

ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-15-05U

О.Р. Баран, Т.М. Верхоляк

СПІН-1/2  $J_1 - J_2$  МОДЕЛЬ ГАЙЗЕНБЕРГА  
НА ПРЯМОКУТНІЙ ФРУСТРОВАНІЙ ҐРАТЦІ  
В РАМКАХ ФЕРМІОНІЗАЦІЇ ЙОРДАНА-ВІГНЕРА.  
НАБЛИЖЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ПОЛЯ ДЛЯ ВИПАДКУ  
КОЛІНЕАРНОГО АНТИФЕРОМАГНІТНОГО  
ВПОРЯДКУВАННЯ

УДК: 537.611

PACS: 75.10.Jm

Спін-1/2  $J_1 - J_2$  модель Гайзенберґа на прямокутній фрустрованій ґратці в рамках ферміонізації Йордана-Віґнера. Наближення середнього поля для випадку колінеарного антиферомагнітного впорядкування

О.Р. Баран, Т.М. Верхоляк

**Анотація.** Спін-1/2 модель Гайзенберґа на прямокутній ґратці з взаємодіями найближчих та наступних після найближчих сусідів розглянута в рамках перетворення Йордана-Віґнера. До фазових множників та до членів, які описують взаємодію безспінових ферміонів, у ферміонізованому гамільтоніані застосовано наближення типу середнього поля у випадку колінеарного стрічкового антиферомагнітного впорядкування. Розраховано залежність магнітного параметра порядку в основному стані від параметра фрустрації при різних значеннях параметра просторової анізотропії. Результати порівнюються із результатами інших методів.

**Spin-1/2  $J_1 - J_2$  Heisenberg model on frustrated rectangular lattice within Jordan-Wigner fermionization. Mean-field approach for the collinear antiferromagnetic order**

O.R. Baran, T.M. Verkholyak

**Abstract.** The rectangular-lattice spin-1/2 Heisenberg model with nearest-neighbor, and next-nearest-neighbor interactions is considered by means of the Jordan-Wigner transformation. In the case of collinear striped antiferromagnetic phase we use a mean-field type approximation for phase factors as well as for the terms which describe the spinless fermion interaction in the fermionized Hamiltonian. The dependence of the magnetic order on frustration parameter is obtained in the ground-state at different values of directional anisotropy parameter. The obtained results are compared with the results of other methods.

Подається в Журнал фізичних досліджень  
Submitted to Journal of Physical Studies

© Інститут фізики конденсованих систем 2015  
Institute for Condensed Matter Physics 2015

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Остап Романович Баран  
Тарас Михайлович Верхоляк

СПИН-1/2  $J_1$ - $J_2$  МОДЕЛЬ ГАЙЗЕНБЕРГА НА ПРЯМОКУТНІЙ  
ФРУСТРОВАНІЙ ҐРАТЦІ В РАМКАХ ФЕРМІОНІЗАЦІЇ  
ЙОРДАНА-ВІГНЕРА. НАБЛИЖЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ПОЛЯ ДЛЯ  
ВИПАДКУ КОЛІНЕАРНОГО АНТИФЕРОМАГНІТНОГО ВПОРЯДКУВАННЯ

Роботу отримано 18 листопада 2015 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом теорії модельних спінових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

## 1. Постановка задачі та наближення типу середнього поля для ферміонізованої моделі

Дана робота є продовженням дослідження, представленого в праці [1], в якій на основі наближення типу середнього поля (див. [2, 3]) в рамках методу, базованому на ферміонізації Йордана-Вігнера, вивчалась антиферомагнітна спін-1/2 модель Гайзенберґа із взаємодіями між найближчими та між наступними після найближчих сусідами на прямокутній ґратці. У попередній роботі [1] ми обмежилися розглядом випадку антиферомагнітного впорядкування Нееля, а тут розглянемо випадок колінеарного стрічкового антиферомагнітного впорядкування. У такій, колінеарній, фазі спіни впорядковуються феромагнітно вздовж одного напрямку та антиферомагнітно вздовж перпендикулярного напрямку (див. рис. 1). Для просторово ізотропної моделі розрахуємо в основному стані залежність намагніченості підґратки від параметра фрустрації та порівняємо результат із результатами інших методів. Окрім того, на основі співвідношень, отриманих у даній та нашій попередній ([1]) працях, дослідимо вплив просторової анізотропії на магнітний параметр порядку.

Гамільтоніан спін-1/2  $J_1$ - $J_2$  моделі Гайзенберґа на прямокутній ґратці розміру  $N_x \times N_y$  ( $N_x \rightarrow \infty$ ,  $N_y \rightarrow \infty$ ) є таким:

$$H = H_{XY} + H_Z, \quad (1.1)$$

$$H_{XY} = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[ J_1 (S_{i,j}^x S_{i+1,j}^x + S_{i,j}^y S_{i+1,j}^y) + J_{\perp} (S_{i,j}^x S_{i,j+1}^x + S_{i,j}^y S_{i,j+1}^y) \right. \\ \left. + J_2 (S_{i,j}^x S_{i+1,j+1}^x + S_{i,j}^y S_{i+1,j+1}^y + S_{i,j+1}^x S_{i+1,j}^x + S_{i,j+1}^y S_{i+1,j}^y) \right], \quad (1.2)$$

$$H_Z = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[ J_1 S_{i,j}^z S_{i+1,j}^z + J_{\perp} S_{i,j}^z S_{i,j+1}^z \right. \\ \left. + J_2 (S_{i,j}^z S_{i+1,j+1}^z + S_{i,j+1}^z S_{i+1,j}^z) \right]. \quad (1.3)$$

Тут  $H_{XY}$  та  $H_Z$  – XY та Ізінґова частини моделі Гайзенберґа;  $J_1$  та  $J_{\perp}$  – обмінні взаємодії між найближчими сусідами в рядках та стовпцях прямокутної ґратки відповідно, а  $J_2$  – обмінні взаємодії між наступними після найближчих сусідами (див. рис. 1).

Зауважимо, що надалі будемо використовувати введені у роботі [1] фізичні величини без додаткового роз'яснення і ті ж самі позначення для них; а також нагадаємо, що нас цікавить випадок фрустрованої ґратки, коли всі взаємодії є антиферомагнітними ( $J_1 > 0$ ,  $J_{\perp} > 0$ ,  $J_2 > 0$ ), причому одразу виберемо, що  $J_1 \leq J_{\perp}$ .

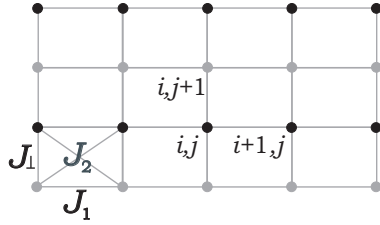


Рис. 1. Розбиття прямокутної ґратки (де також позначені взаємодії між найближчими та наступними після найближчих сусідами, причому  $J_1 \leq J_2$ ) на підґратки у випадку колінарного антиферомагнітного стрічкового впорядкування: чорні вузли належать одній підґратці, а сірі – іншій.

Для ХУ частини (1.2) гамільтоніану (1.1) в рамках підходу на основі перетворення Йордана-Вігнера реалізуємо наближення середнього поля для фазових множників при покладеному  $\langle n \rangle = 1/2$  (що відповідає випадку  $\langle S^z \rangle = 0$ ), як у роботах [1–4]. Лише тут (для зручності розрахунків у випадку стрічкового антиферомагнітного впорядкування) здійснимо інакше калібрування векторного потенціалу, а саме, як на рис. 2. Таке калібрування також забезпечує умову, що потік вектора напруженості магнітного поля через елементарну плакетку  $\Phi_0 = \pi$ , а потік через будь-яку половину плакетки у формі прямокутного трикутника, катетами якого є базисні вектори ґратки, буде  $\pi/2$ . Аналітично вибраний нами калібрувальний векторний потенціал  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  записується так:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2,1} - \alpha_{1,1} &= \int_{1,1}^{2,1} \mathbf{dr} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = 0, & \alpha_{1,2} - \alpha_{2,2} &= \pi \\
 \alpha_{2,2} - \alpha_{2,1} &= \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2} = 0 \\
 \alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} &= \alpha_{1,2} - \alpha_{2,1} = \pi/2, \\
 &\vdots \\
 \alpha_{3,2} - \alpha_{2,2} &= -\pi, & \alpha_{2,3} - \alpha_{3,3} &= 2\pi, \\
 \alpha_{3,3} - \alpha_{3,2} &= \alpha_{2,2} - \alpha_{2,3} = 0, \\
 \alpha_{2,3} - \alpha_{3,2} &= \alpha_{2,2} - \alpha_{3,3} = 3\pi/2, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Враховуючи співвідношення для різниці фаз (1.4) запишемо ХУ частину гамільтоніану у вигляді, де замість фазових множників

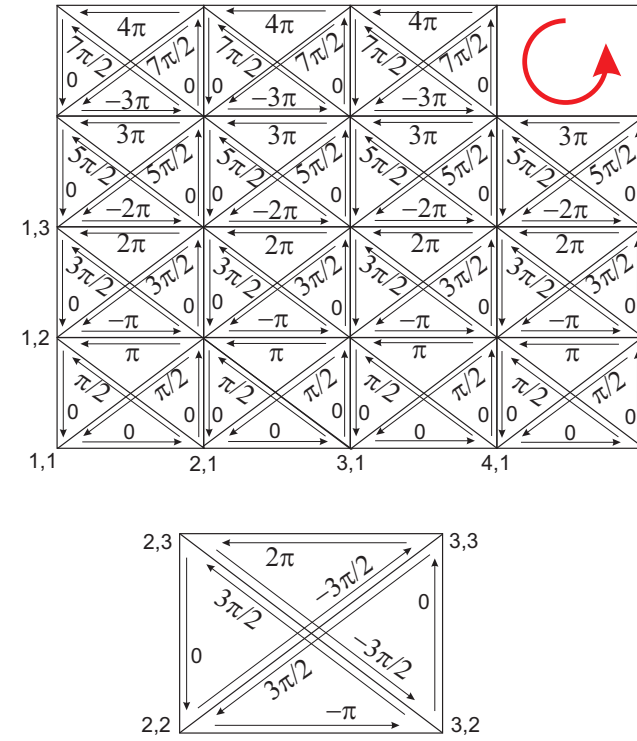


Рис. 2. Вибір різниці фаз  $\alpha_{i,j} - \alpha_{l,m}$ , який задовільняє умову, що циркуляція векторного потенціалу  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$  по чотирьох ребрах елементарної плакетки дорівнює  $\pi$ , а циркуляція по двох ребрах та діагоналі плакетки дорівнює  $\pi/2$ .

(див. також [1]) появились просто додаткові множники  $-(-1)^j$  біля взаємодії  $J_1$  та множники  $i(-1)^j$  або  $-i(-1)^j$  біля взаємодії  $J_2$ :

$$\begin{aligned}
 H_{XY} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left\{ -J_1 (-1)^j \left( d_{i,j}^+ d_{i+1,j} + d_{i+1,j}^+ d_{i,j} \right) \right. \\
 &\quad + J_{\perp} \left( d_{i,j}^+ d_{i,j+1} + d_{i,j+1}^+ d_{i,j} \right) \\
 &\quad + iJ_2 (-1)^j \left( d_{i,j}^+ d_{i+1,j+1} - d_{i+1,j+1}^+ d_{i,j} \right) \\
 &\quad \left. + d_{i,j+1}^+ d_{i+1,j} - d_{i+1,j}^+ d_{i,j+1} \right\}. \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Для Ізінгової частини (1.3) гамільтоніану реалізуємо наближення типу середнього поля, аналогічно, як у роботах [1–5], але розглянемо випадок стрічкового антиферромагнітного впорядкування, коли

$$\begin{aligned} m_A &= \langle S_{i,j}^z \rangle = \langle d_{i,j}^+ d_{i,j} \rangle - \frac{1}{2} = \langle S_{i+1,j}^z \rangle = \dots \\ &= -m_B = -\langle S_{i,j+1}^z \rangle = -\langle S_{i+1,j+1}^z \rangle = \dots \end{aligned}$$

(див. також рис. 1). У результаті будемо мати:

$$\begin{aligned} H_Z &= m_A \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^j \left\{ (J_1 - J_\perp - J_2) d_{i,j}^+ d_{i,j} + (J_1 - J_2) d_{i+1,j}^+ d_{i+1,j} \right. \\ &\quad \left. + (J_\perp + J_2) d_{i,j+1}^+ d_{i,j+1} + J_2 d_{i+1,j+1}^+ d_{i+1,j+1} \right\} \\ &\quad - \tilde{J}' N_x N_y m_A^2 - N_x J_1 m_A \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^j. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Тут використане позначення  $\tilde{J}' = J_1 - J_\perp - 2J_2$ .

Зауважимо, що останній доданок в (1.6) дорівнює нулю, якщо  $N_y$  є парним, і дорівнює  $N_x J_1 m_A$ , якщо  $N_y$  є непарним. У термодинамічній границі цим доданком можна нехтувати (оскільки він нескінченно малий у порівнянні із попереднім).

Після Фур'є перетворення обидвох частин (1.5) та (1.6) гамільтоніан моделі Гайзенберга (1.1) в реалізованому нами наближенні типу середнього поля буде таким:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k_x, k_y} \left\{ \left[ 2iJ_2 \sin k_x \sin k_y - J_1 \cos k_x + 2m_A \tilde{J}' \right] d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x, k_y - \pi} \right. \\ &\quad \left. + J_\perp \cos k_y d_{k_x, k_y}^+ d_{k_x, k_y} \right\} - \tilde{J}' N_x N_y m_A^2 - J_1 N_x m_A \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^j. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Надалі зручно перейти від сумування по першій зоні Бріллюена у (1.7) до сумування по верхній половині цієї зони. Ввівши позначення

$$\begin{aligned} b_{k_x, k_y}^+ &= d_{k_x, k_y}^+, & b_{k_x, k_y} &= d_{k_x, k_y}, \\ a_{k_x, k_y}^+ &= d_{k_x, k_y - \pi}^+, & a_{k_x, k_y} &= d_{k_x, k_y - \pi}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

та враховуючи періодичність  $d_{k_x, k_y + 2\pi} = d_{k_x, k_y}$ , представимо гамільтоніан (1.7) у вигляді:

$$H = \sum_{\mathbf{k}}' H_{\mathbf{k}} - \tilde{J}' N_x N_y m_A^2 - J_1 N_x m_A \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^j, \quad (1.9)$$

$$H_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} C_{ba} + a_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} C_{ab} + b_{\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}} C_{bb} + a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} C_{aa}. \quad (1.10)$$

Тут штрих біля знаку суми означає, що сумування проводиться по верхній половині першої зони Бріллюена, а також використані ще такі позначення:

$$\begin{aligned} C_{ba} &= 2m_A \tilde{J}' - J_1 \cos k_x + 2iJ_2 \sin k_x \sin k_y, \\ C_{ab} &= 2m_A \tilde{J}' - J_1 \cos k_x - 2iJ_2 \sin k_x \sin k_y = C_{ba}^*, \\ C_{bb} &= J_\perp \cos k_y, & C_{aa} &= -J_\perp \cos k_y = -C_{bb}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Квадратичну форму (1.10) можна звести до діагонального вигляду (аналогічно, як у [1]). У результаті отримуємо:

$$H = \sum_{\mathbf{k}}' \lambda_{\mathbf{k}} (\beta_{\mathbf{k}}^+ \beta_{\mathbf{k}} - \alpha_{\mathbf{k}}^+ \alpha_{\mathbf{k}}) - \tilde{J}' N_x N_y m_A^2 - J_1 N_x m_A \sum_{j=1}^{N_y} (-1)^j. \quad (1.12)$$

Тут  $\beta_{\mathbf{k}}^+$ ,  $\alpha_{\mathbf{k}}^+$ ,  $\beta_{\mathbf{k}}$ ,  $\alpha_{\mathbf{k}}$  є операторами Фермі, а спектр  $\lambda_{\mathbf{k}}(m_A)$  визначається таким чином:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{k}}(m_A) &= \\ &= \sqrt{(J_\perp \cos k_y)^2 + (2J_2 \sin k_x \sin k_y)^2 + (2\tilde{J}' m_A - J_1 \cos k_x)^2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

На основі (1.12) отримуємо у термодинамічній границі енергію основного стану з розрахунку на один вузол:

$$\frac{E_0(m_A)}{N_x N_y} = - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \lambda_{\mathbf{k}}(m_A) - \tilde{J}' m_A^2. \quad (1.14)$$

Тут намагніченість підґратки  $m_A$  визначається з умови мінімуму  $E_0(m_A)$  по  $m_A$ .

## 2. Результати числових розрахунків та висновки

Зупинимося спочатку на результатах числових розрахунків для основного стану у випадку квадратної ґратки ( $J_\perp = J_1$ ). На рис. 3 приведено залежність намагніченості підґратки від параметра фрустрації  $J_2/J_1$ , отриману нами на основі (1.14). На ньому представлені для порівняння також результати із інших робіт [6–12].

Аналогічно, як і у випадку впорядкування Нееля (див. [1]), результати таких числових підходів, як метод ренорм-групи матриці густини [6], скінченновимірний скейлінг даних точної діагоналізації

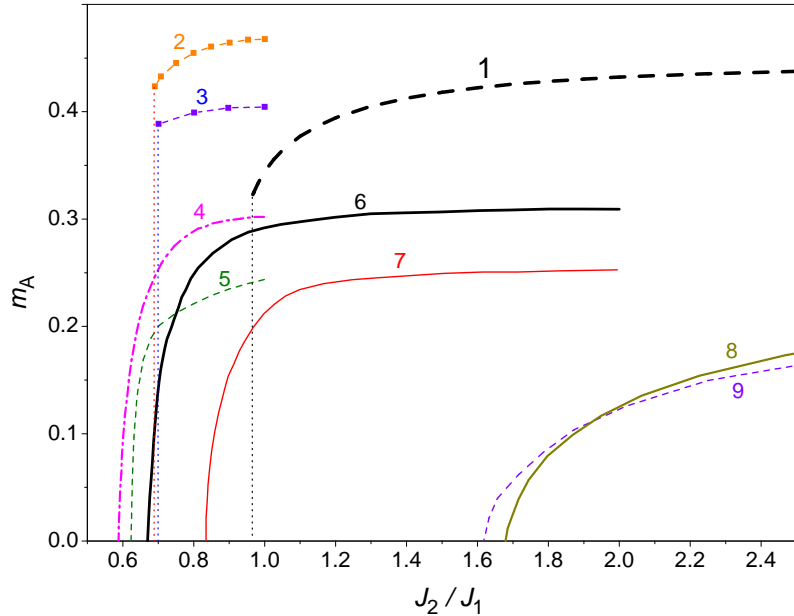


Рис. 3. Залежність підґраткової намагніченості від параметра  $J_2/J_1$  при  $J_\perp = J_1$  у різних підходах: 1 – результат наших розрахунків; 2, 3 – наближення чотири- та шістнадцятичастинкових кластерів відповідно [12]; 4 – екстраполяції даних методу зв’язаних кластерів [8]; 5 – методу ренорм-групи матриці густини [6]; 6 – скінченновимірною скейлінгу даних точної діагоналізації для скінченновимірних ґраток [7]; 7, 8, 9 – методів на основі функцій Гріна [9–11] відповідно.

для скінченновимірних ґраток [7] та даних, розрахованих у методі зв’язаних кластерів [8], досить добре узгоджуються між собою (дають близькі значення для точки переходу  $J_2^c/J_1$  та близькі значення магнітного параметра порядку при великих  $J_2/J_1$ ). Ці методи, однак, не здатні достовірно передбачити рід фазового переходу. А в точці  $J_2^c/J_1$ , як відомо (див. [7, 8]), повинен відбуватись фазовий перехід першого роду. Про це якраз і може свідчити (див. [8]) стрімке спадання  $m_A$  до нуля в околі  $J_2^c/J_1$  із зменшенням параметру  $J_2/J_1$ .

Результати в рамках методів на основі функцій Гріна [9–11], кластерних наближень [12], а також розраховані нами на основі (1.14), дещо відрізняються від отриманих у роботах [6–8]. Так, наближення на основі чотири- та шістнадцятичастинкових кластерів [12] так

само, як і реалізоване нами наближення, передбачають занадто велике значення  $m_A$  при великих  $J_2/J_1$ . Проте суттєвою перевагою цих двох підходів (які дають кількісно не дуже точні результати) є те, що вони передбачають правильний рід фазового переходу. Окрім того, кластерне наближення дає і достатньо добре значення для  $J_2^c/J_1$ .

Підходи ж на основі функцій Гріна, реалізовані в роботах [10,11], на відміну від підходу, використаного в [9], дають занадто велике значення для точки переходу  $J_2^c/J_1$ , а також передбачають занадто повільне спадання  $m_A$  до нуля в околі фазового переходу.

Розглянемо тепер результати числових розрахунків для просторово анізотропної моделі ( $J_1/J_\perp \neq 1$ ), які ми провели на основі співвідношення (1.14), отриманого для випадку стрічкового впорядкування, а також відповідного співвідношення для випадку впорядкування Нееля, яке представлено у нашій попередній праці [1].

На рис. 4 приведені залежності намагніченостей підґраток в основному стані від параметра фрустрації  $J_2/J_\perp$  при різних значеннях просторової анізотропії  $J_1/J_\perp$ . Ліві криві відповідають антиферромагнітному впорядкуванню Нееля, а праві – колінеарному стрічковому антиферромагнітному впорядкуванню. Зрозуміло, що точки фазових переходів ми визначали порівнюючи енергії системи у різних фазах.

При великих значеннях  $J_1/J_\perp$  із збільшенням  $J_2/J_\perp$  в системі відбуваються два фазові переходи: спочатку перехід другого роду із антиферромагнітної фази Нееля у неупорядковану, а потім перехід першого роду із неупорядкованої фази у антиферромагнітну стрічкову. При малих ж значеннях  $J_1/J_\perp$  із збільшенням  $J_2/J_\perp$  в системі відбуваються лише один фазовий перехід першого роду із антиферромагнітної фази Нееля у антиферромагнітну стрічкову фазу, причому намагніченості підґраток в околі фазового переходу як у фазі Нееля, так і у стрічковій фазі, є відмінними від нуля.

Згадаємо тепер коротко відомі нам результати інших методів. Зразу зауважимо, що вони відрізняються якісно як від отриманих нами, так і між собою. Так у методі зв’язаних кластерів [13] при великих значеннях  $J_1/J_\perp$  також мають місце два фазові переходи із ростом параметра  $J_2/J_\perp$ : антиферромагнітна фаза Нееля  $\rightarrow$  неупорядкована фаза  $\rightarrow$  стрічкова антиферромагнітна фаза. Проте обидва переходи передбачаються неперервними. При малих значеннях  $J_1/J_\perp$  метод зв’язаних кластерів дає один фазовий перехід, як і у нас. Проте, в околі точки фазового переходу намагніченості підґраток як зліва (у антиферромагнітній фазі Нееля), так і справа (у колінеарній стрічковій фазі), прямують до нуля.

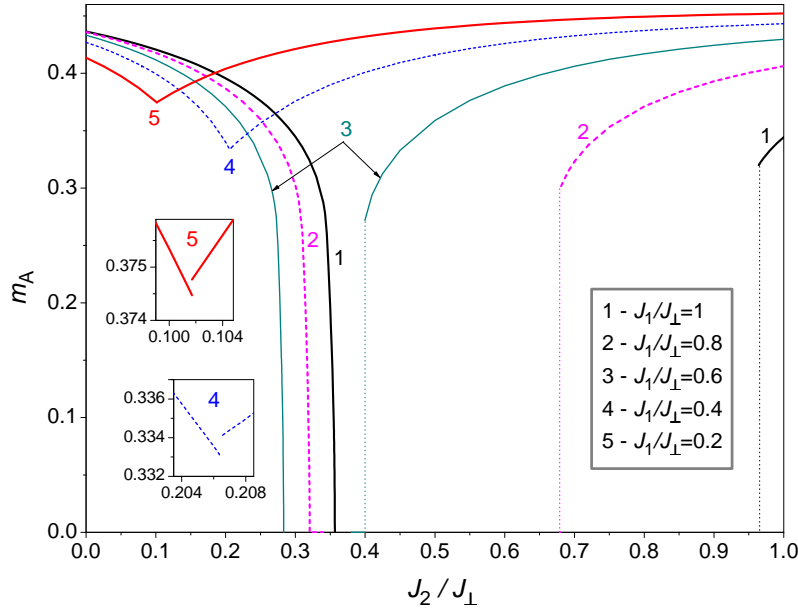


Рис. 4. Залежність підґраткової намагніченості від параметра фрустрації  $J_2/J_\perp$  при різних значеннях параметра просторової анізотропії  $J_1/J_\perp$ : 1 -  $J_1/J_\perp=1$ ; 2 -  $J_1/J_\perp=0.8$ ; 3 -  $J_1/J_\perp=0.6$ ; 4 -  $J_1/J_\perp=0.4$ ; 5 -  $J_1/J_\perp=0.2$ . Ліві криві відповідають впорядкуванню Нееля, а праві - стрічковому впорядкуванню.

В рамках варіаційного методу, застосованого у роботі [14], при великих  $J_1/J_\perp$  результат якісно узгоджується із отриманим нами (нижній фазовий перехід є другого роду, а верхній - першого). Проте при малих значеннях параметра просторової анізотропії результат якісно відмінний і від нашого, і від результату методу зв'язаних кластерів: в околі єдиного фазового переходу намагніченість підґратки у антиферромагнітній фазі Нееля прямує до нуля (як у методі зв'язаних кластерів), а у антиферромагнітній стрічковій фазі є відмінною від нуля (як у нас).

У спін-хвильовому розвиненні [15] отримують результат, який суттєво відрізняється від згаданих вище. При будь-яких значеннях  $J_1/J_\perp$  передбачаються із ростом параметра  $J_2/J_\perp$  два фазові переходи: антиферромагнітна фаза Нееля  $\rightarrow$  неупорядкована фаза  $\rightarrow$  стрічкова антиферромагнітна фаза, причому обидва переходи є другого роду.

Таким чином, результати, отримані у цій та попередній [1] роботах, дають підставу стверджувати, що використане нами просте наближення типу середнього поля в рамках методу перетворення Йордана-Вігнера дозволяє якісно описати властивості основного стану фрустрованої спін-1/2  $J_1-J_2$  моделі Гайзенберґа на прямокутній ґратці при малій просторовій анізотропії ( $J_\perp/J_1 \approx 1$ ). У випадку ж сильної просторової анізотропії питання застосовності згаданого підходу залишається відкритим у зв'язку із тим, що різні методи передбачають якісно відмінні результати. Окрім того слід сказати, що для отримання кількісно більш точних результатів в рамках ферміонізації необхідно самоузгоджено враховувати кореляції на сусідніх вузлах, що і буде предметом наступних досліджень.

## Література

1. О.Р. Баран, Т.М. Верхоляк. Термодинамічні властивості спін-1/2  $J_1-J_2$  моделі Гайзенберґа на прямокутній фрустрованій ґратці в наближенні типу середнього поля в рамках методу ферміонізації Йордана-Вігнера. Антиферромагнітне впорядкування Нееля. // Львів, 2015, 18с. (Препр. / НАН України. Ін-т фіз. конденс. систем; ICMP-15-01U).
2. Y. R. Wang. Ground state of the two-dimensional antiferromagnetic Heisenberg model studied using an extended Wigner-Jordan transformation. // Phys. Rev. B vol. 43, 3786-3789 (1991).
3. O. Derzhko, T. Verkholyak, R. Schmidt, J. Richter. Square-lattice  $s = 1/2$  XY model and the Jordan-Wigner fermions: the ground-state and thermodynamic properties. // Physica A vol. 320, 407-428 (2003).
4. O. Derzhko. Jordan-Wigner fermionization for spin-1/2 systems in two dimensions: A brief review. // J. Phys. Studies vol. 5, 49-64 (2001).
5. Y. R. Wang. Low-dimensional quantum antiferromagnetic Heisenberg model studied using Wigner-Jordan transformation. // Phys. Rev. B vol. 46, 151-161 (1992).
6. H. C. Jiang, H. Yao, L. Balents. Spin liquid ground state of the spin-1/2 square  $J_1 - J_2$  Heisenberg model. // Phys. Rev. B vol. 86, 024424 (2012).
7. H. J. Schulz, T. A. L. Ziman, D. Poilblanc. Magnetic Order and Disorder in the Frustrated Quantum Heisenberg Antiferromagnet in Two Dimensions. // J. Phys. I France vol. 6, 675-703 (1996).
8. J. Richter, R. Zinke, D. J. J. Farnell. The spin-1/2 square-lattice

- $J_1 - J_2$  model: the spin-gap issue. // Eur. Phys. J. B vol. 88, 2 (2015).
9. L. Siurakshina, D. Ihle, R. Hayn. Magnetic order and finite-temperature properties of the two-dimensional frustrated Heisenberg model. // Phys. Rev. B vol. 64, 104406 (2001).
  10. A. F. Barabanov, V. M. Beresovsky. Checkerboard-spin liquid-stripe state continuous transition in a  $S=1/2$  frustrated Heisenberg antiferromagnet on a square lattice. // Phys. Lett. A vol. 186, 175-178 (1994).
  11. А. Ф. Барабанов, А. В. Михеенков, А. В. Шварцберг. Фрустрированный  $J_1 - J_2 - J_3$  квантовый двумерный антиферромагнетик в сферически-симметричном самосогласованном подходе. // ТМФ т. 168, N3, 389-416 (2011).
  12. Y-Z Ren, N-H Tong, X-C Xie. Cluster mean-field theory study of  $J_1 - J_2$  Heisenberg model on a square lattice. // J. Phys.: Condens. Matter vol. 26, 115601 (2014).
  13. R. F. Bishop, P. H. Y. Li, R. Darradi, J. Richter. The quantum  $J_1 - J'_1 - J_2$  spin-1/2 Heisenberg model: influence of the interchain coupling on the ground-state magnetic ordering in two dimensions. // J. Phys.: Condens. Matter vol. 20, 255251 (2008).
  14. O. D. Mabelini, O. D. R. Salmon, J. Ricardo de Sousa The quantum  $J_1 - J'_1 - J_2$  spin-1/2 Heisenberg antiferromagnet: A variational method study. // Solid State Commun. vol. 165, 33-38 (2013).
  15. K. Majumdar Second-order quantum corrections for the frustrated, spatially anisotropic, spin-1/2 Heisenberg antiferromagnet on a square lattice. // Phys. Rev. B vol. 82, 144407 (2010).
-

# CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

**AIMS AND SCOPE:** The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

**ABSTRACTED/INDEXED IN:** Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; "Referatyvnyj Zhurnal"; "Dzherelo".

**EDITOR IN CHIEF:** Ihor Yukhnovskii.

**EDITORIAL BOARD:** T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlachy, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

## CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics  
of the National Academy of Sciences of Ukraine  
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine  
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158  
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua    <http://www.icmp.lviv.ua>