Михайло Васильович Шовгенюк
Людмила Анатоліївна Дідух

Класи подібних матриць Адамара та їх властивості

Роботу отримано 24 грудня 2009 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом СТеКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–09–11U

М.В.Шовгенюк, Л.А.Дідух

КЛАСИ ПОДІБНИХ МАТРИЦЬ АДАМАРА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

ЛЬВІВ

УДК: 519.142.6; 621.391

PACS: 02.10.Yn

Класи подібних матриць Адамара та їх властивості

М.В.Шовгенюк, Л.А.Дідух

Анотація. Проведено класифікацію множини всіх матриць Адамара розмірністю 4x4 за ознакою подібності. Досліджено властивості 4-ох типів матриць Адамара - канонічного, «світлого», матриць 50/50 та напівканонічного. Сформульовано необхідну та достатню умови подібності матриць Адамара відносно матриць перестановок. Встановлено, що існує 384 матриці Адамара 3-ох типів - канонічного, «світлого» та матриць 50/50, які належать до 6 різних класів подібності. Кожен клас подібних матриць Адамара характеризується спектром власних значень. Визначено число матриць Адамара 3-ох типів. Виявлені матриці Адамара напівканонічного типу, множина яких нараховує також 384 базові матриці, які поділяються на 4 класи подібності. Встановлена загальна кількість - 768 базових матриць Адамара розмірністю 4x4, які поділяються на 10 класів подібності.

The classes of similar Hadamard matrices and their properties

M.V.Shovgenyuk, L.A.Didukh

Abstract. The classification for the set of all Hadamard matrices with dimension 4x4 is performed on the basis of similarity. The properties of four Hadamard matrix types, namely, canonical, light, 50/50 and semicanonical ones are investigated. The necessary and sufficient condition for Hadamard matrices similarity according to the permutation matrixes is formulated. It is established the existence of 384 such matrixes belonging to 6 different classes. The every similar Hadamard matrices class is characterized by the eigenvalues spectrum. It is defined the three types of matrixes belonging to the every similarity class. Half-canonical Hadamard matrices the set of which as well consists of 384 basis matrixes classified into 4 similarity classes, are found. It is established the general number of basis Hadamard matrices, namely 768, which are classified into 10 similarity classes.

Подається в Комп'ютерні технології друкарства
Submitted to Computer Technologies of Print

1. Вступ

З появою цифрової обчислювальної техніки у світі не послаблюється інтерес до проблеми дослідження унікальних властивостей ортогональних матриць Адамара, їх систематизація та пошук нових областей практичного використання [1]. На основі матриць Адамара побудоване дискретне ортогональне перетворення Уолша-Адамара [2, 3], яке широко використовується для цифрової обробки зображень, дискретного спектрального аналізу сигналів та зображень, криптографії та кодування зображень [4]. Відомі праці [5, 6] по використанню матриць Адамара для комбінаторного аналізу та створення різноманітних кодів перетворення і передачі інформації.

Авторами [7–10] запропонований метод кодування графічних зображень впорядкованими неперіодичними бінарними структурами, побудованих на основі одного типу матриць Адамара. Зокрема встановлено [10, 11], що кодуючі структури можна класифікувати за їх частотною характеристикою.

Метою даної роботи є класифікація за ознакою подібності множини всіх ортогональних матриць Адамара розмірністю 4×4, що дозволяє виявити більш загальні властивості таких матриць для пошуку нових ефективних методів кодування графічних зображень.

2. Матриці Адамара та їх властивості

Матриця Адамара розмірністю 4×4 визначається за правилом кронекерівського добутку

$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

де H_2 - мінімальна матриця Адамара розмірністю 2×2 [2,3,12]:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (2.2)$$

Правило (2.1) можна використати на випадок побудови матриць Адамара вищих розмірностей. Якщо задані дві матриці Адамара розмірністю 4×4

$$H_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad H_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

коефіцієнти a_{ij}, b_{ij} яких приймають значення $+1, -1$, то матриця Адамара розмірністю 16×16 визначається за правилом кронекерівського добутку:

$$H_A \otimes H_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_{11}H_B & a_{12}H_B & a_{13}H_B & a_{14}H_B \\ a_{21}H_B & a_{22}H_B & a_{23}H_B & a_{24}H_B \\ a_{31}H_B & a_{32}H_B & a_{33}H_B & a_{34}H_B \\ a_{41}H_B & a_{42}H_B & a_{43}H_B & a_{44}H_B \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) більш загальна, ніж (2.1), оскільки матриць Адамара розмірності 4×4 значно більше.

Надалі будемо розглядати загальний випадок квадратних матриць Адамара $H = [h_{ij}]$ розмірністю 4×4, де елементи матриці h_{ij} рівні $1, -1$. Якщо розглядати елементи i-того рядка матриці (2.1) як координати базового вектора $\mathbf{e}_i$ $(h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4})$, то із рівняння (2.6) випливає, що скалярний добуток

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{n=1}^{4} h_{in}h_{jn} = 0 \tag{2.5}$$

є умовою ортогональності i-го і j-го рядків матриці $H = [h_{ij}]$. Тоді система 6 рівнянь (2.5) буде складати умову ортогональності всіх рядків матриці Адамара. Аналогічно (2.5) можна записати умову ортогональності всіх векторів-стовпців матриці Адамара.

Для довільної матриці Адамара H_N добуток

$$H_N \cdot H_N^T = H_N \cdot H_N^{-1} = I, \tag{2.6}$$

де I - одинична матриця. Таким чином, матриці Адамара H_N відносяться до класу ортогональних матриць [13, 14]: транспонована матриця Адамара H_N^T є і оберненою матрицею Адамара H_N^{-1}.

Зауважимо, що при множенні всіх рядків/стовпців матриць (2.1-2.3) на -1 отримуємо *інверсну* матрицю Адамара $-H$.

Матриці Адамара H характеризуються фундаментальною властивістю [1–3]: при довільних перестановках рядків чи стовпців матриці Адамара новоутворені матриці Адамара залишаються ортогональними. Також властивість ортогональності матриць Адамара не змінюється при множенні на -1 всіх елементів h_{ij} i-того рядка чи j-того стовпця матриці (2.1).

Для аналітичного опису процесу перестановок рядків/стовпців введемо, як приклад, матрицю перестановок

$$P = \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ k_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

з 4-ма коефіцієнтами $k_{ij} \neq 0$, які знаходяться на перетині i-того рядка та j-того стовпця. Кожен коефіцієнт може характеризуватися двома значеннями: $1, -1$. Тоді в залежності від величини коефіцієнтів k_{ij} матриця (2.7) має 16 різних варіантів. Всього нараховується 24 різних матриць перестановок (2.7).

Матриці перестановок (2.7) відносяться до класу ортогональних матриць. Як і для матриць Адамара, для довільної матриці перестановок виконується рівність (2.6), де одинична матриця I описує тотожну перестановку рядків/стовпців.

2.1. Типи матриць Адамара

Серед множини матриць Адамара розмірності 4×4 можна виділити чотири групи. Критерієм поділу матриць Адамара на різні типи є співвідношення елементів «$+1/-1$».

До першої з них належать матриці Адамара *канонічного* типу, в яких всі елементи одного рядка і одного стовпця рівні $+1$. Тоді всі інші три рядки/стовпці будуть мати рівну кількість елементів $+1$ і -1. В загальному випадку матриці Адамара *канонічного* типу характеризуються співвідношенням «$10/6$».

Типовим прикладом цієї групи є симетрична канонічна матриця Адамара

$$H_C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

впорядкована за числом зміни знаку в рядках/стовпцях [2, 15].

До другої групи можна віднести матриці Адамара з однаковою кількістю елементів рівних $+1$ і -1, які будемо називати «*матриці 50/50*». Характерним для цієї групи матриць Адамара є те, що два рядки і два стовпці характеризуються співвідношенням «3/1» і, відповідно, наступна пара рядків/стовпців буде характеризуватися співвідношенням «1/3».

Прикладом таких матриць є S-подібна матриця Адамара [7]

$$H_S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Група матриць Адамара 50/50 особлива тим, що інверсні матриці зберігають те саме співвідношення «8/8». Ця обставина має принципово важливе значення для кодування графічних зображень [7–11].

До третьої групи належать матриці Адамара з мінімальною кількістю елементів, рівних -1, які будемо називати «*світлими*». Ця група характеризується співвідношенням «12/4».

Прикладом є, як аналог матриці I, діагональна матриця Адамара

$$H_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Зауважимо, що матриця Адамара (2.2), як і всі подібні їй матриці розмірності 2×2, відносяться до одного канонічного типу матриць Адамара. Як видно, множина матриць Адамара розмірністю 4×4 вже включає три різні типи.

Покажемо, що існує четвертий тип матриць Адамара розмірністю 4×4, який, як показує аналіз наукових публікацій, є маловідомий.

Утворимо добутки матриць Адамара різних типів. Добуток матриць (2.8) і (2.10)

$$H_C \cdot H_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = H_D \tag{2.11}$$

дає нову матрицю Адамара H_D, яка не належить до описаних вище трьох типів. За ознакою структури рядків ця матриця відповідає канонічному типу матриць Адамара. Проте за ознаками структури стовпців вона не належить ні до матриць типу 50/50, ні до «світлих» матриць. Перший стовпець характеризується співвідношенням «3/1», а наступні три стовпці - співвідношеннями «1/3». Групу матриць з такою структурою рядків/стовпців будемо називати матрицями Адамара «*напівканонічного*» типу. Як буде показано далі, напівканонічний тип нараховує велику кількість матриць Адамара.

Слід відмітити, що при множенні двох довільних канонічних матриць, для прикладу матриць (2.1) і (2.8)

$$H_4 \cdot H_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1 \tag{2.12}$$

отримуємо матрицю перестановок P_1, яка не належить до множини матриць Адамара. Ця властивість добутків матриць Адамара поширюється на матриці типу 50/50 та «світлих» матриць, включаючи добутки матриць цих двох типів:

$$H_S \cdot H_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = P_2. \tag{2.13}$$

3. Необхідна і достатня умови подібності матриць

З теорії матриць відомо [14, 15], що матриця H_2 подібна до матриці H_1 тоді, коли існує невироджена матриця перестановок (2.7) така, що виконується умова перетворення подібності (необхідна умова)

$$H_2 = P \cdot H_1 \cdot P^{-1}. \tag{3.1}$$

Тут матриця виконує функцію трансформуючої матриці. Тоді ми можемо досліджувати класи подібних матриць Адамара відносно всеможливих перестановок рядків/стовпців однієї матриці Адамара. Відношення «H_2 подібна H_1» будемо скорочено записувати $H_2 \sim H_1$. Перетворення подібності (3.1) характеризується трьома цінними властивостями [14].

Матриця Адамара H завжди подібна сама до себе, тобто $H \sim H$, коли $P \equiv I$.

Якщо $H_2 \sim H_1$, то виконується симетричне перетворення подібності $H_1 \sim H_2$, тобто обернене перетворення подібності

$$H_1 = P^{-1} \cdot H_2 \cdot P. \tag{3.2}$$

Якщо $H_1 \sim H_2$ і $H_2 \sim H_3$, то автоматично випливає, що $H_1 \sim H_3$. Ця властивість виводиться аналітично

$$H_1 = P_1 \cdot H_2 \cdot P_1^{-1}, \quad H_2 = P_2 \cdot H_3 \cdot P_2^{-1} \to H_1 = (P_1 \cdot P_2) \cdot H_3 \cdot (P_1 \cdot P_2)^{-1}. \tag{3.3}$$

Побудуємо для довільної матриці Адамара H характеристичну матрицю $H - \lambda I$. Знайдемо визначник цієї матриці:

$$\Delta(\lambda) = \det(H - \lambda I) = \lambda^4 - a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda \pm 1, \tag{3.4}$$

який дає характеристичний многочлен 4-ої степені, коефіцієнти a_i якого однозначно визначаються елементами h_{ij} матриці Адамара. Розв'язок характеристичного рівняння $\Delta(\lambda) = 0$ дає спектр власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ матриці Адамара.

Звідси отримуємо критерій подібності [3, 12, 15]: для того, щоб дві матриці Адамара H_1 і H_2 були подібними, необхідно і достатньо, щоб вони мали один і той самий характеристичний многочлен (3.4) і, відповідно, однаковий спектр власних значень: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

4. Характеристичні рівняння різних класів матриць Адамара

Покажемо, що вся множина матриць Адамара розмірністю 4×4 поділяється на 6 різних класів. Належність тієї чи іншої матриці Адамара до кожного з цих класів описується характерним спектром власних значень.

Клас I. Для визначення групи матриць цього класу виберемо симетричну канонічну матрицю Адамара (2.8). Характеристичне рівняння матриці має вигляд:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0. \tag{4.1}$$

Звідси отримуємо, що клас I матриць Адамара описується наступним спектром дійсних власних значень:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1; \quad \lambda_4 = -1. \tag{4.2}$$

Зауважимо, що при множенні власних значень (4.2) на -1 спектр власних значень не змінюється. Таким чином, інверсна канонічна матриця Адамара $-H_C$ також описується спектром (4.2).

Тепер, використовуючи формулу (3.1), можна визначити число матриць Адамара класу I, які подібні до канонічної матриці (2.8). Проведені дослідження показали, що існує лише три відмінні між собою матриці перестановок P, які утворюють клас I подібних матриць Адамара зі спектром власних значень (4.2).

Для наглядності на рис. 1 приведений клас I подібних матриць Адамара у вигляді діаграм, де кольором позначені елементи -1, а елементам 1 відповідають світлі комірки. Як бачимо, до класу I входять матриці Адамара всіх трьох типів. Серед них найбільша кіль-

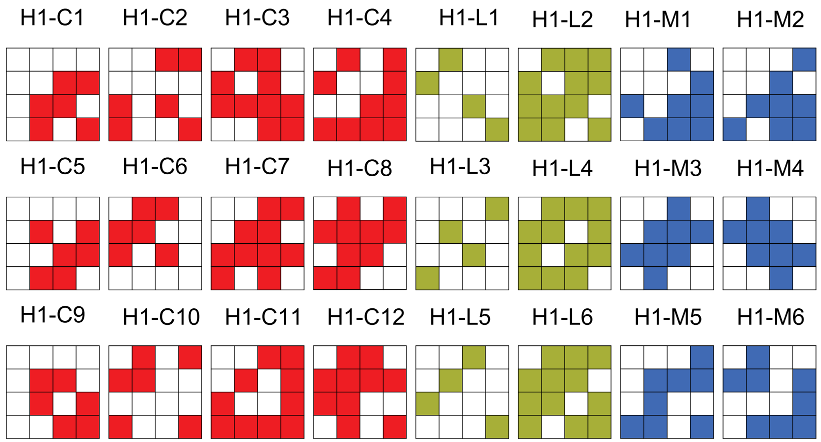

Рис. 1. Діаграми, що характеризують клас I подібних симетричних матриць Адамара.

кість канонічних матриць - 12, в позначеннях яких фігурує літера C; 6 матриць 50/50, в позначеннях яких фігурує буква M; 6 «світлих» матриць, позначених літерою L, серед яких 3 інверсні світлі матриці Адамара. Загалом клас I включає 24 симетричні матриці Адамара плюс 24 інверсні симетричні матриці, кожна з яких характеризується спектром власних значень (4.2).

Клас II. Цей клас побудований на базі симетричної «світлої» матриці Адамара (2.10), яка описується характеристичним рівнянням

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0. \tag{4.3}$$

Тоді клас II матриць Адамара має спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = -1; \quad \lambda_4 = -1. \tag{4.4}$$

Використання умови подібності (3.1) для довільно вибраної матриці перестановок P дає лише 8 симетричних матриць Адамара, які приведені на рис. 2.

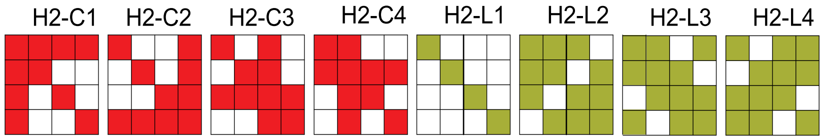

Рис. 2. Діаграми, які характеризують клас II подібних симетричних матриць Адамара.

Як видно, до класу II входить 4 інверсні симетричні матриці Адамара канонічного типу і така ж кількість «світлих» матриць Адамара, серед яких крім базової матриці $H2 - L1$, всі інверсні матриці Адамара.

Якщо вибрати за базову інверсну «світлу» матрицю Адамара (2.10), то маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = 0, \tag{4.5}$$

яке в порівнянні з рівнянням (4.3) для непарних степенів змінює знак і, відповідно, спектр власних значень рівняння (4.5)

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 1. \tag{4.6}$$

Таким спектром характеризуються ще 8 матриць Адамара класу II: 4 матриці Адамара канонічного типу (рис. 2) і кожна з L-матриць інверсна. Матриці 50/50 в цьому класі відсутні.

До класів I і II входять всі симетричні матриці Адамара, які мають дійсні спектри власних значень (4.2), (4.4) і (4.6).

Клас III. Для визначення матриць Адамара цього класу виберемо за базову S-подібну матрицю Адамара (2.9). Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд

$$\lambda^4 - 1 = 0. \tag{4.7}$$

Розв'язками цього рівняння є два дійсних та два комплексно-спряжених власних значення:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = \exp(i\pi/2); \quad \lambda_4 = \exp(-i\pi/2). \tag{4.8}$$

Слід зауважити, що при домножуванні на -1 розв'язки (4.8) переходять самі в себе. Таким чином, інверсна S-подібна матриця Адамара також буде мати характеристичне рівняння (4.7).

На рис. 3 приводяться 8 подібних матриць Адамара групи III, які генеруються діагональною матрицею перестановок. Як видно, в цю групу входять 4 матриці Адамара канонічного типу, причому 2 з них інверсні, і чотири матриці 50/50. «Світлих» матриць в групі III немає.

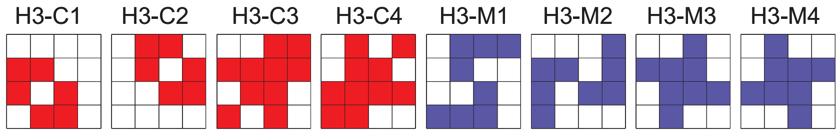

Рис. 3. Діаграми, які характеризують III клас подібних матриць Адамара.

Характерно, що всі подібні матриці Адамара групи III утворюють пари обернених матриць Адамара. Проведені дослідження показали, що група III подібних матриць Адамара генерується відповідно до формули (3.1) лише 3-ма різними матрицями перестановок P. Тоді повна група III нараховує: 12 канонічних матриць Адамара, 12 матриць 50/50, 24 інверсних канонічних і 50/50 матриць Адамара.

Клас IV. Для побудови цього класу виберемо базову матрицю

$$H_{IV} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0. \tag{4.10}$$

Звідси отримуємо спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = \exp(i\pi/2); \quad \lambda_4 = \exp(-i\pi/2). \tag{4.11}$$

Як бачимо, на відміну від попереднього класу III, тут дійсне власне значення кратне 2. На рис. 4 приведені 8 подібних матриць Адамара класу IV, які генеруються діагональною матрицею перестановок.

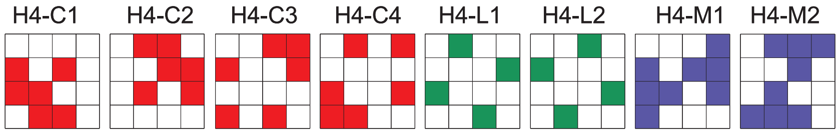

Рис. 4. Діаграми, які характеризують IV клас подібних матриць Адамара.

Як видно із рис. 4, всі три типи матриць утворюють пари взаємно-обернених матриць Адамара. Повний клас IV подібних матриць Адамара генерується 3-ма матрицями перестановок і нараховує 12 матриць канонічного типу, 6 «світлих» матриць і 6 матриць 50/50. Це саме число подібних інверсних матриць Адамара класу IV має спектр власних значень (4.11) з протилежним знаком.

Клас V. Існує новий клас подібних матриць Адамара на основі базової асиметричної матриці Адамара 50/50

$$H_V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

з характеристичним рівнянням

$$\lambda^4 + 1 = 0 \tag{4.13}$$

і спектром 2-х пар комплексно-спряжених власних значень

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \exp(i\pi/4); \quad \lambda_2 = \exp(-i\pi/4); \\ &\lambda_3 = -\exp(i\pi/4); \quad \lambda_4 = -\exp(-i\pi/4). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Слід зауважити, що ці власні значення також переходять самі в себе при домножуванні їх на -1. Тобто інверсна матриця (4.12) має аналогічний спектр власних значень (4.14).

На рис. 5 приведені 8 подібних матриць Адамара групи V, які генеруються діагональною матрицею перестановок. Ця група також складає половину матриць Адамара канонічного типу і половину матриць 50/50, які попарно взаємно-обернені.

На відміну від класу III, новий клас IV подібних асиметричних матриць Адамара із спектром власних значень (4.11) вдвічі більший і нараховує 24 канонічних матриці Адамара, 24 матриці 50/50 і 48 інверсних канонічних і 50/50 матриць Адамара.

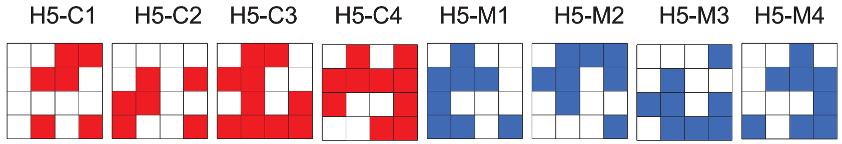

Рис. 5. Діаграми, які характеризують V клас подібних матриць Адамара.

Клас VI. За базову матрицю цього класу виберемо матрицю Адамара 50/50

$$H_{VI} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Характеристичне рівняння матриці (4.12) має вигляд

$$\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1 = 0 \tag{4.16}$$

і, відповідно, спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = -\exp(i\pi/3); \quad \lambda_4 = -\exp(-i\pi/3). \tag{4.17}$$

Очевидно, що інверсна матриця (4.15) буде характеризуватися спектром (4.17) з протилежним знаком власних значень. Слід відмітити, що спектр (4.14) характеризується двома новими комплексно-спряженими власними значеннями, які не зустрічаються в попередніх класах.

Особливістю класу VI подібних матриць Адамара є те, що він генерується максимальною кількістю різних матриць перестановок, рівною 8.

Клас VI подібних матриць включає всі три типи матриць Адамара і нараховує 32 матриці канонічного типу, 8 «світлих» матриць і 24 матриці 50/50.

На рис. 6 приведені подібні матриці Адамара класу VI для двох різних матриць перестановок. Така ілюстрація зумовлена тим, що пари взаємно-обернених матриць Адамара утворюються при використанні різних матриць перестановок.

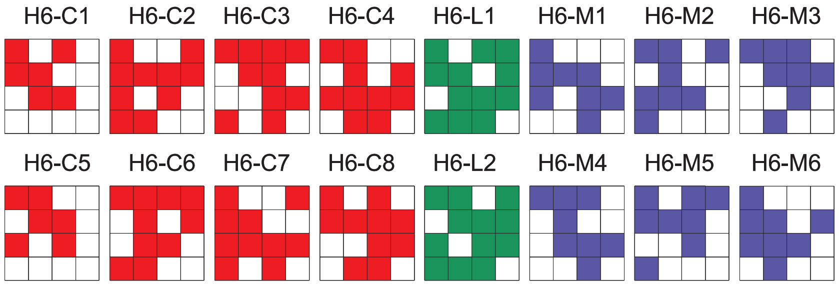

Рис. 6. Діаграми, які характеризують VI клас подібних матриць Адамара.

Характерно, що подібні матриці канонічного типу є змішаними і нараховують 3/4 інверсних матриць. Всі «світлі» матриці є інверсними. Якщо вибрати за базову інверсну матрицю (4.15), то кількість прямих і інверсних подібних матриць класу VI буде мінятися місцями.

Загалом множина симетричних подібних матриць Адамара розмірністю 4×4 складає 192 матриці і 192 інверсні матриці.

5. Характеристичні рівняння різних класів матриць Адамара напівканонічного типу

Група матриць напівканонічного типу суттєво відрізняється від інших типів матриць Адамара. Дослідимо характеристичні рівняння цієї групи матриць і проведемо їх класифікацію.

Клас D1. Для характеристики цього класу виберемо базову матрицю

$$H_{D1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Ця матриця Адамара має характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0 \tag{5.2}$$

зі спектром власних значень

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \exp(i2\pi/3), \quad \lambda_4 = \exp(-i2\pi/3). \tag{5.3}$$

Таким чином, клас D1 подібних матриць Адамара характеризується двома дійсними кратними власними значеннями 1 і двома комплексно-спряженими власними значеннями.

Цей клас нараховує 32 матриці напівканонічного типу. Отже існує лише 4 різних матриці перестановок, кожна з яких формує подібні матриці Адамара виключно напівканонічного типу.

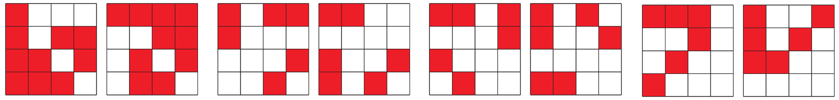

Рис. 7. Діаграми, які характеризують клас D1 подібних матриць Адамара.

Як видно із рис.7, одна матриця перестановок формує 8 подібних матриць Адамара класу D1, які утворюють чотири групи взаємнообернених матриць. Важливо відмітити, що клас D1 подібних матриць Адамара має також подібну блокову структуру.

Клас D2. Для дослідження властивостей цього класу виберемо базову матрицю

$$H_{D2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Ця матриця має інше характеристичне рівняння

$$\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0. \tag{5.5}$$

Спектр власних значень

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \exp(i\pi/3), \quad \lambda_4 = \exp(-i\pi/3) \tag{5.6}$$

класу D2 подібних матриць Адамара напівканонічного типу вже характризується двома різними дійсними власними значеннями і, відповідно, іншими двома комплексно-спряженими власними значеннями.

Клас D2 подібних матриць Адамара напівканонічного типу найбільш чисельний і нараховує 96 матриць. Таким чином, кожна із 12 матриць перестановок формує свій ряд подібних матриць Адамара класу D2.

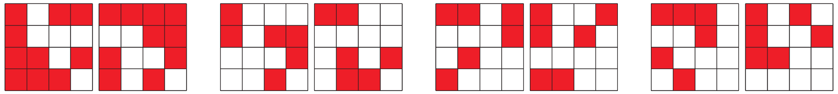

Рис. 8. Діаграми, які характеризують клас D2 подібних матриць Адамара.

На рис. 8 приведений характерний ряд класу D2 подібних матриць для базової матриці (5.3). В цьому випадку також кожна матриця Адамара має обернену подібну матрицю напівканонічного типу.

Клас D3. Характеристичне рівняння матриць цього класу

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0. \tag{5.7}$$

Спектр власних значень

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \exp(i\pi/3), \quad \lambda_2 = \exp(i\pi/3), \\ &\lambda_3 = \exp(-i\pi/3), \quad \lambda_4 = \exp(-i\pi/3). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Таким чином, клас D3 подібних матриць Адамара характризується двома комплексно-спряженими і кратними власними значеннями.

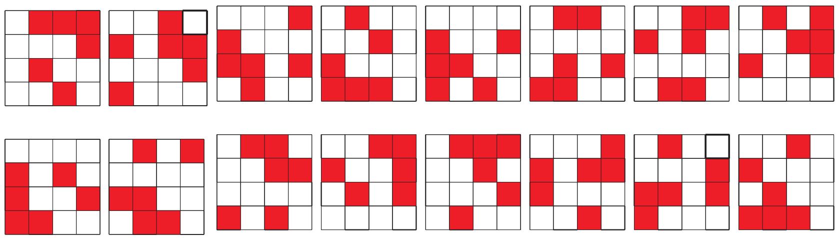

Рис. 9. Діаграми, які характеризують клас D3 подібних матриць Адамара.

Цей клас нараховує 16 матриць, які приведені на рис. 9. Як видно, на відміну від попередніх двох класів, взаємно-обернені подібні матриці Адамара класу D3 відносяться до різних матриць перестановок.

Клас D4. Характеристичне рівняння матриць цього класу

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0. \tag{5.9}$$

Спектр власних значень

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \exp(i\pi/6), \quad \lambda_2 = \exp(-i\pi/6), \\ &\lambda_3 = -\exp(i\pi/6), \quad \lambda_4 = -\exp(-i\pi/6). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Такі власні значення раніше не зустрічалися ні в одному із встановлених класів подібних матриць Адамара.

Клас D4 подібних матриць Адамара параховує 48 матриць напівканонічного типу.

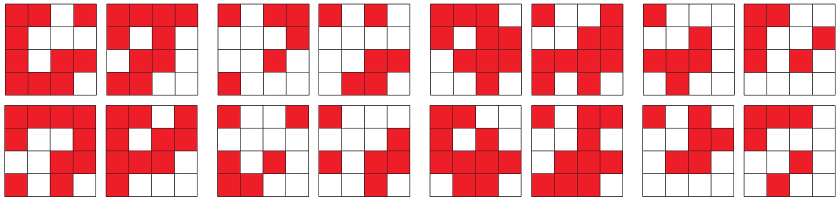

Рис. 10. Діаграми, які характеризують клас D4 подібних матриць Адамара.

На рис. 10 приведені характерні ряди подібних матриць Адамара класу D4 для двох матриць перестановок. Як видно, взаємно обернені подібні матриці Адамара також відносяться до різних матриць перестановок.

На основі отриманих результатів досліджень в табл. 1 представлена повна класифікація всіх матриць Адамара розмірності 4×4.

6. Висновок

В результаті проведених досліджень встановлено, що з використанням критерію подібності відносно всеможливих перестановок рядків/стовпців матриць Адамара розмірністю 4×4 множина матриць Адамара поділяється на 10 різних класів. Сформульовано необхідну і достатню умови подібності матриць Адамара відносно матриць перестановок і показано, що кожен клас подібних матриць Адамара характеризується спектром власних значень. Досліджено властивості

Табл. 1. *Класифікація матриць Адамара* 4×4

Класи	Типи			
	канонічний C	«світлий» L	50×50 M	напів-канонічний D
Клас I	12	6	6	–
Клас II	4	4	–	–
Клас III	12	–	12	–
Клас IV	12	6	6	–
Клас V	24	6	24	–
Клас VI	32	8	24	
Клас D1	–	–	–	32
Клас D2	–	–	–	96
Клас D3	–	–	–	16
Клас D4	–	–	–	48
Всього:	96	24	72	192

чотирьох типів матриць Адамара - канонічного, «світлого», матриць 50/50 та напівканонічного.

Множина матриць Адамара трьох типів - канонічного, «світлого» і матриць 50/50 поділяється на 6 класів подібних матриць і для кожного класу подібності визначений спектр власних значень.

Всі шість класів подібних матриць Адамара включають половину матриць канонічного типу. Проте, в кожен клас входить різна кількість матриць канонічного типу: клас I - 12 матриць; клас II - 4 матриці; клас III - 12 матриць; клас IV - 12 матриць; клас V - 24 матриці; клас VI - 32 матриць. Таким чином, їх загальна кількість - 96 матриць Адамара і 96 інверсних матриць Адамара канонічного типу.

«Світлі» матриці Адамара: клас I - 6 матриць; клас II - 4 матриці; клас IV - 6 матриць; клас VI - 8 матриць. Загальна кількість - 24 «світлі» і 24 інверсні «світлі» матриці Адамара.

Матриці Адамара 50/50: клас I - 6 матриць; клас III - 12 матриць; клас IV - 6 матриць; клас V - 24 матриці; клас VI - 24 матриці. Загальна кількість - 72 матриці і 72 інверсні матриці Адамара 50/50.

Виявлені нові матриці Адамара напівканонічного типу, які лише по рядках, чи стовпцях характеризуються властивостями матриць

Адамара канонічного типу. Встановлено, що множина матриць Адамара напівканонічного типу нараховує 384 базові матриці, що в сумі складає загальну кількість матриць Адамара канонічного типу, «світлих» та матриць 50/50. Показано, що за ознакою подібності матриці Адамара напівканонічного типу поділяються на 4 класи.

Таким чином встановлено, що існує 768 базових ортогональних матриці Адамара, кожна з яких може практично використовуватися для кодування графічних зображень, що суттєво розширює потенційні можливості запропонованого авторами методу кодування.

Література

1. K.J. Horadam. Hadamard matrices and their applications. Princeton University Press, 278 p. (2006).
2. Хармут Х. Теория секвентного анализа. Основы и применения. М.: Мир, 1980 - 574 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Книга 1. М:. Мир, 1982 - 310 с.
4. Прайт В., Кайн Ж., Эндрюс Г. Кодирование изображений с использованием преобразования Адамара // ТИИЭР, т. 57, № 1 (1969).
5. Белецкий А.Я. Комбинаторика кодов Грея. Киев: КВІЦ, 2003. - 506с.
6. Белецкий, А. Я. Квазиэквидистантные коды. - К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту "НАУ-друк 2008. - 459 с.
7. Патент України № 64836. Графічний елемент захисту банкнот, цінних паперів, документів та спосіб його виготовлення // Автори: Шовгенюк М.В., Білорус В.Є., Козловський М.П., Крохмальський Т.Є. 2004 р. Бюл. № 3.
8. Шовгенюк М., Дідух Л. Графічний елемент захисту цінних паперів // Комп'ютерні технології друкарства, №16, 2006 - с.245-251.
9. Шовгенюк М.В., Дідух Л.А. Метод кодування графічних зображень та впровадження нової технології захисту цінних паперів // Наука та інновації, 2009, Т.5., №1, С. 50-60.
10. Дидух Л.А., Шовгенюк М.В. Методы кодирования графических изображений с использованием матриц Адамара // Международная конференция "PRINT-2009 г. Санкт-Петербург, апрель 2009.
11. Шовгенюк М.В., Дідух Л.А. Властивості неперіодичних структур для кодування зображень у технологіях захисту цінних па-

перів // Управління розвитком, № 15, Харків, Вид. ХНЕУ, 2008, с.14-15.

12. Hadamard J. Resolution d'une Question Relative aux Determinants // Bull. Sci. Math. Ser. 2, 17, Part 1, P. 240-246 (1893).
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988 - 550 с.
14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989 - 655 с.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968, - 720с.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alrting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2760908; Fax: +38(032)2761978
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua   http://www.icmp.lviv.ua