

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-16-10U

П.В. Сарканич, Ю.В. Головач, Р. Кенна*, П. Мак Керрон†

УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ І МЕРЕЖЕВИЙ АНАЛІЗ БИЛИН —
ГЕРОЇЧНОГО ЕПОСУ СХІДНИХ СЛОВ'ЯН

*Дослідницький центр прикладної математики, університет Ковентрі, CV1 5FB, Англія

†Факультет експериментальної психології, Оксфордський університет, OX1 3UD, Англія

УДК: 51-77; 519.179.2; 398.22.

PACS: 89.75.-k, 89.75.Nc, 89.65.Ef

Універсальність і мережевий аналіз билин – героїчного епосу східних слов'ян

П. Сарканич, Ю. Головач, Р. Кенна, П. Мак Керрон

Анотація. Поняття універсальності – незалежності характерної поведінки макроскопічної системи, що складається із багатьох взаємодіючих агентів, від деталей її будови – є одним із основних понять статистичної фізики. У цій статті методи статистичної фізики і науки про складні мережі застосовується для дослідження універсальних властивостей соціальної мережі персонажів билин. Розглядаються билини, що охоплюють період розквіту Київської Русі (кінець X – середина XII ст.). Цим аналізом ми продовжуємо серію робіт [P. Mac Carron, 2012–2016], де подібні кількісні методи застосовувалися для аналізу декількох визначних європейських епосів. Порівняння наших результатів із отриманими раніше дозволяє виявити універсальні характеристики епічних наративів різних культур.

Universality and network analysis of byliny – heroic east slavic epic narratives

P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna, P. Mac Carron

Abstract. The notion of universality is one of the essential concepts in statistical physics. It means that the typical behaviour of a macroscopic system consisting of many interacting agents is independent of the system's structural details. In this paper the concepts and methods of statistical physics and complex networks science are used for the study of universal properties of social networks of byliny characters. We consider the epics covering the heyday of the Kievan Rus (end of the tenth century to the middle of twelfth century). In this analysis, we continue series of works [P. Mac Carron, 2012–2016], where such quantitative methods were used to analyse several prominent European epics. By comparing our results with those previously obtained, one can detect universal characteristics of different cultures epic narratives.

Подається в Журнал фізичних досліджень
Submitted to Journal of Physical Studies

© Інститут фізики конденсованих систем 2016
Institute for Condensed Matter Physics 2016

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Петро Васильович Сарканич
Юрій Васильович Головач
Ральф Кенна
Подріг Мак Керрон

УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ І МЕРЕЖЕВИЙ АНАЛІЗ ВИЛИН — ГЕРОЇЧНОГО
ЕПОСУ СХІДНИХ СЛОВ'ЯН

Роботу отримано 17 жовтня 2016 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку лабораторією статистичної фізики
складних систем

Виготовлено при ІФКС НАН України
© Усі права застережені

1. Вступ

Однією з характерних рис фізики є те, що народжені в ній поняття і концепції часто виходять за межі суто фізичних задач і використовуються в загальнонауковому чи загальнокультурному контексті. Приклади цього твердження численні [1]. Причому іде мова не лише про технічні (прикладні) застосування чи метафоричне переосмислення фізичних понять, а про поширення концептуального апарату, способу аналізу, методів моделювання із фізики в інші ділянки науки і культури [2]. Однією з таких концепцій є концепція *універсальності*. В контексті нашого дослідження ми розумітимемо її як незалежність характерної поведінки макроскопічної системи, що складається із багатьох взаємодіючих агентів, від деталей будови цієї системи. У фізиці фазових переходів і критичних явищ поняття універсальності є одним із підставових понять [3]. Остання чверть минулого століття була свідком глибокого переосмислення універсальності поведінки багаточастинкових систем в околі точок неперервних фазових переходів [4], пояснення причин цього явища і його прецизійного кількісного опису [5]. Досить згадати про те, що принаймні шість Нобелівських премій з фізики останньої чверті XX ст. були присуджені за дослідження, пов'язані із поясненням явищ, де принцип універсальності відіграє визначальну роль. Це, зокрема, відкриття високотемпературної надпровідності, надплинності рідкого гелію-3; розробка підходу ренормалізаційної групи для опису критичних явищ і фазових переходів, а також узагальнення цього методу для опису складних систем, таких як рідкі кристали чи полімери [6].

Ці та багато інших робіт свідчать, що закони виникнення в системі нової якості (наприклад, намагніченості в околі точки Кюрі, проникаючого кластеру в околі точки протікання чи надплинної компоненти в околі λ -точки) визначаються лише глобальними величинами - такими як симетрія, вимірність простору, тип взаємодії. Тому критична поведінка таких різних, на перший погляд, об'єктів, як одновісний магнетик чи простий плин, є однаковою, універсальною. Системи, що описуються різними глобальними характеристиками, належать до різних класів універсальності. Кількісними характеристиками класу універсальності, які є незмінними для усіх систем, що належать до цього класу, є значення критичних показників, відношення критичних амплітуд, скейлінгових функцій [5, 7, 8].

Методи та концептуальний апарат статистичної фізики значною мірою сформували науку про складні системи [9]. Для таких систем

характерна наявність нової колективної поведінки в порівнянні із поведінкою її складових компонент. Поняття складної системи стосується багатьох традиційних дисциплін науки і є предметом нової міждисциплінарної галузі знань [10]. Притаманними особливостями складних систем є самоорганізація, виникнення нових функціональних можливостей (нових якостей), висока чутливість до малих змін початкових умов, підпорядкування степеневим законам (розподіли типу “товстих хвостів”). Зайве казати, що поняття універсальності, про яке йшла мова вище, стало одним із підставових понять теорії складних систем. Подібно як виникнення параметра порядку при фазовому переході другого роду супроводжується універсальною поведінкою системи як цілого, виникнення нової якості у складній системі - чи, як це прийнято тепер називати, емерджентність також супроводжується універсальною поведінкою, яка часто описується степеневими законами [11].

Дослідження, результати якого наведені у цій статті, стосується пошуку універсальних кількісних характеристик билин - героїчного епосу східних слов'ян. Цим аналізом ми продовжуємо серію робіт, започаткованих в [12–14], де кількісні методи теорії складних систем, зокрема теорії складних мереж, були застосовані до таких визначальних європейських епічних наративів, як пам'ятки стародавнього англосаксонського героїчного епосу *Беовульф* [15], античної грецької епічної поеми *Іліада* [16], центральної саги (скели) уладського циклу ірландської міфології *Викрадення бика з Куалнге* [17] (див. також [18]) та ісландських саг [20]. Застосування теорії складних систем у соціальних та гуманітарних науках уже має певну традицію. Більш того, певні групи робіт сформалізувалися у такі окремі напрямки досліджень, як соціофізика [21] чи еконофізика [22]. Як стане зрозуміло із подальшого викладу, особливістю нашого дослідження є ще й те, що ми аналізуватимемо соціальні зв'язки між героями епічного наративу. Аналіз наративу як “твору людського духу” є традиційно прерогативою гуманітарних наук [23], в той час як аналіз соціальних структур є, зрозуміло, предметом наук соціальних. Застосування кількісних методів і концепцій природничих наук для такого аналізу є, на наш погляд, характерною рисою сьогодення.

Незважаючи на те, що міфи відрізняються від легенд і казок, провести межу між ними інколи буває дуже складно. Їх можна розрізнити, якщо брати до уваги час, в якому відбувається дія. Міфи не є прив'язаними до часу, і часто їх дія відбувається в прадавні доісторичні часи. Напротивагу, легенди мають чітку прив'язку до певної історичної епохи. А казки в свою чергу є навмисно вигаданими.

Хоча всі ці три жанри є дуже широкими і включають велику кількість творів, а також формують важливий пласт нашого культурного життя, саме деякі міфи є легкими для сприйняття. Це і є однією із причин, чому порівняльна міфологія викликає інтерес в гуманітарних дослідженнях. Одним із її фундаментальних результатів є знаходження універсальних структур - мономіфів [24]. Мономіфи показують універсальність народного мислення. У своїх спробах пояснити навколишній світ люди стикаються із тими ж проблемами і, знаходячи своє пояснення, створюють міфологію окремого народу. Незважаючи на свою революційність ідея мономіфу часто піддається критиці, бо розбіжності у міфології також несуть інформацію, як і існування універсальності [25, 26]. Для нас концепція існування мономіфу є важливою і цікавою, бо вона перегукується із концепцією універсальності в статистичній фізиці та фізиці критичних явищ.

Уже згаданий вище аналіз епічних наративів проведений в роботах [12–14] базується на дослідженні соціальних зв'язків між героями цих творів і на застосуванні теорії складних мереж до кількісного аналізу цих зв'язків. Наука про складні мережі [27–31] сформувалася в окремий напрямок зовсім недавно. З математичної точки зору кожна мережа – це граф, що складається з множини вершин і ребер (у фізичній літературі часто вживаються терміни вузли і зв'язки). Прикладами можуть бути інтернет, www, нейронні, транспортні, розподільчі, соціальні мережі, мережі метаболізму, харчування, цитування та багато інших. Лише нещодавно фізики почали аналізувати мережі теоретично та емпірично, перші статті датуються кінцем 1990-их років. Мета досліджень змінилася від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин і ребер до розгляду статистичних властивостей цих графів (мереж). Зі зміною мети змінилися і методи аналізу, і зараз у цій ділянці успішно застосовуються методи статистичної фізики складних систем.

Емпіричні дослідження показали, що соціальним мережам притаманний ряд характерних рис: вони переважно є мережами тісного світу [32–35]; розподіл ступеня вузлів добре описується степеневим законом [32, 36]; коефіцієнти кластерності є високими [33]; часто для них виконується гіпотеза соціального балансу (для кожної трійки людей знайомих між собою кількість ворожих зв'язків є парною, що повторює принцип “ворог мого ворога - мені друг”) [37–39]; схильні бути асортативними за ступенем вузла [40]; а також цим мережам притаманна ієрархічна [41] і групова структура [42]. Кожна з цих характеристик не є унікальною характеристикою соціальної мережі, але всі вони часто зустрічаються в мережах соціальних зв'язків і

тому є характерними для них [43]. Перелік цих характеристик дозволяє створити базис, на основі якого можна проводити категоризацію і порівняння мереж, а оскільки всі ці характеристики є кількісними – то і вводити класи, за аналогією з класами універсальності у статистичні фізиці.

В нашому дослідженні ми продовжуємо започатковану в [12, 13] традицію, вперше застосувавши подібну методикку до епосу східних слов'ян. Основною метою, яку ми ставимо перед собою, є пошук універсальних кількісних характеристик соціальних мереж персонажів епосів. Іншою ціллю є дослідити, наскільки результати, отримані в нашому кількісному підході, корелюють із загальноприйнятими якісними результатами.

Подальша структура статті така: в розділі 2 ми детальніше опишемо корпус текстів билин, які бралися до розгляду у нашому дослідженні та розповімо про створення соціальної мережі билин, що стала предметом кількісного аналізу. Результати аналізу цієї мережі наведено в розділі 3. Тут, в окремих підрозділах, ми зупинимось на різних характеристиках мережі билин і порівняємо їх із соціальними мережами епосів інших народів (числові значення цих характеристик підсумовано в Табл. 1). Таке порівняння слугуватиме основний меті нашого дослідження – пошуку універсальних характеристик епічних наративів. Висновки та обговорення результатів наведено в розділі 4.

2. Соціальна мережа билин

2.1. Билини

Билини (або, як їх інколи називають, старини) є творами героїчного епосу східних слов'ян. Це невеликі речитативно-мелодійні епічні пісні. Дослідники поділяють билини на соціально-побутові та власне героїчні. Також билини можна поділити за місцем дії: на київські, новгородські й московські. Билини московського та новгородського циклів мають радше соціально-побутовий характер, ніж героїчний. Зокрема, московські билини описують поведінку вищих верств населення і належать до періоду другої половини XIII – XVI ст., коли, після зруйнування Києва монголо-татарами в 1240 році, Київська Русь фактично припинила своє існування. Новгородський цикл билин, хронологічно близький до київського, в центрі уваги має простий народ - купців, гусярів чи лихварів. Новгород завжди був великим торговельним вузлом, який ніколи не знав татарської навали.

Це відобразилося і на тематиці народного епосу. Билини новгородського та московського циклу є віддалені від билин київського циклу за місцем чи за часом подій. Тому немає сенсу проводити аналіз усієї сукупності билин, а можна обмежитися аналізом соціальної структури кожного циклу окремо. Надалі нас будуть цікавити билини київського циклу, що охоплюють доволі невеликий період розквіту Київської Русі (кінець X - середина XII ст.) [44]. Тексти для аналізу було взято з [45]. Крім билин про героїв, до київського циклу також відносять скомороші пісні та билини про сватання. Оскільки вони не є творами героїчного характеру, їх не включено у подальший аналіз. Загалом, предметом нашого дослідження стали 39 билин із цієї збірки.

Билини переходили з покоління в покоління в усній формі. Перші відомі нам записи билин сягають 1619 року і були зроблені англійцем Річардом Джеймсом [46]. Це були твори з московського циклу. Вважається, що першим упорядником збірки билин на початку XVIII століття став Кірша Данилов. Але його збірка побачила світ аж у 1804 році [47]. Основна частина билини була зібрана і записана в північних областях Росії у XVIII–XIX століттях. Дослідник билин Василь Авенаріус [48] пояснює це тим, що більшість населення України в той час була грамотною, на відміну від жителів віддалених сіл Російської імперії, і знання від покоління до покоління переходили вже в письмовій формі, а не усній. Другою причиною могло слугувати те, що український народ в цей час оспівував період козаччини, і це витіснило з народної пам'яті тексти сивої давнини. Цієї думки притримувалися Михайло Максимович і Микола Костомаров [49]. Зазначимо також, що в Україні билинні сюжети збереглися в інших фольклорних жанрах. Зокрема, відомі українські народні казки про Іллю Муромця, думи про Олексія Поповича, пісні про Джурилу.

Незважаючи на те, що билини були зібрані на дуже великих територіях, в них є багато спільного. Зокрема билини, які об'єднані місцем дії, також мають і багатьох спільних персонажів. Саме ця властивість і дозволяє нам розглядати персонажів билин як певну структуру - соціальну мережу. Так до билин київського циклу відносяться твори про найвідоміших богатирів: Іллю Муромця, Добриню і Олексія Поповича.

2.2. Мережа

Під мережею персонажів билин (надалі - *соціальна мережа билин* [50]) будемо розуміти граф [51], вершини якого відповідають окремим персонажам [52], а ребра означають зв'язки між окремими пер-

сонажами. Позначимо множину вершин V , їх кількість – N , а множину і кількість ребер – E і L відповідно. Кожен зв'язок можна задати парою вершин, які він з'єднує. Графи можуть бути орієнтовані і неорієнтовані. В орієнтованих графах кожне ребро має свій напрям, тобто при його означенні пара вершин має свій порядок. У нашому аналізі зображатимемо соціальну мережу персонажів билин у вигляді неорієнтованого графу. Його можна задати у вигляді матриці суміжності A_{ij} . Це матриця розміру $N \times N$, елемент A_{ij} якої рівний одиниці, якщо між вузлами i та j є зв'язок, і нулю – якщо такого зв'язку немає. Для неорієнтованого графу матриця суміжності є симетричною відносно головної діагоналі.

Також існують зважені графи – графи, в яких кожне ребро має свою вагу. Для них матриця суміжності не буде просто складатися з нулів і одиниць, а матиме елементами вагу кожного з ребер [51]. Оскільки проблема визначення ваги соціального зв'язку між окремими індивідами не є однозначною [50] (тим більше, якщо мова йде про зв'язки, означені лише в межах певних наративів), надалі ми будуватимемо соціальну мережу як неорієнтований незважений граф, кожен зі зв'язків якого відображає факт знайомства між персонажами-вершинами, які він з'єднує. Згідно методики, запропонованої в роботах [12–14], вважатимемо, що два персонажі билини знайомі між собою якщо вони дружать (якщо вони розмовляють один з одним; коли з тексту відомо, що вони зустрічалися раніше; коли персонажі разом присутні в невеликій групі) або якщо вони ворогують (безпосередньо б'ються чи є в стані війни). Зауважимо, що така методика ускладнює можливість автоматизації опрацювання текстів і створення бази даних.

Аналіз згаданого вище корпусу билин дозволив створити базу даних, що складається із 153 окремих персонажів, поєднаних зв'язками двох типів – дружніми і ворожими. Цю соціальну мережу наведено на рис. 1. Кожен із персонажів має свій кодовий номер. Список найважливіших персонажів билин подано в Додатку в Табл. 3. Дружні зв'язки показані синьою суцільною лінією, а ворожі – червоною пунктирною. Усього мережа налічує 320 зв'язків. Із них 223 зв'язки дружні і 105 – ворожі. Сума дружніх і ворожих зв'язків більша за загальну кількість ребер, оскільки кожна билина сама по собі є короткою історією із кількома персонажами. У різних билинах ті самі персонажі можуть бути як друзями, так і ворогами, а деколи тип зв'язку змінюється навіть в межах одного твору [13].

Характерною рисою зображеної на Рис. 1 мережі є те, що вона складається із декількох відокремлених фрагментів, один із яких

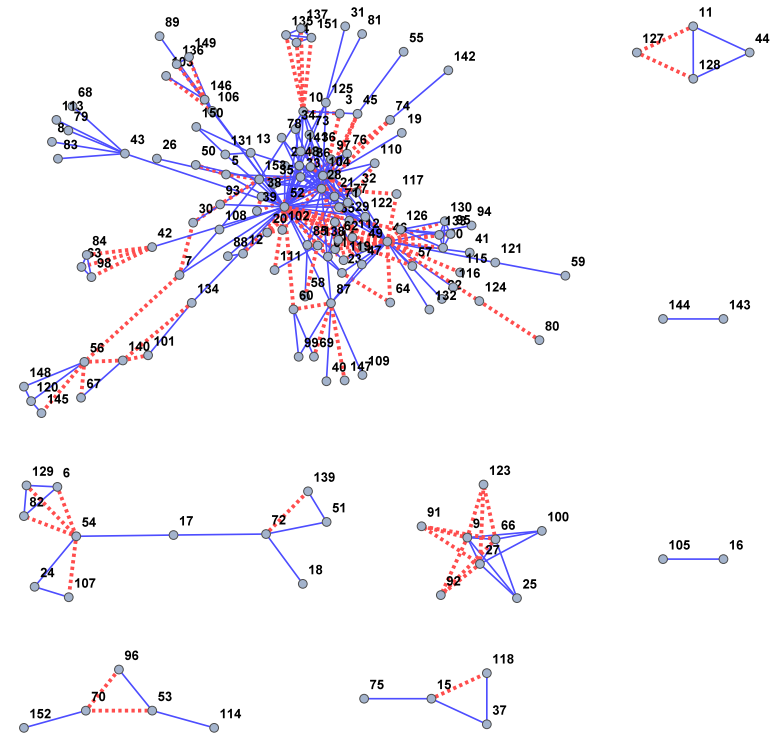


Рис. 1. Соціальна мережа билин київського циклу. Червоними пунктирними лініями позначені ворожі зв'язки, а синіми суцільними – дружні. Кожен з вузлів має свій кодовий номер. Список найважливіших персонажів із відповідними їм номерами поданий в Додатку (Табл. 3). Найбільша зв'язна компонента зображена у лівому верхньому кутку рисунку. Менші граfi відповідають за персонажів окремих билин. Так, граф утворений вузлами 143 і 144 позначає турцію із туреням, які обговорюють рух війська, але не взаємодіють із жодним із персонажів. Зіркоподібний граф у другому рядку знизу відповідає билині про Вавила (вузол номер 9). Персонажі цієї билини не повторюються у жодній з інших билин.

(у лівому верхньому кутку рисунку) суттєво більший від інших. Це так звана найбільша зв'язна компонента (частина графу, в якій існує шлях між будь-якими двома вершинами). Існування найбільшої зв'язної компоненти свідчить про те, що персонажі різних билин пов'я-

зані між собою, а вибрані твори утворюють, в сукупності, цілісну картину. Це можна пояснити тим, що билини київського циклу об'єднує місце події, наявність богатира-протагоніста і князя Володимира. Поряд із найбільшою зв'язною компонентою в мережі присутні окремі, суттєво менші, не зв'язані один з одним фрагменти. Вони відповідають окремим билинам чи їх невеликим групам, що, хоч і належать до київського циклу, проте в них не діють персонажі, спільні із персонажами найбільшої компоненти. Наприклад, один із відокремлених фрагментів (зіркоподібний у другому рядку знизу) відповідає билині про Вавила (вузол номер 9). У ній розповідається, як Вавило перемагає антагоніста-царя і займає його місце. Персонажі цієї билини не повторюються у жодній з інших билин. А тому їм відповідає відокремлений фрагмент загальної соціальної мережі билин.

Розмір (кількість вершин N і ребер L) соціальної мережі билин представлений в першому рядку Табл. 1 разом із іншими характеристиками, які будуть описані нижче. У таблиці окремо подано характеристики як мережі, утвореної всіма зв'язками, так і мереж утворених лише ворожими чи лише дружніми зв'язками (надалі – ворожа і дружня мережі). Також варто зазначити, що при утворенні дружньої чи ворожої мереж можуть виникати вузли, у яких немає жодного зв'язку (ізолювані вузли). Природно, що їх не береться до розгляду, і, таким чином, розміри мереж різних типів зв'язків будуть різними. Наприклад, ворожа мережа билин містить всього 98 вузлів (вилучено 55 ізолюваних вузлів), а у найбільшій зв'язній компоненті знаходиться 50 із них, що становить 51 %. А для соціальної мережі билин усіх зв'язків розмір найбільшої зв'язної компоненти складає 76.5%. Порівняно із епосами інших народів билини мають найбільшу зв'язну компоненту меншого розміру. Це можна пояснити тим, що билини є не історіями одного суцільного героїчного епосу, а окремими розповідями про героїв. Різні регіони Київської Русі оспівували своїх героїв і складали про них пісні-билини, які могли і не бути пов'язаними із найпопулярнішими богатирями. Прикладом може слугувати Василь Окулович (персонаж номер 11), зв'язна компонента якого знаходиться в правому верхньому кутку рис. 1.

Надалі в Табл. 1 ми порівнюватимемо отримані характеристики соціальної мережі билин із аналогічними характеристиками інших творів. Крім згаданих вище творів *Беовульф*, *Іліада*, *Викрадення бика з Куалнге* (надалі називатимемо цю мережу *Таїн*) та ісландських саг про *Гіслі*, про *людей з Озерної долини* (надалі *сага 1*), про *Егіля*, про *Ньяла*, про *людей з Лаксдала* (надалі *сага 2*), у таблиці зібра-

Табл. 1. Характеристики соціальної мережі билин (наші результати) у порівнянні із іншими епосами [12–14]. Тут N і L – кількість вузлів і зв'язків відповідно; $\langle k \rangle$ і $k_{\max}$ – середній (2) і максимальний (3) ступінь вузла; l , l_{rand} – середні довжини найкоротшого шляху (6) складної мережі і відповідного випадкового графу (8); $l_{\max}$ – діаметр мережі (7); C , C_{rand} – середній коефіцієнт кластерності (12) і його відповідник для випадкового графу (13); S – тіснотівність (17); G_C – розмір найбільшої компоненти у %; r_k , r_C – асортативності за ступенем вузла (23) і за коефіцієнтом кластерності (24), відповідно. Примітки в дужках означають типи зв'язків, із яких складаються мережі.

Мережа	N	L	$\langle k \rangle$	$k_{\max}$	l	l_{rand}	$l_{\max}$	C	C_{rand}	S	G_C	r_k	r_C
Билини (усі)	153	320	4.18	52	2.9	3.61	6	0.57	0.03	23.7	76.5	-0.15	0.04
Билини (ворожі)	98	102	2.14	17	3.63	5.76	8	0.06	0.022	4.3	51	-0.11	0.012
Билини (дружні)	142	223	3.16	41	2.76	4.33	6	0.42	0.022	27.4	57	-0.115	-0.08
Беовульф (усі) [12]	72	167	4.45	27	2.4	2.9	6	0.7	0.06	14.1	67.5	-0.10	-0.05
Беовульф (ворожі) [12]	31	26	1.67	-	2.08	3.25	4	0	0.05	0	32.2	-0.20	-
Беовульф (дружні) [12]	68	140	4.12	-	2.45	2.98	6	0.69	0.06	14.0	66.1	-0.03	-
Таїн (усі) [12]	422	1266	6.10	168	2.8	3.3	7	0.8	0.02	47.1	98.5	-0.33	-0.30
Таїн (ворожі) [12]	144	168	2.33	-	2.93	5.88	7	0.17	0.02	17.1	90.9	-0.36	-
Таїн (дружні) [12]	385	1091	5.67	-	2.84	3.43	7	0.84	0.01	101	90.9	-0.32	-
Іліада (усі) [12]	716	2684	7.40	106	3.5	3.3	11	0.6	0.01	56.6	98.7	-0.08	0.53
Іліада (ворожі) [12]	321	361	2.25	-	4.10	7.12	9	0	0.01	0	89.4	-0.39	-
Іліада (дружні) [12]	664	2317	6.98	-	3.83	3.34	12	0.62	0.01	54.1	82.3	0.10	-
Сага про Гіслі [13]	103	254	4.9	44	3.4	2.9	11	0.6	0.05	10.8	98	-0.15	0.01
Сага 1 [13]	132	290	4.4	31	3.9	3.3	10	0.5	0.03	12.7	97	0.00	0.08
Сага про Егіля [13]	293	769	5.3	59	4.2	3.4	12	0.6	0.02	25.5	97	-0.07	0.28
Сага 2 [13]	332	894	5.4	45	5.0	3.5	16	0.5	0.02	19.0	99	0.19	0.25
Сага про Ньяла [13]	575	1612	5.6	83	5.1	3.7	24	0.4	0.01	31.0	100	0.01	0.12
Да Дєрга [14]	126	410	6.51	71	2.76	2.77	7	0.64	0.05	12.8	98.4	-0.18	0.31
Одїсея [14]	301	1019	6.77	112	3.29	3.18	8	0.45	0.02	21.7	98.3	-0.08	0.38
Пісня про Нібелунгів [14]	66	313	9.48	43	2.14	2.11	5	0.69	0.14	4.9	97	-0.28	0.22
Мабіногон [14]	666	2427	7.29	135	3.83	3.48	11	0.48	0.01	43.6	76	0.19	0.37
Епос про Гільгамеша [14]	46	81	3.52	19	2.54	3.08	5	0.46	0.08	7.0	93.5	-0.34	0.10
Міфи індіанців Навахо [14]	140	283	4.04	32	3.81	3.62	9	0.44	0.03	14.0	92.1	-0.18	0.31

на інформація про характеристики соціальних мереж ірландської саги (скелі) уладського циклу *Руйнування дому Да Дерга* (надалі *Да Дерга*), античної грецької епічної поеми *Одіссея*, німецького середньовічного героїчного епосу *Пісня про Нібелунгів*, циклу валійських середньовічних повістей *Мабіногіон*, шумерського *Епосу про Гільгамеша*, священної книги народу майя *Пополь-Вух*, міфів одного з найбільших індіанських племен Навахо. У тих випадках, коли відповідна інформація доступна, ми наводимо дані окремо для мереж, утворених дружніми зв'язками, ворожими зв'язками і для загальної мережі. Кількісні дані про ці епоси взято з роботи [14].

Порівняння характеристик соціальної мережі билин із переліченими вище репрезентативними епосами різних народів світу слугуватиме основній меті, поставленій у нашій роботі – пошуку універсальних характеристик епічних наративів. З цією метою в наступному розділі ми знайдемо такі характеристики соціальної мережі билин, як середній ступінь вузла, коефіцієнт кластерності, відстань між персонажами, тісносвітність, кореляції між характеристиками вузлів, посередництво вузлів, стійкість мережі до атак і її розподіл на спільноти. Кожну з цих характеристик ми детальніше опишемо нижче. У Табл. 1 зібрані всі перелічені вище характеристики для мереж різних типів зв'язків у билинах в порівнянні з низкою інших епосів.

3. Результати

3.1. Ступінь вузла

Ступінь k_i вузла i – це кількість зв'язків які має даний вузол. Це локальна характеристика вузла, іншими словами – це число вершин, з якою з'єднана дана, і очевидно, що така міра може вказати на важливість кожної вершини. Ступінь вузла i визначають за наступною формулою

$$k_i = \sum_j A_{ij} \quad (1)$$

де A_{ij} - елементи матриці суміжності. Мережу загалом можна охарактеризувати середнім ступенем вузла

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i, \quad (2)$$

і максимальним ступенем вузла

$$k_{\max} = \max_i k_i. \quad (3)$$

Тут і нижче, якщо не зазначено інакше, підсумовування ведеться за всіма вузлами мережі. $\max_i$ в (3) означає максимальне значення серед усіх вузлів. Для неорієнтованих графів

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}. \quad (4)$$

Для подальшого аналізу властивостей, пов'язаних зі ступенем вузлів, мережу зручно зобразити, промасштабувавши розмір кружечка, що відповідає кожній з вершин на її ступінь. Таким чином, вузли із більшим ступенем будуть зображатися кружечками більшого діаметра. Найбільша зв'язна компонента такої мережі зображена на Рис. 2 (а). Як бачимо з рисунку, деякі вузли значно вирізняються за розміром. Максимальний ступінь вузла у цій мережі $k_{\max} = 52$ набагато вищий від середнього ступеня $\langle k \rangle = 4.18$, див. Табл. 1. Хоч билини і містять багато персонажів, але все ж вони є історіями про героїв, а отже самі розповіді орієнтовані на лідерів. Зокрема, у мережі виділяються декілька головних героїв: князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій Попович (персонаж 1) – для яких ступінь вузла сильно виділяється на фоні цілої мережі. Зображений на Рис. 2 (а) граф має структуру, схожу до зіркового, точніше до кількох зіркових, що зрослися разом: лідери приєднують до себе багато вузлів із малим ступенем, а також пов'язані між собою напряду. Персонаж із максимальним значенням ступеня вузла $k_{\max} = 52$ знає майже половину всіх інших. Це князь Володимир (персонаж 52), який згадується майже в кожній билині. Цікаво, що, за припущеннями деяких дослідників, князь Володимир є збірним персонажем [49]. Ми ще повернемося до цього питання пізніше, обговорюючи в підрозділі 3.7 асортативність мережі.

Розглянемо тепер імовірність того, що довільно обраний вузол мережі має заданий ступінь k . Така ймовірність задається функцією розподілу ступенів вузлів $p(k)$ і є однією з центральних характеристик мережі. Відомо, що реальні соціальні мережі (див., наприклад, [32, 35]) описуються степеневим-спадною функцією $p(k) \simeq k^{-\lambda}$, $k \gg 1$. Такі мережі називаються безмасштабними [27–31]. Безмасштабні мережі володіють низкою унікальних властивостей, пов'язаних зі швидкістю загасання функції $p(k)$. Дуже часто важливі мережеві структури є безмасштабними. Крім згаданих соціальних мереж, безмасштабними є мережі інтернету, www, метаболізму, багато розподільчих, транспортних та семантичних мереж [29, 30]. На практиці зручно користуватися кумулятивною функцією розподілу

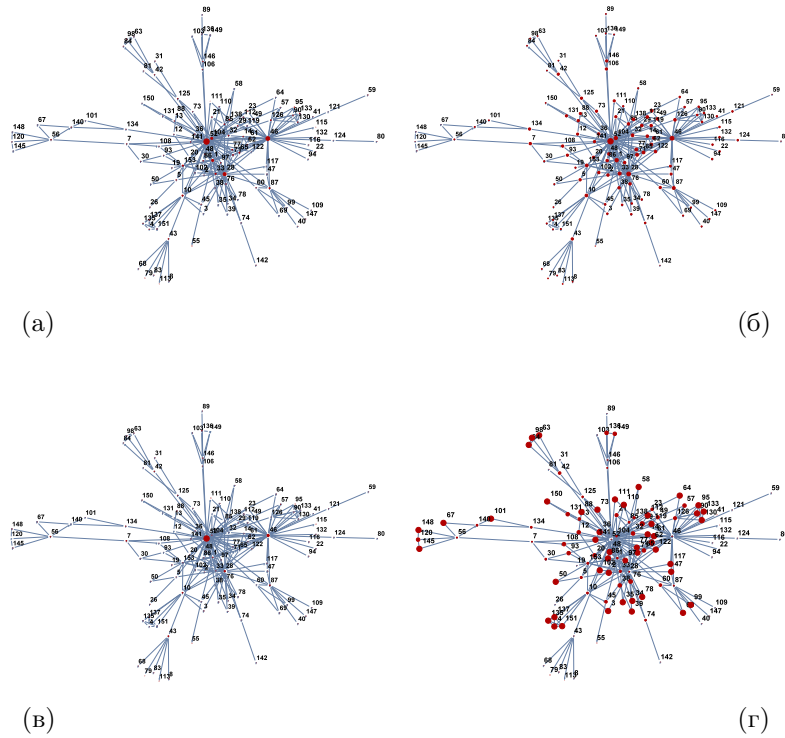


Рис. 2. Найбільша зв'язна компонента соціальної мережі билин (до розгляду взято всі зв'язки – дружні та ворожі). Розмір кожного з вузлів пропорційний до: (а) ступеня вузла k ; (б) центральності близькості C^c (9); (в) центральності посередництва C_B (10); (г) коефіцієнта кластерності C (11). Як видно із порівняння рисунків (а) – (г), ранг (важливість) вузла у різних класифікаціях різний. Наприклад, князь Володимир (персонаж 52) та Ілля Муромець (персонаж 46) мають найвищі значення ступеня вузла, центральності близькості і центральності посередництва, а от їхній коефіцієнт кластерності є малим. Чи Іван Гостиний син (персонаж 43) має порівняно високі значення центральностей, але низькі значення ступеня вузла і коефіцієнта кластерності. Значення рангів найважливіших персонажів наведено у Додатку.

ступенів вузлів $P(k)$, пов'язаною із $p(k)$ співвідношенням:

$$P(k) = \sum_{q=k}^{k_{\max}} p(q), \quad (5)$$

де $k_{\max}$ – максимальне значення ступеня вузла. Як інтегральна характеристика, така функція є гладшою, ніж $p(k)$, і зручнішою для апроксимації. Для степеневі-спадної функції розподілу $p(k) \sim k^{-\lambda}$ показник загасання кумулятивної функції $P(k)$ на великих k становить $1 - \lambda$.

На рис. 3 зображено кумулятивну функцію розподілу ступенів вузлів та її апроксимацію степеневим законом. Ця апроксимація відповідає показнику $\lambda \simeq 2.36(7)$ при статистичному критерії $\chi^2/N_{dof} = 0.041$, що означає хороше узгодження між даними і гіпотезою. Тому можна сказати, що в межах зміни значення ступеня вузла k соціальної мережі билин є безмасштабною, як і реальні соціальні мережі.

У [12–14] було показано, що мережі епосів *Беовульф*, *Таін* та ісландських саг також є базмасштабними зі значеннями $\lambda = 2.2 \div 2.9$. Зокрема, мережа *Беовульф* має $\lambda = 2.4(1)$, що є дуже близьким до нашого значення. Характерно, що для ісландських саг показник λ є вищим. Зазначимо також, що для соціальних мереж художніх творів степеневий розподіл ступенів вузлів спостерігається дуже рідко [12].

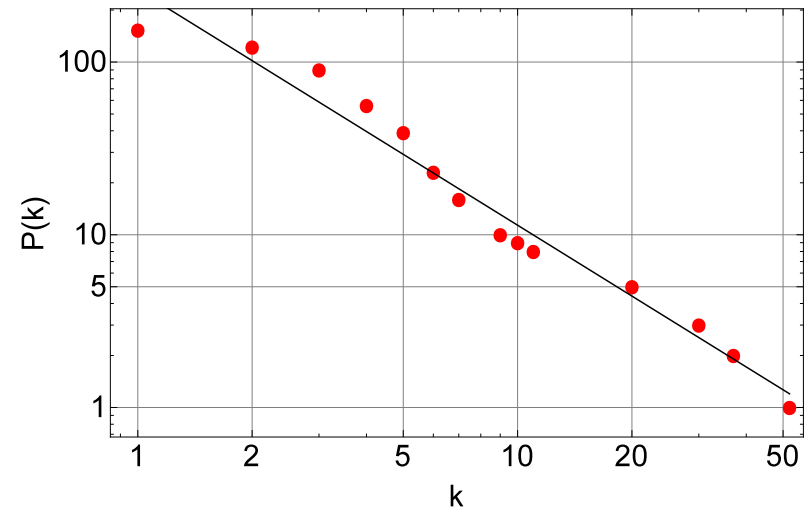


Рис. 3. Кумулятивна функція розподілу ступенів вузлів $P(k)$ і її апроксимація степеневим законом $P(k) \simeq k^{1-\lambda}$ із показником $\lambda \simeq 2.36(7)$ (суцільна лінія).

3.2. Відстані між персонажами

Реальні соціальні мережі, навіть ті, що мають велику кількість вузлів, характеризуються малими середніми відстанями між вузлами. Це так звані *тісні світи* [34] (див. детальніше в підрозділі 3.6). Зокрема, для них відомий ефект шести ступенів розділення чи шести рукошляків [53]: середня відстань між двома довільно обраними членами суспільства (на рівні безпосереднього знайомства) становить шість. Перевіримо, якими є типові відстані (шляхи) між вузлами соціальної мережі билин. У графі шляхом називають сукупність ребер, по яких необхідно пройти, щоб потрапити із одного вузла на інший. Довжина шляху визначається кількістю пройдених ребер. Найкоротший шлях з одного вузла до іншого в межах зв'язної частини графу називається геодезичною.

Позначимо l_{ij} довжину геодезичної між вузлами i та j . Тоді можна означити середній найкоротший шлях

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij}, \quad (6)$$

і максимальний найкоротший шлях (діаметр мережі)

$$l_{\max} = \max_{ij} l_{ij}. \quad (7)$$

Для знаходження відстаней у (6), (7) до розгляду беруться усі геодезичні у всіх зв'язних компонентах мережі. Отримані таким чином значення l і $l_{\max}$ соціальної мережі билин наведені в Табл. 1. Як видно із таблиці, значення середнього найкоротшого шляху соціальної мережі билин близьке до свого відповідника для соціальних мереж епосів інших народів. Те саме можна сказати і про діаметр мережі. Також з наведеної таблиці видно, що ці значення є низькими. Зокрема, максимальне значення найкоротшого шляху між персонажами становить лише 6 (для всіх і для дружніх зв'язків). У соціальній мережі реального світу, де кількість людей-персонажів на порядки вища, ця цифра залишається незмінною, тому реальний світ є ще більш пов'язаним. Значення $l_{\max} = 8$ мережі ворожих зв'язків соціальної мережі билин вище: ця мережа більш "розтягнута". Подібна риса спостерігається і для інших епосів, див. Табл. 1.

Середнє значення найкоротшого шляху l можна порівняти із відповідним значенням l_{rand} обчисленим для класичного випадкового графу Ердоша-Рені [54] такого ж розміру. Граф Ердоша-Рені є прикладом мережі тісного світу: із ростом кількості вершин середній

найкоротший шлях у ньому зростає логарифмічно [56]. Цей факт, а також відсутність будь-яких кореляцій у розташуванні вузлів приводить до низьких значень середньої довжини найкоротшого шляху. Останню можна оцінити за заданою кількістю вузлів та їх середнім ступенем [57]

$$l_{\text{rand}} = \frac{\log N - \gamma}{\log \langle k \rangle} + \frac{1}{2} = 3.23, \quad (8)$$

де $\gamma \simeq 0.5772$ - стала Ойлера-Маскероні. Отримані за цією формулою значення l_{rand} для трьох різних мереж билин також наведені в Табл. 1. Як видно із таблиці, подібно як і для мереж інших епосів, середня найкоротша відстань аналізованих мереж є меншою, ніж у випадкових графів з відповідними кількостями ребер і вузлів.

3.3. Центральність близькості

Використовуючи поняття відстані між персонажами, можна знайти характеристику, яка називається центральністю близькості (англ. *closeness centrality*) [58, 59]. Для кожного окремого вузла у графі вона є оберненою до суми відстаней від цього вузла до всіх решти вузлів зв'язної компоненти, до якої належить цей вузол

$$C^c(v) = \frac{1}{\sum_{t \in V} d_G(v, t)}, \quad (9)$$

де $d_G(v, t)$ позначає відстань між вершинами v і t . Таким чином, чим вище значення центральності близькості вузла $C^c(v)$, тим ближче знаходиться вузол v до решти вузлів мережі. Для того, щоб порівняння мало сенс, обрахунки потрібно робити тільки в межах зв'язної компоненти мережі, де існує шлях між будь-якими двома персонажами.

На Рис. 2 (б) зображена найбільша зв'язна компонента соціальної мережі билин, розмір кожної вершини v якої промасштабований за значенням центральності близькості $C^c(v)$ так, що вершини-кружечки більшого діаметру відповідають персонажам із більшим значенням $C^c(v)$. Список найважливіших персонажів билин із вказаним номером у списку, впорядкованому за значенням центральності близькості (рангом R_c), наведений у Додатку. Найбільшим значенням центральності близькості володіють князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій (персонаж 1) і княгиня (персонаж 104). Відразу за ними йдуть Дюк (персонаж 33) і Михайло Потик (персонаж 87). Михайло

Грушевський відносить двох останніх до галицько-волинської групи [60]. Дюк, за текстом билини, є галицьким князем. А образ Михайла Потика також вважається запозиченим із території західної України, куди він, натомість, потрапив із Болгарії, із історії про святого Михайла Змієборця із Потоуки [60]. У текстах, які ми брали до розгляду, він є богатирем, що виступає на боці князя Володимира проти короля Ляхетського (персонаж 60). За іншою версією, прізвище Потик походить від назви західноукраїнської річки Поток, від якої, зокрема, пішло прізвище князів Потоцьких [61]. Тому цікавим є той факт, що кількісний аналіз показав важливість персонажів із Галицько-Волинської держави, яка свого часу була правонаступницею Київської Русі.

З іншого боку, цікавим є те, що в мережі, з якої вилучено вузли, що відповідають князеві і княгині найбільше значення центральності близькості має Добриня, а ранг Іллі Муромця знижується. Це може слугувати відображенням того факту, що Ілля в кількох текстах виступає опонентом князя, тоді як Добриня завжди на боці правителя, а отже, і перебуває ближче до нього.

3.4. Центральність посередництва

Крім зазначених вище ступеня k_i та центральності близькості $C_B(i)$, ще однією локальною характеристикою, за якою можна судити про важливість вузла i , є центральність посередництва (англ. *betweenness centrality*). Ця величина показує, наскільки важливим є даний вузол для підтримання зв'язків між іншими вузлами мережі. Нехай $\sigma(j, l)$ – кількість геодезичних між вузлами j та l , і нехай $\sigma_i(j, l)$ – кількість тих із них, що проходять через вузол i . Тоді центральність посередництва вузла означається так [59]:

$$C^b(i) = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{j \neq l} \frac{\sigma_i(j, l)}{\sigma(j, l)} . \quad (10)$$

Подібно до центральності близькості, центральність посередництва означається на зв'язній компоненті мережі. Тому N в формулі (10) – це кількість вузлів у зв'язній компоненті, а нормування проводиться на кількість всеможливих спарень між цими вузлами. Відтак, значення $C^b(i) = 1$ відповідає випадку, коли всі геодезичні проходять через вузол i .

На рис. 2 (в) зображено найбільшу зв'язну компоненту соціальної мережі билин, у якій розмір вузла залежить від його центральності

посередництва. Список найважливіших персонажів билин із указаним рангом R_b за значенням центральності посередництва наведено у Додатку. Найважливішими персонажами залишаються князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46) і Добриня (персонаж 28), а ранг Олексія Поповича (персонаж 1) суттєво нижчий, $R_b = 10$ (у порівнянні з його рангом за ступенем вузла чи центральністю близькості: $R_k = 5, R_c = 4$). Четвертим за значенням центральності є Іван Гостиний син (персонаж 43). Він з'являється тільки в одній билині, в якій є п'ять унікальних персонажів. І, оскільки Іван має безпосередній зв'язок із князем, через нього проходять усі геодезичні, що йдуть до або від згаданих п'яти вузлів. Це і спричиняє його високе посередництво.

Вузли з високим значенням центральності посередництва важливі для підтримання цілісності мережі. Наприклад, якщо з соціальної мережі билин вилучити лише трьох персонажів із найвищим значенням C^b , то мережа розпадається на 24 фрагменти, найбільший з яких містить 72 вузли. Детальніше стійкість мережі до вилучення її окремих складових буде проаналізована в підрозділі 3.10.

3.5. Коефіцієнт кластерності

Коефіцієнт кластерності є специфічною мірою скорельованості мережі [33]. Він визначає імовірність того, що сусіди певного вузла також з'єднані між собою. Коефіцієнт кластерності вузла i зі ступенем k_i задається виразом

$$C_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)} , \quad (11)$$

де n_i – кількість сусідів i -го вузла, що є також сусідами і між собою. Очевидно, що $k_i(k_i - 1)/2$ – максимальна кількість зв'язків між k_i вузлами, а тому коефіцієнт кластерності будь-якого вузла у повному графі (в якому кожен вузол з'єднаний зі всіма іншими) рівний 1. Відповідно, коефіцієнт кластерності будь-якого вузла у дереві (графі без петель) рівний 0.

На рис. 2 (г) зображено найбільшу зв'язну компоненту соціальної мережі билин, у якій розмір вузла промасштабований відповідно до його коефіцієнта кластерності. Як бачимо, важливість вузлів за їх коефіцієнтом кластерності суттєво відрізняється від їх важливості за ступенем вузла (пор. Рис. 2 (а) і Рис. 2 (г)). Вузли, які мали високий ступінь, мають не такий уже й високий коефіцієнт кластерності: чим більший ступінь вузла, тим менша імовірність, що його сусіди з'єднані один із одним. Наприклад, кожен із богатирів (Ілля

(персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій (персонаж 1)) мали багато різних незалежних один від одного ворогів, що і призвело до малого коефіцієнта кластерності.

Як слідує з означення (11), коефіцієнт кластерності – локальна характеристика вузла. Мережу ж загалом можна характеризувати середнім значенням коефіцієнта кластерності вузлів, що її утворюють:

$$C = \frac{1}{N} \sum_i C_i \quad (12)$$

Часто для з'ясування міри кореляції реальної мережі порівнюють середнє значення коефіцієнта кластерності з коефіцієнтом кластерності для випадкового графу [54] такого ж розміру C_{rand} . Для заданої кількості й середнього ступеня вузлів його можна знайти зі співвідношення

$$C_{rand} = \frac{\langle k \rangle}{N - 1}. \quad (13)$$

Порівнюючи наведені у Табл. 1 результати, отримані для середнього значення коефіцієнта кластерності соціальної мережі билин із значеннями коефіцієнта кластерності випадкового графу, маємо можливість кількісно характеризувати міру кореляції мережі билин. Мережі утворені всіма зв'язками, так само як і мережі дружніх зв'язків, – це сильно скорельовані структури. Подібно до мереж інших епосів, їх коефіцієнт кластерності більш ніж на порядок перевищує значення коефіцієнта кластерності випадкового графу такого ж розміру. Цього не можна сказати про коефіцієнт кластерності мереж ворожих зв'язків. Як видно з таблиці, для соціальної мережі билин його значення на порядок менше, ніж для мережі дружніх зв'язків, і за порядком величини порівнянне зі значенням для випадкового графу. Це спостереження ілюструє виконання гіпотези структурного балансу для соціальних мереж епосів: якщо два вузли-персонажі поєднані ворожими зв'язками з третім, то малоімовірно, що вони також поєднані між собою ворожим зв'язком.

Альтернативною величиною, яка подібно до середнього значення коефіцієнта кластерності характеризує наявність кореляцій у мережі, є транзитивність. Вона означається так [63]

$$C^T = \frac{3N_{\Delta}}{N_t}, \quad (14)$$

де N_{Δ} - кількість замкнених трикутників у мережі (конфігурацій із трьох попарно з'єднаних вузлів), а N_t - кількість з'єднаних триплетів (конфігурацій з трьох вузлів, у яких з'єднаними є лише дві пари).

Транзитивність випадкового графу з N вузлів можна виразити через моменти розподілу, використовуючи наближену формулу [40]

$$C_{rand}^T \approx \frac{1}{N} \frac{(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)^2}{\langle k \rangle^3}. \quad (15)$$

У табл. 2 наведено значення транзитивності соціальної мережі билин для різних типів зв'язків і порівняно її значення з транзитивністю випадкового графу.

Як зазначалося вище, транзитивність є аналогом коефіцієнта кластерності, але це не завжди так. Прикладом може служити колесо-подібний граф (англ. *wheel graph*). Для цього графу в границі безмежного розміру транзитивність прямує до 0, а середній коефіцієнт кластерності – до 1 [64]. З іншого боку, для випадкового графу Ердоша - Рені значення транзитивності й середнього коефіцієнта кластерності є дуже близькими [19].

З результатів, наведених у табл. 2, можна зробити ті ж висновки, що і зі значень коефіцієнта кластерності. Різниця полягає у сферах застосування. Транзитивність часто використовують для соціальних мереж [40], де вона є наочним представленням гіпотези про структурний баланс.

3.6. Тіснорівність

Як було показано вище, для соціальних мереж билин характерними є низьке значення середнього найкоротшого шляху l та високе значення коефіцієнту кластерності C . Перше спостереження робить їх подібними до класичного випадкового графу, а друге свідчить про суттєву роль кореляцій у формуванні цих мереж і цим уподібнює їх до регулярних структур. Реальні соціальні мережі надзвичайно компактні: з одного вузла на інший можна перейти через малу кількість ребер. Ми вже раніше згадували про гіпотезу шести рукошті-скань [34]. Вона є яскравим вираженням того, що наш світ є тісним. Мережа тісного світу (англ. *small-world network*) [33] якраз і поєднує риси випадкового графу і регулярної структури: їй притаманні невеликий характерний розмір (низьке значення середнього найкоротшого шляху l) та високий ступінь кореляції (високе значення коефіцієнту кластерності C):

$$l \approx l_{rand}, \quad C \gg C_{rand}. \quad (16)$$

Для чисельної характеристики ефекту тісного світу використовують так звану тіснорівність (англ. *small-worldness*) [65]. Її означення

Табл. 2. Значення транзитивності C^T (14), її оцінка для випадкового графу C_{rand}^T і подібність вузлів за Пірсоном r_P для соціальних мереж билин з урахуванням різних типів зв'язків. Негативне значення коефіцієнта подібності вузлів за Пірсоном свідчить про виконання гіпотези структурного балансу.

	дружні	ворожі	усі
C^T	0.25	0.08	0.23
C_{rand}^T	0.021	0.021	0.027
r_P	0.018	-0.038	0.02

враховує обидва зазначені у (16) ефекти:

$$S = \frac{C/C_{rand}}{l/l_{rand}} . \quad (17)$$

Мережа є тісним світом, якщо $S > 1$. Значення тісності соціальної мережі билин наведені в Табл. 1. Числові дані, наведені в таблиці, свідчать про виконання умов (16) для мереж всіх зв'язків і мереж дружніх зв'язків. Таким чином, соціальні мережі билин, подібно до соціальних мереж інших епосів є тісними світами. Як уже зазначалось у підрозділі 3.5, коефіцієнт кластерності мережі ворожих зв'язків за порядком величини не відрізняється від коефіцієнту кластерності відповідного випадкового графу: друга з умов (16) для цієї мережі не виконується, що спричиняє порівняно нижче значення тісності. Схожі властивості проявляють і мережі інших епосів, представлених у Табл. 1.

Попри те, що означена в (17) тісність дозволяє отримати чисельну оцінку для заданої мережі, її використання для порівняльного аналізу має свої недоліки. Основним є те, що для випадкового графу коефіцієнт кластерності C_{rand} змінюється із розміром системи як $1/N$, в той час, як для складних мереж значення C є порівняно високим. Беручи до уваги те, що і для випадкових графів, і для складних мереж середня найкоротша відстань зростає логарифмічно із розміром системи, отримуємо, що складні мережі великих розмірів завжди матимуть велике значення тісності. Тому значення цієї величини не завжди дає точну відповідь, чи дійсно мережа є тісним світом, чи ні.

3.7. Ступенева асортативність

Відомо, що в реальних соціальних мережах переважно з'єднуються між собою подібні за ступенем вузли [40]. І навпаки, у соціальних мережах створених на підставі вигаданих творів (таких, наприклад, як вигаданий всесвіт Марвел [66]), вузли низького ступеня мають тенденцію приєднуватися до вузлів високого ступеня – габів. Як ми побачимо нижче, соціальні мережі епічних наративів займають проміжне положення. Кількісною мірою кореляції між ступенями сусідніх вузлів є ступенева асортативність [40]. Імовірність того, що випадково вибране ребро з'єднує вузли зі ступенями k і q , можна записати так

$$\Phi(k, q) = \frac{1}{2L} \sum_{i,j} A_{ij} \delta(k_i - k) \delta(k_j - q), \quad (18)$$

де δ – символ Кронекера а коефіцієнт $\frac{1}{2}$ з'являється для симетризації запису суми. Тоді ймовірність того, що на кінці випадкового ребра буде вузол зі ступенем k можна знайти підсумовуванням за ступенями вузлів, що знаходяться на іншому краю ребра

$$\phi(k) = \sum_q \Phi(k, q) . \quad (19)$$

Позначимо математичне сподівання знайти вузол зі ступенем k на краю випадково вибраного ребра $E(k)$ (зауважимо, що ця величина відрізняється від $\langle k \rangle$, оскільки остання знаходиться підсумовуванням за вузлами). Його можна знайти з формули

$$E(k) = \sum_k k \phi(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}, \quad (20)$$

тобто маємо зв'язок між середнім ступенем вузла за вершинами і за ребрами. Аналогічно можна записати математичне сподівання випадково отримати ребро з вузлами зі ступенями k і q на кінцях

$$E(kq) = \sum_{k,q} kq \Phi(k, q) . \quad (21)$$

Для нескорельованої мережі має виконуватися $E(kq) = E(k)E(q)$. Для визначення рівня скорельованості скористаємося коефіцієнтом кореляції Пірсона, який має вигляд

$$r_k = \frac{E(kq) - E(k)E(q)}{\sigma_k^2}, \quad (22)$$

де $\sigma_k^2 = E(k^2) - E(k)^2$. Таким чином, асортативність за ступенем вузла можна записати

$$r_k = \frac{\sum_{i,j} A_{ij}(k_i - E(k))(k_j - E(k))}{E(k^2) - E(k)^2} \quad (23)$$

Ступенева асортативність має вигляд коефіцієнта кореляції Пірсона і може приймати значення $-1 < r_k < 1$. Від'ємне значення $r_k < 0$ свідчить про те, що мережа є дисортативною, тобто габи приєднуються до вузлів із низьким ступенем. Значення $r_k > 0$ характеризує асортативна мережа, у якій габи переважно приєднуються до габів, а вузли з низьким ступенем пов'язані між собою.

Значення асортативності соціальної мережі билин наведено в Табл. 1. Знайдені значення $r_k < 0$ для всіх типів зв'язків свідчать про те, що мережа є дисортативною. Цей результат також добре узгоджується з тим, що билини є розповідями про героїв: фрагменти мережі мають зіркоподібну структуру (див. Рис. 1), у якій габи-герої пов'язані з багатьма менш значними персонажами. Контприкладом є деякі з ісландських саг – розповідей про суспільне життя загалом. Коефіцієнт асортативності у них додатний, що відповідає асортативному типу зв'язків між вузлами подібного ступеня.

Результати, наведені у Табл. 1, свідчать про те, що більшість соціальних мереж епічних наративів є дисортативними. Зазначимо, однак, що часом дисортативність мережі зумовлена самою специфікою розповіді – жанром чи особливістю сюжету. Наприклад, події, описані в епосі *Беовульф*, відбуваються у двох різних місцях і розділені також і часовим інтервалом. Їх об'єднує лише наявність спільного протагоніста. Як показано в роботі [12], вилучення протагоніста з мережі змінює характер з'єднань із дисортативного на (слабо) асортативний. Подібний ефект спостерігаємо і в соціальній мережі билин: ступенева асортативність мережі, з якої вилучено вузол, що відповідає князеві Володимирі, становить $r_k \approx 0.01$, що є хоч і дуже малим, але додатним значенням. Таким чином, мережа стає подібнішою до реальної соціальної мережі. Цікаво, що багато дослідників вважають образ князя Володимира збірним, який об'єднує історичні постаті Володимира Великого (960 – 1015), Володимира Мономаха (1053 – 1125) і, можливо, Ярослава Мудрого (983 – 1054) [49, 62]. Тому зміна характеру з'єднання вузлів мережі при вилученні цього персонажа може бути ще одним підтвердженням такої гіпотези.

До подібного ефекту – зміни знаку асортативності – приводить і заміна вузла, що відповідає князеві Володимирі, на декілька окремих вузлів із одночасним випадковим перерозподілом зв'язків, що

з них виходять. Так, поділ на три вузли збільшує значення асортативності до $r_k \approx 0.004$, а поділ на чотири – $r_k \approx 0.03$. Таким чином, мережа стає більш схожою до реальної соціальної мережі.

3.8. Кластерна асортативність

Крім асортативності за ступенем вузла, виділяють кластерну асортативність. Вона є мірою кореляції між значеннями коефіцієнтів кластерності сусідніх вузлів. Велике значення кластерної асортативності є характерним для соціальних мереж реального світу, а також означає існування спільнот у графі [42]. Оскільки коефіцієнт кластерності є локальною величиною, означеною на вузлі, то можна аналогічно до (23) ввести формулу в якій всі характеристики ступеня вузла замінити на відповідні характеристики кластерності

$$r_{cl} = \frac{\sum_{i,j} A_{ij}(C_i - E(C))(C_j - E(C))}{E(C^2) - E(C)^2} \quad (24)$$

Значення кластерної асортативності соціальної мережі билин наведено в Табл. 1. Для всіх типів зв'язків значення є близькими до 0. Цей результат свідчить про те, що персонажі в мережі билин приєднуються і до тісно зв'язаних груп, і до окремих персонажів. У випадку мережі всіх зв'язків отримане значення r_{cl} є близьким до відповідного значення для *Саги про Гіслі* і *Саги про людей з Озерної долини*. Загалом, із даних, наведених у таблиці, не можна зробити висновку про наявність певної тенденції для кластерної асортативності соціальних мереж епосів.

3.9. Подібність вузлів за Пірсоном

У попередніх підрозділах ми обговорювали кореляції між властивостями вузлів у мережі – асортативностей за ступенем вузла і за коефіцієнтом кластерності. У цьому підрозділі розглянемо ще одну величину, що характеризує кореляції у властивостях різних вузлів – подібність вузлів за Пірсоном. Ця характеристика мережі дає відповідь на запитання, скільки є спільних сусідів у вершин i та j [63] у порівнянні з випадковим вибором сусідів. Вона є важливою характеристикою для соціальних мереж. Наприклад, аналізуючи структуру мережі, популярний сервіс *Facebook* пропонує список людей, яких може знати кожен із користувачів. Подібно деякі сучасні пошукові сервіси інтернету пропонують список сторінок, схожих на вибрану.

Подібність вузлів за Пірсоном є нормалізованою коваріацією між векторами A_i і A_j , які є відповідно i -м і j -м стовпчиками в матриці

суміжності. Вона обчислюється за формулою

$$r_{ij} = \frac{\sum_v (A_{iv} - N^{-1}k_i)(A_{jv} - N^{-1}k_j)}{\sqrt{\sum_v (A_{iv} - N^{-1}k_i)^2} \sqrt{\sum_v (A_{jv} - N^{-1}k_j)^2}} \quad (25)$$

Величина $r_{ij} < 0$ означає, що два вузли мають менше спільних сусідів, ніж ми б очікували від випадкової структури, і тому можна казати про несхожість вузлів, натомість $r_{ij} > 0$ свідчить, що спільних вузлів є більше, ніж при випадковому з'єднанні. Середнє значення коефіцієнта подібності за Пірсоном для всіх пар вершин дає середній коефіцієнт для всієї мережі r_P .

Значення середнього коефіцієнта подібності вузлів за Пірсоном наведені в четвертому рядку Табл. 2. Незначна позитивна величина, може свідчити, що переважно два персонажі, між якими є зв'язок, мають ще спільного знайомого, але до повного графу нашій мережі ще далеко (для повного графу $r_P = 1$). Для мережі ворожих зв'язків значення подібності за Пірсоном є негативним, що узгоджується з гіпотезою структурного балансу.

3.10. Стійкість

Додаткову інформацію про структуру складної мережі можна отримати, аналізуючи стійкість мережі до вилучення її окремих складових (так званих атак). Така задача має багато спільного із задачею про перколяцію ґраткових структур [67]. Аналогом перколяційного кластера у задачі про перколяцію на мережі виступає так звана гігантська зв'язна компонента (див., наприклад, [28, 29] для детальнішого порівняння). Для мережі скінченного розміру аналізуються зміни у найбільшій зв'язній компоненті. Неоднорідність мережі приводить до того, що зміни найбільшої зв'язної компоненти суттєво залежать від того, які саме вузли вилучаються – за яким сценарієм проводиться атака. Наприклад, присутність ієрархічних структур у безмасштабних мережах робить їх дуже вразливими до спрямованих атак, коли вузли вилучаються за їх важливістю – рангом за якоюсь певною ознакою. З іншого боку, ці мережі надзвичайно стійкі до випадкового вилучення їх складових [68, 69].

На Рис. 4 порівняно результати поведінки найбільшої зв'язної компоненти соціальної мережі билин при атаках, проведених за трьома різними сценаріями: випадковому (коли вузли мережі вилучались випадковим чином) і двома спрямованими (коли вузли вилучались у порядку зменшення їхнього ступеня чи центральності посередництва на кожному кроці). Результати, представлені на Рис. 4, отримано для мережі, утвореної всіма зв'язками: мережі з тільки дружніми

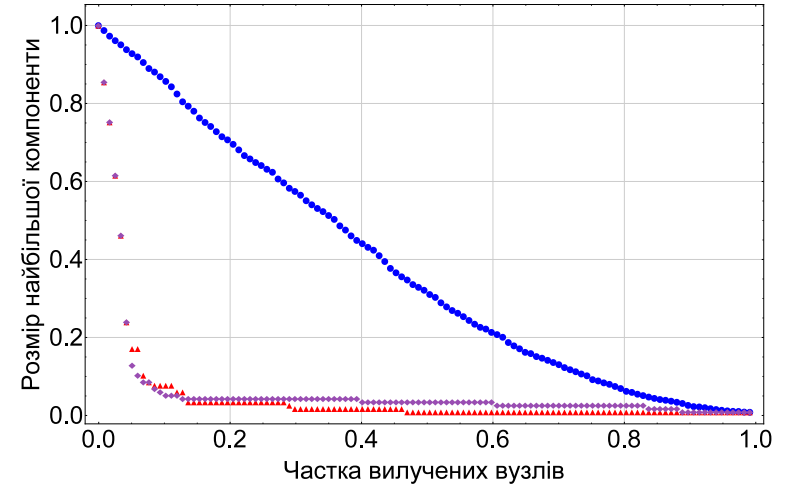


Рис. 4. Нормований розмір найбільшої зв'язної компоненти соціальної мережі билин (всі зв'язки), як функція від частки вилучених вузлів для трьох типів атак: випадкова (сині кружечки), в порядку зменшення ступеня вузлів (червоні трикутники) і в порядку зменшення центральності посередництва вузлів (фіолетові ромби). Випадкові атаки є малоефективними, тоді як після спрямованого вилучення лише 10% вузлів розмір найбільшої зв'язної компоненти зменшується майже в 10 разів.

або тільки ворожими зв'язками ми не розглядаємо через невелику кількість вузлів. Як видно з рисунку, випадкові атаки є малоефективними. А атаки, націлені на ступінь вузла чи на його посередництво, мають майже однакову ефективність – мережа набагато до них вразливіша. До прикладу, достатньо викинути близько 10 вузлів-персонажів, щоб найбільша зв'язна область складала близько 10% свого початкового розміру. Схожі висновки були зроблені і в [12, 13] для інших епічних наративів. Усі вони є стійкими до випадкових атак, але легко руйнуються при спрямованому вилученні вузлів.

3.11. Спільноти

Часом у складній мережі присутні ділянки, вузли у яких більше пов'язані між собою, ніж з рештою графу. Такі ділянки прийнято називати спільнотами (англ. *communities*). Для виділення спільнот

можна використовувати алгоритм, розроблений Гірваном і Ньюменом [70]. За цим алгоритмом, з графу вилучається ребро з найбільшим значенням центральності посередництва [71], а всі вузли залишаються на місці. Після цього значення центральності посередництва усіх ребер перераховується і знову вилучається ребро із найбільшим посередництвом. Групи вузлів, які в результаті такого процесу від'єднуються від загального графу, називаються спільнотами.

Залишається питання, доки потрібно продовжувати вилучати зв'язки. Щоб відповісти на нього, необхідно порахувати модулярність. Для цього спочатку будується матриця $\hat{E}$ розміру $n \times n$, де n – кількість спільнот на даному кроці. Елемент e_{st} цієї матриці є відношенням кількості зв'язків між спільнотами s і t до кількості зв'язків у всьому графі. Слід зазначити, що елементи цієї матриці обчислюються на основі вихідного графу, а не того, з якого вже вилучено одне чи кілька ребер. Тоді модулярність можна знайти за наступною формулою

$$Q = \text{Tr } \hat{E} - \|\hat{E}^2\|, \quad (26)$$

де $\|\dots\|$ означає суму всіх елементів відповідної матриці. Оптимальною кількістю спільнот є така, яка забезпечує максимальне значення модулярності.

Застосування цього алгоритму до соціальної мережі билин (у якій враховано усі типи зв'язків) дає цікавий результат: найбільша зв'язна компонента розпадається на 15 спільнот, а значення модулярності при такому розподілі становить $Q = 0.5$. Як зазначається в [70], для реальних соціальних мереж $0.3 < Q < 0.7$, а значення $Q < 0.3$ свідчать, що спільноти в мережі виділяються погано. Таким чином, отримане нами значення модулярності соціальної мережі билин свідчить про присутність у цій мережі добре означених спільнот, типових для реальних соціальних мереж. Найбільша зі спільнот у мережі персонажів билин налічує 36 вузлів (червоні вузли в центрі рис. 5), серед яких є князь Володимир (вузол 52) з дружиною (вузол 104), Олексій Попович (вузол 1) і Добриня (вузол 28). Друга за розміром спільнота налічує 22 персонажі – більша група жовтих вузлів у правій частині рис. 5, сконцентрованих навколо Іллі Муромця (вузол 46). Цей факт може служити демонстрацією того, що Ілля Муромець і Добриня з Олексієм є представниками різних генерацій богатирів [45, 48]. Ілля є представником старших богатирів, а Олексій і Добриня – молодших.

Цікавим є також те, що проведений аналіз виділив окремі спільноти, сконцентровані навколо Чурила (вузол 153) і Михайла Потика (вузол 87). Обидва ці персонажі разом із Дюком (вузол 33) форму-

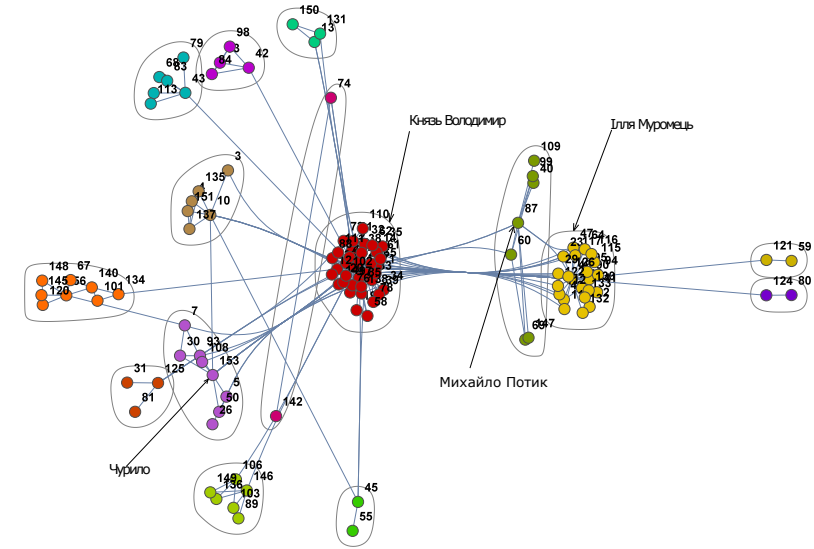


Рис. 5. Поділ персонажів давньоруських билин на спільноти (до уваги беруться зв'язки усіх типів). Алгоритм Ньюмена-Гірвана виявляє 15 спільнот. Найбільші з них зосереджені навколо князя Володимира (вузол 52 в центральній частині рисунка) та Іллі Муромця (вузол 46 у правій частині рисунка), у наступні за розміром спільноти виділяються персонажі, зосереджені навколо Чурила (вузол 153) і Михайла Потика (вузол 87).

ють групу галицько-волинських персонажів [60]. Появу цих персонажів в епосі, що описує Київську Русь, можна пояснити тим, що після зруйнування Києва монголо-татарами, руська культурна спадщина перейшла на західні землі в Галицько-Волинську державу. І вже тут билини увібрали в себе частину місцевих персонажів. Як бачимо, кількісний аналіз соціальної мережі билин також виділяє окремі спільноти, зосереджені навколо цих персонажів (див. Рис. 5).

4. Висновки

Чи можна описувати епічні наративи, що належать до різних культур, спільними характеристиками, і якщо так, то наскільки подібними будуть кількісні значення цих характеристик? Пошук відповіді на ці запитання привів до ідеї використання концепцій і методів ста-

тистичної фізики та науки про складні мережі для опису соціальної мережі персонажів епосів різних народів світу [12–14, 19]. Роботою, результати якої викладені в цій статті, ми продовжуємо згадані вище дослідження, вперше застосовуючи такий аналіз до билин – героїчного епосу східних слов'ян.

Як виявилося в результаті аналізу, соціальна мережа билин (див. Рис. 1) володіє низкою властивостей, спільних із властивостями соціальних мереж інших епосів. Ці властивості залишаються незмінними для мереж, що характеризують епічні наративи різних культур і були створені в різний час [73]. Таким чином, епоси володіють універсальними властивостями, що дозволяє додаткову класифікацію, яка базується на їх кількісному аналізі. Зокрема, подібно до соціальних мереж інших епосів, соціальні мережі билин виявилися сильно скорельованими тісними світами зі значенням середнього коефіцієнту кластерності, що значно перевищує відповідне значення для класичного випадкового графу Ердоша-Рені (числові значення дані цієї та інших характеристик підсумовані в Табл. 1). Однак тісними світами є мережі, в яких беруться до уваги всі або лише дружні зв'язки. Мережа ворожих зв'язків має значення коефіцієнта кластерності й середньої відстані порівнянні із відповідними значеннями для графу Ердоша-Рені, що є кількісним проявом гіпотези соціального балансу (ворог мого ворога – мій друг) [38, 39]. Тому ефекти тісного світу в ній не проявляються. У цьому сенсі виправданим є те, що ми назвали досліджувані мережі соціальними мережами билин: подібні ефекти є характерними і для соціальних мереж реального світу [12].

Ще однією характеристикою, яка об'єднує мережі епічних наративів, є їх ієрархічність [12]. Одним із проявів цієї властивості є поділ мережі на спільноти – групи тісно пов'язаних кластерів. Отримане значення модулярності $Q = 0.5$ свідчить про наявність у мережі билин чітко окреслених спільнот. Подібна властивість об'єднує більшість епосів, згаданих у Табл. 1. Ієрархічність мережі виявляється і в тому, що значення середнього коефіцієнта кластерності вузлів із певним ступенем k обернено пропорційне до цього ступеня $\bar{C}(k) \propto 1/k$. Недостатня вибірка для соціальних мереж билин не дозволяє перевірити таку залежність.

Як правило, мережі епосів, як і реальні соціальні мережі, є безмасштабними. Це твердження, однак, справедливе з певними винятками, такими як, наприклад, *Іліада* чи *Сага про людей з Лаксдалля* [12, 13]). Для билин безмасштабність проявляється дуже добре, на відміну від мереж деяких художніх творів [12]. Соціальні мережі епосів схожі до реальних соціальних мереж ще й тим, що випадкове

усунення їх складових (випадкові атаки) не завдає їм значної шкоди, а спрямовані атаки швидко кластеризують мережу. На відміну від цього, мережі вигаданих художніх творів стійкі як до випадкових, так і до спрямованих атак [12].

Соціальні мережі билин дисортативні за ступенем вузлів. Ця властивість об'єднує більшість епосів, наведених у Табл. 1. Дисортативність не є характерною для реальних соціальних мереж [40]. Цікаво зазначити, що мережа дружніх зв'язків, із якої вилучено князя Володимира, стає слабо асортативною. Таким чином, вилучення із мережі князя, який, за припущенням деяких дослідників, є збірним персонажем [49] робить її подібнішою до соціальних мереж реального світу. Авенаріус у вступі до своєї книги [48] зазначає, що не даремно князя Володимира називають “ясним сонцем”, оскільки всі персонажі билин обертаються навколо нього, як і планети обертаються навколо Сонця. Наші результати підтверджують таку думку. Князь Володимир має найбільші значення ступеня вузла, центральності близькості й центральності посередництва.

Крім перелічених вище універсальних характеристик, наш аналіз навів нові аргументи щодо тих чи інших гіпотез про структуру билин. Ми вже згадали про припущення, що князь Володимир є збірним образом київського князя, і про кількісне підтвердження цього припущення. Зазначимо також, що у мережі без князя Володимира і княгині найбільшим значенням центральності близькості володіє Добриня – його відстань від решти персонажів порівняна з княжою. Це може слугувати підтвердженням того, що прообразом билинного Добрині вважають дядька князя Володимира [72]. Іншим цікавим результатом є те, що аналіз соціальної мережі билин виділяє за рангом персонажів Чурила, Дюка і Михайла Потика. А саме цих персонажів Михайло Грушевський відносить до персонажів галицько-волинської групи.

Використаний нами кількісний підхід до аналізу епічних наративів не є єдиним. У дослідженні народної творчості значного розвитку досяг історико-географічний метод [74]. Згідно цього методу історії поділяються на міжнародні типи, базуючись на темі, персонажах і сюжеті. Популярність цього підходу можна проілюструвати каталогом Аарне-Томпсона-Утера (англ. ATU index), до якого входять більше двох тисяч виділених у такий спосіб категорій [75].

Кількісним методом, який базується на порівнянні творів за вмістом у них тих чи інших мотивів є метод аналізу головних компонент [76]. Його суть полягає в тому, що для заданого набору текстів виділяються мотиви, які в них зустрічаються. Тоді довільний текст

можна зобразити у вигляді бінарного вектора із нулів і одиниць, де нуль на певній позиції означає відсутність відповідного мотиву, а одиниця – його присутність. В такий спосіб, знаходження подібності між творами зводиться до знаходження кореляції між векторами. Застосування цього методу дало змогу показати, що північно-американські фольклорні мотиви відрізняються від південно-американських. Це може означати, зокрема, що ці два континенти заселялися людьми з різних сторін [76].

Слід згадати також і філогенетичний підхід, що виник у процесі дослідження еволюційних взаємозв'язків між біологічними видами [77]. Метою філогенетичного аналізу є побудова графу, в якому показується як успадковуються певні ознаки. Відповідно, такий метод дозволяє проводити аналіз спільних ознак і у художніх творах [76, 78, 79]. Філогенетичний метод схожий до методу, використаного у нашій роботі тим, що у ньому також використовується мережевий підхід для опису наративів, і він дозволяє робити певні кількісні припущення чи висновки про предмет аналізу. Відмінністю нашого методу є те, що він націлений на аналіз соціальної структури твору, що часто залишає поза увагою інші його властивості. Таким чином, згадані методи доповнюють один одного і можуть принести нові додаткові відомості про досліджуваний об'єкт.

Автори вдячні Назарові Федораку, Джозефу Хосе і Робіну де Регту за корисні обговорення. Робота виконувалась за часткової підтримки проєктів Сьомої Європейської рамкової програми IRSES *Dynamics of and in Complex Systems* (No 612707 DIONICOS), *Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences* (No 612669 STREVCOMS).

Додаток

У Табл. 3 наведено список найважливіших персонажів билин зі вказаними номерами (*рангами*) у списках, упорядкованих за ступенем вузла k , центральністю близькості C^c (9) та центральністю посередництва C^b (10).

Табл. 3. Двадцять найважливіших персонажів соціальної мережі билин. У таблиці вказані No - номер персонажа, яким його позначено на рисунках, та ранги: R_k (за ступенем вузла k), R_c (за центральністю близькості C^c), R_b (за центральністю посередництва C^b).

Ім'я персонажа	No	R_k	R_c	R_b
Князь Володимир	52	1	1	1
Ілля Муромець	46	2	2	2
Добрина	28	3	3	3
Олексій Попович	1	5	4	10
Михайло Потик	87	9	7	5
Опраксія	104	4	5	13
Дюк	33	7	6	15
Василь	10	8	13	7
Чурило	153	6	12	16
Соловій-розбійник	126	11	15	23
татарин	138	15	14	24
Кудреванко	65	10	8	37
Дунай	32	18	11	31
Іван Гостиний син	43	19	37	4
Михайло	85	16	25	28
Калин	49	17	16	36
Матфей	77	12	9	49
Лука	71	13	10	50
Хотен	146	24	40	11
Соловій	125	25	42	14

Література

1. C. A. Ronan, *The Cambridge illustrated history of the world's science* (Book Club Associates, London, 1983); T. S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (The University of Chicago Press, Chicago & London, 1970).
2. Чому фізика важлива для суспільства (Ухвала двадцять третьої Генеральної асамблеї Міжнародної спілки фундаментальної та прикладної фізики. Атланта 20 березня 1999 року). Український переклад: Журн. Фіз. Досл. **4**, 476 (2000)
3. L. P. Kadanoff, W. Gotze, D. Hamblen, R. Hecht, E. A. S. Lewis, V. V. Palciauskas, M. Rayl, J. Swift, *Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment* Rev. Mod. Phys. **39**, 395 (1967); M. E. Fisher, *Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics* Rev. Mod. Phys. **70**, 653 (1998); C. Itzykson, J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
4. H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1971).
5. C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, London, 1996).
6. The official web site of a Nobel Prize www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/
7. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena, International Series of Monographs on Physics Vol. 92* (Oxford University Press, Oxford, 1996).
8. H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 Theories* (World Scientific, Singapore, 2001).
9. G. Parisi, *Complex Systems: a Physicist's Viewpoint*, Physica A **263**, 55 (1999).
10. Фізика складних систем, Матеріал із Вікіпедії – вільної енциклопедії (uk.wikipedia.org/wiki/Фізика_складних_систем)
11. M. Mitzenmacher, *A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions*, Internet Mathematics **1**, 226 (2004); M. E. J. Newman, *Power laws, Pareto distributions and Zips law*, Contemporary Physics **46**, 323 (2005); M. V. Simkin, V. P. Roychowdhury, *Re-inventing Willis*, Phys. Rep. **502**, 1 (2011).
12. P. Mac Carron, R. Kenna, *Universal properties of mythological networks*, EPL **99**, 28002 (2012); R. Kenna, P. Mac Carron, *Maths Meets Myths: Network Investigations of Ancient Narratives*, J. Phys.: Conf. Ser. **681**, 012002 (2016).
13. P. Mac Carron, R. Kenna, *Network analysis of the Íslendinga sögur the Sagas of Icelanders*, Eur. Phys. J. B **86**, 407 (2013)
14. P. Mac Carron, *A Network Theoretic Approach to Comparative Mythology*. (Thesis. Coventry: Coventry University, 2014), unpublished.
15. Beowulf, translated by Heaney S. (Faber & Faber, London, 1999); Беовульф. З англосаксонської розміром оригіналу переклала Олена Лір. (Астролябія, Львів, 2012).
16. The Iliad, translated by Rieu E. V. (Penguin Classics, London, 2003); Гомер. Іліада. (Фоліо, Харків, 2006).
17. The Táin, translated by Kinsella T. (Oxford University Press, Oxford, 1969).
18. Згодом такий підхід було застосовано в [19], для порівняння твору фенійського циклу ірландської міфології *Сказання про древніх і Поєм Осіана*, які деякі дослідники називають шотландським епосом, в той час як інші - містифікацією і запозиченням із ірландської міфології.
19. J. Yose, R. Kenna, P. MacCarron, T. Platini and J. Tonra, *A Networks-Science Investigation into the Epic Poems of Ossian*, to appear in Adv. Complex Syst.
20. W.I. Miller, *Bloodtaking and Peacemaking: Feud, Law, and Society in Saga Iceland* (University of Chicago Press, 1990).
21. S. Galam. *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena (Understanding Complex Systems)* (Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2012).
22. R.N. Mantegna, H.E. Stanley, *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*. (Cambridge university press. 2000).
23. R. Bod, *De vergetenen wetenschappen. Een geschiedenis van de humaniora* (Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2011) (датською), український переклад: Р. Бод, *Забуті науки. Історія гуманітарних наук* (Серія "Історична думка", Видавництво Жупанського, Київ, 2016).
24. J. Campbell, *The Hero with a Thousand Faces* (Princeton: Princeton University Press, 1949).
25. D. J. Cosentino, *African Oral Narrative Traditions in John Miles Foley (ed.) Teaching Oral Traditions* (Modern Language Association, New York, 1998).
26. L. Northup, *Myth-Placed Priorities: Religion and the Study of Myth*, Religious Studies Review **32**, 5 (2006).
27. S. N. Dorogovtsev, S. N. Mendes, *Evolution of Networks* (Oxford University Press, Oxford, 2003).

28. Ю. Головач, О. Олемской, К. фон Фербер, О. Мриглод, Т. Головач, І. Олемской, В. Пальчиков, *Складні мережі*, Журн. фіз. досл. **10**, 247 (2006).
29. S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Evolution of networks*, Adv. Phys. **51**, 1079 (2002); S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang, *Complex networks: Structure and dynamics*, Phys. Rep. **424**, 175 (2006); A. Lesne, *Complex Networks: from Graph Theory to Biology*, Lett. Math. Phys. **78**, 235 (2006).
30. D. J. Watts, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999); R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004); M. E. J. Newman, A.-L. Barabási, D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks* (Princeton University Press, Princeton, 2006).
31. R. Albert, A.-L. Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
32. L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, H.E. Stanley, *Classes of small-world networks*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **97**, 11149 (2000).
33. D.J. Watts, S.H. Strogatz, *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature **393**, 440442 (1998).
34. S. Milgram, *The small world problem*, Psychology today, **2**, 60 (1967).
35. M. E. J. Newman, *The structure of scientific collaboration networks* Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **98**, 404 (2001).
36. A.-L. Barabási, R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286**, 509512 (1999).
37. F. Heider, *Attitudes and cognitive organization*, J. Psychol **21**, 107 (1946).
38. F. Harary, *On the notion of balance of a signed graph*, Michigan Math. Journal **2** (2), 143, (1953).
39. M. Szell, S. Thurner, *Measuring social dynamics in a massive multi-player online game*, Social Networks **32**, 313 (2010)
40. M. E. J. Newman, *Assortative mixing in networks*, Phys. Rev. Lett., **89**, 208701 (2002);
M.E.J. Newman, J. Park, *Why social networks are different from other types of networks*, Phys. Rev. E **68**, 036122 (2003).
41. E. Ravasz, A.-L. Barabási, *Hierarchical organization in complex networks*, Phys. Rev. E **67**, 026112 (2003).
42. L. Šubelj, M. Bajec, *Clustering assortativity, communities and functional modules in real-world networks*, arXiv:1202.3188
43. M.E.J. Newman, *The structure and function of complex networks*,

- SIAM Review **45**, 167 (2003);
44. Цей період приблизно відповідає датуванню подій, описаних в ісландських сагах, що проаналізовані в роботі [13].
45. *Былины: Сборник / Вступ. ст., сост., подгот. текстов и примеч. Б. Н. Путилова*, (Сов. писатель, Ленинград, 1986).
46. Б. А. Ларін, *Русско-английский словарь-дневник Ричарда Джемса (1618-1619 гг.)*, (Издательство Ленинградского университета, Ленинград, 1959).
47. *Древние Российские стихотворения, собранные Киршию Даниловым*, (Наука, Москва, 1977).
48. В. П. Авенариус, *Книга былинъ. Сводъ избранныхъ образцовъ русской народной эпической поэзи*, (Типо-лит. Т-ва И.Н. Кушнерев и Ко, Москва, 1902).
49. В. Шевчук *Українські былини: Історико-літературне видання східнослов'янського епосу*, (Веселка, Київ, 2003).
50. M. Newman, A.-L. Barabási, and D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks*, (Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006).
51. S. Bornholdt, H. Schuster (Eds.), *Handbook of Graphs and Networks* (Wiley-VCH, Weinheim, 2003).
52. Персонажем вважається кожна істота, що діє в билині. Причому, тварини зараховуються до персонажів лише тоді, коли вони розмовляють.
53. M. Gurevich, *The Social Structure of Acquaintanceship Networks*, (Cambridge, MA: MIT Press, 1961).
54. Класичний випадковий граф Ердоша-Рені [55] можна утворити розподілюючи довільно та незалежно ребра між парами вершин. Кількісне порівняння характеристик реальної мережі із властивостями графа Ердоша-Рені такого ж розміру дозволяє з'ясувати закономірності у формуванні її нетривіальних властивостей.
55. P. Erdős, A. Rényi, *On the evolution of random graphs*, Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. **5**, 17 (1960).
56. B. Bollobás, *The Diameter of Random Graphs*, Transactions of the American Mathematical Society **267**(1), 41 (1981).
57. A. Fronczak, P. Fronczak, J. A. Hołyst, *Average path length in random networks*, Phys. Rev. E, **70**, 056110 (2004).
58. G. Sabidussi, *The centrality index of a graph*, Psychometrika, **31**, 581 (1966).
59. U. Brandes, *A faster algorithm for betweenness centrality*, Journal of Mathematical Sociology **25**, 163 (2001).
60. М. Грушевський, *Історія української літератури. Т. 4. Кн. 1.*,

- (Либідь, Київ, 1994).
61. Михайло Потык, Материал из Википедии — свободной энциклопедии (https://ru.wikipedia.org/wiki/Михайло_Потык)
 62. D. Chyzhevsky, *Epic Poetry In: Internet Encyclopedia of Ukraine*, <http://www.encyclopediaofukraine.com> (updated in 2002).
 63. M. E. J. Newman, *Networks: an introduction*, (Oxford University Press, 2009).
 64. K. Rohe, *The difference between the transitivity ratio and the clustering coefficient*, unpublished (<http://pages.stat.wisc.edu/~karlrohe/netsci/MeasuringTrianglesInGraphs.pdf>)
 65. M. D. Humphries, K. Gurney, *Network Small-World-Ness: A Quantitative Method for Determining Canonical Network Equivalence*, PLoS ONE **3**(4), e0002051 (2008).
 66. P. M. Gleiser, *How to become a superhero*, Journ. Stat. Mech. (2007) P09020.
 67. J. W. Essam, *Percolation theory*, Rep. Prog. Phys. **43**, 833 (1980); D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, London, 1991).
 68. R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin, *Resilience of the internet to random breakdowns*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4626 (2000); R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin, *Breakdown of the Internet under Intentional Attack*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3682 (2001).
 69. B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, *Resilience of public transport networks against attacks*, Eur. Phys. Journ. B **71** (2009) 125; B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, *Transportation Network Stability: A Case Study of City Transit*, Adv. Complex Syst. **15** (2012) 1250063; B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, *A tale of two cities: Vulnerabilities of the London and Paris transit networks*, Journ. Transport. Security **5** (2012) 199.
 70. M. E. J. Newman, M. Girvan, *Finding and evaluating community structure in networks*, Phys. Rev. E, **69**, 026113 (2004).
 71. Центральність посередництва ребра означається подібно до центральності посередництва вершини: в означенні (10) характеристики вершин замінюються відповідними характеристиками ребер.
 72. Добриня, матеріал із Вікіпедії - вільної енциклопедії, <https://uk.wikipedia.org/wiki/Добриня>
 73. З іншого боку, є низка характеристик, які відрізняють соціальні мережі епосів і навмисне вигаданих художніх творів (таких, як *Всесвіт Марвел*, *Гаррі Поттер*, *Володар перснів*, *Знедолені*

- та Річард III [12]). Але для того, щоб робити якісь висновки чи припущення, потрібно значно більша вибірка даних для художніх творів.
74. A. Aarne, S. Thompson, *The Types of the Folktale. A Classification and Bibliography*, (Helsinki: FF Communications, 1961).
 75. Aarne-Thompson-Uther Classification of Folk Tales <http://www.mftd.org/index.php?action=atu>
 76. R. Kenna, M. MacCarron and P. MacCarron (eds.), *Maths Meets Myths: Quantitative Approaches to Ancient Narratives* (Springer International Publishing, 2017)
 77. C. J. Howe, H. F. Windram, *Phylomemetics Evolutionary Analysis beyond the Gene*, PLoS Biol **9**, e1001069 (2011).
 78. J. J. Tehrani, *The Phylogeny of Little Red Riding Hood*, PLoS ONE **8**, 0078871 (2013).
 79. J. DHuy, *Polyphemus: a Palaeolithic Tale?*, The Retrospective Methods Network Newsletter, **9**, 43 (2015).