

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Юрій Ігорович Дубленич

ОСНОВНІ СТАНИ МОДЕЛІ ІЗИНґА НА АНІЗОТРОПНІЙ ТРИКУТНІЙ ҐРАТЦІ: СМУГИ І ЗИґЗАґИ

Роботу отримано 12 грудня 2011 р.

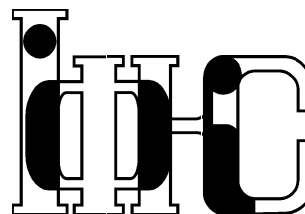
Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом квантової статистики

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-11-11U

Ю.І.Дубленич

ОСНОВНІ СТАНИ МОДЕЛІ ІЗИНґА НА АНІЗОТРОПНІЙ
ТРИКУТНІЙ ҐРАТЦІ: СМУГИ І ЗИґЗАґИ

ЛЬВІВ

УДК: 537.611.2, 538.971

РАС: 75.10.Нк, 68.43.Фг, 61.44.Вр, 89.75.Кд

Основні стани моделі Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці: смуги і зигзаги

Ю.І.Дубленич

Анотація. В роботі наведено повний розв'язок проблеми основних станів і їх аналіз для моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. Показано, що ця задача зводиться до задачі про основні стани нескінченно-го ланцюжка зі взаємодіями до других сусідів включно. Крім вже відомих структур основного стану (яким відповідають повновимірні області в просторі параметрів моделі), знайдено нові структури (на межах цих областей), зокрема, зигзаг-структури, подібні до тих, що спостерігаються експериментально в колоїдних моношарах. Для хаотизованих структур встановлено ступінь (вимірність) безладу.

Ground states of the Ising model on the anisotropic triangular lattice: Stripes and zigzags

Yu.I.Dublenych

Abstract. A complete solution of the ground-state problem and an analysis of ground states for the Ising model in a magnetic field on the anisotropic triangular lattice with the nearest-neighbor interactions are presented. It is shown that this problem can be reduced to the ground-state problem for an infinite chain with the interactions up to the second neighbors. In addition to already known ground-state structures (which correspond to full-dimensional regions in the parameter space of the model), new structures are found (at boundaries of these regions), in particular, zigzagging stripes similar to those observed experimentally in colloidal monolayers. For disordered structures the degree (dimensionality) of disorder is determined.

Подається в Physical Review B
Submitted to Physical Review B

© Інститут фізики конденсованих систем 2011
Institute for Condensed Matter Physics 2011

1. Вступ

Модель Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці викликає не лише чисто теоретичний інтерес [1–4], її щоразу частіше застосовують до опису реальних фізичних систем. Так, наприклад, недавно цю модель використали для інтерпретації експериментальних результатів, одержаних для Ізинґового магнетика FeI_2 [5]. Річ у тім, що в реальних магнетиках, в яких шари магнетних атомів утворюють трикутну ґратку, взаємодія може бути анізотропною в результаті деформації ґратки [6, 7], і тоді такі магнетики описуються моделями не на звичайній, а на анізотропній трикутній ґратці.

Вивчення спінових моделей на трикутній ґратці ще в 1950 році розпочав Ваньє [8]. Він знайшов розв'язок для моделі Ізинґа на ізотропній трикутній ґратці без магнетного поля і довів, що цій моделі існує макроскопічне виродження основного стану. У цьому ж році Гутапель дослідив модель Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці, проте так само без магнетного поля [9].

Модель Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці у магнетному полі досліджував Стефенсон [5]. Якщо два з трьох параметрів взаємодії однакові, то така модель еквівалентна моделі Ізинґа на ізотропній квадратній ґратці з додатковою взаємодією других сусідів вздовж одного діагонального напрямку. Її основні стани описано в [10], але також без магнетного поля (хоча автор цього не відзначає, що вводить в оману читача). Якщо ж квадратна ґратка з діагональною взаємодією ще й анізотропна, що еквівалентно анізотропній трикутній ґратці, то задача значно ускладнюється. Частково основні стани моделі Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці з полем розглянуто в [4], а типи повновимірних основних станів перелічено в роботі [3]. Однак, здається, й досі нема повного опису основних станів цієї моделі у магнетному полі в загальному випадку, коли усі взаємодії різні. Ми знайшли повний розв'язок цієї задачі, звівши її до задачі про основні стани Ізинґового ланцюжка. Наш підхід дав змогу визначити структури основного стану не лише в повновимірних областях простору параметрів моделі, а й на їх межах, що особливо важливо для аналізу основних станів еквівалентної моделі ґраткового газу. На деяких межах ми виявили зигзаг-структури. Такого типу структури спостерігають експериментально в колоїдних моношарах [11] й описують на основі модифікацій моделі антиферомагнетика на трикутній ґратці [12, 13].

2. Гамільтоніан моделі і повновимірні області та структури

Отож розгляньмо модель Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці:

$$H = J_1 \sum_{\langle ij \rangle_1} \sigma_i \sigma_j + J_2 \sum_{\langle ij \rangle_2} \sigma_i \sigma_j + J_3 \sum_{\langle ij \rangle_3} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i. \quad (2.1)$$

Тут $\sigma_i, \sigma_j = \pm 1$ — спінові змінні; J_1, J_2 і J_3 — параметри взаємодії найближчих сусідів уздовж трьох напрямків на трикутній ґратці; $\langle ij \rangle_k$ означає суму за найближчими сусідами в напрямку k ($k = 1, 2, 3$); h — магнетне поле. Ця модель еквівалентна моделі ґраткового газу

$$H_{lg} = I_1 \sum_{\langle ij \rangle_1} c_i c_j + I_2 \sum_{\langle ij \rangle_2} c_i c_j + I_3 \sum_{\langle ij \rangle_3} c_i c_j - \mu_{lg} \sum_i c_i \quad (2.2)$$

з параметрами

$$I_i = 4J_i, \quad \mu_{lg} = 2h + 4(J_1 + J_2 + J_3), \quad (2.3)$$

де $c_i = \frac{\sigma_i + 1}{2}$ — число заповнення вузла i (0 або 1).

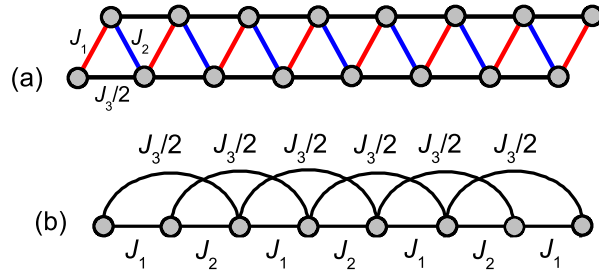


Рис. 1. (а) Нескінченна драбинка та (б) еквівалентний їй нескінченний ланцюжок з почерговими взаємодіями найближчих сусідів J_1 і J_2 та взаємодією других сусідів $\frac{J_3}{2}$.

Розгляньмо нескінченну драбинку на анізотропній трикутній ґратці, наприклад, в напрямку 3 (Рис. 1). “Стояк” драбинки належить двом драбинкам, тому, виокремлюючи драбинку з ґратки, мусимо зменшити вдвічі взаємодію J_3 і поле h . Отож знайдемо основні стани драбинки зі взаємодіями J_1, J_2 і $\frac{J_3}{2}$ та полем $\frac{h}{2}$. Така драбинка еквівалентна ланцюжкові зі взаємодіями перших (J_1 і J_2) і других ($\frac{J_3}{2}$) сусідів та полем (Рис. 1). Взаємодії перших сусідів чергуються.

Моріта довів, що конфігурації основного стану в спіновому ланцюжку зі взаємодіями скінченного радіуса утворюються так званими незвідними блоками, і кількість вузлів у незвідних блоках не перевищує

$$p^r - p^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} + 2, \quad (2.4)$$

де p — число станів на вузлі, а r — радіус взаємодії [14–16].

Об’єднавши у трійки сусідні пари вузлів (зі взаємодіями J_1 і J_2), одержуємо триспінкову взаємодію $u_{i,i+1,i+2}^{(3)}(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2})$, яка задовольняє умови теореми Моріти (див. [15]), як і, звичайно, взаємодія других сусідів. У ланцюжку, який ми розглядаємо, кількість станів на вузлі $p = 2$, а радіус взаємодії $r = 2$. Отже максимальний розмір незвідного блока дорівнює 4 вузли. Конфігураціями ж драбинок з періодом від одного до чотирьох вузлів анізотропну трикутну ґратку можна заповнити. Як допасовуються одна до одної конфігурації драбинок з періодом чотири і три вузли, показано на Рис. 2. Сусідні драбинки з періодом три вузли перебувають у “фазі”, а з періодом чотири вузли — у “протифазі”.

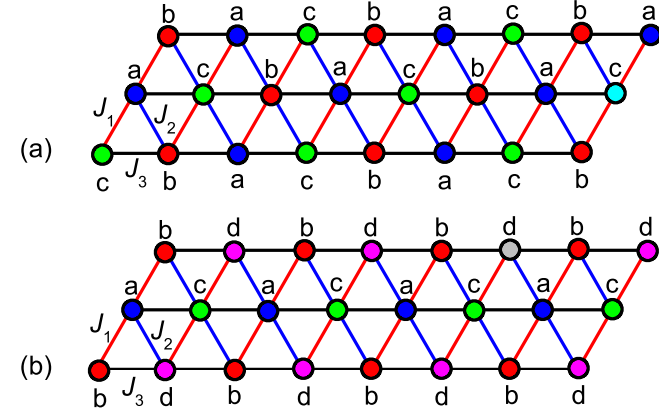


Рис. 2. Конфігурації драбинки з періодом (а) 3 і (б) 4 вузли і покриття ними анізотропної трикутної ґратки.

Для побудови фазових діаграм основного стану знайдемо енергії на один вузол періодичних структур, які відповідають кожному з незвідних блоків. Їх наведено в Таблиці 1. Заповнені вузли в ній позначено знаком $\bullet$, а вакантні — знаком $\circ$. (Тут і далі ми використовуємо “мову частинок”, а не спінів, бо так зручніше.) Взаємодія

Табл. 1. Незвідні блоки та енергії структур, які вони генерують, для Ізинґового ланцюжка, зображеного на Рис. 1(а). Взаємодія між двома першими вузлами у блоках дорівнює J_1 .

Номер	Незвідні блоки	Енергія на вузол
1	$\langle \bullet \bullet \rangle$	$J_1 + J_2 + J_3 - h$
$\bar{1}$	$\langle \circ \circ \rangle$	$J_1 + J_2 + J_3 + h$
2_1	$\langle \bullet \bullet \circ \circ \rangle \langle \circ \circ \bullet \bullet \rangle$	$J_1 - J_2 - J_3$
2_2	$\langle \bullet \circ \circ \bullet \rangle \langle \circ \bullet \bullet \circ \rangle$	$-J_1 + J_2 - J_3$
2_3	$\langle \bullet \circ \circ \rangle \langle \circ \bullet \bullet \rangle$	$-J_1 - J_2 + J_3$
3	$\langle \bullet \bullet \circ \rangle \langle \bullet \circ \bullet \rangle \langle \circ \bullet \bullet \rangle$	$-(J_1 + J_2 + J_3 + h)/3$
$\bar{3}$	$\langle \circ \circ \bullet \rangle \langle \circ \bullet \circ \rangle \langle \bullet \circ \circ \rangle$	$-(J_1 + J_2 + J_3 - h)/3$

між двома першими вузлами у блоках з трьох і чотирьох вузлів дорівнює J_1 . Усі можливі типи діаграм у площині (h, J_k) ($k = 1, 2, 3$) зображено на Рис. 3.

Структури на анізотропній трикутній ґратці у повновимірних областях показано на Рис. 4. На цьому рисунку зображено лише три структури з семи, бо решта чотири аналогічні зображеним. Як бачимо, порівняно з моделлю на ізотропній трикутній ґратці, маємо тільки один новий тип структури — тип 2_i .

3. Основні промені та основні множини конфігурацій ромба

Структурам основного стану, які ми знайшли, відповідають чотиривимірні поліедричні конуси в чотиривимірному просторі (h, J_1, J_2, J_3) параметрів Гамільтоніану (2.1) (див. [17]). Ці конуси мають три- (гіперграні), дво- (грані) та одновимірні (ребра) грані. Завдяки властивості опуклості можна знайти структури основного стану в будь-якій точці простору параметрів Гамільтоніану, знаючи лише структури основного стану на ребрах повновимірних (тобто чотиривимірних) областей. Знайдімо ці ребра, або основні промені чи вектори, як ми їх назвали в роботі [17]. Їх наведено в Таблиці 2. Використовуючи метод, описаний в [17], можна переконатися, що цей набір основних променів (векторів) повний. Отже за допомогою теореми Моріти ми знайшли повновимірні структури й повний набір основних променів.

Табл. 2. Основні промені і множини конфігурацій ромба для моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. Горизонтальний напрямок в конфігураціях — напрямок 3.

Основний промінь $\mathbf{r}_i (h, J_1, J_2, J_3)$	Основна множина конфігурацій	Повновимірні області
$\mathbf{r}_1 (0, 1, 1, 1)$		$2_1, 2_2, 2_3, \bar{3}$
$\mathbf{r}_{21} (0, 1, -1, -1)$		$1, \bar{1}, 2_2, 2_3$
$\mathbf{r}_{22} (0, -1, 1, -1)$		$1, \bar{1}, 2_1, 2_3$
$\mathbf{r}_{23} (0, -1, -1, 1)$		$1, \bar{1}, 2_1, 2_2$
$\mathbf{r}_{31} (2, 1, 0, 0)$		$1, 2_2, 2_3, 3$
$\mathbf{r}_{32} (2, 0, 1, 0)$		$1, 2_1, 2_3, 3$
$\mathbf{r}_{33} (2, 0, 0, 1)$		$1, 2_1, 2_2, 3$
$\mathbf{r}_{31}^- (-2, 1, 0, 0)$		$\bar{1}, 2_2, 2_3, \bar{3}$
$\mathbf{r}_{32}^- (-2, 0, 1, 0)$		$\bar{1}, 2_1, 2_3, \bar{3}$
$\mathbf{r}_{33}^- (-2, 0, 0, 1)$		$\bar{1}, 2_1, 2_2, \bar{3}$

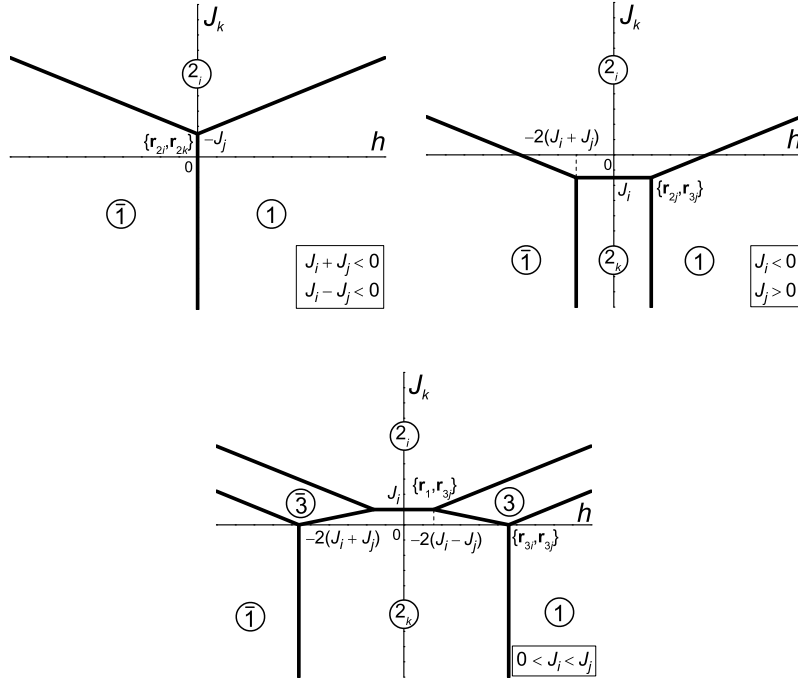


Рис. 3. Діаграми у площині (h, J_k) основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. i, j, k — трійка індексів 1, 2, 3 у довільному порядку. У фігурних дужках вказано двовимірні грані повновимірних областей.

Щоби побудувати основні стани на основних променях, розглянемо кластер у формі ромба з основою в напрямку 3 (Рис. 5(a)) і запишімо енергію його спінових конфігурацій, враховуючи, що сторона ромба належить двом таким ромбам на ґратці, а вершина — чотирьом:

$$e_a = \frac{J_1}{2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4) + J_2\sigma_2\sigma_3 + \frac{J_3}{2}(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4) - \frac{h}{4}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4). \quad (3.1)$$

З тих конфігурацій цього ромба, які мають мінімальну енергію на основних променях, можна побудувати структури основного стану на усіх основних променях, крім двох: $\mathbf{r}_{22}$ і $\mathbf{r}_{32}$. Для цих двох променів

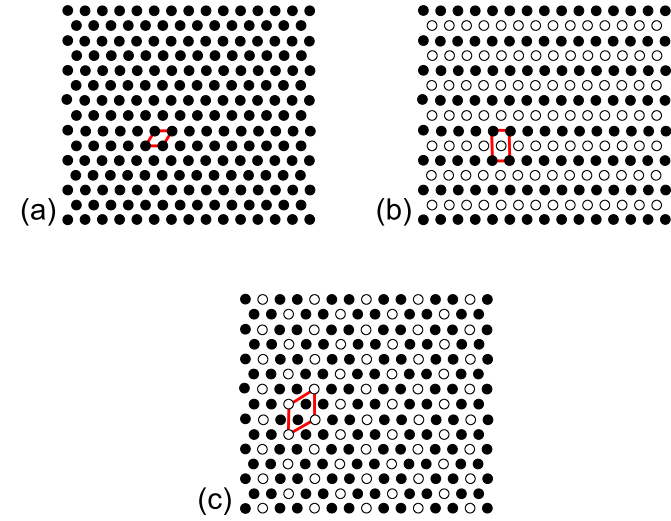


Рис. 4. Повновимірні структури основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів: (a) 1, (b) 2_i (смуги йдуть вздовж напрямку i) і (c) 3. Білі й чорні кружечки означають вакансії або спіни вниз ($\sigma = -1$) і частинки або спіни вверх ($\sigma = +1$), відповідно. Показано елементарні комірки.

потрібно розглянути інший ромб з основою в напрямку 3 (Рис. 5(b)). Енергія його спінових конфігурацій така:

$$e_b = J_1\sigma_2\sigma_3 + \frac{J_2}{2}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4) + \frac{J_3}{2}(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4) - \frac{h}{4}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4). \quad (3.2)$$

Конфігурації ромбів, з яких утворюються основні стани на основних променях наведено в Таблиці 2. Для кожного основного променя там також вказано повновимірні області, ребром яких він є. В Таблиці 3 для кожної повновимірної області наведено конфігурації ромба, з яких будується структура основного стану в ній, та основні промені, що є ребрами цієї області, а також кількість її гіперграней та умови існування в площині (h, J_3) .

Табл. 3. Основні промені і конфігурації ромба для повновимірних областей основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. Горизонтальний напрямок в конфігураціях — напрямок 3.

Область	Твірні конфігурації структури	Основні промені	Число гіперграней	Умови існування в площині (h, J_3)
1		$\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$	5	Завжди
$\bar{1}$		$\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$	5	Завжди
2_1		$\Gamma_1, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}, \Gamma_{33}$	6	$J_1 \leq J_2, J_3 \geq \max(J_1, -J_2)$
2_2		$\Gamma_1, \Gamma_{21}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{33}, \Gamma_{33}$	6	$J_1 \geq J_2, J_3 \geq \max(-J_1, J_2)$
2_3		$\Gamma_1, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}$	6	$J_1 \geq -J_2, J_3 \leq \max(J_1, J_2)$
3		$\Gamma_1, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$	4	$J_1 \geq 0, J_2 \geq 0, J_3 \geq 0$
$\bar{3}$		$\Gamma_1, \Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$	4	$J_1 \geq 0, J_2 \geq 0, J_3 \geq 0$

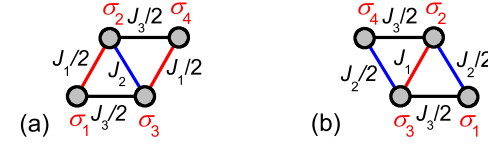


Рис. 5. Кластери, з конфігурацій яких будуюмо усі основні стани моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів.

4. Структури основного стану на межах повновимірних областей

4.1. Структури основного стану на гіпергранях

Знайдімо тепер тривимірні грані (гіперграні) повновимірних областей і структури основного стану на них. Усього є 18 гіперграней. Проте завдяки симетрії на багатьох із них структури однотипні: одержуються одна з одної зміною напрямку або заміною вакансій на частинки, і навпаки. Всього є п'ять типів гіперграней: $(1, \bar{1})$, $(1, 2_i)$, $(1, 3)$, $(2_i, 2_j)$, і $(2_i, 3)$. З чотирьох останніх в Таблиці 4 наведено по одному представникові. В Таблиці 4 вказано також тип переходу через гіпергрань (стрибок або неперервний перехід) і вимірність безладу, якщо перехід неперервний (скорочення “Неп.”). Перехід першого роду (“Стрибок”) є лише між фазами 1 і $\bar{1}$; між усіма іншими фазами переходи неперервні.

Множина конфігурацій ромба, що генерують основний стан на гіперграні, є перетином основних множин конфігурацій для кожного з основних променів гіперграні. Це правило трохи модифікується для гіперграні $(1, 3)$, бо на промені Γ_{32} основний стан будується з конфігурацій іншого ромба, ніж на променях Γ_{31} і Γ_{33} . З перетину основних множин для двох останніх променів треба залишити лише ті конфігурації ромба, що дають структури, які можна збудувати з основної множини конфігурацій для променя Γ_{32} (конфігурація випадає).

На Рис. 6 показано структури на гіпергранях. На гіперграні $(1, 2_i)$ структури основного стану — це хаотизовані структури, які є простою сумішшю відповідних повновимірних структур (Рис. 6(a)). Безлад є одновимірним: в одному напрямку — порядок, в іншому — безлад.

Табл. 4. Основні промені і конфігурації ромба для гіперплосин повновимірних областей основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. Для неперервних фазових переходів в дужках вказано вимірність безладу. Горизонтальний напрямок в конфігураціях — напрямок 3.

Об- ласті	Основні промені гіперграні	Конфігурації основного стану	Перехід між фазами	Умови існування в площині (h, J_3)
1, $\bar{1}$	$\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{23}$		Стрибок	$J_1 + J_2 < 0,$ $J_3 < \min(-J_1, -J_2)$
1, 2 ₂	$\Gamma_{21}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33}, \Gamma_{31}$		Неп. (1)	$J_2 < J_1, J_2 < 0,$ $J_3 > \max(-J_1, J_2)$
1, 3	$\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{33}$		Неп. (2)	$J_1 > 0, J_2 > 0, J_3 > 0$
2 ₁ , 2 ₂	$\Gamma_1, \Gamma_{33}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33}$		Неп. (1)	$J_1 = J_2, J_3 > J_1 $
2 ₂ , 3	$\Gamma_1, \Gamma_{31}, \Gamma_{33}$		Неп. (1)	$J_1 > 0, J_2 > 0, J_1 > J_2,$ $J_3 > \min(J_1, J_2)$

На межі фаз 1 і 3 основним станом є хаотизована структура, яка визначається єдиною умовою: дві вакансії не можуть бути найближчими сусідами у жодному з трьох напрямків (Рис. 6(b)). Зрозуміло, що безлад у такій структурі двовимірний, а отже існує залишкова ентропія.

На гіперграні $(2_i, 2_j)$ ($J_i = J_j$) структурою основного стану є частково хаотизована (одновимірний безлад) зигзаг-структура, в якій зигзаги частинок в напрямках i і j чергуються з зигзагами вакансій (Рис. 6(c)). Це проста суміш повновимірних стрічкових структур 2_i і 2_j . Густина частинок у цих структурах дорівнює $\frac{1}{2}$. Межа між областями 2_i і 2_j паралельна до осі поля (чи до осі хемічного потенціалу у моделі ґраткового газу), тому зміна поля (хемічного потенціалу) не може зумовити перехід з однієї фази в іншу (принаймні в основному стані). Проте такий перехід може зумовити деформація ґратки, яка змінює взаємодії. Цікаво було б дослідити, як відбувається перехід з фази 2_i у фазу 2_j за відмінної від нуля температури. Чи за такого переходу середня довжина ланки у напрямку 2_i змінюється від нескінченности до нуля неперервно, чи стрибком? Недавно зигзаг-структури було одержано в антиферомагнетній моделі Ізинґа на деформівній трикутній ґратці [12], моделі, за допомогою якої автори описують моношари колоїдних частинок (див. також [11, 13]). І в ній зигзаг-структури в основному стані виникають тоді, коли взаємодії у двох напрямках на трикутній ґратці стають однаковими. Модель, яку ми розглядаємо, є частковим випадком моделі Ізинґа на деформівній трикутній ґратці. Чи не досить моделі Ізинґа на анізотропній трикутній ґратці, щоб пояснити, чому виникають зигзаг-структури в колоїдних моношарах? Результати, одержані для деформівної трикутної ґратки, можуть бути корисними для дослідження моделі на анізотропній трикутній ґратці.

На межах фаз 2_i і 3 структури основного стану мають вигляд ланцюжків частинок і вакансій в напрямку, перпендикулярному до напрямку i (Рис. 6(d)). Сусідні ланцюжки вакансій розділені одним або двома ланцюжками частинок. Ці структури можна ще розглядати як зигзаги частинок, зміщені один відносно одного. Такі структури основного стану виникали й у моделі ґраткового газу на трикутній ґратці зі взаємодіями перших і других сусідів [19] або ще й тричастинковою взаємодією найближчих сусідів [18], бо і в цих моделях існують структури, такі як 2_i і 3.

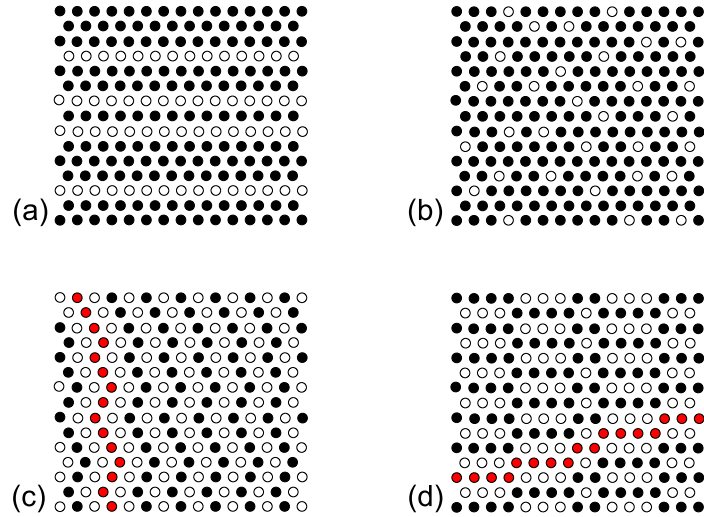


Рис. 6. Структури основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів на межах повновимірних областей (а) 1 і 2_k , (б) 1 і 3 , (в) 2_i і 2_j (зигзаги йдуть у напрямках i та j) та (д) 2_k і 3 . Білі і чорні кружечки означають вакансії або спіни вниз ($\sigma = -1$) і частинки або спіни вверх ($\sigma = +1$), відповідно. На усіх рисунках напрямок k — горизонтальний. На Рис. (с) і (д) одну із зигзаг-ланцюжків виділено червоним кольором.

4.2. Структури основного стану на гранях

Дослідімо ще основні стани на двовимірних гранях (ми їх називаємо просто гранями). Граней є 21. Однак, з огляду на симетрію, можна виділити лише чотири типи граней. По одному представникові кожного типу наведено в Таблиці 5. Структури основного стану на цих гранях зображено на Рис. 7.

Цікавим є спосіб побудови структур на грані $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{3k}\}$ (Рис. 7(а)). Спочатку з частинок будуємо зигзаг-ланцюжок в напрямках i та j . Далі на ній з одного боку довільним чином вибираємо місця зламу і сусідній зигзаг-ланцюжок будуємо так, щоб він підходив до попереднього на відстань найближчих сусідів у вибраних місцях зламу, а на решті шляху проходив через один ряд вакансій від нього. Зрозуміло, що таким способом можна побудувати нескінченну кількість стру-

ктур і безлад у цій сукупності двовимірний, тобто на грані $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{3k}\}$ існує залишкова ентропія.

Структури основного стану на грані $\{\mathbf{r}_{3i}, \mathbf{r}_{3k}\}$ (Рис. 7(д)) визначаються єдиним обмеженням — в них не може бути двох вакансій, що є найближчими сусідами в напрямках i і k . Таке обмеження не усуває двовимірний безладу, а отже на цій грані також існує залишкова ентропія.

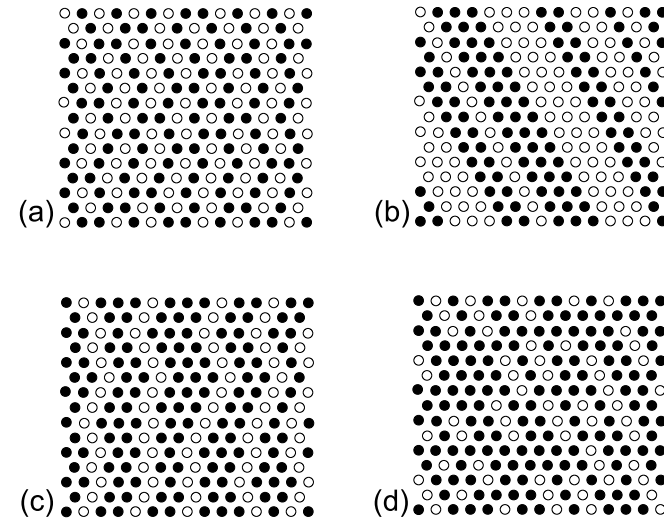


Рис. 7. Структури основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів на двовимірних гранях повновимірних областей: (а) $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{3k}\}$ (зигзаги йдуть в напрямках i та j), (б) $\{\mathbf{r}_{2i}, \mathbf{r}_{2k}\}$ (смути йдуть в напрямку j), (в) $\{\mathbf{r}_{2k}, \mathbf{r}_{3k}\}$ (зигзаги вакансій йдуть в напрямках i та j) та (д) $\{\mathbf{r}_{3i}, \mathbf{r}_{3k}\}$ (ланцюжки вакансій йдуть в напрямку j). Білими і чорними кружечками позначено вакансії або спіни вниз ($\sigma = -1$) і частинки або спіни вверх ($\sigma = +1$), відповідно. На усіх рисунках напрямок k — горизонтальний.

4.3. Структури основного стану на ребрах

Нам залишилося розглянути основні стани на одновимірних ребрах повновимірних областей, тобто на основних променях. Є всього три типи основних променів. Промінь $\mathbf{r}_1$ відповідає антиферромагнетний

Табл. 5. Основні стани на двовимірних гранях моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів. Горизонтальний напрямок в конфігураціях — напрямок 3.

Грань	Конфігурації основного стану	Вимірність безладу	Повновимірні структури	Співвідношення між параметрами
$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{33}\}$		2	$2_1, 2_2, 3$	$J_2 = J_1, J_3 = J_1 + \frac{h}{2}$
$\{\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{23}\}$		1	$1, \bar{1}, 2_2$	$h = 0, J_3 = -J_1$
$\{\mathbf{r}_{23}, \mathbf{r}_{33}\}$		2	$1, 2_1, 2_2$	$J_2 = J_1, J_3 = -J_1 + \frac{h}{2}$
$\{\mathbf{r}_{31}, \mathbf{r}_{33}\}$		2	$1, 2_2, 3$	$J_2 = 0, J_3 = -J_1 + \frac{h}{2}$

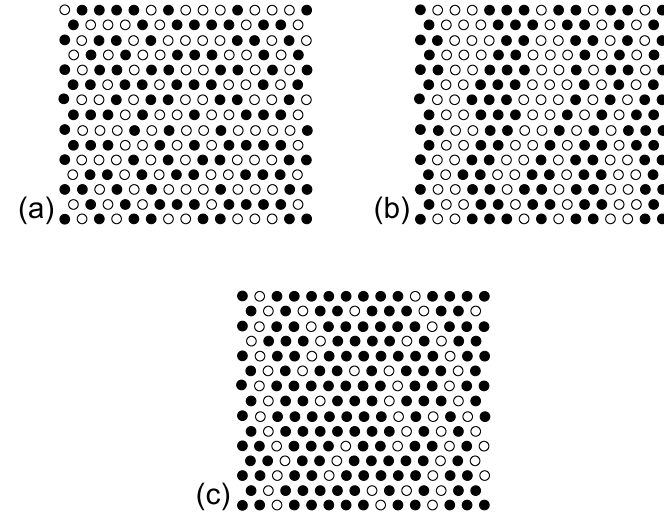


Рис. 8. Структури основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів на ребрах повновимірних областей: (а) $\mathbf{r}_1$, (б) $\mathbf{r}_{2k}$ і (с) $\mathbf{r}_{3k}$ (зигзаги вакансій йдуть у напрямках i та j). Білими і чорними кружечками позначено вакансії або спіни вниз ($\sigma = -1$) і частинки або спіни вверх ($\sigma = +1$), відповідно. На рисунках (б) і (с) напрямок k — горизонтальний.

моделі Ізинґа на ізотропній трикутній ґратці без поля. Цю модель дослідив у 1950 році Ваньє [8]. Він, зокрема, показав, що її основні стани збудовані з двох конфігурацій трикутника: і (Рис. 8(а)), і що в основному стані існує макроскопічне виродження (залишкова ентропія).

Залишкова ентропія (двовимірний безлад) існує й на всіх інших основних променях. На промені $\mathbf{r}_{2k}$ структури основного стану — це нескінченні області вакансій і частинок, обмежені з обох боків зигзаг-лініями у напрямках i та j (Рис. 8(б)). Структури основного стану на промені $\mathbf{r}_{3k}$ — це оточені частинками скінченні й нескінченні зигзаги вакансій (а також окремі вакансії і прямі ланцюжки) у напрямках i та j (Рис. 8(с)).

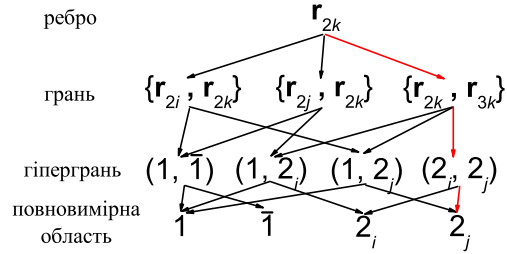


Рис. 9. Граф переходів ребро — грань — гіпергрань — повновимірна область для ребра r_{2k} . Один із можливих шляхів виділено червоними стрілками.

4.4. Графи переходів ребро — грань — гіпергрань — повновимірна область

Цікаво спостерігати, як поступово зменшується виродження за переходів ребро — грань — гіпергрань — повновимірна область. Для ребра r_{2k} граф таких переходів зображено на Рис. 9. Один із можливих шляхів виділено червоними стрілками. Поглянувши на відповідні структури, бачимо, як поступово зменшується до нуля виродження (Рис. 8(b), 7(c), 6(c) і 4(b)).

5. Частковий випадок анізотропії лише в одному напрямку

Окремо розглянемо частковий випадок моделі (2.1), коли анізотропія існує лише в одному напрямку, тобто дві з трьох взаємодій однакові, бо саме таку модель часто досліджують [1, 2, 10]. Нехай

$$J_i = J_j = J, \quad J_k = K. \quad (5.1)$$

Діаграми основного стану для такої моделі зображено на Рис. 10. Там вказано ребра (основні промені), грані і гіперграні загальної моделі. Як бачимо, гіпергрань $(2_i, 2_j)$ з зигзаг-структурами (Рис. 6(c)) для спрощеної моделі стала повновимірною областю. Як ми вже казали, в роботі [10] проаналізовано основні стани цієї моделі лише для випадку $h = 0$, але у читача створюється враження, що йдеться про модель з відмінним від нуля полем, яку й розглядають у цій статті.

В роботах [1, 2] досліджують саме основні стани анізотропного (з анізотропією в одному напрямку) Ізинґового антиферромагнетика на

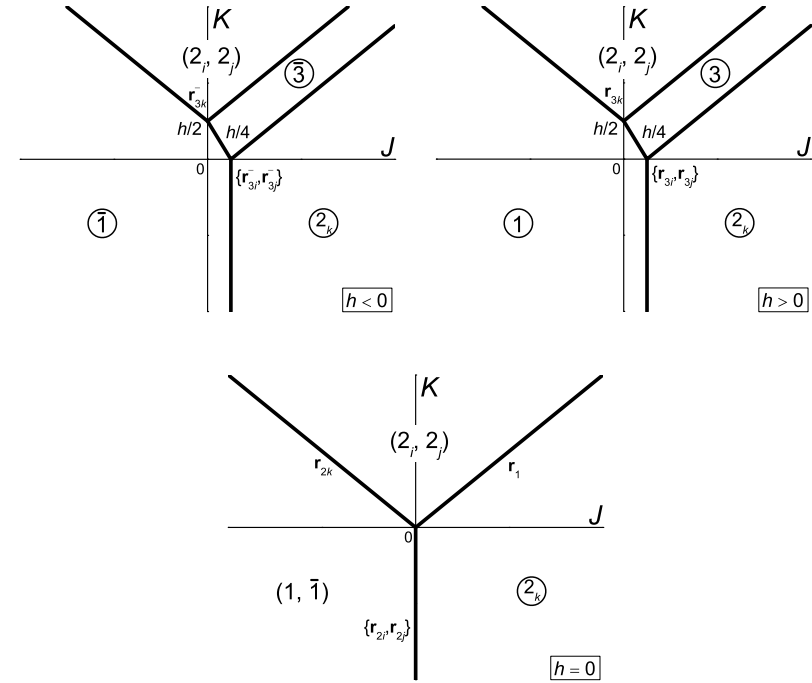


Рис. 10. Діаграми у площині (J, K) основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів у частковому випадку, коли $J_i = J_j = J, J_k = K$.

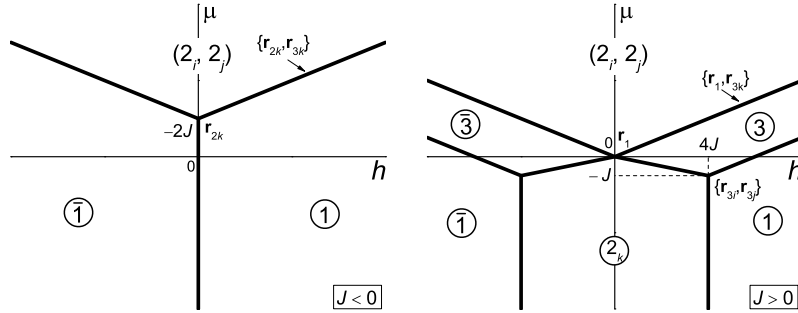


Рис. 11. Діаграми у площині (h, μ) основного стану моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів у частковому випадку, коли $J_i = J_j = J$. $\mu = J_k - J$ — параметер анізотропії.

трикутній ґратці у магнетному полі і, зокрема, його критичну поведінку за нульової температури. У роботах наведено діаграму основного стану такого магнетика в координатах, пов'язаних з анізотропією $\mu = J_k - J$ та полем h . Тому ми подаємо діаграму основних станів для цього часткового випадку ще в площині (h, μ) (Рис. 11). Наші результати не збігаються з тими, що наведені у згаданих роботах. Зокрема, область 3 простягається аж до нульового поля, а не закінчується за відмінного від нуля поля, як у [1].

6. Висновки

Отож ми цілком описали структури основного стану моделі Ізинґа зі спіном $S = \frac{1}{2}$ на анізотропній трикутній ґратці в магнетному полі або еквівалентної моделі ґраткового газу. Їх порівняно небагато: всього є три типи повновимірних структур, по чотири типи структур на гіпергранях та гранях і три на ребрах повновимірних областей. Всього — 14 типів структур. Особливо цікавими є зигзаг-структури.

Порівнюючи сукупність основних станів розглядуваної моделі з сукупністю основних станів спінової моделі в магнетному полі на ізотропній трикутній ґратці з парними взаємодіями перших і других сусідів та тричастинковою взаємодією найближчих сусідів [17, 18], бачимо, що остання має значно багатшу різноманітність структур основного стану, попри те, що кількість параметрів в обох моделях однакова (чотири). Це пов'язано з тим, що перша модель значно

симетричніша і що її радіус взаємодії менший.

Результати нашого аналізу основних станів моделі Ізинґа в магнетному полі на анізотропній трикутній ґратці зі взаємодіями найближчих сусідів будуть корисними всім, хто матиме справу з цією моделлю.

7. Подяки

Автор висловлює вдячність І.В. Стасюкові, Т.М. Верхолякові та О.В. Величкові за обговорення результатів роботи, корисні поради та допомогу в оформленні тексту.

Література

1. H. Otsuka, Y. Okabe, and K. Okunishi, *Phase diagram and string-density plateau state of the anisotropic triangular antiferromagnetic Ising model*, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 145236 (2007).
2. H. Otsuka, Y. Okabe, and K. Okunishi, *Field-induced Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition and string-density plateau in the anisotropic triangular antiferromagnetic Ising model*, Phys. Rev. E **73**, 035105(R) (2006).
3. J. Dóczy-Réger, P. C. Hemmer, *Phase diagram of the triangular Ising antiferromagnet*, Physica A **108**, 531 (1981).
4. J. Stephenson, *Ising-Model Spin Correlations on the Triangular Lattice. IV. Anisotropic Ferromagnetic and Antiferromagnetic Lattices*, J. Math. Phys. **11**, 420 (1970).
5. K. Katsumata, H. A. Katori, S. Kimura, Y. Narumi, M. Hagiwara, and K. Kindo, *Phase transition of a triangular lattice Ising antiferromagnet FeI_2* , Phys. Rev. B **82**, 104402 (2010).
6. A. Maignan, C. Michel, A.C. Masset, C. Martin, C., and B. Raveau, *Single crystal study of the one dimensional $\text{Ca}_3\text{Co}_2\text{O}_6$ compound: Five stable configurations for the Ising triangular lattice*, Eur. Phys. J. B **15**, 657 (2000).
7. N. Terada, Y. Narumi, Y. Sawai, K. Katsumata, U. Staub, Y. Tanaka, A. Kikkawa, T. Fukui, K. Kindo, T. Yamamoto, R. Kanmuri, M. Hagiwara, H. Toyokawa, T. Ishikawa, and H. Kitamura, *Correlation between crystal structure and magnetism in the frustrated antiferromagnet CuFeO_2 under high magnetic fields*, Phys. Rev. B **75**, 224411 (2007).
8. G. H. Wannier, *Antiferromagnetism. The Triangular Ising Net*, Phys. Rev. **79**, 357 (1950); Phys. Rev. B **7**, 5017 (1973).

9. R. M. F. Houtappel, *Order-disorder in hexagonal lattices*, Physica **16**, 425 (1950).
10. C. N. Likos, *Anisotropic triangular Ising model in the extended mean-field renormalization group approach*, Phys. Rev. E **55**, 2001 (1997).
11. Y. Han, Y. Shokef, A. M. Alsayed, P. Yunker, T. C. Lubensky, and A. G. Yodh, *Geometric frustration in buckled colloidal monolayers*, Nature **456**, 898 (2008).
12. Y. Shokef, A. Souslov, and T. C. Lubensky, *Order by disorder in the antiferromagnetic Ising model on an elastic triangular lattice*, PNAS **108**, 11804 (2011).
13. Y. Shokef and T. C. Lubensky, *Stripes, Zigzags, and Slow Dynamics in Buckled Hard Spheres*, Phys. Rev. Lett. **102**, 048303 (2009).
14. M. Kaburagi, M. Kang, T. Tonegawa, and K. Okunishi, *The magnetization process of an Ising-type frustrated $S = 1$ spin chain*, J. Phys.: Condens. Matter **16**, S765 (2004).
15. T. Morita, *Ordering of one-dimensional Ising systems with an arbitrary interaction of finite range*, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. **7**, 289 (1974).
16. T. Morita, *Ordering of one-dimensional Ising systems with an arbitrary interaction of finite range II*, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. **7**, 1613 (1974).
17. Yu.I. Dublenych, *Ground states of the lattice-gas model on the triangular lattice with nearest- and next-nearest-neighbor pairwise interactions and with three-particle interaction: Full-dimensional ground states*, Phys. Rev. E **84**, 011106 (2011).
18. Yu.I. Dublenych, *Ground states of the lattice-gas model on the triangular lattice with nearest- and next-nearest-neighbor pairwise interactions and with three-particle interaction: Ground states at boundaries of full-dimensional regions*, Phys. Rev. E **84**, 061102 (2011).
19. Yu.I. Dublenych, *Ground states of lattice-gas models on the triangular and honeycomb lattices: Devil's step and quasicrystals*, Phys. Rev. E **80**, 011123 (2009).

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
 - ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services
 - INSPEC
 - Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
 - "Referativnyi Zhurnal"
 - "Dzherelo"
-

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk, *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Freiburg*; R. Folk, *Linzi*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch, *Lviv*; M. Holovko, *Lviv*; O. Ivankiv, *Lviv*; W. Janke, *Leipzig*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; H. Krienke, *Regensburg*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod, *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; N. Plakida, *Dubna*; G. Röpke, *Rostock*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; M. Vavruk, *Lviv*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2760908; Fax: +38(032)2761978
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>
