише через коефіцієнти тієї самої парності, що і його верхній індекс. Якби ми обчислили градієнти температури не на серединній поверхні, то розклади для $J_a^{(k)}$ були би громіздкіші.

Застосуємо ці результати до вибраних конфігурацій.

Циліндричній конфігурації у ф. (11) відповідає вираз $J_{\text{cyl}} \equiv r_0 J_a^{(0)} + J_a^{(1)}$. Для нього отримуємо:

$$J_{\text{cyl}} = r_0 \alpha_{-1} L [\alpha_0 + \frac{1}{12} \alpha_1 l L + \frac{1}{12} \alpha_2 L^2 + \frac{1}{80} \alpha_3 l L^3 + \frac{1}{80} \alpha_4 L^4 + \dots], \quad (14)$$

де відносна товщина $l \equiv L/r_0$ міжциліндрового прошарку присутня лиш у непарних порядках. Підставивши цей розклад у ф. (11) і ввівши об'єм прошарку $V_{\text{cyl}} = \Omega_{\text{cyl}}^{\perp} r_0 L$, маємо:

$$A_{\text{cyl}} = V_{\text{cyl}} \alpha_{-1} [\alpha_0 + \frac{1}{12} \alpha_1 l L + \frac{1}{12} \alpha_2 L^2 + \frac{1}{80} \alpha_3 l L^3 + \frac{1}{80} \alpha_4 L^4 + \dots]. \quad (15)$$

Сферичній конфігурації у ф. (11) відповідає комбінація $J_{\text{sph}} \equiv r_0^2 J_a^{(0)} + 2r_0 J_a^{(1)} + J_a^{(2)}$. Для неї знаходимо:

$$J_{\text{sph}} = r_0^2 \alpha_{-1} L [\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 L + \alpha_2 f_2 L^2 + \alpha_3 f_3 L^3 + \alpha_4 f_4 L^4 + \dots], \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv 1 + \frac{1}{12} l^2, & f_3 &\equiv \frac{1}{40} l, \\ f_1 &\equiv \frac{1}{6} l, & f_4 &\equiv \frac{1}{80} (1 + \frac{5}{28} l^2), \\ f_2 &\equiv \frac{1}{12} (1 + \frac{3}{20} l^2), & f_5 &\equiv \frac{1}{224} l \end{aligned}$$

і $l \equiv L/r_0$ — відносна товщина міжсферного прошарку. Підставивши розклад (16) у ф. (11) і виділивши в амплітуді об'єм міжсферного прошарку $V_{\text{sph}} = \Omega_{\text{sph}}^{\perp} r_0^2 L f_0$, одержуємо такий результат:

$$A_{\text{sph}} = V_{\text{sph}} \alpha_{-1} [\alpha_0 + \alpha_1 \tilde{f}_1 L + \alpha_2 \tilde{f}_2 L^2 + \alpha_3 \tilde{f}_3 L^3 + \alpha_4 \tilde{f}_4 L^4 + \dots], \quad (17)$$

де відносна товщина l входить через комбінації $\tilde{f}_k \equiv f_k / f_0$.

Загальна формула. Вирази (15) та (17), що виражають повну адитивну величину через коефіцієнти розкладу її густини, можна подати як

$$A_{\text{cnf}} = V_{\text{cnf}} \alpha_{-1} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{j}_{\text{cnf}}), \quad (18)$$

якщо під $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{j}_{\text{cnf}}$ розуміти набори величин

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}, \quad \boldsymbol{j}_{\text{cnf}} \equiv \{j_0, j_1, j_2, \dots\},$$

а під введеним позначенням — формальний скалярний добуток:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{j}_{\text{cnf}}) \equiv \alpha_0 j_0 + \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \dots$$

Для циліндричної та сферичної конфігурацій набори $\boldsymbol{j}_{\text{cnf}}$ дорівнюють:

$$\boldsymbol{j}_{\text{cyl}} \equiv \{1, \frac{1}{12} l L, \frac{1}{12} L^2, \frac{1}{80} l L^3, \frac{1}{80} L^4, \dots\}, \quad (19)$$

$$\boldsymbol{j}_{\text{sph}} \equiv \{1, \tilde{f}_1 L, \tilde{f}_2 L^2, \tilde{f}_3 L^3, \tilde{f}_4 L^4, \dots\}. \quad (20)$$

Таке зображення дає змогу проводити розрахунки *одночасно* для обох конфігурацій в загальних позначеннях. Ми їх застосуємо при інтегруванні густини числа частинок у §3 та для пошуку повної ентропії у §4. Щоразу конкретні значення компонент j_k буде підставлено наприкінці розрахунків. Ще ми зможемо відтворити результати для паралелепіпедної конфігурації [31,33], для якої ф. (18) теж чинна із $\boldsymbol{j}_{\text{par}} \equiv \{1, 0, \frac{1}{12} L^2, 0, \frac{1}{80} L^4, \dots\}$.

3. Баричне та калоричне рівняння стаціонарного стану

3.1. Розклади за градієнтами

Як і раніше [31,33,34] виходимо з двох початкових тверджень. Перше — у теплопровідному стаціонарному стані газ перебуває у *механічній рівновазі*, тому тиск по всій системі постійний:

$$P = \text{const.} \quad (21)$$

Друге — приймаємо, що завдяки низькій густині *локальний тиск* у фізично малому елементі газу можна наблизити за допомогою рівняння стану ідеального газу, напр. [40, 41]:

$$P = n(r)k_{\text{B}}T(r), \quad (22)$$

де $n(r)$ — локальна густина числа частинок, k_{B} — стала Больцмана.

Густина числа частинок задає повну кількість частинок газу N , задовольняючи згідно ф. (1) умову нормування:

$$\int_V d\mathbf{r} n(r) = N. \quad (23)$$

Щоби скористатися загальним результатом (18), необхідно отримати розклад для $n(r)$. Рівняння (22), переписане через залежність від R як $P = n(R)k_{\text{B}}T(R)$, дає:

$$n(R) = n_0 \frac{1}{1 + \delta g_1 R + \delta^2 g_2 R^2 + \dots}, \quad (24)$$

де $n_0 \equiv P/k_{\text{B}}T_0$ і було використано ф. (9).

Знайшовши ряд, обернений до того, що в знаменнику, отримуємо (дод. В):

$$n(R) = n_0 [\nu_0 + \delta \nu_1 R + \delta^2 \nu_2 R^2 + \dots], \quad (25)$$

де коефіцієнти $\boldsymbol{\nu} \equiv \{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots\}$ виражаються [31, 33] через приведені градієнти $\mathbf{g} \equiv \{g_0, g_1, g_2, \dots\}$ так:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 1, \\ \nu_1 &= -g_1, \\ \nu_2 &= -g_2 + g_1^2, \\ \nu_3 &= -g_3 + 2g_2g_1 - g_1^3, \\ \nu_4 &= -g_4 + 2g_3g_1 + g_2^2 - 3g_2g_1^2 + g_1^4. \end{aligned}$$

Пошук тиску. Згідно ф. (18) умова нормування (23) набуває вигляду $N = V_{\text{cnf}} n_0 (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{j}_{\text{cnf}})$, де в нашому випадку $\nu_{-1} = n_0$, ф. (25). Відшукавши n_0 , отримуємо загальний результат для тиску:

$$P = \bar{n} k_{\text{B}} T_0 (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{j}_{\text{cnf}})^{-1}, \quad (26)$$

де $\bar{n} \equiv N/V_{\text{cnf}}$ — густина числа частинок у просторово-однорідному стані. Згідно ф. (10) ми шукаємо тиск у вигляді розкладу

$$P = \frac{N}{V_{\text{cnf}}} k_{\text{B}} T_0 [p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots], \quad (27)$$

тому ряд з коефіцієнтів p_i є оберненим до ряду для $(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{j}_{\text{cnf}})$:

$$\frac{1}{\nu_0 j_0 + \delta \nu_1 j_1 + \delta^2 \nu_2 j_2 + \dots} = p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots,$$

де у знаменнику введено степені параметра δ , які відділяють порядки внесків. За допомогою зв'язку між коефіцієнтами взаємнообернених рядів (дод. В) для $\nu_0 = 1$ і $j_0 = 1$ знаходимо:

$$\begin{aligned} p_0 &\equiv 1, \\ p_1 &\equiv -\nu_1 j_1, \\ p_2 &\equiv -\nu_2 j_2 + \nu_1^2 j_1^2, \\ p_3 &\equiv -\nu_3 j_3 + 2\nu_2 \nu_1 j_2 j_1 - \nu_1^3 j_1^3, \\ p_4 &\equiv -\nu_4 j_4 + 2\nu_3 \nu_1 j_3 j_1 + \nu_2^2 j_2^2 - 3\nu_2 \nu_1^2 j_2 j_1^2 + \nu_1^4 j_1^4. \end{aligned}$$

Підставивши у коефіцієнти $\boldsymbol{\nu}$ їхнє вираження через \mathbf{g} , знаходимо загальні співвідношення для коефіцієнтів розкладу тиску:

$$p_1 = g_1 \pi_{11}, \quad (28)$$

$$p_2 = g_2 \pi_{22} + g_1^2 \pi_{21}, \quad (29)$$

$$p_3 = g_3 \pi_{33} + g_2 g_1 \pi_{321} + g_1^3 \pi_{31}, \quad (30)$$

$$p_4 = g_4 \pi_{44} + g_3 g_1 \pi_{431} + g_2^2 \pi_{42} + g_2 g_1^2 \pi_{421} + g_1^4 \pi_{41} \quad (31)$$

або $\mathbf{p} = [\mathbf{g}] \cdot [\boldsymbol{\pi}]$, де елементи матриці $[\boldsymbol{\pi}]$ виражаються через компоненти набору \mathbf{j}_{cnf} так:

$$\begin{aligned} \pi_{kk} &\equiv j_k; \\ \pi_{21} &\equiv -j_2 + j_1^2; \\ \pi_{321} &\equiv -2j_3 + 2j_2 j_1; \\ \pi_{31} &\equiv j_3 - 2j_2 j_1 + j_1^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{431} &\equiv -2j_4 + 2j_3j_1, \\
\pi_{42} &\equiv -j_4 + j_2^2, \\
\pi_{421} &\equiv 3j_4 - 4j_3j_1 - 2j_2^2 + 3j_2j_1^2, \\
\pi_{41} &\equiv -j_4 + 2j_3j_1 + j_2^2 - 3j_2j_1^2 + j_1^4.
\end{aligned}$$

Відшукаймо ці коефіцієнти для кожної конфігурації окремо.

Для *циліндричної конфігурації*, підставивши значення компонент \mathbf{j}_{cyl} , ф. (19), одержуємо:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{12}lL; \\
\pi_{22} &= \frac{1}{12}L^2, \\
\pi_{21} &= \frac{1}{12}(-1 + \frac{1}{12}l^2)L^2; \\
\pi_{33} &= \frac{1}{80}lL^3, \\
\pi_{321} &= \frac{1}{80}(-\frac{8}{9})lL^3, \\
\pi_{31} &= \frac{1}{80}(-\frac{1}{9} + \frac{5}{108}l^2)lL^3; \\
\pi_{44} &= \frac{1}{80}L^4, \\
\pi_{431} &= \frac{1}{80}(-2 + \frac{1}{6}l^2)L^4, \\
\pi_{42} &= \frac{1}{80}(-\frac{4}{9})L^4, \\
\pi_{421} &= \frac{1}{80}(\frac{17}{9} - \frac{7}{36}l^2)L^4, \\
\pi_{41} &= \frac{1}{80}(-\frac{4}{9} + \frac{1}{36}l^2 + \frac{5}{1296}l^4)L^4.
\end{aligned}$$

Наприклад, взявши π_{11} , π_{22} та π_{21} , маємо баричне рівняння стаціонарного стану в наближенні другого порядку:

$$P_{\text{cyl}} = \frac{Nk_{\text{B}}T_0}{V_{\text{cyl}}} \left[1 + \frac{1}{12}g_1lL + \frac{1}{12}(g_2 + g_1^2[-1 + \frac{1}{12}l^2])L^2 + \dots \right]. \quad (32)$$

У випадку *сферичної конфігурації*, використавши ф. (20) для набору \mathbf{j}_{sph} , отримуємо:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{6}f_0^{-1}lL; \\
\pi_{22} &= \frac{1}{12}(1 + \frac{3}{20}l^2)f_0^{-1}L^2, \\
\pi_{21} &= \frac{1}{12}(-1 + \frac{1}{10}l^2 - \frac{1}{80}l^4)f_0^{-2}L^2; \\
\pi_{33} &= \frac{1}{40}f_0^{-1}lL^3, \\
\pi_{321} &= \frac{1}{40}(-\frac{8}{9})f_0^{-2}lL^3, \\
\pi_{31} &= \frac{1}{40}(-\frac{1}{9} + \frac{5}{54}l^2 - \frac{1}{144}l^4)f_0^{-3}lL^3; \\
\pi_{44} &= \frac{1}{80}(1 + \frac{5}{28}l^2)f_0^{-1}L^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{431} &= \frac{1}{80}(-2 + \frac{1}{7}l^2 - \frac{5}{168}l^4)f_0^{-2}L^4, \\
\pi_{42} &= \frac{1}{80}(-\frac{4}{9} - \frac{2}{21}l^2 - \frac{1}{420}l^4)f_0^{-2}L^4, \\
\pi_{421} &= \frac{1}{80}(\frac{17}{9} - \frac{127}{756}l^2 + \frac{149}{5040}l^4 + \frac{11}{6720}l^6)f_0^{-3}L^4, \\
\pi_{41} &= \frac{1}{80}(-\frac{4}{9} - \frac{11}{189}l^2 + \frac{62}{2835}l^4 - \frac{17}{5040}l^6 - \frac{1}{60480}l^8)f_0^{-4}L^4.
\end{aligned}$$

Баричне рівняння стаціонарного стану в наближенні другого порядку має вигляд:

$$P_{\text{sph}} = \frac{Nk_{\text{B}}T_0}{V_{\text{sph}}} \left[1 + \frac{1}{6}g_1f_0^{-1}lL + \frac{1}{12}(g_2[1 + \frac{3}{20}l^2]f_0^{-1} + g_1^2[-1 + \frac{1}{10}l^2 - \frac{1}{80}l^4]f_0^{-2})L^2 + \dots \right], \quad (33)$$

де, нагадаймо, $f_0 \equiv 1 + \frac{1}{12}l^2$.

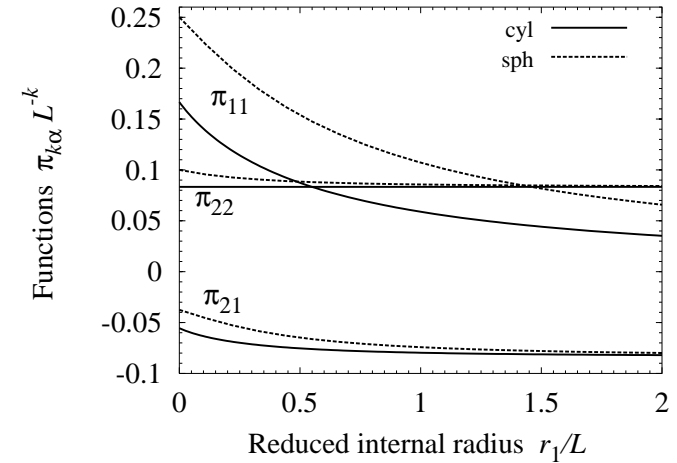


Рис. 5. Коефіцієнти $\pi_{k\alpha}L^{-k}$ у залежності від відносного внутрішнього радіуса r_1/L для циліндричної та сферичної конфігурацій.

Величини внутрішнього r_1 та зовнішнього r_2 радіусів входять у вписані коефіцієнти $[\pi]$ через $L \equiv r_2 - r_1$ та $l = 2(r_2 - r_1)/(r_1 + r_2)$. Це задає для кожної конфігурації вплив геометричних розмірів посудини на нерівноважний стаціонарний тиск. З рис. 5 видно, що у другому порядку $\pi_{22,\text{sph}}$ та π_{21} досить швидко зрелаксовують до своїх асимптот $\frac{1}{12}L^2$ та $-\frac{1}{12}L^2$, тоді як π_{11} спадають до нуля як $1/r_1$. Тому внесок від першого градієнта *якісно важливий* навіть при великих значеннях внутрішнього радіуса r_1/L , оскільки враховує нерівноправність внутрішньої та зовнішньої поверхонь.

Внутрішня енергія. Її густина $\varepsilon(r) \equiv \frac{D}{2}n(r)k_B T(r)$ не залежить від радіальної відстані: $\varepsilon(r) = \frac{D}{2}P$ згідно ф. (22). Підставивши її у ф. (4), отримуємо:

$$E_{\text{cnf}} = \Omega_{\text{cnf}}^{\perp} \int_{r_1}^{r_2} dr r^m \varepsilon(r) = \frac{D}{2}P \times V_{\text{cnf}}. \quad (34)$$

Отже, для циліндричної та сферичної конфігурацій коефіцієнти розкладу внутрішньої енергії

$$E_{\text{cnf}} = \frac{D}{2}Nk_B T_0 [e_0 + \delta e_1 + \delta^2 e_2 + \dots] \quad (35)$$

збігаються з коефіцієнтами для тиску $e_i = p_i$. Через їхню залежність від L та l проявляється відмінність від випадку рівноваги, для якої внутрішня енергія газу низької густини не залежить від геометричних розмірів (об'єму) посудини, а визначається лише повним числом частинок і температурою.

Гляньмо на залежність від першого градієнта $g_1 \equiv G_1/T_0$ у першому порядку. Коли зовнішній циліндр гарячіший ($g_1 > 0$), внесок першого порядку зумовлює підвищення тиску в стаціонарному стані у порівнянні з основним внеском $\bar{n}k_B T_0$; коли ж зовнішній циліндр холодніший ($g_1 < 0$), тиск знижується. Така поведінка має суто геометричне походження: біля зовнішнього циліндра може перебувати більше частинок з “близькою до нього температурою” і вони за своїм внеском у тиск переважають вплив меншої кількості частинок біля внутрішнього циліндра у ситуації, коли градієнт має протилежний знак. Для сферичної конфігурації цей ефект підсилюється ($\frac{1}{6}f_0^{-1}$ замість $\frac{1}{12}$).

Ці результати для тиску й енергії переходять у границі слабкої циліндричності чи сферичності $l \rightarrow 0$ (або $r_1 \rightarrow +\infty$, $r_2 - r_1 = \text{const}$) в результати для паралелепіпедної конфігурації [31, 33].

3.2. Застосування рівнянь стану

Розгляньмо можливість застосування баричних рівнянь стану другого наближення типу (32) чи (33) до реальної ситуації. Їхній загальний вигляд

$$P = \frac{N}{V_{\text{cnf}}} k_B T_0 [1 + g_1 \pi_{11} + g_2 \pi_{22} + g_1^2 \pi_{21}] \quad (36)$$

містить три температурні параметри $\{T_0, g_1, g_2\}$. У дійсності ж теплопровідний стаціонарний стан характеризується лише двома — температурами термостатів T_1 і T_2 . У нашому випадку

$$T_1 = T(r)|_{r=r_1}, \quad T_2 = T(r)|_{r=r_2}$$

або $T_1 = T(R)|_{R=-L/2}$, $T_2 = T(R)|_{R=L/2}$. Через те, що хід температури не відомий, ми змушені долучити до температур термостатів третій температурний параметр. Найпростіше взяти T_0 .

Щоб виразити величини $\{T_0, g_1, g_2\}$ у баричному рівнянні стану (36) через набір $\{T_1, T_2, T_0\}$, введемо елементарні наближення. Щодо $g_1 \equiv \frac{1}{T_0}G_1$, візьмімо в ролі $G_1 \equiv \partial T/\partial r|_{r=r_0}$ середній (точніше, огрублений) градієнт температури, що стосується проміжку $[r_1; r_2]$:

$$\langle G_1 \rangle_{[r_1; r_2]} \equiv \frac{T_2 - T_1}{r_2 - r_1}, \quad \bar{g}_1 = \frac{T_{21}}{T_0 L},$$

де $\bar{g}_1 \equiv \frac{1}{T_0} \langle G_1 \rangle_{[r_1; r_2]}$ і $T_{21} \equiv T_2 - T_1$.

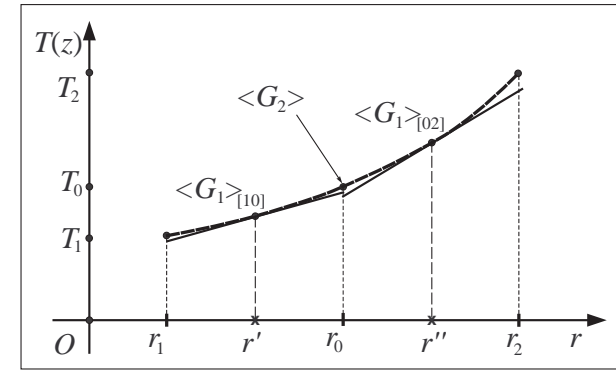


Рис. 6. Геометрична ілюстрація наближення для G_2 . Плавна лінія зображає дійсний хід температури.

Так само для $g_2 \equiv \frac{1}{2!} \frac{1}{T_0} G_2$ в ролі $G_2 \equiv \partial^2 T/\partial r^2|_{r=r_0}$ візьмімо огрублений градієнт температури другого порядку, який побудуємо так. За допомогою трьох значень температури T_1, T_0, T_2 можемо означити огрублені температурні градієнти першого порядку, які стосуються проміжків $[r_1; r_0]$ та $[r_0; r_2]$, див. рис. 6:

$$\langle G_1 \rangle_{[r_1; r_0]} \equiv \frac{T_0 - T_1}{r_0 - r_1} = 2 \frac{T_0 - T_1}{L}, \quad \langle G_1 \rangle_{[r_0; r_2]} \equiv \frac{T_2 - T_0}{r_2 - r_0} = 2 \frac{T_2 - T_0}{L}. \quad (37)$$

Як і в попередньому випадку, ці величини ми приписуємо серединам цих проміжків, тобто, точкам $r' \equiv r_1 + \frac{1}{4}L$ та $r'' \equiv r_2 - \frac{1}{4}L$. Означення огрубленого градієнта другого порядку стосується проміжка

з кінцями у цих точках:

$$\langle G_2 \rangle_{[r_1 + \frac{1}{4}L; r_2 - \frac{1}{4}L]} \equiv \frac{\langle G_1 \rangle_{[r_0; r_2]} - \langle G_1 \rangle_{[r_1; r_0]}}{\frac{1}{2}L}.$$

Одержане значення приписуємо середині проміжка $[r_1 + \frac{1}{4}L; r_2 - \frac{1}{4}L]$, тобто, точці r_0 . Після підстановки фф. (37) отримуємо:

$$\langle G_2 \rangle_{[r_1 + \frac{1}{4}L; r_2 - \frac{1}{4}L]} = 8 \frac{T_{\text{am}} - T_0}{L^2}, \quad \bar{g}_2 = 4(T_{\text{am}}/T_0 - 1)L^{-2},$$

де $T_{\text{am}} \equiv \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ — середнє арифметичне температур термостатів, а $\bar{g}_2 \equiv \frac{1}{2!} \frac{1}{T_0} \langle G_2 \rangle_{[r_1 + L/4; r_2 - L/4]}$.

Тепер, підставивши \bar{g}_1 і \bar{g}_2 у ф. (36) замість g_1 та g_2 , одержуємо

$$P \approx \frac{N}{V_{\text{cnf}}} k_B [T_0 + T_{21} \frac{\pi_{11}}{L} + 4(T_{\text{am}} - T_0) \frac{\pi_{22}}{L^2} + \frac{T_{21}^2}{T_0} \frac{\pi_{21}}{L^2}]$$

з одним невідомим параметром T_0 . Він входить у всі доданки, крім другого (котрий пропадає для паралелепіпедної конфігурації).

Введімо замість T_0 для нашого наближення другого порядку *міру прогину* ходу температури: $\Theta \equiv T_{\text{am}} - T_0$, $\Theta > 0$. Тиск можна виразити через *відносний прогин* $\tilde{\Theta} \equiv \Theta/T_{\text{am}}$:

$$P = \frac{N}{V_{\text{cnf}}} k_B T_{\text{am}} [1 + \tilde{T}_{21} \frac{\pi_{11}}{L} + (-1 + 4 \frac{\pi_{22}}{L^2}) \tilde{\Theta} + \frac{1}{1 - \tilde{\Theta}} \tilde{T}_{21}^2 \frac{\pi_{21}}{L^2}],$$

де $\tilde{T}_{21} \equiv T_{21}/T_{\text{am}}$ — відносна різниця температур термостатів. Тут є дві малі величини: $\tilde{T}_{21} \ll 1$ і $\tilde{\Theta} \ll 1$. Глянувши на рис. 6, неважко побачити, що $\Theta < \frac{1}{2}|T_{21}|$. Тому в розкладі

$$(1 - \tilde{\Theta})^{-1} = 1 + \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^2 + \dots$$

для останнього доданка можна залишити лише одиницю, оскільки врахування степенів $\tilde{\Theta}$ виводить за межі другого порядку малости:

$$P \approx P_{\text{am}} [1 + \tilde{T}_{21} \frac{\pi_{11}}{L} + \tilde{T}_{21}^2 \frac{\pi_{21}}{L^2} + (-1 + 4 \frac{\pi_{22}}{L^2}) \tilde{\Theta}], \quad (38)$$

де $P_{\text{am}} \equiv N k_B T_{\text{am}} / V_{\text{cnf}}$. Другий і третій внески враховують лише перепад температури між термостатами, а четвертий враховує через прогин *характер ходу* температури. Знак другого доданка визначається знаком T_{21} , а третій і четвертий — від'ємні.

Теоретична оцінка для прогину Θ нам невідома. Тому розгляньмо поведінку стаціонарного тиску без внеску від останнього доданка,

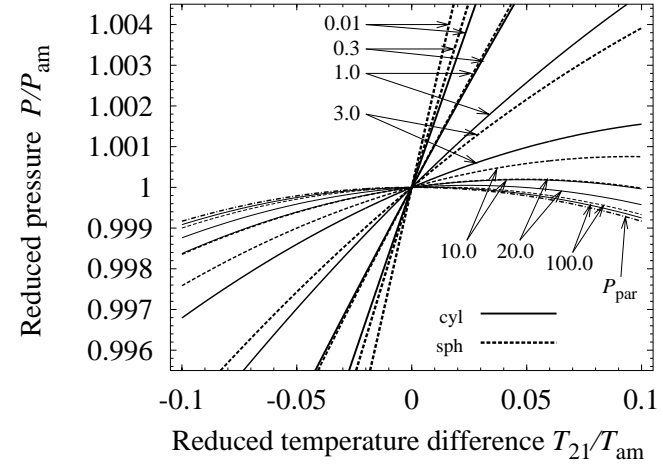


Рис. 7. Відносний тиск для циліндричної та сферичної конфігурацій у залежності від відносної різниці температур. Числа біля стрілок зазначають значення внутрішнього радіуса r_1 в одиницях L .

взявши $\Theta = 0$. На поданих рисунках величини T_{21} , P та r_1 зображено у відносних одиницях, тобто як T_{21}/T_{am} , P/P_{am} та r_1/L . Залежності тиску від різниці температур є асиметричними параболою, рис. 7, що перетинаються у точці рівноваги (0;1). Коли внутрішня поверхня гарячіша ($T_{21} < 0$), це зумовлює пониження тиску в порівнянні з тиском паралелепіпедної конфігурації (її парабола P_{par} симетрична відносно лінії $T_{21} = 0$). Коли внутрішня поверхня холодніша ($T_{21} > 0$), тиск завжди вищий за тиск P_{par} . Для сферичної конфігурації ця особливість проявляється сильніше.

Відхилення парабол від параболи P_{par} викликане головним чином внеском першого порядку за \tilde{T}_{21} (тобто, першим градієнтом). Відхилення зростає з посиленням циліндричності чи сферичності прошарку (тобто, зі зменшенням r_1/L). Проте, для випадку слабкої циліндричності чи сферичності, напр., $r_1/L = 20$, можлива ситуація, коли збільшення T_{21} від нуля спочатку викликає зростання тиску, а потім — зменшення. Тут конкурують 2 впливи: неплоска геометрична конфігурація та стаціонарна нерівноважність. Для паралелепіпедної конфігурації є тільки друге — нерівноважність, — яка не може підвищувати тиск.

Умови слабкої нерівноважності не дають змоги спостерігати подібну немонотонну поведінку тиску для сильної циліндричності чи сферичності при $T_{21} > 0$. Це тому, що при зменшенні r_1/L верши-

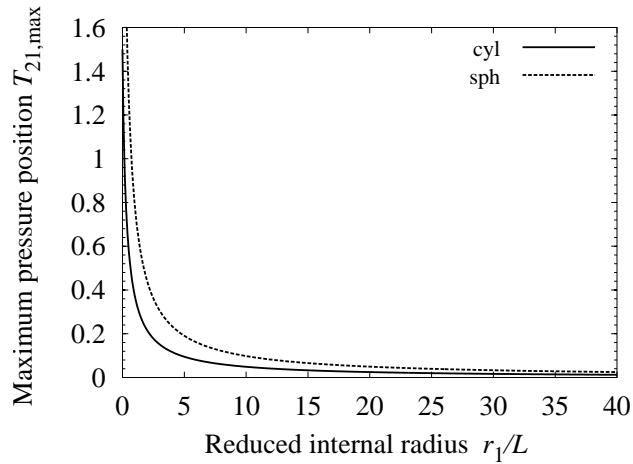


Рис. 8. Положення вершин парабол тиску (в одиницях T_{am}) в залежності від відносного внутрішнього радіуса r_1/L .

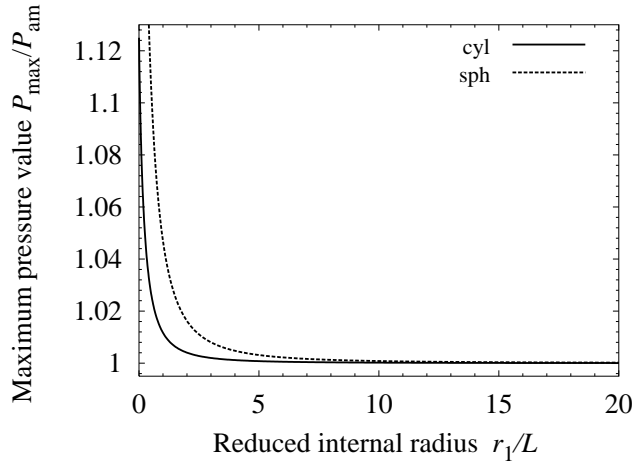


Рис. 9. Ордината вершин парабол тиску (в одиницях P_{am}) в залежності від відносного внутрішнього радіуса r_1/L .

ни парабол тиску зміщуються в область сильної нерівноважності $T_{21}/T_{am} > 0.1$, рис. 8. При цьому ордината вершин парабол помітно зростає у порівнянні зі слабонерівноважними значеннями, рис. 9. Через це слабонерівноважні ділянки парабол тиску, що на рис. 7, мало відрізняються від прямих ліній.

На рис. 10 зображено залежність тиску від відносного внутрішнього радіуса при фіксованих значеннях різниці температур для ви-

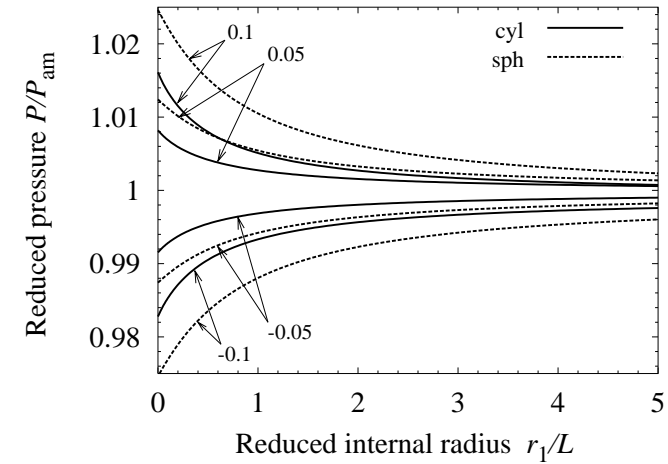


Рис. 10. Залежність тиску від внутрішнього радіуса в області сильної циліндричності та сферичності для сталих значень різниці температур термостатів $\{-0.1; -0.05; 0.05; 0.1\}$; всі величини — у відносних одиницях.

падку коли циліндричність (сферичність) має сильні прояви. Асиметрія поведінки тиску для від'ємних і додатних значень T_{21} відносно лінії $P/P_{am} = 1$ відповідає опуклості парабол тиску на рис. 7: верхні лінії тут швидше спадають до одиничного значення, ніж нижні піднімаються. Це ясніше видно на рис. 11, який відповідає більшим значенням r_1/L і зображає асимптотичну поведінку. Для кожної пари фіксованих різниць температури $\{-0.05; 0.05\}$ та $\{-0.1; 0.1\}$ криві наближаються до своїх асимптотичних значень, які менші за 1 і відповідають випадку паралелепіеда. Для сферичної конфігурації наближення повільніше.

Розгляньмо тепер, як врахування прогину впливає на тиск. Найперше зауважмо, що результатом (38) можна скористатися, щоб оцінити $\tilde{\Theta}$, маючи експериментальні дані для тиску газу в слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані. Виразивши з ф. (38) відносний прогин, отримуємо оцінку:

$$\tilde{\Theta} = \left[1 + \tilde{T}_{21} \frac{\pi_{11}}{L} + \tilde{T}_{21}^2 \frac{\pi_{21}}{L^2} - \frac{P}{P_{am}} \right] \left(1 - 4 \frac{\pi_{22}}{L^2} \right)^{-1}.$$

Її найпростіше проаналізувати для конфігурації паралелепіеда. В цьому разі $\pi_{11} = 0$, $\pi_{22} L^{-2} = \frac{1}{12}$, $\pi_{21} L^{-2} = -\frac{1}{12}$ і ми одержуємо:

$$\tilde{\Theta}_{par} = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{T_{21}^2}{(T_1 + T_2)^2} - \frac{P_{par}}{P_{am}} \right].$$

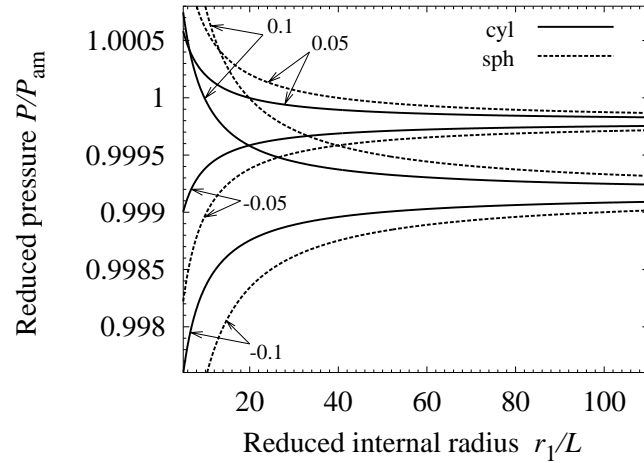


Рис. 11. Залежність тиску від внутрішнього радіуса для проміжної та слабкої циліндричності і сферичності при сталих значеннях різниці температур $\{-0.1; -0.05; 0.05; 0.1\}$; всі величини — у відносних одиницях.

У паралелепіпедній конфігурації при перестановці індексів у температур T_1 і T_2 тиск, як скаляр, залишається незмінний. З цієї причини він не містить внеску першого порядку за T_{21} . Тому з останнього виразу слідує, що Θ_{par} має *другий порядок* за T_{21} . Це твердження сильніше за наведену раніше грубу оцінку [38], що Θ_{par} не перевищує $\frac{1}{4}|T_{21}|$. Отже, прогин ходу температури в конфігурації паралелепіпеда є *доволі тонким ефектом* у слабонерівноважному випадку. Можливо тому наближення лінійного ходу добре працює в багатьох ситуаціях. Проте, на нашу думку, щоби самоузгоджено і правильно описати теплопровідний стаціонарний стан, цей прогин слід врахувати навіть для слабого відхилення від рівноваги.

Не маючи додаткових аргументів щодо циліндричної та сферичної конфігурацій, але бажаючи врахувати прогин, ми для них приймаємо *припущення* про квадратичну залежність як найпростішу з можливих:

$$\Theta_{\{\text{cyl}; \text{sph}\}} = \theta_2 T_{21}^2,$$

де θ_2 — коефіцієнт пропорційності. На рис. 12–16 наведено результати для тиску при фіксованих значеннях коефіцієнта пропорційності $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$. Ці числа вибрано так, щоби внесок від прогину був співмірний із безпосереднім внеском від T_{21}^2 (що містить π_{21}). Внесок від Θ підсилює доданок із T_{21}^2 , зумовлюючи більшу опуклість парабол тиску. Тому збільшення значення θ_2 призводить по

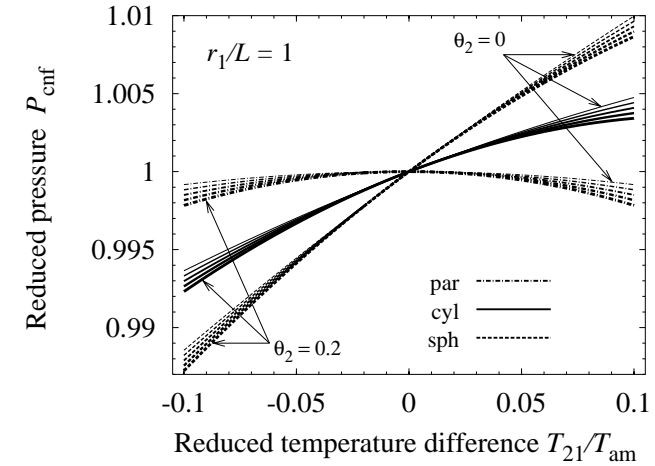


Рис. 12. Залежність тиску від різниці температур для значень прогину $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$ і внутрішнього радіуса $r_1/L = 1$ (сильні циліндричність та сферичність). Товстіші лінії відповідають більшим значенням θ_2 .

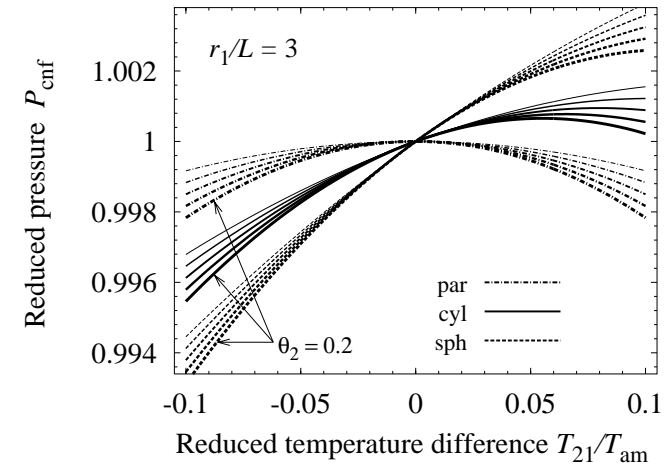


Рис. 13. Залежність тиску від різниці температур для значень прогину $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$ і внутрішнього радіуса $r_1/L = 3$.

пониження відносного тиску.

При сильній циліндричності й сферичності, напр., коли r_1/L дорівнює 1 чи 3, параболи тиску для різних конфігурацій помітно розділені, опуклість невелика (рис. 12, 13). Для проміжних значень $r_1/L = 5$ та 10 вони починають зближуватися, а опуклість зростає

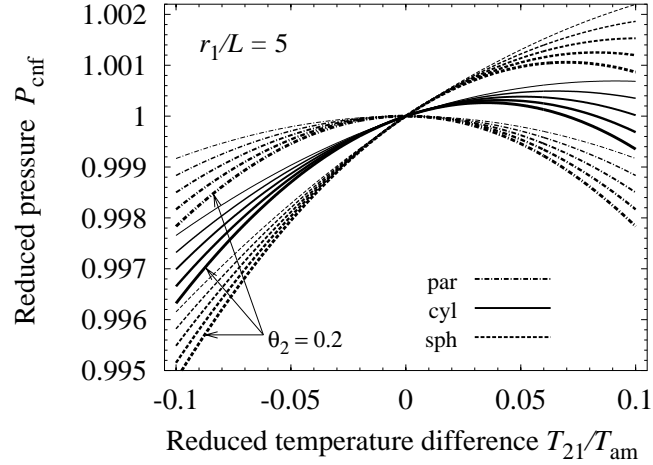


Рис. 14. Залежність тиску від різниці температур для значень прогину $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$ і внутрішнього радіуса $r_1/L = 5$.

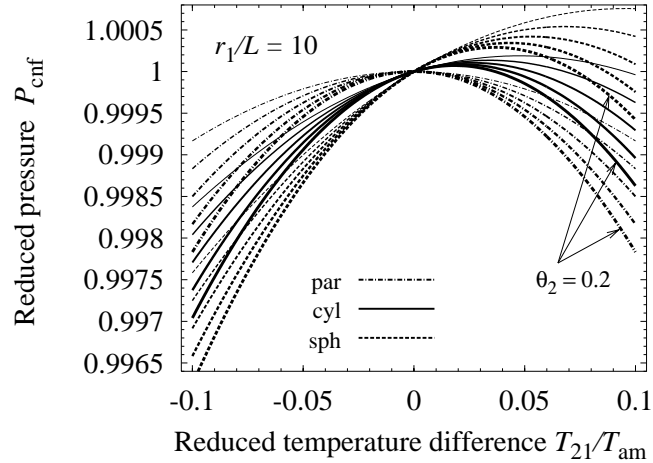


Рис. 15. Залежність тиску від різниці температур для значень прогину $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$ і внутрішнього радіуса $r_1/L = 10$ (проміжні циліндричність та сферичність).

(рис. 14, 15). При слабкій циліндричності та сферичності параболи тиску розташовуються щораз ближче до відповідних парабол паралелепіпедної конфігурації, а розташування їхніх вершин зміщуються до $T_{21} = 0$ (рис. 16). Асиметрія парабол тиску зменшується.

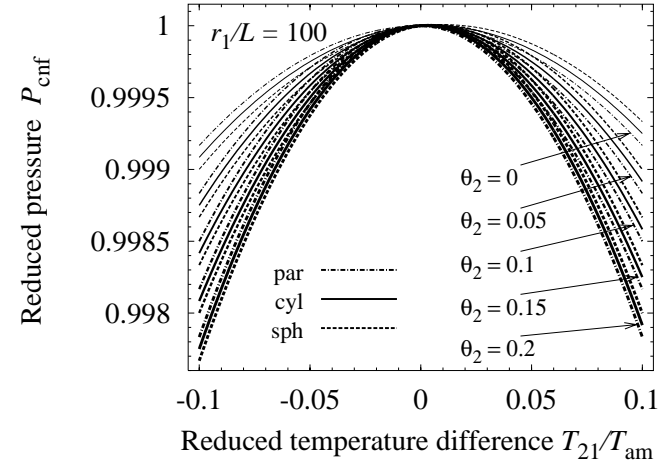


Рис. 16. Залежність тиску від різниці температур для значень прогину $\theta_2 = \{0; 0.05; 0.1; 0.15; 0.2\}$ і внутрішнього радіуса $r_1/L = 100$ (слабкі циліндричність та сферичність).

4. Ентропія і II-е начало термодинаміки

Згідно ф. (1) ентропію системи означаємо через інтегрування її густини $s(r)$:

$$S \equiv \int_V dr s(r). \quad (39)$$

В ролі $s(r)$ візьмімо рівноважну густину ентропії [2] газу низької густини, замінивши у ній густину числа частинок і температуру на локальні:

$$s(r) \equiv k_B n(r) \left[-\ln n(r) + \frac{1}{2} D \ln T(r) + \xi_S^{(D)} \right], \quad (40)$$

де постійна $\xi_S^{(D)} \equiv \frac{D}{2} \ln(2\pi k_B m / h^2) + \frac{D}{2} + 1$ стосується квантової статистики станів частинок маси m у фазовому просторі, h — стала Планка. Така форма узгоджується з прийнятим припущенням про вигляд локального баричного рівняння стану (22).

4.1. Внески в ентропію

Виключивши $\ln n(r)$ за допомогою ф. (22) з густини ентропії, маємо:

$$s(r) = k_B n(r) \left[d_1 \ln T(r) - \ln(P/k_B) + \xi_S^{(D)} \right], \quad (41)$$

де позначено $d_1 \equiv \frac{1}{2}D + 1$. Цей вираз, підставлений у ф. (39), дає три внески

$$S = S_T + S_P + S_\xi,$$

що відповідають доданкам у прямокутних дужках ф. (41).

Другий і третій легко знаходимо за допомогою умови нормування (23):

$$S_P = Nk_B [-\ln(P/k_B)], \quad S_\xi = Nk_B \xi_S^{(D)}. \quad (42)$$

Розклад для S_P . Відшукаймо розклад типу (10) для цього внеску

$$S_P = Nk_B [s_{P,0} + \delta s_{P,1} + \delta^2 s_{P,2} + \dots], \quad (43)$$

підставивши у ф. (42) результат (27) для тиску. Отримуємо, що $s_{P,0} = -\ln(\bar{n}T_0)$, а наступні коефіцієнти визначаються з розкладу логарифма:

$$-\ln(1 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots) = \delta s_{P,1} + \delta^2 s_{P,2} + \dots$$

Вони пов'язані з коефіцієнтами p_k за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned} -s_{P,1} &= p_1, \\ -s_{P,2} &= p_2 - \frac{1}{2}p_1^2, \\ -s_{P,3} &= p_3 - p_2 p_1 + \frac{1}{3}p_1^3, \\ -s_{P,4} &= p_4 - p_3 p_1 - \frac{1}{2}p_2^2 + p_2 p_1^2 - \frac{1}{4}p_1^4. \end{aligned}$$

З формул (28–31) для p_k слідує такі загальні вирази:

$$\begin{aligned} s_{P,1} &= -g_1 j_1, \\ s_{P,2} &= -g_2 j_2 + g_1^2 (j_2 - \frac{1}{2}j_1^2), \\ s_{P,3} &= -g_3 j_3 + g_2 g_1 (2j_3 - j_2 j_1) + g_1^3 (-j_3 + j_2 j_1 - \frac{1}{3}j_1^3), \\ s_{P,4} &= -g_4 j_4 + g_3 g_1 (2j_4 - j_3 j_1) + g_2^2 (j_4 - \frac{1}{2}j_2^2) + \\ &+ g_2 g_1^2 (-3j_4 + 2j_3 j_1 + j_2^2 - j_2 j_1^2) + \\ &+ g_1^4 (j_4 - j_3 j_1 - \frac{1}{2}j_2^2 + j_2 j_1^2 - \frac{1}{4}j_1^4). \end{aligned}$$

У дод. С наведено явно коефіцієнти розкладу (43) для обох конфігурацій.

Внесок S_T згідно фф. (39) і (41) має такий вигляд:

$$S_T \equiv \int dr s_T(r). \quad (44)$$

Відшукаймо коефіцієнти $s_{T,i}$ відповідного розкладу за градієнтами:

$$S_T = Nk_B [s_{T,0} + \delta s_{T,1} + \delta^2 s_{T,2} + \dots]. \quad (45)$$

Для цього необхідно, перейшовши до змінної R , знайти коефіцієнти ряду Тейлора для густини $s_T(R) \equiv k_B d_1 n(R) \ln T(R)$:

$$s_T(R) = \sigma_{-1} [\sigma_0 + \delta \sigma_1 R + \delta^2 \sigma_2 R^2 + \dots], \quad (46)$$

де $\sigma_{-1} \equiv k_B d_1 n_0$ — амплітуда. Величини σ_i виражаються у формі дискретних згорток коефіцієнтів розкладу функцій $n(R)$ і $\ln T(R)$ у вигляді $\sigma_i = (\boldsymbol{\nu} * \boldsymbol{\tau})_i$, де

$$(\boldsymbol{\nu} * \boldsymbol{\tau})_i \equiv \nu_i \tau_0 + \nu_{i-1} \tau_1 + \dots + \nu_1 \tau_{i-1} + \nu_0 \tau_i. \quad (47)$$

Набір $\boldsymbol{\tau} \equiv \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots\}$ для $\ln T(R) = \tau_0 + \delta \tau_1 R + \delta^2 \tau_2 R^2 + \dots$ можна знайти, логарифмуючи і розкладаючи в ряд ф. (9):

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \ln T_0, \\ \tau_1 &= g_1, \\ \tau_2 &= g_2 - \frac{1}{2}g_1^2, \\ \tau_3 &= g_3 - g_2 g_1 + \frac{1}{3}g_1^3, \\ \tau_4 &= g_4 - g_3 g_1 - \frac{1}{2}g_2^2 + g_2 g_1^2 - \frac{1}{4}g_1^4. \end{aligned}$$

Тоді згідно ф. (47) для коефіцієнтів $\boldsymbol{\sigma} \equiv \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ розкладу функції $s_T(R)$ знаходимо:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \ln T_0, \\ \sigma_1 &= -g_1 \Lambda_1, \\ \sigma_2 &= -g_2 \Lambda_1 + g_1^2 \Lambda_{3/2}, \\ \sigma_3 &= -g_3 \Lambda_1 + 2g_2 g_1 \Lambda_{3/2} - g_1^3 \Lambda_{11/6}, \\ \sigma_4 &= -g_4 \Lambda_1 + 2g_3 g_1 \Lambda_{3/2} + g_2^2 \Lambda_{3/2} - 3g_2 g_1^2 \Lambda_{11/6} + g_1^4 \Lambda_{25/12}, \end{aligned}$$

де використано позначення $\Lambda_f \equiv \ln T_0 - f$.

Загальний вираз (18) у випадку внеску S_T набуває вигляду:

$$S_T = V_{\text{cnf}} \sigma_{-1} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j}_{\text{cnf}}), \quad (48)$$

де амплітуда має свій розклад, що походить від розкладу тиску, ф. (27):

$$V_{\text{cnf}} \sigma_{-1} = Nk_B d_1 (p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots).$$

Додавши останні два вирази й зіставивши з розкладом (45), знаходимо, що коефіцієнти для S_T визначаються зі співвідношення $s_{T,i} =$

$d_1(\mathbf{p} * (\boldsymbol{\sigma} \odot \mathbf{j}_{\text{cnf}}))_i$, де \odot позначає формальне *покомпонентне множення* двох “векторів”: $(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}) \equiv \{a_0 b_0, a_1 b_1, a_2 b_2, \dots\}$. В розгорнутому вигляді одержуємо:

$$\begin{aligned} s_{T,0} &= d_1 \ln T_0, \\ s_{T,1} &= d_1 g_1 j_1, \\ s_{T,2} &= d_1 [g_2 j_2 + g_1^2 (-\frac{3}{2} j_2 + j_1^2)], \\ s_{T,3} &= d_1 [g_3 j_3 + g_2 g_1 (-3 j_3 + 2 j_2 j_1) + g_1^3 (\frac{11}{6} j_3 - \frac{5}{2} j_2 j_1 + j_1^3)], \\ s_{T,4} &= d_1 [g_4 j_4 + g_3 g_1 (-3 j_4 + 2 j_3 j_1) + g_2^2 (-\frac{3}{2} j_4 + j_2^2) + \\ &\quad + g_2 g_1^2 (\frac{11}{2} j_4 - 5 j_3 j_1 - \frac{5}{2} j_2^2 + 3 j_2 j_1^2) + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{25}{12} j_4 + \frac{17}{6} j_3 j_1 + \frac{3}{2} j_2^2 - \frac{7}{2} j_2 j_1^2 + j_1^4)], \end{aligned}$$

де було підставлено представлення коефіцієнтів \mathbf{p} і $\boldsymbol{\sigma}$ через добутки градієнтів $[g]$. Явні вирази для $s_{T,i}$ для обох конфігурацій подано у дод. С.

Повна ентропія. Одержім розклад (10) для сумарної ентропії

$$S = N k_B [s_0 + \delta s_1 + \delta^2 s_2 + \dots], \quad (49)$$

додавши розклади для S_T й S_P , фф. (45) і (43), і вираз (42) для S_ξ . Відповідні коефіцієнти $s_i \equiv s_{T,i} + s_{P,i} + s_\xi \delta_{0i}$ мають такий загальний вигляд:

$$\begin{aligned} s_0 &= \ln(V_{\text{cnf}}/N) + \frac{D}{2} \ln T_0 + \xi_S^{(D)}, \\ s_1 &= g_1 \varsigma_{11}, \\ s_2 &= g_2 \varsigma_{22} + g_1^2 \varsigma_{21}, \\ s_3 &= g_3 \varsigma_{33} + g_2 g_1 \varsigma_{321} + g_1^3 \varsigma_{31}, \\ s_4 &= g_4 \varsigma_{44} + g_3 g_1 \varsigma_{431} + g_2^2 \varsigma_{42} + g_2 g_1^2 \varsigma_{421} + g_1^4 \varsigma_{41}; \end{aligned}$$

компактно ці співвідношення можна подати так: $\mathbf{s} = [g] \cdot [\varsigma]$; множники біля градієнтів залежать від вимірності простору:

$$\begin{aligned} \varsigma_{kk} &\equiv \frac{D}{2} j_k; \\ \varsigma_{21} &\equiv -\frac{3D+2}{4} j_2 + \frac{D+1}{2} j_1^2; \\ \varsigma_{321} &\equiv -\frac{3D+2}{2} j_3 + [D+1] j_2 j_1, \\ \varsigma_{31} &\equiv \frac{11D+10}{12} j_3 - \frac{5D+6}{4} j_2 j_1 + \frac{3D+4}{6} j_1^3; \\ \varsigma_{431} &\equiv -\frac{3D+2}{2} j_4 + [D+1] j_3 j_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{42} &\equiv -\frac{3D+2}{4} j_4 + \frac{D+1}{2} j_2^2, \\ \varsigma_{421} &\equiv \frac{11D+10}{4} j_4 - \frac{5D+6}{2} j_3 j_1 - \frac{5D+6}{4} j_2^2 + \frac{3D+4}{2} j_2 j_1^2, \\ \varsigma_{41} &\equiv -\frac{25D+26}{24} j_4 + \frac{17D+22}{12} j_3 j_1 + \frac{3D+4}{4} j_2^2 - \frac{7D+10}{4} j_2 j_1^2 + \frac{2D+3}{4} j_1^4. \end{aligned}$$

Підставивши у ці вирази компоненти набору \mathbf{j}_{cyl} для *циліндричної конфігурації*, ф. (19), знаходимо:

$$\begin{aligned} \varsigma_{11} &= \frac{D}{24} l L; \\ \varsigma_{22} &= \frac{D}{24} L^2, \\ \varsigma_{21} &= \frac{1}{12} \left(-\frac{3D+2}{4} + \frac{D+1}{24} l^2 \right) L^2; \\ \varsigma_{33} &= \frac{D}{160} l L^3, \\ \varsigma_{321} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{17D+8}{18} \right) l L^3, \\ \varsigma_{31} &= \frac{1}{80} \left(\frac{2}{9} D + \frac{15D+20}{648} l^2 \right) l L^3; \\ \varsigma_{44} &= \frac{D}{160} L^4, \\ \varsigma_{431} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{3D+2}{2} + \frac{D+1}{12} l^2 \right) L^4, \\ \varsigma_{42} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{17D+8}{36} \right) L^4, \\ \varsigma_{421} &= \frac{1}{80} \left(\frac{37D+30}{18} - \frac{15D+17}{108} l^2 \right) L^4, \\ \varsigma_{41} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{45D+38}{72} + \frac{D+1}{27} l^2 + \frac{10D+15}{5184} l^4 \right) L^4. \end{aligned}$$

Значення $D = 3$ стосується газу між двома співвісними циліндрами, а підстановка $D = 2$ дає ентропію двовимірного газу між двома концентричними колами.

Для *сферичної конфігурації* за допомогою ф. (20) для \mathbf{j}_{sph} одержуємо:

$$\begin{aligned} \varsigma_{11} &= \frac{1}{6} \frac{D}{2} f_0^{-1} l L; \\ \varsigma_{22} &= \frac{1}{12} \frac{D}{2} \left(1 + \frac{3}{20} l^2 \right) f_0^{-1} L^2, \\ \varsigma_{21} &= \frac{1}{12} \left(-\frac{3D+2}{4} - \frac{D-6}{120} l^2 - \frac{3D+2}{320} l^4 \right) f_0^{-2} L^2; \\ \varsigma_{33} &= \frac{1}{40} \frac{D}{2} f_0^{-1} l L^3, \\ \varsigma_{321} &= \frac{1}{40} \left(-\frac{17D+8}{18} - \frac{D}{24} l^2 \right) f_0^{-2} l L^3, \\ \varsigma_{31} &= \frac{1}{40} \left(\frac{2}{9} D + \frac{27D+22}{324} l^2 - \frac{D+2}{432} l^4 \right) f_0^{-2} l L^3; \\ \varsigma_{44} &= \frac{1}{80} \frac{D}{2} \left(1 + \frac{5}{28} l^2 \right) f_0^{-1} L^4, \\ \varsigma_{431} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{3D+2}{2} - \frac{5D-6}{84} l^2 - \frac{15D+10}{672} l^4 \right) f_0^{-2} L^4, \\ \varsigma_{42} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{17D+8}{36} - \frac{19D+8}{168} l^2 - \frac{33D+8}{6720} l^4 \right) f_0^{-2} L^4, \\ \varsigma_{421} &= \frac{1}{80} \left(\frac{37D+30}{18} + \frac{193D-130}{1512} l^2 + \frac{135D+82}{3360} l^4 + \frac{85D+62}{40320} l^6 \right) f_0^{-3} L^4, \end{aligned}$$

$$s_{41} = \frac{1}{80} \left(-\frac{45D+38}{72} - \frac{157D+86}{1512} l^2 - \frac{209D-2418}{181440} l^4 - \frac{341D+358}{120960} l^6 - \frac{247D+146}{5806080} l^8 \right) f_0^{-4} L^4.$$

На відміну від попереднього випадку тут може бути лише $D = 3$:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{4} f_0^{-1} l L; \\ s_{22} &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{20} l^2 \right) f_0^{-1} L^2, \\ s_{21} &= \frac{1}{12} \left(-\frac{11}{4} + \frac{1}{40} l^2 - \frac{11}{320} l^4 \right) f_0^{-2} L^2; \\ s_{33} &= \frac{3}{80} f_0^{-1} l L^3, \\ s_{321} &= \frac{1}{40} \left(-\frac{59}{18} - \frac{1}{8} l^2 \right) f_0^{-2} l L^3, \\ s_{31} &= \frac{1}{40} \left(\frac{2}{3} + \frac{103}{324} l^2 - \frac{5}{432} l^4 \right) f_0^{-2} l L^3; \\ s_{44} &= \frac{3}{160} \left(1 + \frac{5}{28} l^2 \right) f_0^{-1} L^4, \\ s_{431} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{11}{2} - \frac{3}{28} l^2 - \frac{55}{672} l^4 \right) f_0^{-2} L^4, \\ s_{42} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{59}{36} - \frac{65}{168} l^2 - \frac{107}{6720} l^4 \right) f_0^{-2} L^4, \\ s_{421} &= \frac{1}{80} \left(\frac{47}{6} + \frac{449}{1512} l^2 + \frac{487}{3360} l^4 + \frac{317}{40320} l^6 \right) f_0^{-3} L^4, \\ s_{41} &= \frac{1}{80} \left(-\frac{173}{72} - \frac{557}{1512} l^2 + \frac{199}{20160} l^4 - \frac{1381}{120960} l^6 - \frac{887}{5806080} l^8 \right) f_0^{-4} L^4. \end{aligned}$$

Ці вирази для обох конфігурацій містять радіуси циліндричної та сферичної посудин, присутні в L та l . Ще їх можна знайти, додаючи $s_{T,i}$ й $s_{P,i}$, що наведені у дод. С.

4.2. Узгодження з II-м началом термодинаміки

Покажімо, що результат (49) для ентропії задовольняє друге начало термодинаміки для нерівноважних процесів. Спочатку газ перебуває в теплопровідному стаціонарному стані. Якщо його ізолювати на межових поверхнях $r = r_1$ та $r = r_2$ (циліндричної чи сферичної конфігурацій), то у ньому почнеться вирівнювання температури. Внаслідок релаксації газ прямуватиме до стану рівноваги. Ентропія цього кінцевого стану, згідно II начала термодинаміки [8], має бути більша за ентропію початкового.

Оскільки внутрішня енергія газу не змінюється впродовж релаксації, $E = \text{const}$, то кінцевій рівновазі ми можемо приписати температуру T_{fin} згідно співвідношення $E = \frac{D}{2} N k_B T_{\text{fin}}$. Відповідно до ф. (35) знаходимо:

$$T_{\text{fin}} = T_0 [1 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots],$$

де враховано, що $e_i = p_i$.

Підставивши цю формулу у вираз для рівноважної ентропії газу низької густини [2]

$$S_{\text{fin}} = N k_B \left[\ln(V_{\text{conf}}/N) + \frac{D}{2} \ln T_{\text{fin}} + \xi_S^{(D)} \right]$$

і розклавши логарифм ряду, знаходимо для різниці:

$$S - S_{\text{fin}} = N k_B [\delta \Delta s_1 + \delta^2 \Delta s_2 + \delta^3 \Delta s_3 + \dots],$$

де коефіцієнти розкладу $\Delta s_i \equiv s_i + \frac{D}{2} s_{P,i}$ дорівнюють:

$$\begin{aligned} \Delta s_1 &= 0, \\ \Delta s_2 &= \frac{D+2}{4} g_1^2 (-j_2 + j_1^2), \\ \Delta s_3 &= \frac{D+2}{2} [g_2 g_1 (-j_3 + j_2 j_1) + g_1^3 (\frac{5}{6} j_3 - \frac{3}{2} j_2 j_1 + \frac{2}{3} j_1^3)], \\ \Delta s_4 &= \frac{D+2}{2} [g_3 g_1 (-j_4 + j_3 j_1) + g_2^2 (-\frac{1}{2} j_4 + \frac{1}{2} j_2^2) + \\ &\quad + g_2 g_1^2 (\frac{5}{2} j_4 - \frac{3}{2} j_3 j_1 - \frac{3}{2} j_2^2 + 2 j_2 j_1^2) + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{13}{12} j_4 + \frac{11}{6} j_3 j_1 + j_2^2 - \frac{5}{2} j_2 j_1^2 + \frac{3}{4} j_1^4)]. \end{aligned}$$

Отже, розклад для різниці починається з другого порядку.

За допомогою ф. (19) для циліндричної конфігурації отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta s_2|_{\text{cyl}} &= \frac{D+2}{48} g_1^2 (-1 + \frac{1}{12} l^2) L^2, \\ \Delta s_3|_{\text{cyl}} &= \frac{D+2}{360} [-g_2 g_1 + g_1^3 \frac{5}{72} l^2] l L^3, \\ \Delta s_4|_{\text{cyl}} &= \frac{D+2}{160} [g_3 g_1 (-1 + \frac{1}{12} l^2) + g_2^2 (-\frac{2}{9}) + g_2 g_1^2 (\frac{5}{3} - \frac{17}{108} l^2) + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{19}{36} + \frac{1}{27} l^2 + \frac{5}{1728} l^4)] L^4. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $0 < l < 2$, можна стверджувати, що $\Delta s_2 \leq 0$. Знаки третього і четвертого порядків не можна визначити однозначно, бо знаки і величини градієнтів не відомі. Проте, робимо висновок, що в межах припущення слабкої нерівноважності знайдена ентропія задовольняє друге начало термодинаміки для нерівноважних процесів.

Використавши ф. (20) для сферичної конфігурації знаходимо:

$$\begin{aligned} \Delta s_2|_{\text{sph}} &= \frac{D+2}{48} g_1^2 (-1 + \frac{1}{10} l^2 - \frac{1}{80} l^4) f_0^{-2} L^2, \\ \Delta s_3|_{\text{sph}} &= \frac{D+2}{180} [-g_2 g_1 f_0^{-2} + g_1^3 (\frac{11}{72} l^2 - \frac{1}{96} l^4) f_0^{-3}] l L^3, \\ \Delta s_4|_{\text{sph}} &= \frac{D+2}{160} [g_3 g_1 (-1 + \frac{1}{14} l^2 - \frac{5}{336} l^4) f_0^{-2} + \\ &\quad + g_2^2 (-\frac{2}{9} - \frac{1}{21} l^2 - \frac{1}{840} l^4) f_0^{-2} + \\ &\quad + g_2 g_1^2 (\frac{5}{3} - \frac{65}{756} l^2 + \frac{41}{1680} l^4 + \frac{31}{20160} l^6) f_0^{-3} + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{19}{36} - \frac{43}{756} l^2 + \frac{403}{30240} l^4 - \frac{179}{60480} l^6 - \frac{73}{2903040} l^8) f_0^{-4}] L^4. \end{aligned}$$

На основі тих самих аргументів, що й для випадку циліндра, можна стверджувати, що ентропія сферичної конфігурації також задовольняє друге начало термодинаміки.

5. Внутрішнє зміщення маси

Як було зазначено вище, просторова неоднорідність локальної температури зумовлює просторову неоднорідність густини числа частинок. Найпростіший параметр, який характеризує останню, це розташування центра мас системи. Неважко збагнути, що центр мас газу в теплопровідному стаціонарному стані зазнає зміщення у бік області нижчих температур у порівнянні з положенням для (просторово-однорідної) рівноваги.

5.1. Середнє положення маси

Для точкових мас m_1 та m_2 , розташованих у позиціях \mathbf{r}_1 та \mathbf{r}_2 , положення центра мас означається звичайним чином, див. напр., [42, 43]:

$$\bar{\mathbf{r}} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Коли є N точкових мас m_1, \dots, m_N у положеннях $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$, вираз узагальнюється до

$$\bar{\mathbf{r}} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Для газу частинок маси m , який розглядається як суцільне середовище в об'ємі V з розподілом маси $\rho(\mathbf{r}) = mn(\mathbf{r})$, треба зробити такі заміни: $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}$, $m_i \rightarrow \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, $\sum_i \rightarrow \int_V$. Тоді для положення центра мас одержуємо:

$$\bar{\mathbf{r}} \equiv \frac{\int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}}{\int_V d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})}.$$

Цей вираз годиться для посудин паралелепіпедної конфігурації. Однак для газу в циліндричній посудині, коли є обертова симетрія, він дає положення центра мас на осі циліндра (завдяки інтегруванню за азимутальним кутом), яка би не була радіальна неоднорідність. Для сферичної конфігурації при таких же умовах центр мас перебуває у центрі сфер. Тому, щоб охарактеризувати неоднорідність маси

газу в цих двох особливих конфігураціях, ми використовуємо *середню радіальну відстань*:

$$\bar{r}_{\text{cnf}} \equiv \frac{\int_{r_1}^{r_2} dr \rho(r) r^{m+1}}{\int_{r_1}^{r_2} dr \rho(r) r^m}$$

і не інтегруємо за іншими координатами. Цей параметр можна застосовувати також і для посудини у формі паралелепіпеда. Конкретно для паралелепіпедної, циліндричної та сферичної конфігурацій відповідний вираз набуває вигляду:

$$\bar{z}_{\text{par}} \equiv \frac{\Omega}{N} \int_{z_1}^{z_2} dz n(z) z, \quad \bar{r}_{\text{cyl}} \equiv \frac{2\pi h}{N} \int_{r_1}^{r_2} dr n(r) r^2, \quad \bar{r}_{\text{sph}} \equiv \frac{4\pi}{N} \int_{r_1}^{r_2} dr n(r) r^3.$$

Ці часткові випадки можна записати спільно:

$$\bar{r}_{\text{cnf}} \equiv \frac{\Omega_{\text{cnf}}^\perp}{N} \int_{r_1}^{r_2} dr n(r) r^{m+1}. \quad (50)$$

Для *просторово-однорідного* стану підстановка $n^{\text{unif}} = N/V_{\text{cnf}}$ дає:

$$\bar{z}_{\text{par}}^{\text{unif}} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \quad \bar{r}_{\text{cyl}}^{\text{unif}} = \frac{2}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}, \quad \bar{r}_{\text{sph}}^{\text{unif}} = \frac{3}{4} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Останні два вирази можна представити ще так:

$$\bar{r}_{\text{cyl}}^{\text{unif}} = \frac{2}{3} \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}, \quad \bar{r}_{\text{sph}}^{\text{unif}} = \frac{3}{4} \frac{r_1^3 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2 + r_2^3}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}. \quad (51)$$

Вони задають середню радіальну відстань середовища у рівновазі для циліндричної та сферичної конфігурацій. Зокрема, якщо взяти звичайні циліндр і сферу ($r_1 = 0$), то $\bar{r}_{\text{cyl}}^{\text{unif}} = \frac{2}{3} r_2$ і $\bar{r}_{\text{sph}}^{\text{unif}} = \frac{3}{4} r_2$. Завдяки іншій топології (ніж паралелепіпедна) дріб у середній радіальній координаті набуває більших значень у порівнянні з $\frac{1}{2}$.

5.2. Середня радіальна відстань

Отримаємо вираз для середньої радіальної відстані, що характеризує неоднорідність газу в слабонерівноважному стані. Для цього розглянемо узагальнення формули (4), ввівши туди множник r^q :

$$A_{\text{cnf}}^q \equiv \Omega_{\text{cnf}}^\perp \int_{r_1}^{r_2} dr a(r) r^{m+q}, \quad (52)$$

Значення $q = 1$ відтворює вигляд ф. (50).

Ввівши тут змінну $R \equiv r - r_0$, після простих перетворень приходимо до результату:

$$A_{\text{cnf}}^q = \Omega_{\text{cnf}}^\perp \sum_{k=0}^{m+q} C_{m+q}^k r_0^{m+q-k} J_a^{(k)}, \quad (53)$$

де C_{m+q}^k — число комбінацій, а $J_a^{(k)}$ — R -моменти густини $a(R)$, ф. (12). Звідси знаходимо вираз для середньої радіальної відстані (із $q = 1$) для трьох геометричних конфігурацій:

$$\bar{r}_{\text{cnf}} = \frac{\Omega_{\text{cnf}}^\perp}{N} \left\{ \begin{array}{ll} r_0 J_n^{(0)} + J_n^{(1)} & : \text{par} \\ r_0^2 J_n^{(0)} + 2r_0 J_n^{(1)} + J_n^{(2)} & : \text{cyl} \\ r_0^3 J_n^{(0)} + 3r_0^2 J_n^{(1)} + 3r_0 J_n^{(2)} + J_n^{(3)} & : \text{sph} \end{array} \right\},$$

де $J_n^{(k)}$ — R -моменти функції $n(R)$.

Використавши їхні явні представлення у вигляді рядів, що походять від розкладу густини $n(R)$, див. §2, знаходимо, що \bar{r}_{cnf} можна звести до такого вигляду:

$$\bar{r}_{\text{cnf}} = \bar{r}_{\text{cnf}}^{\text{unif}} (p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots) (\nu_0 \xi_0 + \delta \nu_1 \xi_1 + \delta^2 \nu_2 \xi_2 + \dots) \quad (54)$$

В ролі амплітуди тут взято просторово-однорідний відповідник, а коефіцієнти $\xi_{\text{cnf}} \equiv \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots\}$, що виникають від комбінацій інтегралів $J_n^{(k)}$, дорівнюють:

$$\begin{aligned} \xi_{\text{par}} &= \{1, \frac{1}{12}lL, \frac{1}{12}L^2, \frac{1}{80}lL^3, \frac{1}{80}L^4, \dots\}, \\ \xi_{\text{cyl}} &= \{1, \tilde{f}_1 L, \tilde{f}_2 L^2, \dots, \tilde{f}_i L^i, \dots\}, \\ \xi_{\text{sph}} &= \{1, \tilde{\varphi}_1 L, \tilde{\varphi}_2 L^2, \dots, \tilde{\varphi}_i L^i, \dots\}; \end{aligned}$$

функції \tilde{f}_i введено після ф. (17), а $\tilde{\varphi}_i \equiv \varphi_i / \varphi_0$ визначаються функціями φ_i , що мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &\equiv 1 + \frac{1}{4}l^2, & \varphi_3 &\equiv \frac{3}{80}(1 + \frac{5}{84}l^2)l, \\ \varphi_1 &\equiv \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{20}l^2)l, & \varphi_4 &\equiv \frac{1}{80}(1 + \frac{15}{28}l^2), \\ \varphi_2 &\equiv \frac{1}{12}(1 + \frac{9}{20}l^2), & \varphi_5 &\equiv \frac{3}{448}(1 + \frac{7}{108}l^2)l. \end{aligned}$$

Результат для \bar{r}_{cnf} можна звести згідно ф. (10) до вигляду:

$$\bar{r}_{\text{cnf}} = \bar{r}_{\text{cnf}}^{\text{unif}} [p_0 + \delta p_1 + \delta^2 p_2 + \dots]. \quad (55)$$

Якщо коефіцієнти зібрати у вектор $\boldsymbol{\rho} \equiv \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_i, \dots\}$, то ця формула набуває вигляду: $\bar{r}_{\text{cnf}} = \bar{r}_{\text{cnf}}^{\text{unif}} (\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\rho})$. Зіставляючи її з ф. (54), приходимо до співвідношення: $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{p} * (\boldsymbol{\nu} \odot \xi_{\text{cnf}}))$. Зокрема, $\rho_0 \equiv 1$, а ρ_i — лінійні комбінації добутків градієнтів порядку i :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= g_1 \varrho_{11}, \\ \rho_2 &= g_2 \varrho_{22} + g_1^2 \varrho_{21}, \\ \rho_3 &= g_3 \varrho_{33} + g_2 g_1 \varrho_{321} + g_1^3 \varrho_{31}, \\ \rho_4 &= g_4 \varrho_{44} + g_3 g_1 \varrho_{431} + g_2^2 \varrho_{42} + g_2 g_1^2 \varrho_{421} + g_1^4 \varrho_{41}. \end{aligned}$$

Ці вирази представляємо як $\boldsymbol{\rho} = [g] \cdot [\varrho]$ із матрицею множників:

$$[\varrho] \equiv \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \varrho_{11} & & & & & \\ \varrho_{22} & \varrho_{21} & & & & \\ \varrho_{33} & \varrho_{321} & \varrho_{31} & & & \\ \varrho_{44} & \varrho_{431} & \varrho_{42} & \varrho_{421} & \varrho_{41} & \end{bmatrix}.$$

Виразивши у ф. (54) коефіцієнти \boldsymbol{p} і $\boldsymbol{\nu}$ через добутки градієнтів $[g]$, можемо знайти представлення множників $[\varrho]$ через $[\pi]$ та ξ :

$$\begin{aligned} \varrho_{kk} &\equiv \pi_{kk} - \xi_k, & k &= 1 \div 4; \\ \varrho_{21} &\equiv \pi_{21} - \pi_{11} \xi_1 + \xi_2; \\ \varrho_{321} &\equiv \pi_{321} - \pi_{22} \xi_1 - \pi_{11} \xi_2 + 2\xi_3, \\ \varrho_{31} &\equiv \pi_{31} - \pi_{21} \xi_1 + \pi_{11} \xi_2 - \xi_3; \\ \varrho_{431} &\equiv \pi_{431} - \pi_{33} \xi_1 - \pi_{11} \xi_3 + 2\xi_4, \\ \varrho_{42} &\equiv \pi_{42} - \pi_{22} \xi_2 + \xi_4, \\ \varrho_{421} &\equiv \pi_{421} - \pi_{321} \xi_1 - \pi_{21} \xi_2 + \pi_{22} \xi_2 + 2\pi_{11} \xi_3 - 3\xi_4, \\ \varrho_{41} &\equiv \pi_{41} - \pi_{31} \xi_1 + \pi_{21} \xi_2 - \pi_{11} \xi_3 + \xi_4. \end{aligned}$$

Підставивши сюди вирази для коефіцієнтів $[\pi]$, отримуємо кінцеві загальні вирази для $[\varrho]$ у термінах $\boldsymbol{j}_{\text{cnf}}$ та ξ_{cnf} :

$$\begin{aligned} \varrho_{kk} &\equiv j_k - \xi_k, & k &= 1 \div 4; \\ \varrho_{21} &\equiv -j_2 + \xi_2 + (j_1^2 - j_1 \xi_1); \\ \varrho_{321} &\equiv -2j_3 + 2\xi_3 + (2j_2 j_1 - j_2 \xi_1 - j_1 \xi_2), \\ \varrho_{31} &\equiv j_3 - \xi_3 + (-2j_2 j_1 + j_2 \xi_1 + j_1 \xi_2) + j_1^3 - j_1^2 \xi_1; \\ \varrho_{431} &\equiv -2j_4 + 2\xi_4 + (2j_3 j_1 - j_3 \xi_1 - j_1 \xi_3), \\ \varrho_{42} &\equiv -j_4 + \xi_4 + (j_2^2 - j_2 \xi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho_{421} &\equiv 3j_4 - 3\xi_4 + (-4j_3j_1 + 2j_3\xi_1 + 2j_1\xi_3) - \\ &\quad - 2j_2^2 + 2j_2\xi_2 + (3j_2j_1^2 - 2j_2j_1\xi_1 - j_1^2\xi_2), \\ \varrho_{41} &\equiv -j_4 + 3\xi_4 + (2j_3j_1 - j_3\xi_1 - j_1\xi_3) + j_2^2 - j_2\xi_2 + \\ &\quad + (-3j_2j_1^2 + 2j_2j_1\xi_1 + j_1^2\xi_2) + j_1^4 - j_1^3\xi_1.\end{aligned}$$

Вони готові для застосувань до конкретних геометрій.

5.3. Результати для конфігурацій

У попередніх роботах [31–33], що стосуються *паралелепіпедної конфігурації*, зміщення маси не розглядалося. Наведімо тут відповідні результати:

$$\begin{aligned}\varrho_{11} &= -\frac{1}{12}lL; \\ \varrho_{2\beta} &= 0; \\ \varrho_{33} &= -\frac{1}{80}lL^3, \quad \varrho_{321} = \frac{13}{720}lL^3, \quad \varrho_{31} = -\frac{1}{180}lL^3; \\ \varrho_{4\beta} &= 0;\end{aligned}$$

або явно:

$$\bar{z}_{\text{par}} = \frac{z_1 + z_2}{2} \left[1 - \delta \frac{1}{12} g_1 l L + \delta^3 \frac{1}{80} (-g_3 + \frac{13}{9} g_2 g_1 - \frac{4}{9} g_1^3) l L^3 + \dots \right],$$

де для цієї конфігурації $L \equiv z_2 - z_1$, а $l \equiv L/z_0$ із $z_0 \equiv \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, див. вираз після ф. (5). Розкривши дужки, отримуємо:

$$\bar{z}_{\text{par}} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - \delta \frac{1}{12} g_1 L^2 + \delta^3 \frac{1}{80} (-g_3 + \frac{13}{9} g_2 g_1 - \frac{4}{9} g_1^3) L^4 + \dots$$

Проаналізуємо цей результат. Стан газу в паралелепіпедній конфігурації не залежить від того, який випадок — $z_2 > z_1$ чи $z_2 < z_1$ — має місце. Він залежить від того, де розташовується гарячіший термостат — справа чи зліва. Знайдений вираз відповідає такій обставині, містячи лише парні степені L . В той же час, парні порядки градієнтів випали, а зміщення центра мас — вправо чи вліво — визначається у першому порядку знаком градієнта g_1 . Щоб повністю проаналізувати третій порядок, треба знати знаки і величини наступних градієнтів g_3 і g_2 . Однак ясно, що внесок від g_1^3 має той же знак, що і внесок першого порядку. Якщо прийняти, що хід температури вгнутий, тобто $g_2 > 0$ (на це вказують комп'ютерні моделювання), то внесок від $g_2 g_1$ має протилежний знак до знаку першого порядку.

Для *циліндричної конфігурації* одержуємо:

$$\varrho_{11} \equiv \frac{1}{12}(-1 + \frac{1}{12}l^2)f_0^{-1}lL;$$

$$\begin{aligned}\varrho_{22} &\equiv \frac{1}{12}(-\frac{1}{15}l^2)f_0^{-1}L^2, \\ \varrho_{21} &\equiv \frac{1}{12}(-\frac{1}{60}l^2 + \frac{1}{144}l^4)f_0^{-1}L^2; \\ \varrho_{33} &\equiv \frac{1}{80}(-1 + \frac{1}{12}l^2)f_0^{-1}lL^3, \\ \varrho_{321} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{13}{9} - \frac{17}{108}l^2)f_0^{-1}lL^3, \\ \varrho_{31} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{4}{9} + \frac{1}{36}l^2 + \frac{5}{1296}l^4)f_0^{-1}lL^3; \\ \varrho_{44} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{2}{21}l^2)f_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{431} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{1}{42}l^2 + \frac{1}{72}l^4)f_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{42} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{11}{189}l^2)f_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{421} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{11}{378}l^2 - \frac{5}{216}l^4)f_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{41} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{1}{63}l^2 + \frac{7}{1296}l^4 + \frac{5}{15552}l^6)f_0^{-1}L^4.\end{aligned}$$

Явний вираз для середньої радіальної відстані в наближенні другого порядку має вигляд:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{\text{cyl}} &= \bar{r}_{\text{cyl}}^{\text{unif}} \left[1 + \delta \frac{1}{12} g_1 (-1 + \frac{1}{12} l^2) f_0^{-1} l L + \right. \\ &\quad \left. + \delta^2 \frac{1}{12} (g_2 (-\frac{1}{15} l^2) + g_1^2 (-\frac{1}{60} l^2 + \frac{1}{144} l^4)) f_0^{-1} L^2 + \dots \right].\end{aligned}$$

Для *сферичної конфігурації* знаходимо:

$$\begin{aligned}\varrho_{11} &\equiv \frac{1}{12}(-1 + \frac{1}{10}l^2 - \frac{1}{80}l^4)f_0^{-1}\varphi_0^{-1}lL; \\ \varrho_{22} &\equiv \frac{1}{12}(-\frac{2}{15}l^2)f_0^{-1}\varphi_0^{-1}L^2, \\ \varrho_{21} &\equiv \frac{1}{12}(-\frac{1}{30}l^2 + \frac{1}{36}l^4 - \frac{1}{480}l^6)f_0^{-2}\varphi_0^{-1}L^2; \\ \varrho_{33} &\equiv \frac{1}{80}(-1 + \frac{1}{14}l^2 - \frac{5}{336}l^4)f_0^{-1}\varphi_0^{-1}lL^3, \\ \varrho_{321} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{13}{9} - \frac{115}{756}l^2 + \frac{97}{5040}l^4 + \frac{29}{20160}l^6)f_0^{-2}\varphi_0^{-1}lL^3, \\ \varrho_{31} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{4}{9} - \frac{11}{189}l^2 + \frac{62}{2835}l^4 - \frac{17}{5040}l^6 - \frac{1}{60480}l^8)f_0^{-3}\varphi_0^{-1}lL^3; \\ \varrho_{44} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{4}{21}l^2)f_0^{-1}\varphi_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{431} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{1}{21}l^2 + \frac{19}{315}l^4 - \frac{23}{5040}l^6)f_0^{-2}\varphi_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{42} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{22}{189}l^2 + \frac{1}{210}l^4)f_0^{-2}\varphi_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{421} &\equiv \frac{1}{80}(\frac{11}{189}l^2 - \frac{1091}{11340}l^4 + \frac{41}{15120}l^6 + \frac{5}{12096}l^8)f_0^{-3}\varphi_0^{-1}L^4, \\ \varrho_{41} &\equiv \frac{1}{80}(-\frac{2}{63}l^2 + \frac{89}{5670}l^4 + \frac{2}{405}l^6 - \frac{11}{18144}l^8 - \frac{1}{362880}l^{10})f_0^{-4}\varphi_0^{-1}L^4.\end{aligned}$$

У межах другого порядку результат для середньої радіальної відстані виглядає так:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{\text{sph}} &= \bar{r}_{\text{sph}}^{\text{unif}} \left[1 + \delta \frac{1}{12} g_1 (-1 + \frac{1}{10} l^2 - \frac{1}{80} l^4) f_0^{-1} \varphi_0^{-1} l L + \right. \\ &\quad \left. + \delta^2 \frac{1}{12} (g_2 (-\frac{2}{15} l^2) + g_1^2 (-\frac{1}{30} l^2 + \frac{1}{36} l^4 - \frac{1}{480} l^6) f_0^{-1}) f_0^{-1} \varphi_0^{-1} L^2 + \dots \right].\end{aligned}$$

На відміну від паралелепіпедної, для цих конфігурацій внески дають також і парні порядки за градієнтами.

В інших відомих нам підходах, згаданих у вступі, явище зміщення маси у теплопровідних стаціонарних станах не розглядається, а його величина не розраховується. Зокрема, в роботах, що інтерпретують нерівноважний стан в термінах локального опису, таке зміщення можна знайти лише після того, як отримано відповідні стаціонарні розв'язки для полів температури і густини числа частинок.

6. Підсумки

Щоб з'ясувати вплив форми посудини на термодинамічні макроскопічні характеристики системи у теплопровідному стаціонарному стані, ми розглянули дві характерні геометричні конфігурації: слабонерівноважний стан між двома співвісними циліндричними поверхнями і двома концентричними сферичними поверхнями, на яких підтримуються різні температури. В ролі системи взято найпростішу модель — газ низької густини.

На основі підходу суцільного середовища розраховано тиск, внутрішню енергію та ентропію у вигляді розкладів за градієнтами температури різних порядків, що стосуються просторово середньої поверхні, до 4-го порядку включно. Додатково отримано розклад для середньої радіальної відстані (для обертово-симетричних систем це аналог позиції центра мас). Її відхилення від значення для просторово-однорідного стану зумовлене явищем об'ємного розширення у неоднорідно нагрітому газі.

Результати для усіх макроскопічних величин є лінійними комбінаціями градієнтів та їхніх добутків. Особливості тієї чи іншої геометричної конфігурації проявляються у конкретній залежності коефіцієнтів при добутках градієнтів від геометричних параметрів (внутрішнього і зовнішнього радіусів циліндрів чи сфер). Нерівноправність внутрішньої та зовнішньої поверхонь, на яких задаються граничні умови, проявляється у появі внесків від добутків градієнтів непарних порядків у термодинамічних величинах, скалярних за своєю природою (тиск, енергія, ентропія). Цього нема у паралелепіпедній конфігурації, поверхні граничних умов у якій рівноправні. Узгодження слабонерівноважної ентропії з II-им началом термодинаміки для нерівноважних процесів засвідчує несуперечливість підходу.

Отримані аналітичні вирази для глобальних величин містять макроскопічні параметри, що задають теплопровідний стаціонарний стан. За своїм виглядом це нерівноважні термодинамічні співвідно-

шення. Вони розширюють наше бачення термодинамічного опису систем у стаціонарній нерівновазі.

У наступній роботі цей спосіб опису буде застосовано до системи твердих кульок.

Подяки

У роботі використано відомості з бази даних ADS NASA.

А. “Вектори”, “матриці” й операції з ними

В основі пропонованого опису лежить розклад локальної температури у ряд (9). Він зумовлює розклади решти густин адитивних величин у свої ряди типу ф. (13) і призводить до результатів для макроскопічних термодинамічних характеристик у вигляді розкладів (10).

“Вектори”. Відповідні коефіцієнти розкладу зручно зібрати у набори, а саме: приведені градієнти температури

$$\mathbf{g} \equiv \{g_0, g_1, \dots, g_i, \dots\}; \quad (56)$$

коефіцієнти розкладу для кожної густин адитивної величини $a(R)$

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots\};$$

та коефіцієнти розкладу для макроскопічних адитивних величин A

$$\mathbf{a} \equiv \{a_0, a_1, \dots, a_i, \dots\}.$$

З цими наборами можна обходитися, як з векторами, хоч вони не утворюють векторного простору. Формально можна ще ввести $\boldsymbol{\delta} \equiv \{1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^i, \dots\}$ і $\mathbf{R} \equiv \{1, R^1, R^2, \dots, R^i, \dots\}$.

Для таких “векторів” вводимо операції, які скорочують запис співвідношень, що виникають в основному тексті. Візьмімо два довільні “вектори” $\mathbf{a} \equiv \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ та $\mathbf{b} \equiv \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$.

- *Скалярне множення* — двом “векторам” ставить у відповідність *число*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

Операція переставна: $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. В таких позначеннях розклад у ряд температури, ф. (9), та густини $a(R)$, ф. (13), виглядають як

$T(R) = T_0(\mathbf{g} \cdot \mathbf{R})$ та $a(R) = \alpha_{-1}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{R})$. Розклад макроскопічної величини A за добутками градієнтів, ф. (10), набуває вигляду: $A = A_0(\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{a})$.

- *Покомпонентне множення* — двом “векторам” ставить у відповідність “вектор”:

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} \equiv \{a_0 b_0, a_1 b_1, a_2 b_2, \dots\}.$$

Операція переставна: $\mathbf{b} \odot \mathbf{a} = \mathbf{a} \odot \mathbf{b}$.

- *Згортка за дискретним індексом* — двом “векторам” \mathbf{a} та \mathbf{b} ставить у відповідність “вектор” $\mathbf{c} \equiv \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$: $\mathbf{c} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$ так, що

$$c_i = (\mathbf{a} * \mathbf{b})_i \equiv a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \dots + a_{i-j} b_j + \dots + a_1 b_{i-1} + a_0 b_i.$$

Операція переставна: $\mathbf{b} * \mathbf{a} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$.

“Матриці”. Добутки градієнтів різних порядків, утворені з набору \mathbf{g} , ф. (56), зручно зібрати в таблицю

$$[g] \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ g_1 \\ g_2 & g_1^2 \\ g_3 & g_2 g_1 & g_1^3 \\ g_4 & g_3 g_1 & g_2^2 & g_2 g_1^2 & g_1^4 \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix},$$

яку позначено тією самою буквою і яку можна сприймати як особливий випадок матриці. В кожному рядку зібрано всі можливі добутки градієнтів одного порядку. Інші “матриці” побудовано згідно такої ж структури: у 0-му рядку — 1 елемент, у 1-му рядку — 1 елемент, у 2-му — 2 елементи, у 3-му — 3 елементи, у 4-му — 5 елементів і т.д.

Щоб означити операції, введемо дві “матриці”:

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{321} & a_{31} \\ a_{44} & a_{431} & a_{42} & a_{421} & a_{41} \\ \dots & & \dots & & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} b_{00} \\ b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \\ b_{33} & b_{321} & b_{31} \\ b_{44} & b_{431} & b_{42} & b_{421} & b_{41} \\ \dots & & \dots & & \dots \end{bmatrix}.$$

- *Поелементне множення* — двом “матрицям” ставить у відповідність “матрицю”: $\mathcal{C} = \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ так, що $c_{i\beta} \equiv a_{i\beta} b_{i\beta}$, тобто:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} a_{00} b_{00} \\ a_{11} b_{11} \\ a_{22} b_{22} & a_{21} b_{21} \\ a_{33} b_{33} & a_{321} b_{321} & a_{31} b_{31} \\ a_{44} b_{44} & a_{431} b_{431} & a_{42} b_{42} & a_{421} b_{421} & a_{41} b_{41} \\ \dots & & \dots & & \dots \end{bmatrix}.$$

Операція переставна: $\mathcal{B} \odot \mathcal{A} = \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$.

- *Однократне скалярне множення* — двом “матрицям” \mathcal{A} та \mathcal{B} ставить у відповідність “вектор” $\mathbf{c} \equiv \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$: $\mathbf{c} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ так, що

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv a_{00} b_{00}, \\ c_1 &\equiv a_{11} b_{11}, \\ c_2 &\equiv a_{22} b_{22} + a_{21} b_{21}, \\ c_3 &\equiv a_{33} b_{33} + a_{321} b_{321} + a_{31} b_{31}, \\ c_4 &\equiv a_{44} b_{44} + a_{431} b_{431} + a_{42} b_{42} + a_{421} b_{421} + a_{41} b_{41}, \\ &\dots \end{aligned}$$

тобто, i -та складова “вектора” утворюється шляхом скалярного перемноження i -тих рядків “матриць” \mathcal{A} та \mathcal{B} : $c_i \equiv \sum_{\beta} a_{i\beta} b_{i\beta}$. Операція переставна: $\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

- *Двократне скалярне множення* — двом “матрицям” \mathcal{A} та \mathcal{B} ставить у відповідність число, а саме, суму добуток відповідних елементів:

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} \equiv a_{00} b_{00} + a_{11} b_{11} + (a_{22} b_{22} + a_{21} b_{21}) + a_{33} b_{33} + \dots$$

По-іншому — це сума усіх компонентів однократного скалярного добутку $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. Операція переставна: $\mathcal{B} : \mathcal{A} = \mathcal{A} : \mathcal{B}$.

В. Добуток двох рядів і обернений ряд

Нехай дано два розклади за малим параметром δ :

$$\mathcal{A} \equiv a_0 + \delta a_1 + \delta^2 a_2 + \dots, \quad \mathcal{B} \equiv b_0 + \delta b_1 + \delta^2 b_2 + \dots$$

Відшукаймо, як виражаються коефіцієнти добутку $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \mathcal{B}$ через коефіцієнти рядів-множників.

Перемножуючи розклади A та B , маємо:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \delta^{i+k} a_i b_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \delta^p \sum_{k=0}^p a_{p-k} b_k = c_0 + \delta c_1 + \delta^2 c_2 + \dots,$$

де після першого '=' внески з тими самими степенями параметра δ зібрано разом і введено новий індекс $p = i + k$. З останньої рівності знаходимо, що коефіцієнт добутку є згортокою коефіцієнтів $\{a\}$ і $\{b\}$ за дискретним індексом:

$$c_p = \sum_{k=0}^p a_{p-k} b_k.$$

Якщо A і B взаємнообернені $AB = 1 = BA$, то $\sum_{k=0}^p a_{p-k} b_k = \delta_{0p}$, де δ_{qp} – символ Кронекера. З цих рівностей отримуємо рекурентні співвідношення:

$$b_p = \frac{\delta_{0p}}{a_0} - \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} b_k.$$

Якщо $a_0 = 1$, то $b_0 = 1$ і рекурентний вираз для b_p спрощується:

$$b_p|_{p \geq 1} = - \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} b_k.$$

В цьому разі перші кілька мають вигляд:

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2 - a_1 b_1, \quad b_3 = -a_3 - a_2 b_1 - a_1 b_2, \quad \dots$$

З них знаходимо явні вирази:

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1, & b_3 &= -a_3 + 2a_2 a_1 - a_1^3, \\ b_2 &= -a_2 + a_1^2, & b_4 &= -a_4 + 2a_3 a_1 + a_2^2 - 3a_2 a_1^2 + a_1^4, \\ b_5 &= -a_5 + 2a_4 a_1 + 2a_3 a_2 - 3a_3 a_1^2 - 3a_2^2 a_1 + 4a_2 a_1^3 - a_1^4, & \dots \end{aligned}$$

Коефіцієнти $\{a\}$ виражаються через коефіцієнти $\{b\}$ за допомогою таких самих співвідношень.

С. Коефіцієнти розкладу S_P і S_T

Тут наведено явні вирази для коефіцієнтів розкладу внесків S_P і S_T до ентропії для циліндричної та сферичної конфігурацій.

Підставивши значення j_k для *циліндричної конфігурації*, ф. (19), у загальні вирази для коефіцієнтів λ_i , подані після ф. (43), отримуємо:

$$\begin{aligned} s_{P,1}|_{\text{cyl}} &= -\frac{1}{12} g_1 l L, \\ s_{P,2}|_{\text{cyl}} &= -\frac{1}{12} [g_2 + g_1^2 (-1 + \frac{1}{24} l^2)] L^2, \\ s_{P,3}|_{\text{cyl}} &= -\frac{1}{80} [g_3 - \frac{13}{9} g_2 g_1 + g_1^3 (\frac{4}{9} + \frac{5}{324} l^2)] l L^3, \\ s_{P,4}|_{\text{cyl}} &= -\frac{1}{80} [g_4 + g_3 g_1 (-2 + \frac{1}{12} l^2) - \frac{13}{18} g_2^2 + g_2 g_1^2 (\frac{22}{9} - \frac{13}{108} l^2) + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{13}{18} + \frac{1}{27} l^2 + \frac{5}{5184} l^4)] L^4. \end{aligned}$$

Для *сферичної конфігурації* підстановка ф. (20) дає:

$$\begin{aligned} s_{P,1}|_{\text{sph}} &= -\frac{1}{6} g_1 f_0^{-1} l L, \\ s_{P,2}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{12} [g_2 (-1 - \frac{3}{20} l^2) f_0^{-1} + g_1^2 (1 + \frac{1}{15} l^2 + \frac{1}{80} l^4) f_0^{-2}] L^2, \\ s_{P,3}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{40} [g_3 (-f_0^{-1}) + g_2 g_1 (\frac{13}{9} + \frac{1}{12} l^2) f_0^{-2} + g_1^3 (-\frac{4}{9} - \frac{8}{81} l^2) f_0^{-3}] l L^3, \\ s_{P,4}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{80} [g_4 (-1 - \frac{5}{28} l^2) f_0^{-1} + g_3 g_1 (2 + \frac{4}{21} l^2 + \frac{5}{168} l^4) f_0^{-2} + \\ &\quad + g_2^2 (\frac{13}{18} + \frac{5}{28} l^2 + \frac{29}{3360} l^4) f_0^{-2} + \\ &\quad + g_2 g_1^2 (-\frac{22}{9} - \frac{43}{126} l^2 - \frac{47}{840} l^4 - \frac{3}{1120} l^6) f_0^{-3} + \\ &\quad + g_1^4 (\frac{13}{18} + \frac{19}{126} l^2 + \frac{709}{45360} l^4 + \frac{3}{1120} l^6 + \frac{29}{483840} l^8) f_0^{-4}] L^4. \end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладу S_T знаходимо зі загальних виразів для $s_{T,i}$, поданих після ф. (48). Для *циліндричної конфігурації*, використавши ф. (19), знаходимо:

$$\begin{aligned} s_{T,1}|_{\text{cyl}} &= \frac{1}{12} d_1 g_1 l L, \\ s_{T,2}|_{\text{cyl}} &= \frac{1}{12} d_1 [g_2 + g_1^2 (-\frac{3}{2} + \frac{1}{12} l^2)] L^2, \\ s_{T,3}|_{\text{cyl}} &= \frac{1}{80} d_1 [g_3 - \frac{17}{9} g_2 g_1 + g_1^3 (\frac{4}{9} + \frac{5}{108} l^2)] l L^3, \\ s_{T,4}|_{\text{cyl}} &= \frac{1}{80} d_1 [g_4 + g_3 g_1 (-3 + \frac{1}{6} l^2) - \frac{17}{18} g_2^2 + g_2 g_1^2 (\frac{37}{9} - \frac{5}{18} l^2) + \\ &\quad + g_1^4 (-\frac{5}{4} + \frac{2}{27} l^2 + \frac{5}{1296} l^4)] L^4. \end{aligned}$$

Подібно, для *сферичної конфігурації* отримуємо:

$$\begin{aligned} s_{T,1}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{6} d_1 g_1 l L, \\ s_{T,2}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{12} d_1 [g_2 (1 + \frac{3}{20} l^2) f_0^{-1} + g_1^2 (-\frac{3}{2} - \frac{1}{60} l^2 - \frac{3}{160} l^4) f_0^{-2}] L^2, \\ s_{T,3}|_{\text{sph}} &= \frac{1}{40} d_1 [g_3 f_0^{-1} + g_2 g_1 (-\frac{17}{9} - \frac{1}{12} l^2) f_0^{-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_1^3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{6} l^2 - \frac{1}{216} l^4 \right) f_0^{-3}] l L^3, \\
s_{T,4} \Big|_{\text{sph}} = & \frac{1}{80} d_1 \left[g_4 \left(1 + \frac{5}{28} l^2 \right) f_0^{-1} + g_3 g_1 \left(-3 - \frac{5}{42} l^2 - \frac{5}{112} l^4 \right) f_0^{-2} + \right. \\
& + g_2^2 \left(-\frac{17}{18} - \frac{19}{84} l^2 - \frac{11}{1120} l^4 \right) f_0^{-2} + \\
& + g_2 g_1^2 \left(\frac{37}{9} + \frac{193}{756} l^2 + \frac{9}{112} l^4 + \frac{17}{4032} l^6 \right) f_0^{-3} + \\
& \left. + g_1^4 \left(-\frac{5}{4} - \frac{157}{726} l^2 - \frac{209}{90720} l^4 - \frac{341}{60480} l^6 - \frac{247}{2903040} l^8 \right) f_0^{-4} \right] L^4.
\end{aligned}$$

Література

1. Д. Н. Зубарев. *Неравновесная статистическая термодинамика*. Москва, Наука, 1971.
2. Р. Балеску. *Равновесная и неравновесная статистическая механика*, т. 1. Москва, Мир, 1978.
3. J. J. Del Pozo, P. L. Garrido, P. I. Hurtado. Scaling laws and bulk-boundary decoupling in heat flow. *Phys. Rev. E*, **91**:032116, 2015.
4. J. J. Del Pozo, P. L. Garrido, P. I. Hurtado. Probing local equilibrium by nonequilibrium fluids. *Phys. Rev. E*, **92**:022117, 2015.
5. S.-i. Sasa, H. Tasaki. Steady state thermodynamics. *J. Stat. Phys.*, **125**(1):126–227, 2006.
6. Y. Oono, M. Paniconi. Steady state thermodynamics. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 130:29–44, 1998.
7. Р. Кубо. *Термодинамика*. Москва, Мир, 1970.
8. И. П. Базаров. *Термодинамика*. Москва, Высшая школа, 1983.
9. H. Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**(4):311–407, 1949.
10. С. де Гроот, П. Мазур. *Неравновесная термодинамика*. Москва, Мир, 1964.
11. И. Дьярмати. *Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы*. Москва, Мир, 1974.
12. К. П. Гуров. *Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (физические основы)*. Москва, Наука, 1978.
13. D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon. Extended irreversible thermodynamics. *Rep. Prog. Phys.*, **51**:1105–1179, 1988.
14. D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon. Extended irreversible thermodynamics revisited: 1988–1998. *Rep. Prog. Phys.*, **62**:1035–1114, 1999.
15. D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon. *Extended irreversible thermodynamics*. Springer, Berlin, 3rd edn., 2001.
16. I. Müller, T. Ruggeri. *Extended thermodynamics*. Springer, New York, 1993.

17. I. Müller, T. Ruggeri. *Rational extended thermodynamics*. Springer, New York, 1998.
18. C. Truesdell. *Rational thermodynamics*. McGraw-Hill, New York, 1969.
19. H.-D. Kim, H. Hayakawa. Kinetic theory of a dilute gas system under steady heat conduction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **72**(8):1904–1916, 2003. arXiv:0202003v5 [cond-mat.stat-mech].
20. H.-D. Kim. Two-dimensional nonlinear nonequilibrium kinetic theory under steady heat conduction. *Phys. Rev. E*, **71**(4):041203, 2005. arXiv:cond-mat/0501142v2 [cond-mat.stat-mech].
21. R. E. Nettleton. The Gibbs equation from maximum entropy. *J. Chem. Phys.*, **93**(11):8247–8253, 1990.
22. R. E. Nettleton. Generalized Grad-type foundations for nonlinear extended thermodynamics. *Phys. Rev. A*, **42**(8):4622–4629, 1990.
23. J. Camacho, D. Jou. Equations of state of a dilute gas under a heat flux. *Phys. Rev. E*, **52**(4):3490–3494, 1995.
24. H.-D. Kim, H. Hayakawa. Test of information theory on the Boltzmann equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **72**(10):2473–2476, 2003. arXiv:cond-mat/0203036v5 [cond-mat.stat-mech].
25. I. Müller, T. Ruggeri. Stationary heat conduction in radially symmetric situations — an application of extended thermodynamics. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **119**(1–3):139–143, 2004.
26. E. Barbera, I. Müller. Inherent frame dependence of thermodynamic fields in a gas. *Acta Mech.*, **184**(1–4):205–216, 2006.
27. E. Barbera, F. Brini. An extended thermodynamics description of stationary heat transfer in binary gas mixtures confined in radial symmetric bounded domains. *Contin. Mech. Thermodyn.*, **24**(4–6):313–331, 2012.
28. E. Barbera, I. Müller. Secondary heat flow between confocal ellipses — An application of extended thermodynamics. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **153**(2–3):149–156, 2008.
29. E. Barbera, F. Brini, G. Valenti. Some non-linear effects of stationary heat conduction in 3D domains through extended thermodynamics. *Europhys. Lett.*, **98**(5):54004, 2012. 6 p.
30. E. Barbera, F. Brini. On stationary heat conduction in 3D symmetric domains: an application of extended thermodynamics. *Acta Mech.*, **215**(1–4):241–260, 2010.
31. Й. А. Гуменюк. *Градієнтні внески в термодинамічні величини газу низької густини у теплопровідному слабонерівноважному стаціонарному стані*. ІФКС, Львів, 2014. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ICMP-14-11U).

32. Й. А. Гуменюк. *Вільна енергія газу низької густини у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані*. ІФКС, Львів, 2015. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ISMP-15-06U).
 33. Y. A. Humenyuk. Thermodynamic quantities of a low-density gas in the weakly nonequilibrium heat-conduction steady state. *Ukr. J. Phys.*, **61**(5):400–412, 2016.
 34. Й. А. Гуменюк. *Термодинамічні величини системи твердих кульок у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані*. ІФКС, Львів, 2016. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ISMP-16-01U).
 35. Y. A. Humenyuk. Pressure and entropy of hard-spheres in the weakly nonequilibrium heat-conduction steady state. *Condens. Matter Phys.*, **19**(4):43002, 2016.
 36. С. Чепмен, Т. Каулінг. *Математическая теория неоднородных газов*. Москва, Изд. иностр. лит., 1960.
 37. Дж. Ферцигер, Г. Капер. *Математическая теория процессов переноса в газах*. Москва, Мир, 1976.
 38. Й. А. Гуменюк. *Термодинамічні величини газу низької густини у слабонерівноважному теплопровідному стаціонарному стані в наближенні лінійного ходу температури*. ІФКС, Львів, 2016. (Препринт / НАН України, Ін-т фізики конденс. систем; ISMP-16-09U).
 39. Y. A. Humenyuk. Thermodynamic quantities of the low-density gas in the weakly nonequilibrium heat-conduction steady state in the linear temperature profile approximation. *J. Phys. Stud.*, **21**(1/2):1001, 2017.
 40. В. Б. Кобилянський. *Статистична фізика*. Київ, Вища школа, 1972.
 41. М. М. Клим, П. М. Якібчук. *Молекулярна фізика*. Львів, Львівський нац. ун-т ім. І. Франка, 2003.
 42. А. М. Федорченко. *Теоретична фізика. Класична механіка і електродинаміка*, т. 1. Київ, Вища школа, 1992.
 43. Г. Іро. *Класична механіка*. Львів, Львівський нац. ун-т ім. І. Франка, 1999.
-

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. **Condensed Matter Physics** is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlady, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>