

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Михайло Павлович Козловський

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ОПИСУ КРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ 3D ІЗИНГОПОДІБНОЇ МОДЕЛІ В ЗОВНІШНЬОМУ ПОЛІ

Роботу отримано 5 березня 2008 р.

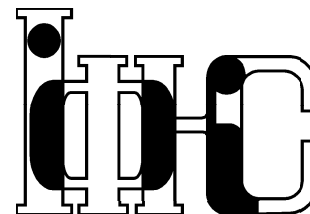
Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділу СТеКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-08-10U

М.П.Козловський

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ КРИТИЧНОЇ
ПОВЕДІНКИ 3D ІЗИНГОПОДІБНОЇ МОДЕЛІ В
ЗОВНІШНЬОМУ ПОЛІ

ЛЬВІВ

УДК: 536.75; 538.9; 548:537.621; 538.955-405

PACS: 05.50.+q, 05.70.Ce, 64.60.Fr, 75.10.Nk

Аналітичний метод опису критичної поведінки 3D ізингоподібної моделі в зовнішньому полі

М.П.Козловський

Анотація. Розвинуто метод аналітичного розрахунку фізичних характеристик 3D ізингоподібної моделі поблизу точки фазового переходу. На основі аналізу рекурентних співвідношень між коефіцієнтами, що характеризують ефективні блочні спіни встановлена область значень хвильових векторів, для якої флуктуації параметру порядку описуються негаусовим розподілом флуктуацій. Знайдена залежність величини цієї області від температури та значення зовнішнього поля. Це дозволило знайти вираз для вільної енергії, параметра порядку та сприйнятливості системи поблизу точки фазового переходу. Одним із результатів розрахунку є кросверна форма рівняння стану, яке в граничних випадках (малих температур чи полів) переходить у відомі на сьогодні рівняння стану.

Analytical method for description of the critical behaviour of 3D Ising-like model in an external field

М.Р.Kozlovskii

Abstract. The method of analytic calculations for physical characteristics of the 3D Ising-like model near the phase transition point is developed. Basing on the analysis of recurrent relations among coefficients, which characterize the effective block spins, the region of wave vectors for which the order parameter fluctuations are described by non-Gaussian measure density is established. The dependence of the region width on the temperature and field value is found. It allows us to find expressions for the free energy, order parameter and susceptibility of the system near the phase transition point. The crossover form of the equation of state, which can transfer into the well-known equations of state in the limit cases, is one of the results of calculations.

Подається в Український фізичний журнал
Submitted to Ukrainian Journal of Physics

© Інститут фізики конденсованих систем 2008
Institute for Condensed Matter Physics 2008

В роботі запропонований метод розрахунку основних величин, що характеризують поведінку тривимірної ізингоподібної моделі поблизу точки фазового переходу (ТФП) при наявності зовнішнього поля. Він ґрунтується на використанні підходу запропонованого в [1] та використовує результати досліджень, виконаних в [2, 3]. Як було показано в цих роботах, використання розподілу флуктуацій параметра порядку в вигляді поліному за колективними змінними (КЗ) $\rho_{\vec{k}}$ в показнику експоненти не передбачає використання непарних степенів цієї змінної за винятком першої. Їхній вклад в фізичні величини є зникаюче малим, оскільки при операції зсуву [4, 5] такі доданки зникають.

Використовуючи результати робіт [4,6], запишемо функціональне представлення моделі Ізінга в зовнішньому полі h

$$Z = Z_0 Z_j^{-N_0} \int (d\eta)^{N_0} \exp \left[a_1 \sqrt{N_0} \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_0} d(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} - \frac{a_4}{4!} N_0^{-1} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_n} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n} \right]. \quad (1)$$

Тут використане наближення моделі η^4 , хоча це не принципово. Узагальнення на випадок вищих моделей η^{2m} можна виконати подібно до [7]. Інтегрування в (1) відбувається за N_0 колективними змінними ($N_0 = N \cdot s_0^{-d}$, N – число частинок, s_0 – параметр моделі ($s_0 > 1$) [4,5]) $\eta_{\vec{k}} = \eta_{\vec{k}}^c - i\eta_{\vec{k}}^s$, дійсна та уявна частини яких приймають значення із області дійсних чисел [1]. Елемент об'єму фазового простору КЗ має вигляд

$$(d\eta)^{N_0} = d\eta_0 \prod'_{k \in \mathcal{B}_0} d\eta_{\vec{k}}^c d\eta_{\vec{k}}^s,$$

де штрих біля знаку добутку означає, що $k > 0$. Величина $d(k)$ включає фур'є-образ $\Phi(k)$ деякого короткодіючого потенціалу взаємодії [5, 6]

$$d(k) = \tilde{a}_2 - \beta\Phi(k), \quad (2)$$

тут β – обернена температура, $\tilde{a} = a_2 + \beta\Phi(0)\bar{\Phi}$, а $\bar{\Phi}$ – параметр потенціалу взаємодії [7, 8]. Для коефіцієнтів a_n в [4] отримані вирази

$$\begin{aligned} a_1 &= s_0^{d/2} h', \\ a_2 &= 1 - \epsilon + \frac{2}{3} \epsilon^2, \\ a_4 &= 2\epsilon(1 - 3\epsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

де $h' = \beta h$, $\epsilon = s_0^{-d}$. Розглядається випадок $d = 3$. Величина ϵ використовується в якості малого параметра, оскільки параметр s_0 приймає великі значення ($s_0 \geq 2$) [4].

Для фур'є-образу потенціалу взаємодії $\Phi(k)$ використовується наступна апроксимація

$$\Phi(k) = \begin{cases} \Phi(0)(1 - 2b^2k^2), & \vec{k} \in \mathcal{B}_0 \\ \Phi_0 = \Phi(0)\bar{\Phi}, & \vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0, \end{cases} \quad (4)$$

де постійна величина $\bar{\Phi} \leq 1$. Область значень хвильового вектора $\vec{k} \in \mathcal{B}$ визначає першу зону Бріллоена простої кубічної ґратки з періодом c

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c} + \frac{2\pi}{c} \frac{n_i}{N_i}; n_i = 1, 2, \dots, N_i; i = x, y, z \right\}, \quad (5)$$

де $N = N_x N_y N_z$ – загальне число вузлів ґратки, а область значень

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_0} + \frac{2\pi}{c_0} \frac{n_i}{N_{0i}}; n_i = 1, 2, \dots, N_{0i}; i = x, y, z \right\}, \quad (6)$$

де $N_0 = N_{0x} N_{0y} N_{0z}$ – відповідає першій зоні Бріллоена для такої ж ґратки з періодом $c_0 = c \cdot s_0$. Параметр s_0 вибирається з умови, яка забезпечує параболічну апроксимацію фур'є-образу деякого короткосяжного потенціалу $\Phi_G(k)$ в області значень $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$ типу $\Phi(0)(1 - const k^2)$. Так для експонентно-спадного потенціалу $\Phi(r) = A \exp(-r/b)$ маємо наступний фур'є-образ

$$\Phi_G(k) = \Phi(0)(1 + b^2k^2)^{-2}, \quad (7)$$

де $\Phi(0) = A \cdot 8\pi(b/c)^3$. При достатньо малих значеннях $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$ вираз (7) достатньо добре описується параболічною апроксимацією $\Phi(k) = \Phi(0)(1 - 2b^2k^2)$. Подібна ситуація має місце для потенціалу взаємодії найближчих сусідів, який традиційно використовується при описі фазових переходів. Зрозуміло, що для цього потенціалу $s_0 > 2$.

Основний вклад в фізичні характеристики системи поблизу точки фазового переходу здійснюється за рахунок врахування довгохвильових флуктуацій параметра порядку. Тому, врахування явної залежності від хвильового вектора особливо важливе для області $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$. Що стосується великих значень хвильових векторів $\vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$,

то для опису критичної поведінки системи тут достатньо обмежитись для $\Phi(k)$ деяким постійним значенням Φ_0 .

Умовою застосовності параболічної апроксимації для (7) є співвідношення

$$\Phi(B_0) = \Phi(0)(1 - 2b^2B_0^2) \geq \alpha' \Phi(0), \quad (8)$$

де $B_0 = B/s_0$ (тут $B = \pi/c$ – границя півзони Бріллоена \mathcal{B} , а параметр α' змінюється в інтервалі $0 \leq \alpha' \leq \bar{\Phi}$). Для величини $\bar{\Phi}$ маємо

$$\bar{\Phi} = \langle \Phi_G(k) \rangle + \Phi_\infty, \quad (9)$$

де $\langle \Phi_G(k) \rangle$ – середнє значення (7) для $\vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$, а постійна Φ_∞ визначає асимптотику температури фазового переходу в границі $b/c \rightarrow \infty$.

Величина Z_0 із (1) має вигляд [4]

$$Z_0 = 2^N (chh')^N \exp\left(\frac{1}{2} N \beta \Phi(0) \bar{\Phi}\right), \quad (10)$$

а Z_j відповідає за нормування функції переходу від спінових σ_i до колективних змінних

$$\eta_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{i}} \sigma_i e^{-i\vec{k}\vec{i}}$$

та має вигляд [4]

$$Z_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left(a_1 \sqrt{N_0} \eta - \frac{1}{2} a_2 \eta^2 - \frac{1}{4!} a_4 \eta^4 - \frac{1}{6!} a_6 \eta^6\right). \quad (11)$$

Розрахунок (1) здійснюватимемо, використовуючи ідею конструювання блочних ґраток [9] відповідно до гіпотези Каданова [10]. Перша реалізація цієї гіпотези на мікроскопічному рівні була здійснена в роботах К. Вільсона [11, 12]. Шляхом послідовного виключення з розгляду змінних $\eta_{\vec{k}}$ із великими значеннями хвильових векторів (т.з. процедура згладжування) йому вдалося в такий спосіб побудувати послідовність ефективних блочних ґраток та встановити закон їхньої еволюції. Основною ланкою проведених розрахунків стали рекурентні співвідношення (РС) між коефіцієнтами розподілів флуктуацій параметра порядку двох суміжних блочних структур. Поряд з безсумнівним успіхом підходу Вільсона він мав суттєвий недолік. Виконання процедури згладжування здійснювалося з використанням гаусового розподілу флуктуацій. На даний час достовірно встановлено [1, 8], що такий підхід не дозволяє виконати коректний

розрахунок статистичної суми тривимірної статистичної системи з реалістичним потенціалом взаємодії поблизу точки фазового переходу. Використання гаусового розподілу флуктуацій в якості базисного дає незадовільний опис фазового переходу другого роду (вільна енергія та термодинамічні характеристики, сприйнятливості тощо), як це показано зокрема в [1, 8].

Реалізований в даній роботі підхід базується, на відміну від підходу Вільсона, на використанні негаусових базисних розподілах флуктуацій параметра порядку, як це було запропоновано в методі І.Р. Юхновського [1, 8]. Це дозволяє усунути з розгляду сингулярності математичного характеру та описати фізичні особливості поведінки системи при наближенні до точки фазового переходу $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ ($\tau = (T - T_c)/T_c$), де T_c – температура фазового переходу).

1. Метод розрахунку статистичної суми поблизу ТФП при наявності поля

Виконаємо поетапний розрахунок виразу для статистичної суми (1). Скористаємося для цього результатами робіт [1, 8], де запропонований аналітичний спосіб виключення з розгляду змінних $\eta_{\vec{k}}$ з великими значеннями хвильових векторів. На першому етапі інтегрування виключається множина змінних $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$, де

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_1} + \frac{2\pi}{c_1} \frac{n_i}{N_{1i}}; n_i = 1, 2, \dots, N_{1i}; i = x, y, z \right\}. \quad (1.1)$$

Тут $c_1 = c_0 \cdot s$, де параметр $s (s > 1)$ визначає період ефективної блочної ґратки з періодом $c_1 > c_0$, $N_1 = N_{1x}N_{1y}N_{1z}$ – число вузлів цієї ґратки, $N_1 = N_0 s^{-d}$. Зауважимо, що значення параметра s відрізняється від s_0 тим, що він може приймати довільні значення більші від одиниці. На відміну від s параметр s_0 є фіксованим для кожної конкретної фізичної системи і визначається виглядом фур'є-образу потенціалу взаємодії.

Подальший опис процедури виключення з розгляду “несуттєвих” змінних $\eta_{\vec{k}}$ здійснюється схематично, оскільки це детально описано в [1]. Основну увагу звернуто на модифікацію підходу [8], пов'язану із відмінністю від нуля величини $\bar{\Phi}$ із (4), та використанню умови нормування функції переходу від спінових до колективних змінних, що приводить до відповідного вкладу у статистичну суму системи (11).

Загальна методика інтегрування за $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$ передбачає заміну величини $\Phi(k)$ із (4) деяким середнім значенням $\Phi(B_1, B)$. При цьому, для величини $d(k)$ із (2) маємо

$$\langle d(k) \rangle_{\mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1} = a_2 - \beta\Phi(0)(1 - \bar{\Phi}) + 2\beta\Phi(0)b^2 \langle k^2 \rangle. \quad (1.2)$$

Для простоти подальшого розгляду визначимо $\langle k^2 \rangle$ як середнє арифметичне значення k^2 в області хвильових векторів $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$. Маємо

$$\langle k^2 \rangle = \frac{\pi^2}{c^2} s_0^{-2} \frac{1}{2} (1 + s^{-2}).$$

Тоді

$$d(B_1, B_0) = \tilde{d}(0) + q, \quad (1.3)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{d}(0) &= \tilde{a}_2 - \beta\Phi(0), \quad \tilde{a}_2 = a_2 + \beta\Phi(0)\bar{\Phi}, \\ q &= \beta\Phi(0)\bar{q}, \quad \bar{q} = \frac{1}{2}(1 + s^{-2})(1 - \alpha'). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величина α' із (8) є додатною постійною. При виконанні числових оцінок виберемо α' таким, щоб виконувалася рівність

$$\bar{q} = 0.5. \quad (1.5)$$

Для виконання (1.5) необхідно, щоб $\alpha' = s^{-2}/(1 + s^{-2})$. Відповідно до виконаного вище усереднення (1.2) коефіцієнт $d(k)$ має вигляд

$$d(k) = \begin{cases} d(k), & \vec{k} \in \mathcal{B}_1, \\ d(B_1, B_0), & \vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Наближення (1.6) має позитивні та негативні наслідки. З однієї сторони воно дозволяє виконати в (1) інтегрування за змінними $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$, не використовуючи розкладу в ряд доданку, пропорційного до четвертого степеня $\eta_{\vec{k}}$, як це робиться в підходах [13-15], а залишаючи його в показнику експоненти. Це дозволяє уникнути появи нефізичних розбіжностей, які мають місце у випадку використання теорії збурень за гаусовим розподілом, оскільки в ТФП коефіцієнт біля другого степеня змінної $\eta_{\vec{k}}$ обертається в нуль, а при $T < T_c$ стає від'ємним, що і є причиною виникнення таких розбіжностей.

З іншої сторони наближення (1.6) приводить до обертання в нуль критичного показника кореляційної функції. Щоб отримати в рамках даного підходу значення $\eta \neq 0$ необхідно врахувати поправки

на усереднення потенціалу. Така методика описана в [1, 8]. Надалі обмежимося випадком $\eta = 0$, оскільки основна увага приділяється вивченню принципів моментів схеми опису поведінки магнетика в зовнішньому полі поблизу ТФП.

Результатом поетапного розрахунку статистичної суми (1) для послідовності n_p ефективних блочних структур є вираз

$$Z = Z_0 Z_j^{-N_0} [Q(d)]^{N_0} \left(\prod_{n=1}^{n_p} Q_n \right) Z_{LGR}, \quad (1.7)$$

де відповідно до [8] маємо

$$Q(d) = (2\pi)^{1/2} (3/a_4)^{1/4} \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) U(0, x). \quad (1.8)$$

Аргумент x функції параболічного циліндра Вебера $U(0, x)$ має вигляд

$$x = d(B_1, B_0) (3/a_4)^{1/2}, \quad (1.9)$$

а для самих функцій має місце інтегральне представлення

$$U(a, x) = \frac{2}{\Gamma(a + \frac{1}{2})} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \int_0^\infty t^{2a} \exp\left(-xt^2 - \frac{1}{2}t^4\right) dt. \quad (1.10)$$

Величини Q_n являють собою парціальні статистичні суми n -того рівня

$$Q_n = [Q(P_{n-1})Q(d_n)]^{N_n}, \quad (1.11)$$

де $N_n = N_0 s^{-3n}$, s – параметр поділу простору КЗ на підпростори ($s \geq 1$),

$$Q(d_n) = (2\pi)^{1/2} \left(3/a_4^{(n)}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{x_n^2}{4}\right) U(0, x_n),$$

$$Q(P_n) = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{a_4^{(n)}}{\varphi(x_n)}\right)^{1/4} s^{3/4} \exp\left(\frac{y_n^2}{4}\right) U(0, y_n). \quad (1.12)$$

Для аргументів x_n та y_n маємо вирази

$$x_n = d_n(B_{n+1}, B_n) \left(\frac{3}{a_4^{(n)}}\right)^{1/2},$$

$$y_n = s^{3/2} U(x_n) \left(\frac{3}{\varphi(x_n)}\right)^{1/2}, \quad (1.13)$$

де

$$d_n(B_{n+1}, B_n) = a_2^{(n)} - \beta\Phi(B_{n+1}, B_n). \quad (1.14)$$

Величина $\Phi(B_{n+1}, B_n)$ є середнім значенням фур'є-образу потенціалу (4) для значень $\vec{k} \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n+1}$. Тут

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_n} + \frac{2\pi}{c_n} \frac{n_i}{N_{ni}}; n_i = 1, 2, \dots, N_{ni}; i = x, y, z \right\}, \quad (1.15)$$

де $c_n = c_0 s^n$, $N_n = N_{nx} N_{ny} N_{nz}$ число вузлів n -ої ефективної блочної структури, причому $N_n = N_0 s^{-3n}$. Для спеціальних функцій $U(t)$ та $\varphi(t)$ маємо

$$U(t) = U(1, t)/U(0, t); \quad \varphi(t) = 3U^2(t) + 2tU(t) - 2. \quad (1.16)$$

Для величин $d_n(B_{n+1}, B_n)$ та $a_4^{(n)}$ мають місце рекурентні співвідношення (РС). Їхній явний вигляд отриманий в [4]. Якщо ввести позначення

$$d_n(B_{n+1}, B_n) = d_n(0) + qs^{-2n}, \quad q = \beta\Phi(0)\bar{q},$$

$$a_1^{(n)} = s^{-n}w_n, \quad d_n(0) = s^{-2n}r_n, \quad a_4^{(n)} = s^{-4n}u_n,$$

тоді маємо

$$w_{n+1} = s^{\frac{d+2}{2}} w_n,$$

$$r_{n+1} = s^2 [-q + (r_n + q)N(x_n)],$$

$$u_{n+1} = su_n E(x_n), \quad (1.17)$$

де

$$N(x_n) = \frac{y_n U(y_n)}{x_n U(x_n)}, \quad E(x_n) = s^{2d} \frac{\varphi(y_n)}{\varphi(x_n)}.$$

Для початкових значень величин w_n , r_n та u_n (при $n = 0$) маємо

$$w_0 = s_0^{d/2} h', \quad r_0 = a_2 - \beta\Phi(0)(1 - \bar{\Phi}), \quad u_0 = a_4, \quad (1.18)$$

де $h' = \beta h$, а величини a_2, a_4 приведені в (3).

Рекурентні співвідношення (1.17) відрізняються від РС, отриманих в [1, 8], наявністю додаткового рівняння для величини w_n , що відображає факт наявності зовнішнього поля.

У виразі (1.7) залишилась не визначеною величина Z_{LGR} . Вона має вигляд

$$Z_{LGR} = 2^{(N_{n_p} - 1)/2} Q(P_{n_p})^{N_{n_p+1}} Z_{n_p+1}, \quad (1.19)$$

де

$$\begin{aligned} Z_{n_p+1} &= \\ &= \int (d\eta)^{N_{n_p+1}} \exp \left(a_1^{(n_p+1)} N_{n_p+1}^{1/2} \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_{n_p+1}} d_{n_p+1}(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_4^{(n_p+1)}}{4!} N_{n_p+1}^{-1} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n_p+1}}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Номер n_p характеризує ефективну блочну структуру спінів з періодом ґратки c_{n_p} , де

$$c_{n_p} = c_0 s^{n_p}. \quad (1.21)$$

Представлення статистичної суми у вигляді (1.7) пов'язане із наявністю поблизу ТФП нового масштабу віддалі. Якщо далеко від ТФП такою віддалю є постійна ґратки c , то поблизу ТФП її роль відіграє кореляційна довжина $\xi = c_{n_p}$ для якої при $h = 0$ маємо

$$\xi = \xi_0 |\tau|^{-\nu}, \quad (1.22)$$

де ξ_0 – критична амплітуда, а ν – критичний показник цієї величини, $\tau = (T - T_c)/T_c$.

Якщо величина періоду c_n ефективної блочної ґратки менша за c_{n_p} , то в системі має місце ренормгрупова симетрія [8] і для всіх $n < n_{n_p}$ загальні РС (1.17) можуть бути замінені наближеними РС, які відповідають їхній лінеаризації поблизу нерухокої точки. Процедура лінеаризації описана нижче. У випадку, коли $c_n > c_{n_p}$ ренормгрупова симетрія порушується і при розрахунку вкладу до вільної енергії системи слід використовувати загальні, а не лінеаризовані поблизу фіксованої точки рекурентні співвідношення.

Зауважимо, що виконані нижче розрахунки стосуються області температур $|\tau| < \tau^*$, де $\tau^* \sim 10^{-2}$. Якихось обмежень на величину поля h накладати не будемо.

2. Визначення точки виходу із критичного режиму флуктуацій параметра порядку при наявності поля

Для розрахунку виразу (1.7) необхідно визначити величину n_p . Зауважимо, що в принципі, результат обчислення (1.7) не залежить від вибору значення n_p . Фактично величина n_p розділяє статистичну суму (1.7) на дві частини. Перша з них враховує вклади від КЗ $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{n_p+1}$. Друга частина відповідає вкладам від КЗ $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+1}$, включаючи вклади від “макроскопічної” змінної η_0 . Зменшення чи збільшення величини n_p приводить лише до перенесення вкладів з однієї частини статистичної суми до іншої, що в принципі не повинно впливати на загальний результат розрахунку. Метою введення величини n_p є оптимізація математичних розрахунків поблизу ТФП, оскільки при їхньому виконанні будуть здійснюватися певні наближення. Якщо би розрахунки проводилися точно, то вибір величини n_p був би довільним. Однак, вже лінеаризація загальних РС (1.17) поблизу фіксованої точки передбачає певні обмеження на величину n_p .

Як було показано в [8] для випадку $h = 0$, вклади до першої частини статистичної суми (1.7) (ділянка критичного режиму флуктуацій параметра порядку) відповідають за формування критичних показників. Тут мають місце негаусові розподіли флуктуацій параметра порядку. Для вкладів другого типу (змінні $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+1}$) характерні гаусові розподіли флуктуацій. Саме такого типу розподіли мають місце для всіх $\eta_{\vec{k}}$ при віддаленні системи від ТФП ($\tau > \tau^*$, $h > h^*$), оскільки в цьому випадку кореляційна довжина стає порядку сталої ґратки.

Таким чином, умова на знаходження величини n_p співпадає з умовою застосовності лінеаризованої форми рекурентних співвідношень по відношенню до їх загального виду (1.17). Для всіх $n \leq n_p$ співвідношення (1.17) можуть бути замінені лінеаризованою формою поблизу фіксованої точки. При $n > n_p$ відбувається зміна форми розподілу флуктуацій з негаусового на гаусовий. Флуктуації параметра порядку стають незалежними і подальше інтегрування за змінними $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+1}$ не приводить до перенормування ефективних взаємодій.

Величина n_p визначає період деякої особливої ефективної блочної ґратки (1.15), яка розділяє два різних флуктуаційних процеси. Для всіх ефективних блочних ґраток (при заданих τ та h) з періодом меншим за c_{n_p} має місце перенормування ефективних вза-

емодій. Коли $c_n > c_{n_p}$, то таке перенормування припиняється. Це дозволяє утотожити величину c_{n_p} із кореляційною довжиною системи при заданих τ та h .

Дослідимо властивості РС (1.17). Їхня фіксована точка знайдена в загальному випадку в [8]. Зокрема, було показано, що величина y_n із (1.13) приймає великі значення. Приймаючи це до уваги, співвідношення (1.17) можна записати в спрощеному виді (Додаток 1)

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= s^{\frac{d+2}{2}} w_n, \\ r_{n+1} &= s^2 \left[-q + \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{3}} \frac{1}{U(x_n)} - \frac{1}{2s^3} \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{3}} \frac{\varphi(x_n)}{U^3(x_n)} \right], \\ u_{n+1} &= s u_n \frac{\varphi(x_n)}{3U^4(x_n)} \left[1 - \frac{7}{2} s^{-3} \frac{\varphi(x_n)}{U^2(x_n)} \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Використання РС у формі (2.1) є особливо зручним, коли аргумент

$$x_n = \sqrt{3}(r_n + q)/\sqrt{u_n} \quad (2.2)$$

приймає малі значення поблизу нерухомої точки (w^*, r^*, u^*) .

В загальному випадку величина аргументу в фіксованій точці x^* залежить від параметра ренормгрупи s . Як показано в Додатку 1 при $s = s^*$ ($s^* = 3.5977$) величина $x^* = 0$. При цьому координати нерухомої точки є наступними

$$w^* = 0, \quad r^* = -f_0 \beta \Phi(0), \quad u^* = \varphi_0 (\beta \Phi(0))^2, \quad (2.3)$$

де

$$f_0 = \bar{q} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0^{1/2} = f_0 (1 - s^{-2}) \sqrt{3} U(0) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y_0^2} \right).$$

Тут

$$y_0 = s^{3/2} y_0^{(0)}, \quad y_0^{(0)} = U(0) \left(\frac{3}{\varphi(0)} \right)^{1/2}.$$

Таким чином, вибираючи в якості параметра РГ $s = s^*$ для координат фіксованої точки РС (1.17) знаходимо значення

$$f_0 = 0.5, \quad \varphi_0 = 0.5939. \quad (2.4)$$

Зауважимо, що постійні f_0 та φ_0 не залежать від мікроскопічних параметрів системи та присутності зовнішнього поля.

Запишемо розв'язки РС (2.1) в околі фіксованої точки (w^*, r^*, u^*) в вигляді розкладу за власними векторами матриці \mathcal{R} лінеаризованого перетворення:

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} - w^* \\ r_{n+1} - r^* \\ u_{n+1} - u^* \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} w_n - w^* \\ r_n - r^* \\ u_n - u^* \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} w_n &= s_0^{d/2} h' E_1^n, \\ r_n &= r^* + c_1 E_2^n + c_2 R E_3^n, \\ u_n &= u^* + c_1 R_1 E_2^n + c_3 E_3^n, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де E_l – власні значення матриці \mathcal{R} . При $s = s^*$ отримуємо (див. Додаток 1) наступні числові значення

$$E_1 = s^{\frac{d+2}{2}} = 24,551, \quad E_2 = 8,308, \quad E_3 = 0.374. \quad (2.7)$$

Величини R та R_1 із (2.6) мають вигляд

$$R = R^{(0)} (u^*)^{-1/2}, \quad R_1 = R_1^{(0)} (u^*)^{1/2}.$$

Тут $R^{(0)}$ та $R_1^{(0)}$ – універсальні постійні (приведені в Додатку 1), які при $s = s^*$ приймають значення

$$R^{(0)} = -0.530, \quad R_1^{(0)} = 0.162.$$

Коефіцієнти c_1 та c_2 є функціями температури

$$\begin{aligned} c_1 &= [a_2 + \beta \Phi(0)(\bar{\Phi} - 1) - r^* - R(a_4 - u^*)] \mathcal{D}^{-1}, \\ c_2 &= [a_4 - u^* - R_1(a_2 - \beta \Phi(0)(1 - \bar{\Phi})) + r^* R_1] \mathcal{D}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

де

$$\mathcal{D} = (E_2 - E_3)/(R_{22} - E_3) = 1.086.$$

Присутність зовнішнього постійного поля змінює тип фіксованої точки РС (2.1). Із однократно нестійкої (при $h = 0$) вона стає двократно нестійкою ($E_1 > 1, E_2 > 1 < E_3 < 1$). Із ростом n кожна з величин w_n, r_n та u_n із (2.6) буде віддалятися від свого фіксованого значення. Відхилення величини w_n пов'язане із власним значенням E_1 , а відхилення величин r_n та u_n відбувається за рахунок E_2 .

Легко бачити, що існує температура $T = T_c$, при якій

$$c_1(T_c) = 0. \quad (2.9)$$

Випадок $h \neq 0$ та $T = T_c$ відповідає однократно нестійкій фіксованій точці РС (1.17). Відхилення від фіксованої точки пов'язане лише із значенням $E_1 > 1$, оскільки $c_1(T_c)E_2^n = 0$.

Єдиний випадок, коли всі три величини w_n , r_n та u_n при $n \rightarrow \infty$ прямують до своїх фіксованих значень відповідає умові

$$h = 0; \quad T = T_c. \quad (2.10)$$

Це і є визначення координат точки фазового переходу другого роду в запропонованому нижче підході.

Використаємо рівність (2.9) для розрахунку температури фазового переходу T_c . Приймаючи до уваги (2.8), отримуємо рівняння

$$Ax^2 + Bx + D = 0, \quad (2.11)$$

де $x = \beta_c \Phi(0)$, а для коефіцієнтів (2.11) маємо

$$\begin{aligned} A &= 1 - f_0 - R^{(0)}\varphi_0^{1/2} - \bar{\Phi}, \\ B &= -a_2, \quad D = a_4 R^{(0)}\varphi_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В якості величини $\bar{\Phi}$ використовується вираз (9), де постійна Φ_∞ знаходиться з умови $\beta_c \Phi(0) = 1$ при $b/c \rightarrow \infty$. Останнє приводить до рівності

$$\Phi_\infty = \bar{q}(1 + R^{(0)}\varphi_0^{1/2}). \quad (2.13)$$

Як видно із (2.12), (2.13) значення температури фазового переходу залежить від параметра s_0 , який визначає фур'є-образ потенціалу взаємодії для великих значень хвильового вектора, а також від відношення b/c (b – радіус дії вихідного потенціалу взаємодії, c – стала простої кубічної ґратки). Розв'язки (2.11) як функції b/c при деяких фіксованих значеннях s_0 приведені на Рис. 1. По осі ординат приведена величина оберненої температури $J_c = \beta_c \Phi(0)/6$. Її значення перенормоване на число найближчих сусідів для простої кубічної ґратки. Легко бачити, що з ростом радіуса дії потенціалу b величина J_c спадає і має слабку залежність від параметра s_0 . Числові розрахунки температури фазового переходу 3D моделі Ізінга з потенціалом взаємодії найближчих сусідів дають значення $J_c = 0,221655 \pm 0,00002$ [15]. Для модифікованої моделі Ізінга [16] значення J_c отримане шляхом числового розрахунку при виборі параметра $\lambda = 1.1$ (яке мінімізує поправки до скейлінгу) приймає значення $J_c = 0.3750966(4)$. Очевидно, що зі зміною λ значення J_c також зміниться.

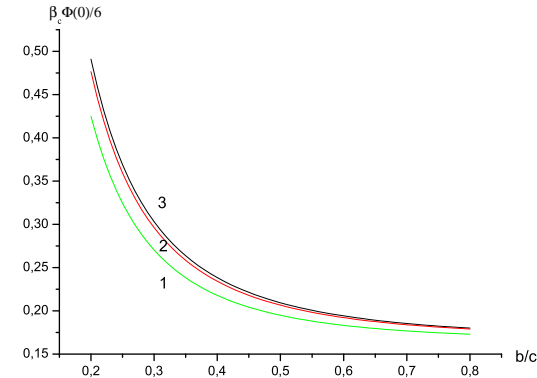


Рис. 1. Залежність оберненої температури фазового переходу (нормованої на число найближчих сусідів $z = 6$) від радіуса дії потенціалу b при різних значеннях параметра s_0 : крива 1 відповідає значенню $s_0 = 2, 0$; крива 2 – $s_0 = 3, 0$; крива 3 – $s_0 = 4, 0$.

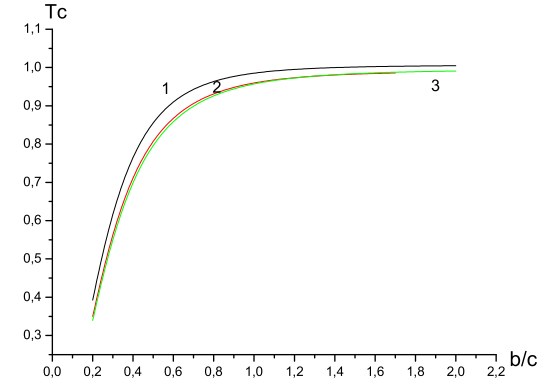


Рис. 2. Залежність прямої температури фазового переходу T_c від радіуса дії потенціалу b : крива 1 відповідає значенню $s_0 = 2, 0$; крива 2 – $s_0 = 3, 0$; крива 3 – $s_0 = 4, 0$.

На Рис. 2 приведена залежність прямої температури фазового переходу T_c (в одиницях $\Phi(0)/k$, де $\Phi(0)$ – значення фур'є-образу потенціалу взаємодії при нульовому значення хвильового вектора, а k – постійна Больцмана) від радіуса дії потенціалу. Як свідчать результати розрахунку, при $b > c$ значення T_c перестає залежати від b та прямує до величини, яка співпадає із даними інших теорій (молекулярне поле, гаусове наближення тощо). Однак в області значень $b < c$ маємо суттєву залежність T_c від радіуса дії потенціалу для всіх значень $s_0 \geq 2$. Приведений вище спосіб розрахунку температури фазового переходу дозволяє встановити її залежність від радіуса дії потенціалу (параметр b/c). Крім того, значення T_c залежить від вигляду типу потенціалу взаємодії (4), в якому закладений параметр s_0 .

Обчислене вище значення температури фазового переходу T_c дозволяє записати розв'язки (2.6) як функцій відносної температури $\tau = (T - T_c)/T_c$ та поля h . Маємо

$$\begin{aligned} w_n &= s_0^{d/2} \beta h E_1^n, \\ r_n &= \beta \Phi(0) \left[-f_0 + c_{1T} \tau E_2^n + R^{(0)} \varphi_0^{-1/2} c_{2T} E_3^n \right], \\ u_n &= (\beta \Phi(0))^2 \left[\varphi_0 + c_{1T} \tau \varphi_0^{1/2} R_1^{(0)} E_2^n + c_{2T} E_3^n \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тут використані рівності

$$c_1 = \beta \Phi(0) \tau c_{1T}, \quad c_2 = (\beta \Phi(0))^2 c_{2T}, \quad (2.15)$$

де

$$c_{1T} = c_{1k} + \tau c_{1k1}, \quad (2.16)$$

а для c_{1k} та c_{1k1} маємо

$$\begin{aligned} c_{1k} &= [c_{11} + c_{12} (\beta_c \Phi(0))^{-2}] \mathcal{D}^{-1}, \\ c_{1k1} &= c_{12} (\beta_c \Phi(0))^{-2} \mathcal{D}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

причому

$$c_{11} = 1 + \bar{\Phi} - f_0 - R^{(0)} \varphi_0^{1/2}, \quad c_{12} = -a_4 R^{(0)} \varphi_0^{-1/2}.$$

Для величини c_{2T} отримуємо

$$c_{2T} = c_{2k} + c_{2k1} \tau + c_{2k2} \tau^2. \quad (2.18)$$

Тут

$$\begin{aligned} c_{2k} &= [c_{23} + c_{22} (\beta_c \Phi(0))^{-1} + a_4 (\beta_c \Phi(0))^{-2}] \mathcal{D}^{-1}, \\ c_{2k1} &= [c_{22} (\beta_c \Phi(0))^{-1} + 2a_4 (\beta_c \Phi(0))^{-2}] \mathcal{D}^{-1}, \\ c_{2k2} &= a_4 (\beta_c \Phi(0))^{-2} \mathcal{D}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для скорочення запису (2.19) введені позначення

$$c_{22} = -a_2 R_1^{(0)} \varphi_0^{1/2},$$

$$c_{23} = R_1^{(0)} \varphi_0^{1/2} (1 - f_0 + \bar{\Phi}) - \varphi_0.$$

Розв'язки РС (2.14) дозволяють отримати значення $n = n_p$, при якій величини w_n, r_n та u_n починають відрізнятися від їхніх значень у фіксованій точці. Очевидно, що в точці фазового переходу ($\tau = 0, h = 0$) значення $n_p \rightarrow \infty$, оскільки $E_3 < 1$. При відхиленні від ТФП можливі три різні типи поведінки величини n_p .

Перший з них відповідає умові відсутності зовнішнього поля. Він був детально досліджений в [1, 8], де використовувалося позначення $n_p = m_\tau$, причому

$$m_\tau = -\frac{\ln |\tilde{\tau}|}{\ln E_2} - 1. \quad (2.20)$$

Для зручності тут використана перенормована відносна температура

$$\tilde{\tau} = \tau (c_{1k} / f_0). \quad (2.21)$$

Умова на визначення величини m_τ сформульована в [1] і має вигляд

$$r_{n_p+1} - r^* = \frac{-\tau}{|\tau|} r^*. \quad (2.22)$$

Інший тип критичної поведінки має місце для випадку $\tau = 0$ при $h \rightarrow 0$. Величини r_n та u_n в цьому випадку прямують до фіксованих значень, а точка виходу системи із критичного режиму флуктуацій параметра порядку (позначимо її через n_h) визначається із умови

$$w_{n_h+1} - w^* = h_0, \quad (2.23)$$

де h_0 – деякий параметр, який задає умову нормування критичної амплітуди кореляційної довжини (при $T = T_c$) і визначається з умови нормування намагніченості M при $T = T_c$ [17,18] (Додаток 2)

$$M(\tau = 0) = (h')^{1/\delta},$$

де δ – критичний показник параметра порядку. Приймаючи до уваги (2.14), отримуємо

$$n_h = -\frac{\ln \tilde{h}}{\ln E_1} - 1. \quad (2.24)$$

Тут введене позначення

$$\tilde{h} = s_0^{d/2} (h'/h_0). \quad (2.25)$$

Найбільш загальний тип критичної поведінки має місце для випадку $\tau \neq 0$ та $h \neq 0$. Виявляється, що точка виходу n_p в загальному випадку залежить від співвідношення між величинами τ та h . Як було встановлено в [19, 20] існує деяке граничне (температурне) поле h_c , яке розділяє область значень полів на сильні та слабкі. Таке значення знаходимо із умови

$$m_\tau = n_h.$$

Використовуючи (2.20) та (2.24), отримуємо

$$h_c = |\tilde{\tau}|^{p_0}, \quad (2.26)$$

де для критичного показника p_0 маємо

$$p_0 = \frac{\ln E_1}{\ln E_2} = \nu/\mu, \quad \mu = \frac{2}{d+2}. \quad (2.27)$$

Тут ν – критичний показник кореляційної довжини, який характеризує її поведінку при $h = 0$ і обчислюється із співвідношення

$$\nu = \frac{\ln s^*}{\ln E_2}, \quad (2.28)$$

а критичний показник μ – описує польову поведінку кореляційної довжини при $T = T_c$. Він залежить лише від вимірності простору і визначається відповідними рекурентними співвідношеннями. В загальному випадку, крім критичних показників ν та μ система характеризується також критичним показником кореляційної функції η . Для тривимірної моделі Ізінга він приймає значення $\eta = 0.04$.

З метою спрощення подальшого викладу величина η покладається рівною нулеві. Для критичного показника ν надалі використовуватимемо значення $\nu = 0.605$, яке слідує із наближених РС (2.1) та власних значень (2.7) матриці лінеаризованого ренормгрупового перетворення (2.5). Воно дещо відрізняється від значення $\nu_c = 0.630$,

що відповідає стандартній моделі Ізінга. Відмінність критичних показників пов'язана з використанням в даній роботі найпростішого наближення для якобіану переходу від спінових до КЗ. З ростом наближення значення ν зростають (див. [7,8]) і наближаються до ν_c .

Приймаючи до уваги (2.26), рівність (2.20) можна записати у вигляді

$$m_\tau = -\frac{\ln h_c}{\ln E_1} - 1. \quad (2.29)$$

Порівнюючи (2.24) та (2.29), знаходимо їхню функціональну подібність. Зауважимо, що $\tilde{\tau}$ в (2.20) та \tilde{h} в (2.24) є додатніми величинами. Загальний вираз для точки виходу системи із критичного режиму флуктуацій параметра порядку при $T > T_c$ запишемо у вигляді [21]

$$n_p = -\frac{\ln(\tilde{h}^2 + h_c^2)}{2 \ln E_1} - 1. \quad (2.30)$$

В граничних випадках він переходить в відомі вирази (в (2.20) при $h = 0$ та в (2.24) при $\tau = 0$). Саме цей вираз будемо використовувати надалі в (1.7) при розрахунку статистичної суми поблизу ТФП при $T > T_c$.

Для температур $T < T_c$ формула (2.30) має дещо інший вигляд. Це пов'язано з наявністю в системі відмінного від нуля параметра порядку. Спонтанний спіновий момент індукує деяке внутрішнє магнітне поле, яке має прийматися до уваги при визначенні n'_p -точки виходу системи з участку КРФ при $T < T_c$. Як відомо [8], наявність відмінного від нуля параметра порядку (а отже спряженого до нього поля) спричиняє зменшення точки виходу з КРФ. При $T > T_c$ таким полем є лише зовнішнє поле і точка виходу n_p має вигляд (2.30). При $T < T_c$ крім зовнішнього поля h' в системі наявне внутрішнє поле (впорядкування), що неодмінно приводить до зменшення точки виходу n'_p з участку КРФ. Даний ефект проявляється в “чистому вигляді” при $h = 0$, де має місце співвідношення

$$n'_p = n_p - n_0, \quad (2.31)$$

тут n_0 – постійна величина ($n_0 \geq 0$). Скориставшись із (2.29), знаходимо для області температур $T < T_c$ величину n'_p при $h = 0$ (позначимо її через μ_τ)

$$\mu_\tau = -\frac{\ln h_c}{\ln E_1} - n_0 - 1 = -\frac{\ln h_{cm}}{\ln E_1} - 1, \quad (2.32)$$

де

$$h_{cm} = \tau_1^{p_0}, \quad (2.33)$$

а величина τ_1 пов'язана з відносною температурою τ співвідношенням

$$\tau_1 = -\tau \frac{c_{1k}}{f_0} E_2^{n_0}. \quad (2.34)$$

За наявності зовнішнього поля точка виходу системи з КРФ при $T < T_c$ має вигляд

$$n'_p = -\frac{\ln(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2)}{2 \ln E_1} - 1. \quad (2.35)$$

Вирази (2.30) та (2.35) визначають точку виходу системи з КРФ при $T > T_c$ та $T < T_c$ відповідно. Вони мають однаковий функціональний вигляд і співпадають при $T = T_c$. Відрізняються вони різним масштабом виміру температури для діапазонів температур вищих та нижчих за T_c і пов'язані між собою співвідношенням

$$\tau_1 = -\tilde{\tau} E_2^{n_0}.$$

В подальших розрахунках будемо використовувати в якості точки виходу з критичного режиму флуктуацій параметра порядку формулу (2.30) для діапазону температур $T \geq T_c$, а також формулу (2.35) при $T \leq T_c$. Зауважимо, що для випадку $T = T_c$ ці формули співпадають.

3. Кореляційна довжина

Процедура поетапного виключення з розгляду змінних $\eta_{\vec{k}}$ в (1) відповідає переходу в координатному просторі до ефективних блочних спінів в дусі гіпотези Каданова [9-12]. Величина періоду ефективної блочної ґратки $c_n = c_0 s^n$ ($c_0 = c_{s_0}$) зростає із збільшенням номера ітерації n . Поблизу ТФП в системі виникає особливий негаусовий режим флуктуацій параметра порядку для ефективних блочних ґраток із $n \leq n_p$, де має місце ренормгрупова симетрія. Як слідує із (2.14) для всіх $n \leq n_p$ величини w_n , r_n та u_n є близькими до їхніх значень у фіксованій точці (2.3). Для $n > n_p$ ці величини відхиляються від їхніх значень у нерухомій точці і система переходить в гаусовий (невзаємодіючий) режим флуктуацій. При цьому величина n_p (або n'_p при $T < T_c$) визначає величину періоду ґратки c_{n_p} , яка є співвимірною із кореляційною довжиною системи ξ . Розглянемо поведінку величини

$$\xi = c_{n_p} \quad (3.1)$$

як функції температури і поля. Для температур $T \geq T_c$ в якості n_p використаємо (2.30). Маємо

$$\xi/c = \xi_0 \left(\tilde{h}^2 + \tilde{\tau}^{(d+2)\nu} \right)^{-\frac{1}{d+2}}. \quad (3.2)$$

Тут $\xi_0 = (s_0/s)$, де c – період початкової ґратки, s_0 – параметр фур'є-образу потенціалу (4), s – параметр ренормгрупи, \tilde{h} – перенормоване поле (2.25), а $\tilde{\tau}$ – перенормована відносна температура (2.21).

Легко бачити, що у випадку $T = T_c$ формула (3.2) переходить у рівність

$$\xi/c = \xi_c (h')^{-\mu}, \quad (3.3)$$

де μ – критичний показник із (2.27), а для критичної амплітуди ξ_c із врахуванням (2.25) знаходимо

$$\xi_c = \xi_0 \left(\frac{h_0}{s_0^{3/2}} \right)^\mu = \frac{1}{s} (s_0 h_0)^\mu. \quad (3.4)$$

Абсолютне значення ξ_c визначається мікроскопічними параметрами моделі s та s_0 та величиною h_0 , яка відповідно до (2.25) визначає нормування величини \tilde{h} . З іншого боку, значення ξ_c відоме з числових розрахунків, зокрема [18]. Порівнюючи величину ξ_c із значенням $\xi^c = 0.3048(9)$ із роботи [18] знаходимо, що для значень $s = s^*$ та $s_0 = 2$ параметр h_0 із (2.23) є порядку одиниці, а точніше

$$h_0 \approx 0.760. \quad (3.5)$$

В іншій границі ($h = 0$) формула (3.2) переходить в рівність

$$\xi/c = \xi^+ |\tau|^{-\nu}, \quad (3.6)$$

де

$$\xi^+ = \xi_0 \left(\frac{f_0}{c_{1k}} \right)^\nu = \frac{s_0}{s} \left(\frac{f_0}{c_{1k}} \right)^\nu. \quad (3.7)$$

Для області температур $T < T_c$ формула (3.1) записується у вигляді

$$\xi' = c'_{n_p}, \quad (3.8)$$

де величина n'_p має вигляд (2.35). Тому для всіх $T \leq T_c$

$$\xi'/c = \xi_0 \left(\tilde{h}^2 + \tau_1^{(d+2)\nu} \right)^{-\frac{1}{d+2}}. \quad (3.9)$$

Єдина відмінність (3.9) від (3.2) полягає в зміні масштабу виміру температури. Очевидно, що при $T = T_c$ формула (3.9) переходить в (3.3) (як це було у випадку (3.2)). При $h = 0$ формула (3.9), яка відповідає області $T \leq T_c$, набуває вигляду

$$\xi'/c = \xi^- |\tau|^{-\nu}, \quad (3.10)$$

де

$$\xi^- = \xi_0 \left(\frac{f_0}{c_{1k}} E_2^{-n_0} \right)^\nu. \quad (3.11)$$

Критична амплітуда ξ^- містить параметр n_0 , який характеризує зміщення точки виходу системи з режиму КРФ при $T > T_c$ та $T < T_c$ (формула (2.31)). Величину цього параметра знаходимо з порівняння відношення

$$\xi^+/\xi^- = E_2^{\nu n_0}, \quad (3.12)$$

яке слідує із виразів (3.7) та (3.11) із даними числового розрахунку $\xi^+/\xi^- = 1.896(10)$ [17,18]. Приймаючи до уваги, що $\nu = \ln s / \ln E_2$ знаходимо

$$n_0 = \frac{\ln(\xi^+/\xi^-)}{\ln s}. \quad (3.13)$$

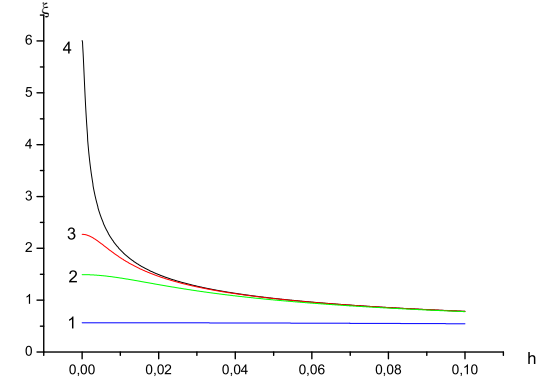
Для випадку $s = s^*$ маємо $n_0 = 0.50$. В роботі [8], де досліджувалася критична поведінка моделі Ізінга при відсутності поля, величина $n_0 = 1$. Легко бачити, що при збільшенні параметра s величина n_0 зменшується. Загалом маємо $0 \leq n_0 \leq 1$.

Таким чином, використовуючи відомі експериментальні факти (як відношення критичних амплітуд) та дані числового розрахунку [17,18] можна стверджувати, що при $s = s^*$ та $s_0 = 2$ параметри h_0 із (2.23) та n_0 із (2.31) приймають значення

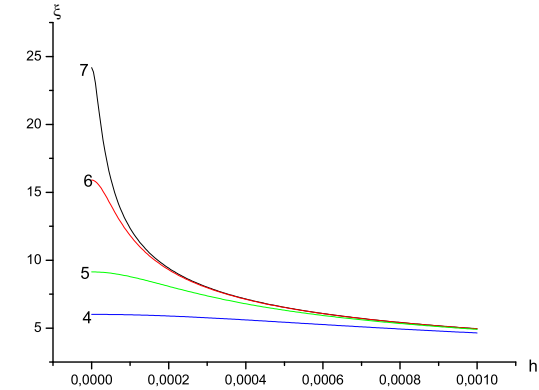
$$h_0 = 0.760, \quad n_0 = 1/2. \quad (3.14)$$

Саме такі значення будемо використовувати нижче, для ілюстрації критичної поведінки тривимірної спінової моделі з однокомпонентним параметром порядку.

На Рис. 3 зображена залежність величини ξ як функції поля h' при фіксованому значенні температури τ (при $s_0 = 2$ та $b/c = 0.5$). Випадок а) відповідає великим значенням τ , які не належать до критичної області температур. Випадок в) демонструє зростання ξ при зменшенні величини поля для значень τ із критичної області температур. Легко бачити, що при великих значеннях відносної температури $\tau \simeq 0,1$ кореляційна довжина є порядку сталої ґратки.



a)



b)

Рис. 3. Залежність кореляційної довжини від зовнішнього поля h' при деяких фіксованих значеннях температури $\tau = (T - T_c)/T_c$ при $s_0 = 2$ та $b/c = 0.5$. Випадок а): $\tau_1=0,5$, $\tau_2=0,1$, $\tau_3=0,05$, $\tau_4=0,01$. Випадок б): $\tau_4=0,01$, $\tau_5=0,005$, $\tau_6=0,002$, $\tau_7=0,001$.

Зростання ξ із зменшенням поля спостерігається лише для $\tau < 0,1$, причому при $\tau^* = 10^{-2}$ (що відповідає границі критичної області температур $|\tau| \leq 10^{-2}$) знаходимо, що $\xi \sim 6c$, при $\tau = 10^{-3}$ маємо $\xi \sim 25c$, якщо $h = 0$. У випадку $\tau = const \neq 0$ та $h \neq 0$ величина ξ є суттєво меншою за $\xi(h = 0)$ як це видно із Рис. 3.

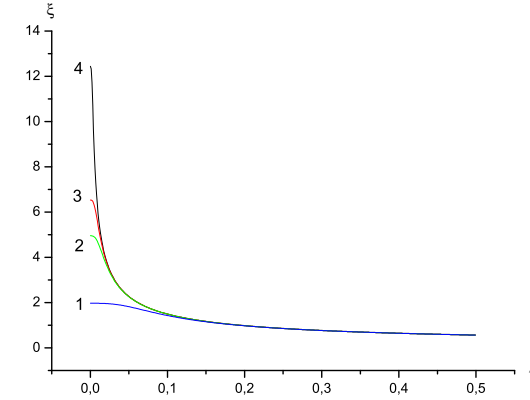
Подібна ситуація має місце при фіксованих значеннях поля h' із зменшенням τ . На Рис. 4 зображена температурна залежність кореляційної довжини ξ (в одиницях сталої ґратки c) для деяких значень поля $h' = h\beta$ (при $s_0 = 2$ та $b/c = 0.5$). Легко бачити, що для значень $h' \geq 0.01$ кореляційна довжина залишається порядку сталої ґратки c навіть при $\tau = 0$. Значення ξ при $\tau = 10^{-2}$ та $h' = 0$, що відповідає границі критичної області температур (при відсутності поля) досягається при $\tau = 0$ та $h' \sim 5 \cdot 10^{-4}$. З ростом τ маємо зменшення ξ . Таким чином, величина критичної області для даної моделі ($s_0 = 2$, $b/c = 0.5$) залежить як від поля h' , так і від відносної температури τ . Однак ці значення не можуть перевищувати величин τ^* та h^* , для яких маємо

$$\tau^* \approx 10^{-2}; \quad h^* \approx 0.5 \cdot 10^{-3}. \quad (3.15)$$

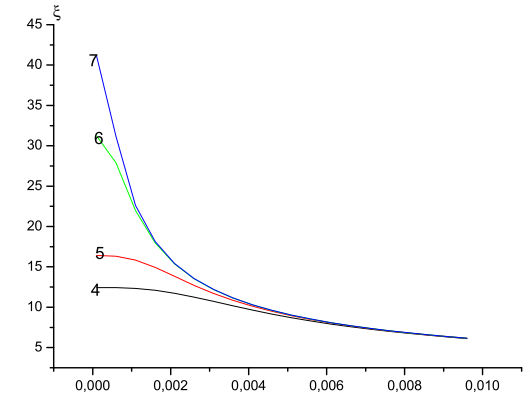
Використовуючи формулу (3.2) та приймаючи до уваги нормування величин $\tilde{\tau}$ та \tilde{h} (формули (2.21) та (2.25)) легко отримати значення τ^* та h^* для інших значень мікроскопічних параметрів гамільтоніану s_0 та b/c .

Формула (3.2) дозволяє знайти залежність кореляційної довжини в часткових випадках. Так при $h = 0$ із (3.2) отримуємо відому залежність (1.22). При цьому значення критичного показника ν визначається для кожного значення вимірності простору d конкретним виглядом РС. Використані в роботі РС (2.6) при $d = 3$ дають значення $\nu = 0.61$. У випадку $d = 4$ РС (2.1) набувають спрощеної форми [8], і дають значення $\nu = 0.5$. Для двовимірної задачі $\nu = 1$, як це слідує із точного розв'язку. Для $d = 2$ РС (2.1) суттєво ускладнюються і потребують окремого дослідження [1].

Значення польового критичного показника кореляційної довжини μ із (2.27) визначається виключно вимірністю простору. Очевидно, що при $d = 3$ маємо $\mu = 0.4$. Для випадку $d = 4$ отримуємо $\mu = 1/3$, що співпадає з результатом розрахунку теорії Ландау. Для двовимірної задачі (2.27) дає значення $\mu = 0.5$, що незначно відрізняється від $\mu = 8/15$ знайденого із співвідношення скейлінгу $\mu(\beta + \gamma) = \nu$, де при $d = 2$ відомі точні значення величин β , γ та ν ($\beta = 0.125$, $\gamma = 1.75$, $\nu = 1.0$).



a)



b)

Рис. 4. Залежність кореляційної довжини від температури τ при фіксованому зовнішньому полі h' ($s_0 = 2$ та $d/c = 0.5$). Випадок а: $h_1=0.01$, $h_2=0.001$, $h_3=0.0005$, $h_4=0.0001$. Випадок б: $h_4=0.0001$, $h_5=0.00005$, $h_6=0.00001$, $h_7=0.000005$.

4. Схема розрахунку вільної енергії для області температур $T > T_c$

Розрахунок вільної енергії системи однокомпонентних спінів поблизу ТФП будемо здійснювати із використанням виразу для статистичної суми (1.7). Основною відмінністю такого розрахунку у випадку наявності поля (від його відсутності [8]), є необхідність використання узагальненої точки виходу системи з критичного режиму флуктуацій параметра порядку. У випадку $T > T_c$ координати цієї точки (на площині поле – відносна температура) задаються виразом (2.30). Зобразимо вільну енергію у вигляді декількох доданків

$$F = F_0 + F_1 + F_{CR}^{(+)} + F_{LGR}. \quad (4.1)$$

Кожен з цих доданків – вклад певного множника виразу (1.7). Так

$$F_0 = -kTN[\ln 2 + \ln \operatorname{ch} h'] - \frac{1}{2}N\Phi(0)\bar{\Phi} \quad (4.2)$$

відповідає виразу Z_0 і описує вільну енергію невзаємодіючих спінів. Для F_1 маємо вираз (див. Додаток 3)

$$F_1 = kTN \left[F_{01} + F_{02}h'^2 - F_{03}\tau - F_{04}\tau^2 \right], \quad (4.3)$$

де F_{0n} – постійні коефіцієнти, приведені в (ДЗ.16).

Доданок $F_{CR}^{(+)}$ відповідає вкладу до вільної енергії від ділянки критичного режиму флуктуацій. Відповідно до (1.7) він має вигляд

$$F_{CR}^{(+)} = -kT \sum_{n=1}^{n_p} N_n f_n, \quad (4.4)$$

де $N_n = N_0 \cdot s^{-3n}$, а для функції $f_n(x_n, y_{n-1})$ справедливий вираз

$$f_n = \frac{1}{4} \ln(3/\varphi(y_{n-1})) + \frac{1}{4} (x_n^2 + y_{n-1}^2) + \ln U(0, x_n) + \ln U(0, y_{n-1}). \quad (4.5)$$

Відмінність (4.4) від аналогічної формули, що використовувалася у випадку відсутності поля [7], полягає у використанні більш загального виразу для точки виходу з ділянки критичного режиму флуктуацій n_p . Величини x_n та y_n , що входять до (4.5), приведені в (1.13).

Доданок F_{LGR} має вигляд

$$F_{LGR} = -kT \ln Z_{LGR}, \quad (4.6)$$

де вираз для L_{LGR} приведений в (1.19). Зауважимо, що Z_{n_p+1} із (1.20) може бути зображено у вигляді, подібному до вкладу від ділянки критичного режиму флуктуацій, тобто через добуток парціальних статистичних сум. Тоді для (4.6) маємо

$$F_{LGR} = F_{TR}^{(+)} + F'. \quad (4.7)$$

Тут

$$F_{TR}^{(+)} = -kTN_0 s^{-3(n_p+1)} \sum_{m=1}^{m_0} s^{-3(m-1)} f_{n_p+m}, \quad (4.8)$$

де для f_{n_p+m} маємо (4.5) при $n = n_p + m$, а для F' отримуємо

$$F' = -kTN \ln Z'. \quad (4.9)$$

Тут

$$Z' = 2^{(N_{n'+1}-1)/2} [Q(P_{n'})]^{N_{n'+1}} Z_{n'+1}, \quad (4.10)$$

де величина $n' = n_p + m_0$ є номером деякої блочної структури спінів, причому $n' > n_p$. Величина $Q(P_{n'})$ співпадає із (1.12) при $n = n'$, а для $Z_{n'+1}$ маємо вираз (1.20), в якому замість n_p слід підставити n' .

Зауважимо принципову різницю між $F_{CR}^{(+)}$ із (4.4) та $F_{TR}^{(+)}$ із (4.8). Хоча вони мають однаковий функціональний вигляд, значення аргументів x_n та y_n в цих виразах різні за величиною. Якщо для $F_{CR}^{(+)}$ (область $n < n_p$) ці величини є близькими до їхніх значень поблизу фіксованої точки ($x_n \approx x^*$, $y_n \approx y^*$), то при розрахунку $F_{TR}^{(+)}$ (область $n_p < n \leq n_p + m_0$) слід приймати до уваги їхнє відхилення від фіксованої точки.

Знайдемо величину $F_{CR}^{(+)}$ із (4.4). Для цього слід виділити явну залежність величини f_n від n . Такі розрахунки виконані в [8]. Було встановлено, що аргумент y_n для будь-яких значень температури приймає великі значення. Тому для функцій параболічного циліндра $U(0, y_n)$ та їхніх комбінацій $U(y_n)$ та $\varphi(y_n)$ із (1.16) використовуються асимптотичні розклади

$$\begin{aligned} U(0, y_n) &= y_n^{-1/2} e^{-y_n^2/4} \left(1 - \frac{3}{8} y_n^{-2} + \frac{105}{108} y_n^{-4} \right), \\ U(y_n) &= y_n^{-1} \left(1 - \frac{3}{2} y_n^{-2} + 6 y_n^{-4} \right), \\ \varphi(y_n) &= 3 y_n^{-4} \left(1 - \frac{21}{2} y_n^{-2} + \frac{447}{4} y_n^{-4} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Маємо спрощений вираз для f_n із (4.5)

$$f_n = \frac{1}{2} \ln y_{n-1} + \frac{9}{4} y_{n-1}^{-2} + \frac{x_n^2}{4} + \ln U(0, x_n) + 0(y_{n-1})^{-4}. \quad (4.12)$$

Обмежимося надалі випадком, коли значення величини x_n у фіксованій точці обертається в нуль ($x^* = 0$). Він реалізується при певному значенні параметра ренормалізаційної групи $s = s^*$, де $s^* = 3.5977$ (Додаток 1). В цьому випадку для всіх $n \leq n_p$ маємо $x_n \ll 1$ і величину (4.12) можна зобразити у вигляді

$$f_n = f_{CR}^{(0)} + A_1 x_{n-1} + A_3 x_n, \quad (4.13)$$

де

$$f_{CR}^{(0)} = \frac{1}{2} \ln y_0 + \frac{9}{4} y_0^{-2} + \ln U(0, 0),$$

$$y_0 = s^{3/2} y_0^{(0)}, \quad y_0^{(0)} = U(0) (3/\varphi(0))^{1/2},$$

а для коефіцієнтів A_l маємо

$$A_1 = \frac{1}{2} r_1 \left(1 - 9(y_0^{(0)})^{-2}\right), \quad A_3 = -\frac{1}{2} U(0), \quad (4.14)$$

де коефіцієнт r_1 виражається через функції параболічного циліндра $U(0)$, $\varphi(0)$ та їхні похідні. В (4.13) обмежимося врахуванням доданків лінійних за величиною x_n . Врахування квадратичних доданків детально описано в [8]. Приймаючи до уваги результати Додатку 4, знаходимо

$$f_{CR}^{(0)} = 1.496, \quad A_1 = 0.115, \quad A_3 = -0.478. \quad (4.15)$$

Скориставшись із явних розв'язків РС (2.12) в області $n \leq n_p$ отримуємо вираз для x_n :

$$x_n = c_{1T} B_3 \tau E_2^n + c_{2T}^2 B_6 \tau^2 E_3^{2n}. \quad (4.16)$$

Тут не приймаються до уваги доданки пропорційні до E_3^n ($E_3 < 1$), а для коефіцієнтів B_l маємо

$$B_3 = \sqrt{3} \varphi_0^{-1/2}, \quad B_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_1^{(0)} \varphi_0^{-1}.$$

Приймаючи до уваги (4.16) із (4.12) знаходимо

$$f_n = f_{CR}^{(0)} + d_1 c_{1T} \tau E_2^n + d_3 c_{2T}^2 \tau^2 E_3^{2n}, \quad (4.17)$$

де

$$d_1 = B_3(A_3 + A_1/E_2), \quad d_3 = B_6(A_3 + A_1/E_2^2).$$

Використаємо (4.17) для розрахунку (4.4). Зауважимо, що завдяки (2.30) мають місце рівності

$$s^{-(n_p+1)} = \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{1}{d+2}}, \quad E_1^{n_p+1} = \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{-1/2},$$

$$\tilde{\tau} E_2^{n_p+1} = H_c, \quad H_c = \tilde{\tau} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{-1/2p_0},$$

$$E_3^{n_p+1} = H_3, \quad H_3 = \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\Delta/2p_0}. \quad (4.18)$$

Тут використані позначення

$$\nu = \frac{\ln s^*}{\ln E_2}, \quad \Delta = -\frac{\ln E_3}{\ln E_2}, \quad p_0 = \frac{\ln E_1}{\ln E_2} = \frac{d+2}{2} \nu, \quad (4.19)$$

де ν – критичний показник кореляційної довжини, Δ – критичний показник поправки до скейлінгу, p_0 – кросоверний критичний показник. Для моделі ρ^4 при $s = s^*$ вони приймають значення¹

$$\nu = 0.605, \quad \Delta = 0.465, \quad p_0 = 1.512.$$

Результат розрахунку (4.4) має вигляд

$$F_{CR}^{(+)} = -kTN_0 (\gamma_{01} + \gamma_{02}\tau + \gamma_{03}\tau^2) + F_{CR}^{(s)}, \quad (4.20)$$

де для коефіцієнтів γ_{0l} в Додатку 4 знайдені вирази

$$\gamma_{01} = s^{-3} f_{CR}^{(0)} (1 - s^{-3})^{-1},$$

$$\gamma_{02} = s^{-3} d_1 c_{1k} E_2 (1 - E_2 s^{-3})^{-1}, \quad (4.21)$$

$$\gamma_{03} = s^{-3} d_3 c_{1k}^2 E_2^2 (1 - s^{-3} E_2^2)^{-1} + s^{-3} c_{1k1} d_1 E_2 (1 - E_2 s^{-3})^{-1},$$

які співпадають з результатами аналогічних обчислень у випадку відсутності поля [8]. Сингулярна частина $F_{CR}^{(s)}$ виразу (4.20) має вигляд

$$F_{CR}^{(s)} = kTN_0 \bar{\gamma}^+ s^{-3(n_p+1)}. \quad (4.22)$$

Коефіцієнт $\bar{\gamma}^+$ є функцією H_c і зображається у вигляді

$$\bar{\gamma}^+ = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 H_c + \bar{\gamma}_3 H_c^2, \quad (4.23)$$

¹Занижене значення ν в порівнянні з даними методу МК [13] пов'язане із використанням недостатньо високого наближення для якобіану переходу від спінних до КЗ. Використання вищих наближень [7,8] приводить до зближення цих значень.

де $\bar{\gamma}_l$ – постійні величини

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1 &= f_{CR}^{(0)}(1 - s^{-3})^{-1}, \\ \bar{\gamma}_2 &= d_1 f_0 (1 - E_2 s^{-3})^{-1}, \\ \bar{\gamma}_3 &= d_3 f_0^2 (1 - E_2^2 s^{-3})^{-1},\end{aligned}\quad (4.24)$$

які при $s = s^*$ приймають значення: $\bar{\gamma}_1 = 1.529$, $\bar{\gamma}_2 = -0.635$, $\bar{\gamma}_3 = -0.058$. Сингулярна частина вкладу $F_{CR}^{(s)}$ суттєвим чином відрізняється від аналогічної величини при $h = 0$. Зауважимо, що при відсутності поля маємо $H_c = 1$, а тому

$$\bar{\gamma}^+(h = 0) = \gamma^+ = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3. \quad (4.25)$$

При $h \neq 0$ величина $H_c < 1$, причому для $\tilde{h} \gg h_c$ маємо $H_c \rightarrow 0$ і основний вклад до $\bar{\gamma}^+$ дає величина $\bar{\gamma}_1$.

Вклад до вільної енергії F_{LGR} відповідно до (4.7) містить два доданки. Для розрахунку першого з них $F_{TR}^{(+)}$ із (4.8) необхідно знайти явну залежність величини f_{n_p+m} від m . Skorистаємося із розв'язків РС (2.14), які при врахуванні (4.18) набувають вигляду

$$\begin{aligned}w_{n_p+m} &= h_0 E_1^{m-1} \tilde{h} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \\ r_{n_p+m} &= \beta \Phi(0) f_0 \left[-1 + H_c E_2^{m-1} + R^{(0)} f_0^{-1} \varphi_0^{-1/2} c_{2T} E_3^{m-1} H_3 \right], \\ u_{n_p+m} &= (\beta \Phi(0))^2 \varphi_0 \left[1 + \Phi H_c E_2^{m-1} + c_{2T} E_3^{m-1} H_3 \right].\end{aligned}\quad (4.26)$$

Тут $\Phi = f_0 \varphi_0^{-1/2} R_1^{(0)}$. Доданками, які пропорційні до $H_3 E_3^{m-1}$ будемо нехтувати, оскільки поблизу ТФП величина H_3 із (4.18) є малою, а E_3^{m-1} при $m \gg 1$ прямує до нуля ($E_3 < 1$). Таке наближення відповідає нехтуванню поправками до скейлінгу. При необхідності такі поправки можна обчислювати, використовуючи метод, запропонований в [8].

Приймаючи до уваги (4.26) із (1.13) знаходимо

$$x_{n_p+m} = \bar{x} E_2^{m-1} H_c (1 + \Phi E_2^{m-1} H_c)^{-1/2}, \quad (4.27)$$

де введене позначення

$$\bar{x} = f_0 \varphi_0^{-1/2} \sqrt{3}. \quad (4.28)$$

Аргумент x_{n_p+m} з ростом m зростає та залежить від значення H_c . Легко переконатися, що величина H_c для кожного значення \tilde{h} однозначно визначається параметром

$$\alpha = \tilde{h}/h_c. \quad (4.29)$$

Для малих значень полів величина H_c наближається до одиниці, а з ростом α – прямує до нуля.

Така поведінка H_c приводить до різного характеру залежності величини x_{n_p+m} із (4.27) від m для малих та великих значень полів (Додаток 5).

Приймаючи до уваги розв'язки (4.26) легко переконатися, що значення величини $m_0 = 1$ приводить до доволі великих значень аргумента $x_{n_p+m_0+1}$, що є достатньою умовою використання гаусового розподілу флуктуацій для всіх $\rho_{\vec{k}}$ із $|\vec{k}| \in \mathcal{B}_{n_p+2}$. Отже, вклад до вільної енергії системи (4.8) від перехідної області флуктуацій містить лише один доданок і має вигляд

$$F_{TR}^{(+)} = -kT N_0 f_{n_p+1} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (4.30)$$

де для коефіцієнта f_{n_p+1} маємо вираз

$$f_{n_p+1} = \frac{1}{2} \ln y_{n_p} + \frac{9}{4} y_{n_p}^{-2} + \frac{1}{4} x_{n_p+1}^2 + \ln U(o, x_{n_p+1}). \quad (4.31)$$

Для розрахунку останнього із вкладів до вільної енергії системи F' із (4.7) слід обчислити вираз для Z' із (4.9). При $m_0 = 1$ маємо

$$Z' = 2^{(N_{n_p+2}-1)/2} [Q(P_{n_p+1})]^{N_{n_p+2}} Z_{n_p+2}, \quad (4.32)$$

де

$$\begin{aligned}Z_{n_p+2} &= \int (d\rho)^{N_{n_p+2}} \exp \left(h' \sqrt{N} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_{n_p+2}} d_{n_p+2}(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_4^{(n_p+2)}}{24} N_{n_p+2}^{-1} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_4 \\ k_i \in \mathcal{B}_{n_p+2}}} \rho_{\vec{k}_1} \cdots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{k_1+\dots+k_4} \right).\end{aligned}\quad (4.33)$$

Для коефіцієнтів d_{n_p+2} та $a_4^{(n_p+2)}$ маємо

$$\begin{aligned}d_{n_p+2}(k) &= d_{n_p+2}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2, \\ d_{n_p+2}(0) &= s^{-2(n_p+2)} r_{n_p+2}, \\ a_4^{(n_p+2)} &= s^{-4(n_p+2)} u_{n_p+2}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Зауважимо, що методика розрахунку (4.33) у випадку $h = 0$ розвинута в [8]. Вона ґрунтується на тому факті, що величина

$r_{n_p+2}(h=0) \gg u_{n_p+2}(h=0)$, а отже, дозволяє використати для обчислення (4.33) гаусове наближення. Однак, при наявності поля коефіцієнт r_{n_p+2} зменшується при рості поля і приймає від'ємні значення при достатньо великих полях. Тому розроблена раніше методика обчислення (4.33) потребує розвитку.

5. Виділення макроскопічної частини параметра порядку

Розрахунок явного виразу величини Z_{n_p+2} із (4.32) суттєвим чином залежить від того факту, вище чи нижче температури фазового переходу T_c знаходиться система. Така ситуація зобумовлена поведінкою коефіцієнтів r_{n_p+2} та u_{n_p+2} , для яких маємо вирази

$$\begin{aligned} r_{n_p+2} &= \beta\Phi(0)f_0(-1 + E_2H_c), \\ u_{n_p+2} &= (\beta\Phi(0))^2\varphi_0(1 + \Phi E_2H_c). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Коефіцієнт u_{n_p+2} залишається додатним для довільних значень τ та h' , що забезпечує збіжність інтегрування в (4.33). Коефіцієнт r_{n_p+2} є додатним і значно перевищує u_{n_p+2} при великих значеннях τ ($h_c \gg \tilde{h}$). Для цих температур при розрахунку (4.33) можна обмежитись гаусовим наближенням, що детально обговорено в [8]. Однак, для малих значень τ ($h_c \ll \tilde{h}$) коефіцієнт r_{n_p+2} стає малим і при подальшому зменшенні температури стає від'ємним. В цій температурній області використання гаусового наближення є безпідставним. Ситуація змінюється, якщо в (4.33) виконати заміну змінних

$$\rho_{\vec{k}} = \eta_{\vec{k}} + \sqrt{N}\sigma_+\delta_{\vec{k}}, \quad (5.2)$$

де σ_+ – деяка постійна величина.

У випадку $T < T_c$ підставою для зміщення змінної ρ_0 (середнє значення якої пов'язане з параметром порядку [1]) є наявність в системі спонтанного параметру порядку. Подібна ситуація має місце також при температурах вищих за T_c при наявності зовнішнього поля. В цьому випадку в системі існує індукований полем параметр порядку. В результаті заміни (5.2) вираз (4.33) набуває вигляду

$$Z_{n_p+2} = e^{NE_0(\sigma_+)} \int (d\eta)^{N_{n_p+2}} \exp \left[A_0 \sqrt{N}\eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+2}} \bar{d}(k)\eta_{\vec{k}}\eta_{-\vec{k}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6} \bar{b} N_{n_p+2}^{-1/2} \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \frac{1}{24} \bar{a}_4 N_{n_p+2}^{-1} \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right]. \quad (5.3)$$

Тут

$$E_0(\sigma_+) = h'\sigma_+ - \frac{1}{2}d_{n_p+2}(0)\sigma_+^2 - \frac{1}{24}a_4^{(n_p+2)} \frac{N}{N_{n_p+2}} \sigma_+^4, \quad (5.4)$$

а для коефіцієнтів A_0 , $\bar{d}(k)$, \bar{b} та \bar{a}_4 маємо вирази

$$\begin{aligned} A_0 &= h' - d_{n_p+2}(0)\sigma_+ - \frac{1}{6}a_4^{(n_p+2)}s_0^3s^{3(n_p+2)}\sigma_+^3, \\ \bar{d}(k) &= \bar{d}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2; \\ \bar{d}(0) &= d_{n_p+2}(0) + \frac{1}{2}a_4^{(n_p+2)}s_0^3s^{3(n_p+2)}\sigma_+^2, \\ \bar{b} &= a_4^{(n_p+2)}s_0^{3/2}s^{3/2(n_p+2)}\sigma_+, \quad \bar{a}_4 = a_4^{(n_p+2)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для проведення подальших розрахунків слід конкретизувати величину σ_+ . Оскільки вирази (5.3)-(5.5) справедливі при довільних значеннях σ_+ , знайдемо цю величину із умови

$$\frac{\partial E_0(\sigma_+)}{\partial \sigma_+} = 0.$$

Приймаючи до уваги (5.4), отримуємо рівняння

$$A_0 = 0. \quad (5.6)$$

Розв'язок (5.6) шукатимемо у вигляді

$$\sigma_+ = \sigma_0 s^{-(n_p+2)/2}. \quad (5.7)$$

Для величини σ_0 отримуємо кубічне рівняння

$$\sigma_0^3 + p\sigma_0 + q = 0, \quad (5.8)$$

де для коефіцієнтів p та q маємо вирази

$$\begin{aligned} p &= 6s_0^{-3} \frac{r_{n_p+2}}{u_{n_p+2}}, \\ q &= -6s_0^{-9/2} s^{5/2} \frac{h_0}{u_{n_p+2}} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В загальному випадку величини p та q є функціями температури та поля. Форма розв'язків (5.8) залежить від знаку дискримінанта

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

Як відомо, для додатніх Q маємо один дійсний розв'язок, а для $Q < 0$ рівняння (5.8) має три дійсні розв'язки. Легко перекопатися, що при $T > T_c$ величина Q є додатньою при будь-яких значеннях поля.

Розглянемо деякі часткові випадки розв'язків (5.8). Нехай $h = 0$. Тоді $q = 0$ для всіх $\tau \neq 0$ і розв'язки (5.8) мають вигляд

$$\sigma_0^{(1)} = 0; \quad \sigma^{(2,3)} = \pm\sqrt{-p}. \quad (5.10)$$

У цьому випадку знак величини p залежить від того, вище чи нижче T_c є температура системи. Приймаючи до уваги рівності (4.18) та (5.1), для $T > T_c$ знаходимо

$$\begin{aligned} r_{n_p+2}^{(+)} &= \beta\Phi(0)f_0(E_2 - 1), \\ u_{n_p+2}^{(+)} &= (\beta\Phi(0))^2\varphi_0(1 + \Phi E_2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Використовуючи рівності (5.11), із (5.9) знаходимо, що значення величини

$$p^{(+)} = 6s_0^{-3} \frac{f_0}{\varphi_0} \frac{1}{\beta\Phi(0)} \frac{E_2 - 1}{1 + \Phi E_2} \quad (5.12)$$

є додатніми. В цьому випадку ($h = 0, T > T_c$) рівняння (5.8) не має дійсних розв'язків.

Іншим частковим випадком розв'язків рівняння (5.8) є умова $T = T_c$. Легко перекопатися, що тоді величини p та q із (5.9) перестають залежати від поля. Дійсно, при $T = T_c$ маємо $H_c = 0$, а отже

$$\begin{aligned} r_{n_p+2}^{(c)} &= -\beta\Phi(0)f_0, \\ u_{n_p+2}^{(c)} &= (\beta\Phi(0))^2\varphi_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Тоді із (5.9) отримуємо

$$\begin{aligned} p^{(c)} &= -6s_0^{-3} (f_0/\varphi_0) (\beta_c\Phi(0))^{-1}, \\ q^{(c)} &= -6s_0^{-9/2} s^{5/2} \frac{h_0}{\varphi_0} (\beta_c\Phi(0))^{-2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Величина $Q^{(c)} = Q(\tau = 0)$ приймає вигляд

$$Q^{(c)} = Q^{(0)} \left[1 - \frac{8}{9} \frac{f_0^3}{\varphi_0 h_0^2} s^{-5} \beta_c \Phi(0) \right], \quad (5.15)$$

де

$$Q^{(0)} = 9s_0^{-9} s^5 (h_0/\varphi_0)^2 (\beta_c\Phi(0))^{-4}. \quad (5.16)$$

Знак $Q^{(c)}$ визначається квадратною дужкою виразу (5.15) і завдяки наявності малого множника s^{-5} величина $Q^{(c)}$ завжди приймає додатні значення. Зауважимо також, що $Q^{(c)}$ не залежить від величини поля і визначається мікроскопічними параметрами системи. Для значень параметрів

$$s_0 = 2, \quad b/c = 0.3, \quad h_0 = 0.760 \quad (5.17)$$

знаходимо

$$p^{(c)} = -0.389, \quad q^{(c)} = -2.790, \quad Q^{(c)} = 1.944. \quad (5.18)$$

Легко перекопатися, що для інших значень параметрів s_0 та b/c величина $Q^{(c)}$ завжди додатня. При $T = T_c$ розв'язки рівняння (5.8) мають вигляд

$$\sigma_c = A_c + B_c, \quad (5.19)$$

де

$$\begin{aligned} A_c &= \left(-q^{(c)}/2 + (Q^{(c)})^{1/2} \right)^{1/3}, \\ B_c &= - \left(q^{(c)}/2 + (Q^{(c)})^{1/2} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Для випадку (5.17) знаходимо

$$A_c = 1.408, \quad B_c = 0.092, \quad \sigma_c = 1.500. \quad (5.20)$$

Величина зміщення σ_+ із (5.2) має вигляд:

$$\sigma_+ = \tilde{h}^{1/5} \sigma_c. \quad (5.21)$$

В загальному випадку розв'язок рівняння (5.8) залежатиме як від величини поля, так і від температури.

Розв'язок (5.8) для всіх $\tau > 0$ при $h \neq 0$ шукаємо з використанням методу Кардано

$$\sigma_0 = A + B,$$

де

$$A = \left(-q/2 + Q^{1/2} \right)^{1/3}, \quad B = - \left(q/2 + Q^{1/2} \right)^{1/3}.$$

Криві залежності $\sigma_0(\tau)$ приведені на Рис. 5 для декількох значень поля. Зауважимо, що значення $\sigma_0 = 1.500$ при $\tau = 0$ не залежить від величини поля.

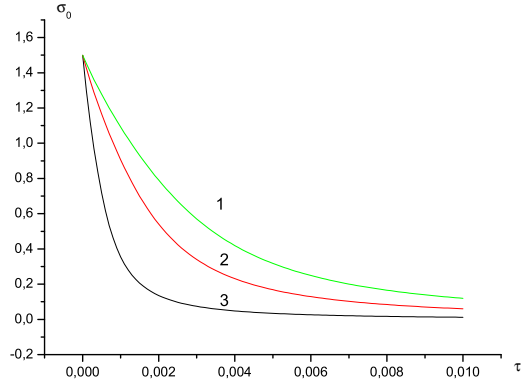


Рис. 5. Залежність розв'язку σ_0 рівняння (5.8) від температури. Крива 1 відповідає значенню $h' = 0.0001$, крива 2 - $h' = 0.00005$, крива 3 - $h' = 0.00001$.

Вирази для перенормованих коефіцієнтів (5.5) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{d}(0) &= s^{-2(n_p+2)} r_R, \\ \bar{b} &= s^{-3(n_p+2)} v_R, \\ \bar{a} &= s^{-4(n_p+2)} u_R.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Тут

$$\begin{aligned}r_R &= r_{n_p+2} + \frac{1}{2} u_{n_p+2} s_0^3 \sigma_0^2, \\ u_R &= u_{n_p+2} s_0^{3/2} \sigma_0, \quad u_R = u_{n_p+2}.\end{aligned}\quad (5.23)$$

При розрахунку виразу (5.3) використовуватимемо гаусове наближення. Це пов'язано з малістю коефіцієнтів v_r та u_r по відношенню до r_R . Виконавши в (5.3) заміну змінних

$$\eta_{\vec{k}} = \rho_{\vec{k}} s^{(n_p+2)} \sqrt{2/r_R}$$

отримуємо

$$Z_{n_p+2} = e^{N E_0(\sigma)} s^{(n_p+2) N_{n_p+2}} (2/r_R)^{N_{n_p+2}/2} Z_G, \quad (5.24)$$

де

$$\begin{aligned}Z_G &= \int (d\rho)^{N_{n_p+2}} \exp \left[- \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+2}} \left(1 + 2\beta\Phi(0) b^2 k^2 s^{2(n_p+2)} / r_R \right) \times \right. \\ &\times \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - x_3 N_{n_p+2}^{-1/2} \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \\ &\left. - x_4 N_{n_p+2}^{-1} \sum_{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right].\end{aligned}\quad (5.25)$$

Величини x_n мають вигляд

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} v_r / (r_R)^{3/2}, \quad x_4 = \frac{1}{6} u_r / r_R^2 \quad (5.26)$$

і є малими в порівнянні з одиницею і зменшуються з прямування $T \rightarrow T_c$. Тому (5.25) зводиться до добутку однократних інтегралів

$$Z_G = \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+2}} \int d\rho_{\vec{k}} \exp \left(- \left(1 + 2\beta\Phi(0) \frac{b^2}{r_R} k^2 s^{2(n_p+2)} \right) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right). \quad (5.27)$$

Вклад до вільної енергії системи від (5.24) має вигляд

$$\begin{aligned}F_{n_p+2} &= -kTN E_0(\sigma) - \frac{1}{2} kTN_{n_p+2} \ln \pi - \\ &- kTN_{n_p+2} (n_p + 2) \ln s + \frac{1}{2} kTN_{n_p+2} \ln r_R + \\ &+ \frac{1}{2} kT \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+2}} \ln \left(1 + 2\beta\Phi(0) b^2 k^2 s^{2(n_p+2)} / r_R \right).\end{aligned}\quad (5.28)$$

Тут

$$E_0(\sigma_+) = e_0 h' \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{1}{2(d+2)}} - e_2 \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (5.29)$$

де введені позначення

$$\begin{aligned}e_0 &= \sigma_0 s^{-1/2}, \\ e_2 &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \left(r_{n_p+2} + \frac{1}{12} u_{n_p+2} s_0^3 \sigma_0^2 \right).\end{aligned}\quad (5.30)$$

Сума за $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p+2}$ в (5.28) може бути розрахована шляхом переходу до інтегралу за методикою, використаною в [1].

Приймаючи до уваги вирази (4.32) та (5.28), записуємо відповідну (4.32) частину вільної енергії як суму двох вкладів

$$F' = F_0^{(+)} + F'_G,$$

де доданок

$$F_0^{(+)} = -kTN E_0(\sigma_+) \quad (5.31)$$

відповідає виділенню макроскопічної частини параметра порядку, а для F'_G маємо

$$F'_G = -kTN n_{p+2} f_G. \quad (5.32)$$

Коефіцієнт f_G має вигляд

$$f_G = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 + \ln s + \frac{1}{4} \ln u_{n_p+1} - \frac{1}{2} \ln r_R - \frac{1}{2} \ln U(x_{n_p+1}) - \frac{3}{8} y_{n_p+1}^{-2} - \frac{1}{2} f_G''. \quad (5.33)$$

Тут

$$\begin{aligned} u_{n_p+1} &= (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0(1 + \Phi H_c), \\ x_{n_p+1} &= \bar{x} H_c(1 + \Phi H_c)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

величини r_R та y_{n_p+2} визначені в (5.23) та (1.13) відповідно, а для f_G'' маємо вираз

$$f_G'' = \ln(1 + a^2) - \frac{2}{3} + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^3} \arctg a, \quad (5.35)$$

де

$$a = \frac{\pi b}{s_0 c} \left(\frac{2\beta\Phi(0)}{r_R} \right)^{1/2}. \quad (5.36)$$

На цьому етапі завершується розрахунок вкладів до вільної енергії (4.1) від різного типу флуктуацій параметра порядку для області температур $T > T_c$.

6. Вільна енергія системи в зовнішньому полі поблизу точки фазового переходу при $T > T_c$

Підсумуємо вклади до вільної енергії системи від різних флуктуаційних процесів, які мають місце поблизу точки фазового переходу

другого роду. Відповідно до представлення вільної енергії із (4.1), маємо декілька типів вкладів. Вирази F_0 та F_1 , як слідує із (4.2) та (4.3), містять лише аналітичну залежність від поля h' та відносної температури τ . Такого ж типу є залежність першого доданку F_{CR} виразу (4.20). Об'єднавши ці вклади, введемо позначення

$$F_a = F_0 + F_1 + (F_{CR}^{(+)} - F_{CR}^s). \quad (6.1)$$

Це є аналітична частина вільної енергії. Вона має вигляд

$$F_a = -kTN \left(\ln chh' - F_{02} h'^2 \right) - \frac{1}{2} N \Phi(0) \bar{\Phi} - kTN (\gamma_0 + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2), \quad (6.2)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \ln 2 + \gamma_{01} s_0^{-3} - F_{10}, \\ \gamma_1 &= F_{03} + \gamma_{02} s_0^{-3}, \\ \gamma_2 &= F_{04} + \gamma_{03} s_0^{-3}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вклади до вільної енергії $F_{CR}^{(s)}$ (4.22), $F_{TR}^{(+)}$ (4.30) та F' (5.31) і (5.32) містять суто неаналітичну залежність від температури τ та поля h' . Запишемо їхню суму у вигляді двох типів доданків. Перший з них $F_0^{(+)}$ пов'язаний із зміщенням змінної ρ_0 і має вигляд із (5.31). Другий $F_s^{(+)}$ є сумою решти неаналітичних вкладів (область $T > T_c$)

$$F_s^{(+)} = F_{CR}^{(s)} + F_{TR}^{(+)} + F'_G \quad (6.4)$$

і може бути зображений у вигляді

$$F_s^{(+)} = -kTN \gamma_s^{(+)} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (6.5)$$

де

$$\gamma_s^{(+)} = s_0^{-3} (f_{n_p+1} - \bar{\gamma}^+ + f_G/s^3). \quad (6.6)$$

Таким чином замість представлення вільної енергії у вигляді (4.1) маємо еквівалентне йому представлення

$$F = F_a + F_s^{(+)} + F_0^{(+)}, \quad (6.7)$$

де аналітична частина F_a має вигляд (6.2), для $F_s^{(+)}$ маємо (6.5), а доданок $F_0^{(+)}$ із (5.31) приймає вигляд

$$F_0^{(+)} = -kTN \left[e_0 h' (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}} - e_2 (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{d}{d+2}} \right]. \quad (6.8)$$

Вирази для коефіцієнтів e_0 та e_2 приведені в (5.30). Останній доданок виразу (6.8) має той же вигляд, що і вираз F_s . Тому вираз (6.6) може бути записаний також у вигляді

$$F = F_a + F_N + F_h, \quad (6.9)$$

де F_a приведено в (6.2),

$$F_N = -kTN\gamma_N(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (6.10)$$

де

$$\gamma_N = \gamma_s^{(+)} - e_2, \quad (6.11)$$

а для F_h знаходимо

$$F_h = -kTNe_0h'(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}}. \quad (6.12)$$

Зауважимо, що $T = T_c(1 + \tau)$. Вклад до вільної енергії F_h відіграє основну роль з точки зору впливу зовнішнього поля на критичну поведінку моделі.

7. Схема розрахунку вільної енергії для області температур $T < T_c$

Загалом спосіб розрахунку вільної енергії для випадків $T > T_c$ та $T < T_c$ відрізняється лише деякими деталями. Як вказувалося вище, при $T < T_c$ в системі має місце дещо інший вираз для точки виходу системи з критичного режиму флуктуацій параметра порядку. Для цієї області температур точка виходу з КРФ n'_p приймає менші значення, ніж аналогічна точка n_p (при $T > T_c$) відповідно до формули (2.31). Така поведінка системи при $T < T_c$ приводить до перенормування граничного значення поля h_{cm} відповідно до формули (2.33). Це в свою чергу спричиняє асиметрію у визначенні областей “сильних” та “слабких” полів для температур вищих та нижчих від T_c . На Рис. 6 приведені криві залежності величин α_Z та α_m (при $\tau > 0$ та $\tau < 0$ відповідно)

$$\begin{aligned} \alpha_Z &= h_c/\tilde{h} = |\tilde{\tau}|^{p_0}\tilde{h}^{-1} \\ \alpha_m &= h_{cm}/\tilde{h} = \alpha_Z E_2^{n_0 p_0} \end{aligned} \quad (7.1)$$

від температури, де n_0 – постійна величина із (2.31). Якщо для області $T > T_c$ величина α_Z близька до одиниці при $\tilde{h} \approx h_c$, то для $T < T_c$ рівність $\tilde{h} \approx h_{cm}$ досягається при значно менших значеннях відносно

температури. В області температур $T < T_c$ роль зовнішнього поля є значно більшою, ніж у випадку $T > T_c$. Це є наслідком наявності в системі при $T < T_c$ деякого внутрішнього поля поряд з постійним зовнішнім полем.

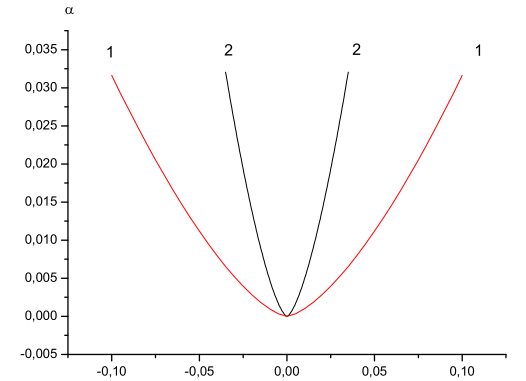


Рис. 6. Залежність величин α_Z (крива 1) та α_m (крива 2) від температури при $h' = 10^{-4}$.

Вільна енергія при $T < T_c$ зображається у вигляді

$$F = F_0 + F_1 + F_{CR}^{(-)} + F_{IGR}. \quad (7.2)$$

Вклади F_0 та F_1 мають однаковий вигляд для температур $T > T_c$ та $T < T_c$ і приведені в (4.2) та (4.3).

Вираз для $F_{CR}^{(-)}$ може бути розрахований із (4.4), де сумування відбувається до значення n'_p із (2.35)

$$F_{CR}^{(-)} = -kT \sum_{n=1}^{n'_p} N_n f_n. \quad (7.3)$$

Вклад F_{IGR} до вільної енергії має вигляд

$$F_{IGR} = -kT \ln Z_{IGR}, \quad (7.4)$$

де аналогічно до (1.19) маємо

$$Z_{IGR} = 2^{(N_{n'_p})/2} Q(P_{n'_p})^{N_{n'_p}+1} Z_{n'_p+1}, \quad (7.5)$$

причому $Z_{n'_p+1}$ має вигляд (1.20), де величину n_p слід замінити на n'_p .

Перш ніж приступити до розрахунку явного вигляду виразів (7.3) та (7.4), зауважимо, що в області температур $T < T_c$ відповідно до (2.35) мають місце рівності

$$\begin{aligned} s^{-(n'_p+1)} &= \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{\frac{1}{d+2}}, & E_1^{n'_p+1} &= \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{-1/2}, \\ \tilde{\tau} E_2^{n'_p+1} &= -H_{cm}, & H_{cm} &= -\tilde{\tau} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{-1/2p_0}, \\ E_3^{n'_p+1} &= H_{3m}, & H_{3m} &= \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{\Delta/2p_0}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

де використані позначення (4.19).

Розв'язки РС (2.14) для області температур $T < T_c$ записуються у вигляді

$$\begin{aligned} w_{n'_p+m} &= h_0 E_1^{m-1} \tilde{h} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{-1/2}, \\ r_{n'_p+m} &= \beta \Phi(0) f_0 \left(-1 - H_{cm} E_2^{m-1} + R^{(0)} f_0^{-1} \varphi_0^{-1/2} c_{2T} E_3^{m-1} H_{3m}\right), \\ u_{n'_p+m} &= (\beta \Phi(0))^2 \varphi_0 \left(1 - \Phi H_{cm} E_2^{m-1} + c_{2T} E_3^{m-1} H_{3m}\right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Як і випадку $T > T_c$, доданками, що пропорційні до $H_{3m} E_3^{m-1}$ надалі будемо нехтувати.

Приймаючи до уваги (7.7) із (1.13) знаходимо

$$x_{n'_p+m} = -\bar{x} E_2^{m-1} H_{cm} \left(1 - \Phi E_2^{m-1} H_{cm}\right)^{-1/2}, \quad (7.8)$$

де величина \bar{x} означена в (4.28).

Вклад до вільної енергії системи від критичного режиму флуктуацій (7.3) може бути записаний у вигляді

$$F_{CR}^{(-)} = -kTN_0 (\gamma_{01} + \gamma_{02}\tau + \gamma_{03}\tau^2) + F_{CR}^{(c)}, \quad (7.9)$$

де коефіцієнти γ_{0l} не залежать від температури і приведені в (4.21), а для $F_{CR}^{(s)}$ маємо

$$F_{CR}^{(c)} = kTN_0 \gamma^- s^{-3(n'_p+1)}, \quad (7.10)$$

де коефіцієнт γ^- залежить від величини H_{cm}

$$\bar{\gamma}^- = \bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2 H_{cm} + \bar{\gamma}_3 H_{cm}^2, \quad (7.11)$$

для якої маємо

$$H_{cm} = -\tilde{\tau} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{-1/2p_0}. \quad (7.12)$$

Зауважимо, що величини H_c та H_{cm} , які визначають коефіцієнти $\bar{\gamma}^+$ та $\bar{\gamma}^-$ завжди є додатними. В безрозмірних змінних (7.1) вони мають вигляд

$$\begin{aligned} H_c &= \left(1 + \alpha_Z^{-2}\right)^{-1/2p_0}, \\ H_{cm} &= E_2^{-n_0} \left(1 + \alpha_m^{-2}\right)^{-1/2p_0}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

В границі $T \rightarrow T_c$ кожна з них обертається в нуль, оскільки величини α_Z^{-1} та α_m^{-1} із (7.1) прямують до безмежності. При відхиленні температури від T_c (або прямуванні до нуля зовнішнього поля) величини α_Z^{-1} та α_m^{-1} обертаються в нуль і для H_c та H_{cm} знаходимо наступні фіксовані значення

$$\lim_{h \rightarrow 0} H_c = 1; \quad \lim_{h \rightarrow 0} H_{cm} = E_2^{-n_0}. \quad (7.14)$$

Приймаючи до уваги (7.6) із (7.10) знаходимо явний вираз для вкладу до вільної енергії системи від ділянки критичного режиму флуктуацій параметра порядку при $T < T_c$

$$F_{CR}^{(c)} = kTN_0 \bar{\gamma}^- \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2\right)^{\frac{d}{(d+2)}}. \quad (7.15)$$

Для розрахунку явного вигляду останнього доданку із (7.2) запишемо його (як і у випадку $T > T_c$ (4.6)) у вигляді

$$F_{IGR} = F_{TR}^{(-)} + F''. \quad (7.16)$$

Тут подібно до (4.8) маємо

$$F_{TR}^{(-)} = -kTN_0 s^{-3(n'_p+1)} \sum_{m=1}^{m_0} s^{-3(m-1)} f_{n'_p+m}, \quad (7.17)$$

де величина $f'_{n'_p+m}$ має вигляд (4.5) при $n = n'_p + m$, а для F'' знаходимо

$$F'' = -kTN \ln Z''. \quad (7.18)$$

Тут

$$Z'' = 2^{(N_{n''+1}-1)/2} Q(P_{n''})^{N_{n''+1}} Z_{n''+1}, \quad (7.19)$$

причому $n'' = n'_p + m_0$. Величина $Q(P_{n''})$ співпадає із (1.12) при $n = n''$, а для $Z_{n''+1}$ маємо вираз (1.20), в якому величину n_p слід замінити на n'' .

Розрахунок величини $F_{TR}^{(-)}$ із (7.17) виконується подібно до випадку $T > T_c$. Знаходимо явний вигляд величини $f_{n'_p+m}$ від номера m . Для цього скористаємося із розв'язків (7.7) РС (2.14) при $T < T_c$.

Покладаючи $m_0 = 1$ в виразі (7.17), знаходимо

$$F_{TR}^{(-)} = -kTN_0 f_{n'_p+1} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (7.20)$$

де для коефіцієнта $f_{n'_p+1}$ маємо

$$f_{n'_p+1} = \frac{1}{2} \ln y_{n'_p} + \frac{9}{4} y_{n'_p}^{-2} + \frac{1}{4} x_{n'_p+1}^2 + \ln U(0, x_{n'_p+1}). \quad (7.21)$$

Тут $x_{n'_p+1}$ визначається із (7.8), а для $y_{n'_p}$ маємо формулу:

$$y_{n'_p} = s^{3/2} U(x_{n'_p}) \left(\frac{3}{\varphi(x_{n'_p})} \right)^{1/2}.$$

Обчислення вкладу F'' із (7.16) пов'язано з розрахунком виразу (7.19) для Z'' , зокрема $Z_{n''+1} \equiv Z_{n'_p+2}$ (при $m_0 = 1$). Маємо

$$Z_{n'_p+2} = \int (d\rho)^{N_{n'_p+2}} \exp \left(h' \sqrt{N} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_{n'_p+2}} d_{n'_p+2}(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \frac{a_4^{(n'_p+2)}}{24} \frac{1}{N_{n'_p+2}} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n'_p+2}}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right), \quad (7.22)$$

де

$$\begin{aligned} d_{n'_p+2}(k) &= s^{-2(n'_p+2)} r_{n'_p+2} + 2\beta\Phi(0)b^2k^2, \\ a_n^{(n'_p+2)} &= s^{-4(n'_p+2)} u_{n'_p+2}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

причому

$$\begin{aligned} r_{n'_p+2} &= \beta\Phi(0)f_0(-1 - H_{cm}E_n), \\ u_{n'_p+2} &= (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0(1 - \Phi H_{cm}E_2). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Як і випадку $T > T_c$ виконуємо в (7.22) заміну змінних

$$\rho_{\vec{k}} = \eta_{\vec{k}} \sqrt{N} \sigma_- \delta_{\vec{k}}. \quad (7.25)$$

В результаті отримуємо вираз

$$\begin{aligned} Z_{n'_p+2} &= e^{NE_0(\sigma_-)} \int (d\eta)^{N_{n'_p+2}} \exp \left[A'_0 \sqrt{N} \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n'_p+2}} \bar{d}'(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} - \frac{1}{6} \bar{b}' N_{n'_p+2}^{-1/2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n'_p+2}}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \frac{1}{24} \bar{a}'_4 N_{n'_p+2}^{-1} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n'_p+2}}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right], \end{aligned} \quad (7.26)$$

в якому введені позначення

$$E_0(\sigma_-) = h' \sigma_- - \frac{1}{2} d_{n'_p+2}(0) \sigma_-^2 - \frac{1}{24} a_4^{(n'_p+2)} s_0^3 s^{3(n'_p+2)} \sigma_-^4, \quad (7.27)$$

а також

$$\begin{aligned} A'_0 &= h' - d_{n'_p+2}(0) \sigma_- - \frac{1}{6} a_4^{(n'_p+2)} s_0^3 s^{3(n'_p+2)} \sigma_-^3, \\ \bar{d}'(k) &= \bar{d}'(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2, \\ \bar{d}'(0) &= s^{-2(n'_p+2)} \left(r_{n'_p+2} + \frac{1}{2} u_{n'_p+2} s_0^3 s^{3(n'_p+2)} \sigma_-^2 \right), \\ \bar{b}' &= u_{n'_p+2} s_0^{3/2} s^{-\frac{5}{2}(n'_p+2)} \sigma_-, \\ \bar{a}'_4 &= u_{n'_p+2} s^{-4(n'_p+2)}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Величину зміщення σ_- із (7.25) зручно зобразити у вигляді

$$\sigma_- = \sigma'_0 s^{-\frac{1}{2}(n'_p+2)}. \quad (7.29)$$

Тоді вираз (7.27) набуває вигляду

$$E_0(\sigma_-) = h' e_0^{(-)} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2 \right)^{\frac{1}{2(d+2)}} - e_2^{(-)} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (7.30)$$

де

$$\begin{aligned} e_0^{(-)} &= \sigma'_0 s^{-1/2}, \\ e_2^{(-)} &= \frac{1}{2} \sigma_0'^2 s^{-3} \left(r_{n'_p+2} + \frac{1}{12} u_{n'_p+2} s_0^3 \sigma_0'^2 \right). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Величину зміщення σ_- будемо визначати із умови

$$\frac{dE_0(\sigma_-)}{d\sigma_-} = 0. \quad (7.32)$$

Ця умова еквівалентна до рівняння

$$\sigma_0'^3 + p'\sigma_0' + q' = 0, \quad (7.33)$$

де

$$\begin{aligned} p' &= 6s_0^{-3}r_{n'_p+2}/u_{n'_p+2}, \\ q' &= -6s_0^{-9/2}s^{5/2}h_0 \frac{1}{u_{n'_p+2}} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Порівнюючи (7.34) із (5.9), легко бачити, що вирази для коефіцієнтів p та q рівняння (5.8) співпадають із виразами (7.34), якщо точку виходу n_p (при $T > T_c$) замінити на n'_p (при $T < T_c$). У випадку $T = T_c$ вирази (7.34) набувають вигляду

$$\begin{aligned} p'_c &= -6s_0^{-3} \frac{f_0}{\varphi_0} (\beta_c \Phi(0))^{-1}, \\ q'_c &= -6s_0^{-9/2} s^{5/2} \frac{h_0}{\varphi_0} (\beta_c \Phi(0))^{-2} \end{aligned} \quad (7.35)$$

і співпадають із значеннями коефіцієнтів p та q (5.9) при $T = T_c$ (див. (5.14)). Тому при $\tau = 0$ для довільних значень поля маємо рівність

$$\sigma_0(T_c) = \sigma_0'(T_c). \quad (7.36)$$

Вона забезпечує неперервність розв'язку для зміщення як функції температури при переході через значення $\tau = 0$. Для області температур $T < T_c$ число розв'язків рівняння (7.33) визначається знаком величини

$$Q' = (p'/3)^3 + (q'/2)^2. \quad (7.37)$$

Легко переконатися, що існує таке $\tau_0 < 0$, що при $\tau_0 < \tau \leq 0$ величина $Q' > 0$, та $Q' < 0$ для $\tau < \tau_0$. Значення τ_0 знаходимо із умови

$$Q' = 0. \quad (7.38)$$

Оскільки при $T < T_c$ завжди маємо $r_{n'_p+2} < 0$, тому умова (7.38) набуває вигляду

$$8 \left| r_{n'_p+2} \right|^3 / u_{n'_p+2} = 9s^5 h_0^2 \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_{cm}^2}. \quad (7.39)$$

Рівняння (7.39) визначає деяку величину $\alpha_{m_0} = \tilde{h}/h_{cm}^{(0)}$, оскільки лише від неї залежать величини правої та лівої частини (7.39).

Дійсно, відповідно до (7.24) маємо

$$r_{n'_p+2} = -\beta\Phi(0)f_0 \left(1 + E_2 H_{cm}^{(0)}\right);$$

$$u_{n'_p+2} = (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0 \left(1 - \Phi E_2 H_{cm}^{(0)}\right),$$

тоді із (7.6) отримуємо

$$H_{cm}^{(0)} = E_2^{-n_0} \left(1 + \alpha_{m_0}^{-2}\right)^{-1/2p_0}.$$

Відносно величини α_{m_0} маємо рівняння

$$\frac{\alpha_{m_0}^2}{1 + \alpha_{m_0}^2} = \frac{8}{9} \beta\Phi(0) \frac{f_0^3}{\varphi_0 h_0^2} s^{-5} \frac{(1 + E_2 H_{cm}^{(0)})^3}{1 - E_2 \Phi H_{cm}^{(0)}}. \quad (7.40)$$

Для значень параметрів моделі (5.17) величина $\alpha_{m_0} = 0.3086$. Кожному фіксованому значенню α_{m_0} відповідає деяка температура T_0 , для якої величина $\tau_0 = (T_0 - T_c)/T_c$ має вигляд

$$\tau_0 = -E_2^{-n_0} \frac{f_0}{c_{1k}} \left(\frac{\tilde{h}}{\alpha_{m_0}}\right)^{1/p_0}. \quad (7.41)$$

Для всіх $\tau_0 < \tau < 0$ рівняння (7.33) має один дійсний розв'язок, в області $\tau < \tau_0$ існує три дійсних розв'язки. При прямуванні поля до нуля величина $\tau_0 \rightarrow 0$. Залежність величини τ_0 (нормованої на значення τ^* , яке визначає розміри критичної області температур) від величини h' приведена на Рис. 7.

Для діапазону температур $\tau_0 < \tau \leq 0$ розв'язок рівняння (7.33) знаходимо як і для області температур $T \geq T_c$. У випадку, коли $\tau < \tau_0$ величина Q' із (7.37) стає від'ємною і рівняння (7.33) має три дійсних розв'язки

$$\sigma_1' = 2(-p'/3)^{1/2} \cos(\alpha_r/3),$$

$$\sigma_{2,3}' = -2(-p'/3) \cos\left(\frac{\alpha_r}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),$$

де кут α_r визначається із співвідношення

$$\cos \alpha_r = -\frac{q'}{2(-p'/3)^{2/3}}.$$

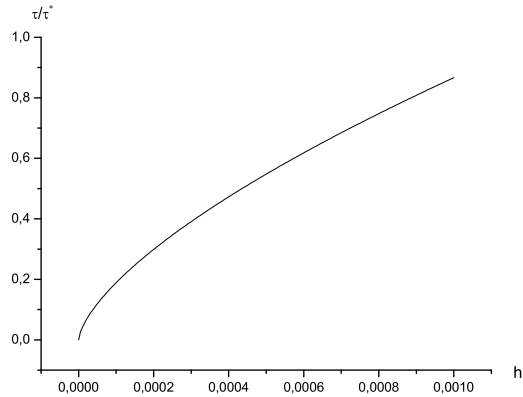


Рис. 7. Залежність величини τ_0 від величини поля.

Зауважимо, що відповідно до (7.24) для величини p' із (7.34) маємо вираз

$$p' = -6s_0^{-3} \frac{f_0}{\varphi_0} (\beta\Phi(0))^{-1} \frac{E_2 + 1}{1 - \Phi E_2},$$

який для всіх значень температур із діапазону $\tau < 0$ приймає від'ємні значення.

Таким чином, отримавши розв'язок рівняння (7.33), знаходимо величину зміщення σ_- із (7.29)

$$\sigma_- = \sigma'_0 s^{-1/2} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2 \right)^{\frac{1}{2(d+2)}}. \quad (7.42)$$

Маючи величину σ_- , можемо обчислити вклад (7.18) до вільної енергії системи (7.16) та (7.2). Такий розрахунок проводиться аналогічно до розрахунку вкладу F' для випадку $T > T_c$. Знаходимо

$$F'' = F_0^{(-)} + F_I, \quad (7.43)$$

де вираз

$$F_0^{(-)} = -kTN E_0(\sigma_-) \quad (7.44)$$

відповідає виділенню макроскопічної частини параметра порядку при $T < T_c$, а для F_I маємо вираз

$$F_I = -kTN n'_{p+2} f_I, \quad (7.45)$$

де

$$f_I = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 + \ln s + \frac{1}{4} \ln u_{n'_p+1} - \frac{1}{2} \ln r'_R - \frac{1}{2} \ln U(x_{n'_p+1}) - \frac{3}{8} \frac{1}{y_{n'_p+2}^2} - \frac{1}{2} f_I''. \quad (7.46)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} u_{n'_p+1} &= (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0 (1 - \Phi H_{cm}), \\ x_{n'_p+1} &= -\bar{x} H_{cm} (1 - \Phi H_{cm})^{-1/2}, \\ r'_R &= r_{n'_p+2} + \frac{1}{2} u_{n'_p+2} s_0^3 (\sigma'_0)^2. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Для величини f_I'' маємо

$$f_I'' = \ln(1 + a_I^2) - \frac{2}{3} + \frac{2}{a_I^2} - \frac{2}{a_I^3} \arctg a_I, \quad (7.48)$$

де

$$a_I = \frac{\pi b}{s_0 c} \left(\frac{2\beta\Phi(0)}{r'_R} \right)^{1/2}. \quad (7.49)$$

Підсумовуючи знайдені вище вклади до вільної енергії системи поблизу точки фазового переходу при $T < T_c$ відповідно до (7.2) знаходимо загальний вираз

$$F^{(-)} = F_a + F_s^{(-)} + F_0^{(-)}, \quad (7.50)$$

де аналітична частина F_a співпадає із аналогічним виразом (6.2) при $T > T_c$,

$$F_s^{(-)} = -kTN \gamma_s^{(-)} \left(\tilde{h}^2 + h_{cm}^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (7.51)$$

де коефіцієнт $\gamma_s^{(-)}$ має вигляд

$$\gamma_s^{(-)} = \left(f_{n'_p+1} - \gamma^{(-)} + f_I/s^3 \right) s_0^{-3}. \quad (7.52)$$

Вклад $F_0^{(-)}$ приведений в (7.44), де для $E_0(\sigma_-)$ справедливо (7.30). Вираз для вільної енергії (7.50) є базовим при розрахунку фізичних характеристик системи при $T < T_c$.

Розрахунок поведінки системи поблизу точки фазового переходу здійснюється фактично для загальної формули для вільної енергії

$$F^{(\pm)} = F_a + F_s^{(\pm)} + F_0^{(\pm)}, \quad (7.53)$$

де аналітична частина F_a є спільною при $T > T_c$ та $T < T_c$. Знаки (\pm) біля величин F_s та F_0 характеризують області температур вище від T_c (знак $+$) та нижче від T_c (знак $-$).

8. Розрахунок параметра порядку та сприйнятливості спінової системи поблизу ТФП в зовнішньому полі при $T > T_c$

Використаємо вираз (7.53) для розрахунку температурних та польових залежностей параметра порядку та сприйнятливості системи. Для розрахунку параметра порядку скористаємося із означення

$$M^{(\pm)} = -\frac{1}{N} \left(\frac{dF^{(\pm)}}{dh} \right)_T. \quad (8.1)$$

Зобразимо для зручності розрахунків величину $M^{(\pm)}$ у вигляді трьох доданків

$$M^{(\pm)} = M_a + M_s^{(\pm)} + M_0^{(\pm)}, \quad (8.2)$$

які відповідають вкладам від різних доданків (7.53) і мають вигляд

$$\begin{aligned} M_a &= -\frac{1}{N} \left(\frac{dF_a}{dh} \right)_T, \\ M_s^{(\pm)} &= -\frac{1}{N} \left(\frac{dF_s^{(\pm)}}{dh} \right)_T, \\ M_0^{(\pm)} &= -\frac{1}{N} \left(\frac{dF_0^{(\pm)}}{dh} \right)_T. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Приймаючи до уваги (6.2), отримуємо

$$M_a = thh' - 2F_{02}h' \approx h'(1 - 2F_{02}). \quad (8.4)$$

Для області температур $T > T_c$ величина $M_s^{(+)}$ розраховується відповідно до (6.5) і зображається у вигляді

$$M_s^{(+)} = (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}} \left[(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2} \frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} + \frac{6}{5} \gamma_s^{(+)} s_0^{3/2} f_0^{-1} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} \right]. \quad (8.5)$$

Похідна величини $\gamma_s^{(+)}$ розраховується відповідно до (6.6), де для кожного із доданків відомий явний вираз.

Для розрахунку $M_0^{(+)}$ використовуємо співвідношення (6.8), яке справедливе для $T > T_c$. Зауважимо, що похідні σ_0 за полем приводять до виразу, що співпадає з умовою (5.6), а отже, відповідні вклади компенсуються. Тому при обчисленні $M_0^{(+)}$ величина σ_0 вважається незалежною від поля. Отримуємо

$$M_0^{(+)} = (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}} \left[e_0 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \right) - \frac{6}{5} e_2 s_0^{3/2} \frac{1}{f_0} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} - (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2} \frac{de_2}{dh'} \right], \quad (8.6)$$

де

$$\frac{de_2}{dh'} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \left(\frac{dr_{n_p+2}}{dh'} + \frac{1}{12} \sigma_0^2 s_0^3 \frac{du_{n_p+2}}{dh'} \right). \quad (8.7)$$

приймаючи до уваги (5.1), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{dr_{n_p+2}}{dh'} &= s_0^{3/2} \frac{1}{h_0} \beta \Phi(0) f_0 E_2 \frac{dH_c}{d\tilde{h}}, \\ \frac{du_{n_p+2}}{dh'} &= s_0^{3/2} \frac{1}{h_0} (\beta \Phi(0))^2 \varphi_0 \Phi E_2 \frac{dH_c}{d\tilde{h}}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Похідна величини H_c може бути обчислена із виразу (4.18) і має вигляд

$$\frac{dH_c}{d\tilde{h}} = -\frac{H_c}{p_0} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)}. \quad (8.9)$$

Використовуючи вираз (8.2), знаходимо сумарний вклад до параметра порядку $M^{(+)}$ при наявності зовнішнього поля

$$M^{(+)} = \sigma_{00}^{(+)} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}} + h'(1 - 2F_{02}), \quad (8.10)$$

де для коефіцієнта $\sigma_{00}^{(+)}$ маємо

$$\sigma_{00}^{(+)} = e_0 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \right) + e_{00} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} + e_{01} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}. \quad (8.11)$$

Тут величина e_0 означена в (5.30), а для e_{00} та e_{01} знаходимо вирази

$$\begin{aligned} e_{00} &= \frac{6}{5} \left(s_0^{3/2} / h_0 \right) (\gamma_s^{(+)} - e_2), \\ e_{01} &= \frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} - \frac{de_2}{dh'}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Графік температурної залежності величини $M^{(+)}$ приведено на Рис. 8, а величини $\sigma_{00}^{(+)}$ на Рис. 9 для значення поля $h' = 10^{-6}$. При цьому прийнята до уваги умова нормування (3.5), а також покладено, що $s_0 = 2$, $b/c = 0.3$.

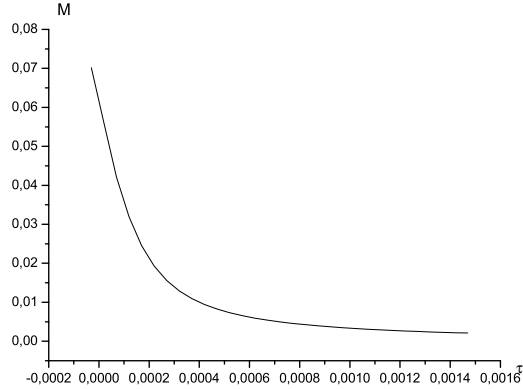


Рис. 8. Залежність намагніченості від температури при значенні поля $h' = 10^{-6}$.

Легко переконатися, що коефіцієнт σ_{00} залежить лише від відношення поля \tilde{h} до перенормованої температури h_c із (2.26). Як впливає із співвідношень (8.7)-(8.9) справедлива рівність (Додаток 6)

$$\frac{de_2}{dh'} = -\frac{s_0^{d/2}}{h_0} q_s \sigma_0^2 \left(1 + \frac{q_e}{12} \sigma_0^2\right) (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (8.13)$$

де постійні q_1 та q_2 приймають значення

$$q_s = \frac{E_2}{2p_0} \beta \Phi(0) f_0 s^{-3} H_c \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}},$$

$$q_e = \Phi s_0^3 \varphi_0 f_0^{-1} \beta \Phi(0).$$

Легко переконатися, що для похідної величини $\gamma_s^{(+)}$ за полем має місце вираз, аналогічний до (8.13). Він має вигляд

$$\frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} f \gamma_1 (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (8.14)$$

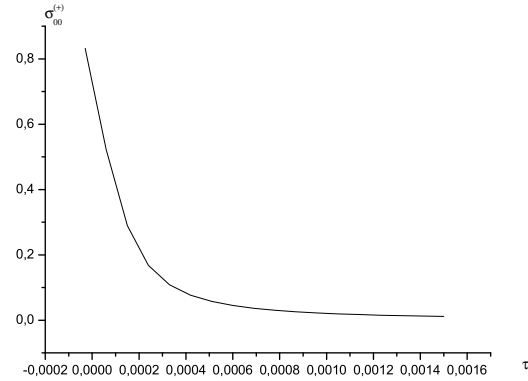


Рис. 9. Залежність критичної амплітуди $\sigma_{00}^{(+)}$ від температури при значенні поля $h' = 10^{-6}$.

де

$$f \gamma_1 = s_0^{-3} (f_p + \gamma_p + f_{gv}/s^3).$$

Величини f_p , γ_p та f_{gv} залежать лише від величини $\alpha = \tilde{h}/h_c$

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{1}{2} r_p g_p \left(1 - 9/y_{n_p}^2\right) - \frac{1}{2} g_{p+1} U(x_{n_p+1}), \\ \gamma_p &= H_{cd} (\gamma_2 + 2\gamma_3 H_c), \\ f_{gv} &= \frac{1}{4} \frac{\varphi_0 \Phi}{u_{n_p+1}} H_{cd} (\beta \Phi(0))^2 - \frac{1}{2} (g_R/r_R + g_a a_g) + \\ &+ g_{p+1} \left(\frac{3}{4} \frac{r_{p+1}}{(y_{n_p+1})^2} - \frac{1}{2} \frac{U'(x_{n_p+1})}{U(x_{n_p+1})} \right). \end{aligned}$$

Постійні r_{p+m} , g_{p+m} та g_a , a_g , як і величина H_{cd} означені в Додатку 6.

Приймаючи до уваги вирази (8.12)-(8.14), знаходимо явний вигляд виразу для критичної амплітуди $\sigma_{00}^{(+)}$ із (8.10)

$$\sigma_{00}^{(+)} = e_0 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}\right) + e_{00} \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} + e_{02}, \quad (8.15)$$

де вираз для коефіцієнта e_{02} отриманий в Додатку 6 і має вигляд

$$e_{02} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} (f \gamma_1 + q_s \sigma_0^2 (1 + q_e \sigma_0^2/12)).$$

Отже, критична амплітуда $\sigma_{00}^{(+)}$ не залежить ні від значення температури, ні від поля, а є функцією їхнього відношення

$$\alpha = \frac{\tilde{h}}{h_c} = \left(s_0^{3/2} / h_0 \right) \left(\frac{f_0}{c_{1k}} \right)^{p_0} \alpha_m,$$

де величина α_m є відношенням вихідних значень h' та τ :

$$\alpha_m = \frac{h'}{\tau^{p_0}}.$$

Таким чином, вигляд рівняння стану тривимірної ізінгоподібної системи при наявності поля описується виразом (8.10). На відміну від загальновідомих представлень цього рівняння (Додаток 2), а також параметричного представлення [17] форма (8.10) має ряд переваг. Для зручності подальшого викладу називатимемо його кросоверним рівнянням стану. Термін кросовер вживається тут з огляду на те, що вираз (8.10) дозволяє природним чином здійснювати перехід до випадків, коли одна із змінних (температура чи поле) є визначальною для опису поведінки параметра порядку.

Дослідимо поведінку скейлінгової функції кросоверного рівняння стану $\sigma_{00}^{(+)}$ при зміні температури та величини поля. Як відзначалося вище, ця величина залежить лише від величини α . Однак α є функцією мікроскопічних параметрів гамільтоніана, зокрема залежить від величини s_0 , яка характеризує фур'є-образ потенціалу взаємодії (4). Тому природніше визначати залежність $\sigma_{00}^{(+)}$ від параметра α_m , який є відношенням приведенного поля $h' = \beta\mathcal{H}$ та відносної температури $\tau = (T - T_c)/T_c$. Подібні залежності легко отримати із (8.11) для інших значень цих параметрів. Більш звичною є залежність критичної амплітуди $\sigma_{00}^{(+)}$ від змінної $z = \alpha_m^{-1/p_0}$

$$z = \frac{\tau}{(h')^{1/p_0}}.$$

Подібна змінна $x = \tau/M^{1/\beta}$ використовується в рівнянні стану (Д2.5), запропонованому Вайдомом. Величина x в (Д2.5) та (Д2.6) включає в себе параметр порядку $M^{(+)}$, який з точки зору мікроскопічного підходу має бути розрахований, а не введений “зверху”. Тому використання змінної z є більш природнім, ніж змінної x , хоча при малих та від’ємних значеннях τ величини z та x є еквівалентними. Графік залежності $\sigma_{00}^{(+)}$ від z приведений на Рис. 10. Причому крива 1 описує ту ж залежність, яка приведена на Рис.9 (лише в інших координатах).

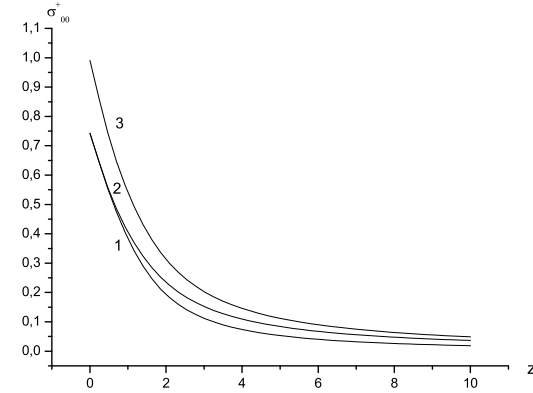


Рис. 10. Залежність від змінної z критичної амплітуди параметра порядку $\sigma_{00}^{(+)}$ рівняння стану (8.10) (крива 1), критичної амплітуди $\sigma_{01}^{(+)}$ спрощеного рівняння стану (8.16) (крива 2) та критичної амплітуди $\sigma_{02}^{(+)}$ нормованого рівняння стану (8.18) (крива 3).

Крива 2 на Рис.10 відповідає критичній амплітуді $\sigma_{01}^{(+)}$ рівняння стану, записаного у вигляді

$$M^{(+)} = \sigma_{01}^{(+)} \tilde{h}^{\frac{1}{d+2}} + h' (1 - 2F_{02}), \quad (8.16)$$

де

$$\sigma_{01}^{(+)} = \sigma_{00}^{(+)} (1 + \alpha^{-2})^{\frac{1}{2(d+2)}}, \quad (8.17)$$

а крива 3 описує критичну амплітуду $\sigma_{02}^{(+)}$ для рівняння стану, записаного у вигляді

$$M^{(+)} = \sigma_{02}^{(+)} h'^{\frac{1}{d+2}} + h' (1 - 2F_{02}), \quad (8.18)$$

де

$$\sigma_{02}^{(+)} = \sigma_{01}^{(+)} \left(\frac{s_0^{3/2}}{h_0} \right)^{\frac{1}{(d+2)}}, \quad (8.19)$$

Приймаючи до уваги рівність $z = (\alpha_m)^{-1/p_0}$ маємо

$$\alpha = \left(\frac{s_0^{3/2}}{h_0} \right) \left(\frac{f_0}{c_{1k}} \right)^{p_0} z^{-p_0}.$$

Тоді залежність критичної амплітуди $\sigma_{01}^{(+)}$ від змінної z набуває вигляду

$$\sigma_{01}^{(+)} = \sigma_{00}^{(+)} \left(1 + h_0^2 s_0^{-3} (c_{1k}/f_0)^{2p_0} z^{2p_0} \right)^{\frac{1}{2(d+2)}}.$$

Очевидно, що для малих значень z величини критичних амплітуд $\sigma_{00}^{(+)}$ та $\sigma_{01}^{(+)}$ співпадають (як це видно із порівняння кривих 1 та 2 Рис.10) і для цієї області параметра z рівняння стану (8.10) переходить в більш звичну форму (8.16). Скориставшись із малості параметра z можна виконати розклади в ряд за його степенями ($z \ll 1$) та отримати відомі представлення для критичної амплітуди $\sigma_{01}^{(+)}$. Однак в області $z \approx 1$ такі розклади не мають місця.

Формула (8.10) дозволяє, зокрема, описати поведінку параметра порядку для деяких граничних випадків. Одним із них є відсутність в системі зовнішнього поля ($h' = 0$). Для цього випадку похідні величин γ_s та e_2 обертаються в нуль, а отже $e_{02}(h = 0) = 0$, і маємо

$$\sigma_{00}(h = 0) = e_0.$$

Тоді із (8.10) отримуємо залежність

$$M^{(+)}(h = 0) = e_0 |\tilde{\tau}|^\beta,$$

де $\beta = \nu/2$. Коефіцієнт e_0 при $h = 0$ відмінний від нуля лише при $T < T_c$. Це пов'язано з тим, що $e_0 = \sigma_0 s^{-1/2}$, а σ_0 є розв'язком рівняння (5.8), яке для всіх $\tau > 0$ та $h = 0$ має лише нульовий дійсний розв'язок.

Іншим граничним випадком є $h \neq 0$ та $T = T_c$. Йому відповідає значення $\alpha \rightarrow \infty$. При цьому $H_c \rightarrow 0$ і величини r_{n_p+2} , u_{n_p+2} та x_{n_p+2} втрачають залежність від поля. Коефіцієнти σ_0 , e_0 та e_2 обертаються в деякі постійні величини. Параметр порядку $M^{(+)}$ із (8.10) при $T = T_c$ має вигляд

$$M = \tilde{h}^{1/5} \sigma_0(T_c) + h'(1 - 2F'_{02}),$$

де

$$\sigma_0(T_c) = \frac{6}{5} \left(e_0 + (\gamma_s^{(+)} - e_2) s_0^{3/2} / h_0 \right).$$

Сприйнятливості системи знаходимо шляхом диференціювання (8.10) за полем. Отримуємо

$$\chi^{(+)} = \beta(\chi_0 + \chi_s^{(+)}), \quad (8.20)$$

²Зауважимо, що для спрощення розрахунків в даній роботі використовується наближення, при якому $\eta = 0$ (η – критичний показник кореляційної функції).

де $\chi_0 = (1 - 2F_{02})$ постійна складова, $\beta = 1/kT$, а

$$\chi_s^{(+)} = (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{1}{2(d+2)}} \left(\frac{d\sigma_{00}^{(+)}}{dh'} + \frac{1}{5} \sigma_{00}^{(+)} \frac{s_0^{3/2}}{h_0} \frac{\tilde{h}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)} \right). \quad (8.21)$$

При обчисленні похідної від $\sigma_{00}^{(+)}$ необхідно врахувати залежність величини σ_0 від поля. Цю похідну зручно зобразити у вигляді

$$\frac{d\sigma_{00}^{(+)}}{dh'} = \chi_{01} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (8.22)$$

де

$$\chi_{01} = \chi_{011} + \chi_{012} + \chi_{013},$$

причому

$$\begin{aligned} \chi_{011} &= \frac{2}{5} s_0^{3/2} h_0^{-1} (1 + \alpha^2)^{-1} \left[e_0 \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} + 3(\gamma_s^{(+)} - e_2) s_0^{3/2} h_0^{-1} \right], \\ \chi_{012} &= (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{1}{5} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)} \right) \frac{de_0}{dh'} + \frac{11}{5} \frac{s_0^{3/2}}{h_0} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \left(\frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} - \frac{de_2}{dh'} \right) \right], \\ \chi_{013} &= (\tilde{h}^2 + h_c^2) \left[\frac{d^2 \gamma_s^{(+)}}{dh'^2} - \frac{d^2 e_2}{dh'^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Очевидно, що коефіцієнт χ_{011} прямує до нуля у випадку росту h' при фіксованому τ , або при зменшенні τ при фіксованому значенні h' , оскільки $\chi_{011} \sim (1 + \alpha^2)^{-1}$.

Приймаючи до уваги (8.22), знаходимо формулу для сприйнятливості

$$\chi^{(+)} = \beta(1 - 2F_{02}) + \beta \chi_{00}^{(+)} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-\frac{d+1}{2(d+2)}}, \quad (8.24)$$

де

$$\chi_{00}^{(+)} = \chi_{01} + \frac{1}{5} \sigma_{00}^{(+)} s_0^{3/2} h_0^{-1} \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}}. \quad (8.25)$$

Температурна залежність величини критичної амплітуди сприйнятливості $\chi_{00}^{(+)}$ приведена на Рис.11.

Вираз для сприйнятливості (8.24) відрізняється від загальнозжиганих виразів в роботах [17,18]. Вважається, що сприйнятливості системи поблизу критичної точки має вигляд [18]

$$\chi = h^{1/\delta-1} f_\chi(z), \quad (8.26)$$

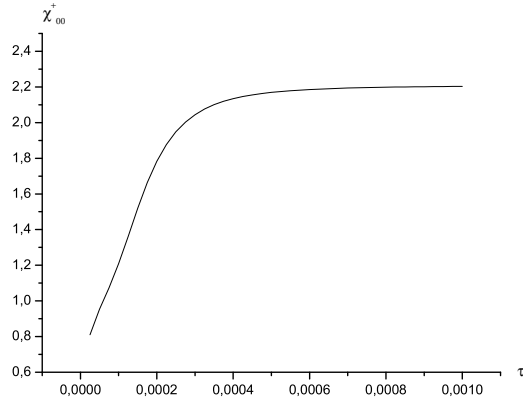


Рис. 11. Залежність від відносної температури критичної амплітуди сприйнятливості $\chi_{00}^{(+)}$ при значенні поля $h' = 10^{-6}$.

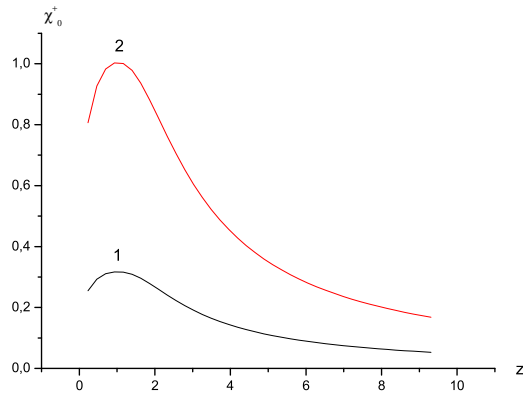


Рис. 12. Залежність від змінної z критичної амплітуди сприйнятливості $\chi_e^{(+)}$.

де величина $f_\chi(z)$ є скейлінговою функцією сприйнятливості. Саме для такого вигляду χ досліджена залежність $f_\chi(z)$ від величини z . Вона (на відміну від $\chi_{00}^{(+)}$) досягає максимуму при значеннях $z \sim 1$. Для порівняння отриманого вище результату для сприйнятливості (8.24) зведемо його до вигляду (8.26). Для сингулярної частини сприйнятливості знаходимо

$$\chi^{(+)} = \beta \chi_{01}^{(+)} \tilde{h}^{-\frac{d+1}{d+2}}, \quad (8.27)$$

де

$$\chi_{01}^{(+)} = \chi_{00}^{(+)} (1 + \alpha^{-2})^{-\frac{d+1}{d+2}}. \quad (8.28)$$

Якщо в (8.27) величину \tilde{h} замінити на h' відповідно до (2.25), отримуємо ще одне представлення для сприйнятливості системи

$$\chi^{(+)} = \beta \chi_{02}^{(+)} (h')^{-\frac{d+1}{d+2}}, \quad (8.29)$$

де

$$\chi_{02}^{(+)} = \chi_{01}^{(+)} \left(h_0 / s_0^{3/2} \right)^{\frac{d+1}{d+2}}. \quad (8.30)$$

На Рис. 12 приведені залежності величин $\chi_{01}^{(+)}$ (крива 2) та $\chi_{02}^{(+)}$ (крива 1) від аргумента z . Як бачимо, наявність максимуму критичної амплітуди сприйнятливості пов'язана із формою представлення самого виразу для неї.

Якщо абстрагуватися від термінології, пов'язаної із введенням критичних амплітуд та зобразити температурну залежність сприйнятливості, то отримуємо криву, зображену на Рис. 13. Вона відповідає значенню $h' = 10^{-6}$ та не залежить від форми представлення (8.24), (8.27) чи (8.29) і має максимум при деякій температурі $\tau \neq 0$, що відповідає $z \sim 1$.

Формула (8.24) спрощується для граничних випадків. Так при $h = 0$ маємо

$$\chi^{(+)}(h = 0) = \beta \chi_{00}^{(+)}(h = 0) |\tilde{\tau}|^{-\gamma}. \quad (8.31)$$

Тут $\gamma = 2\nu$, а для критичної амплітуди $\chi_{00}(h = 0)$ знаходимо вираз

$$\chi_{00}^{(+)}(h = 0) = \frac{6}{5} s_0^3 h_0^{-2} (\gamma_s^{(+)} - e_2). \quad (8.32)$$

Зауважимо, що значення $\chi_{00}(h = 0)$ суттєвим чином залежить від того, вище чи нижче температури фазового переходу знаходиться система. Для всіх $T > T_c$ (та $h = 0$) маємо $e_2 = 0$, однак, при $T < T_c$ $e_2 \neq 0$ і тому значення критичної амплітуди буде іншим для температур вищих та нижчих від температури фазового переходу.

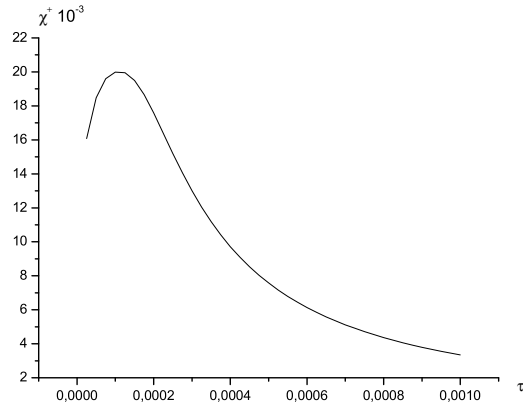


Рис. 13. Залежність від температури сприйнятливості системи.

9. Розрахунок ентропії та теплоємності поблизу ТФП в зовнішньому полі при $T > T_c$

Використаємо вираз для вільної енергії (7.53) для розрахунку ентропії та теплоємності системи. Скористаємося відомим співвідношенням для ентропії

$$S^{(\pm)} = - \left(\frac{dF^{(\pm)}}{dT} \right)_h. \quad (9.1)$$

Відповідно до (6.7) зобразимо його у вигляді

$$S^{(\pm)} = S_a + S_c^{(\pm)} + S_0^{(\pm)}, \quad (9.2)$$

де S_a відповідає вкладу аналітичних доданків

$$S_a = - \left(\frac{dF_a}{dT} \right)_h, \quad (9.3)$$

S_s – відповідає вкладу неаналітичних доданків вільної енергії,

$$S_s^{(\pm)} = - \left(\frac{dF_s^{(\pm)}}{dT} \right)_h,$$

а $S_0^{(\pm)}$ – вклад від змінної ρ_0

$$S_0^{(\pm)} = - \left(\frac{dF_0^{(\pm)}}{dT} \right)_h. \quad (9.4)$$

Подальші вирази для ентропії (теплоємності) будемо нормувати на число частинок N . Приймаючи до уваги (6.2) із (9.3), знаходимо

$$S_a = k(\ln chh' - F_0 h'^2) + k(\gamma_0 + \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2) + k(1 + \tau)(\gamma_1 + 2\gamma_2 \tau).$$

Оскільки $\tau \ll 1$, то доданками пропорційними до τ^2 будемо нехтувати. Такі вклади відповідають доданкам вільної енергії, які пропорційні до τ^3 , а останні не беруться до уваги при розрахунку F_a . Отже,

$$S_a = k(\ln chh' - F_0 h'^2) + k(\gamma_0 + \gamma_1 + 2(\gamma_1 + \gamma_2)\tau). \quad (9.5)$$

Розглянемо окремо вклади до ентропії при температурах вищих та нижчих за T_c . У випадку $T > T_c$ для $S_s^{(+)}$ отримуємо

$$S_s^{(+)} = k3\nu \frac{c_{1k}}{f_0} \gamma_s^{(+)} \frac{|\tilde{\tau}|^{5\nu-1}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{2/5}} + k \frac{d\gamma_s^{(+)}}{d\tau} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{\frac{d}{d+2}}, \quad (9.6)$$

де також знехтувано малими вкладками, які пропорційні до $(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{3/5}$, а для $S_0^{(+)}$ маємо вираз

$$S_0^{(+)} = kh'(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/10} \left[\frac{de_0}{d\tau} + \frac{\nu}{2} \frac{c_{1k}}{f_0} e_0 \frac{|\tilde{\tau}|^{5\nu-1}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)} \right] - k(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{3/5} \left[\frac{de_2}{d\tau} + 3\nu \frac{c_{1k}}{f_0} e_2 \frac{|\tilde{\tau}|^{5\nu-1}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)} \right]. \quad (9.7)$$

Залежність загального виразу для ентропії від температури та поля поблизу точки фазового переходу знаходимо із (9.2) із врахуванням виразів (9.5)-(9.7).

Зауважимо, що похідні по температурі величин e_0 та e_2 спрощуються, оскільки тут (як і у випадку розрахунку вкладу до параметра порядку $M_0^{(+)}$) величина σ_0 вважається незалежною від температури. В цьому легко переконатися, розглянувши вираз

$$E_0 = h' \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{1}{2(d+2)}} \frac{de_0}{d\tau} - \frac{de_2}{d\tau} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{d}{d+2}}.$$

Приймаючи до уваги (5.30), знаходимо

$$E_0 = \frac{d\sigma_0}{d\tau} E_{0\sigma} - \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{d}{d+2}} E_{0t}, \quad (9.8)$$

де

$$\begin{aligned} E_{0\sigma} &= s^{-3} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{d}{d+2}} \left[s^{5/2} \frac{h'}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\sigma_0 r_{n_p+2} + \frac{1}{6} \sigma_0^3 u_{n_p+2} s_0^3 \right) \right], \\ E_{0t} &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \left(\frac{dr_{n_p+2}}{d\tau} + \frac{1}{12} \sigma_0^2 s_0^3 \frac{du_{n_p+2}}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Вираз $E_{0\sigma}$ обертається в нуль для довільних h та τ , оскільки співпадає із рівнянням (5.8) для знаходження σ_0 . Тому

$$S_0^{(+)} = k(S_{01}^{(+)} + S_{02}^{(+)} + S_{03}^{(+)}), \quad (9.10)$$

де

$$\begin{aligned} S_{01}^{(+)} &= e_0 h' \frac{\nu}{2} \frac{c_{1k}}{f_0} |\tilde{\tau}|^{5\nu-1} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-9/10}, \\ S_{02}^{(+)} &= -e_2 3\nu \frac{c_{1k}}{f_0} |\tilde{\tau}|^{5\nu-1} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-2/5}, \\ S_{03}^{(+)} &= -E_{0t} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{3/5}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Величина E_{0t} може бути знайдена в явному вигляді. Приймаючи до уваги (5.1), знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{dr_{n_p+2}}{d\tau} &= \beta\Phi(0) E_2 \frac{dH_c}{d\tau}, \\ \frac{du_{n_p+2}}{d\tau} &= (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0 \Phi E_2 \frac{dH_c}{d\tau}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

причому відповідно до (4.18) маємо

$$\frac{dH_c}{d\tau} = \frac{c_{1k}}{f_0} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{-1/2\rho_0}. \quad (9.13)$$

В результаті підстановки цих виразів в (9.9) знаходимо

$$S_{03}^{(+)} = -E_{0t0} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{3\nu-1}{5\nu}}. \quad (9.14)$$

Підсумовуючи всі вклади до ентропії, отримуємо загальний вираз

$$S^{(+)} = S_a + kS_1 \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{3\nu-1}{5\nu}} + kS_2 \frac{\tilde{\tau}^{5\nu-1}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{2/5}}. \quad (9.15)$$

Тут вираз для S_a приведений в (9.5), а для S_1 та S_2 маємо

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma_{sd}^{(+)} - E_{0t0} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2}; \\ S_2 &= \frac{c_{1k}}{f_0} \left(3\nu \left(\gamma_s^{(+)} - e_2\right) + e_0 \frac{\nu}{2} \frac{h'}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Для скорочення запису тут введені позначення

$$\begin{aligned} E_{0t0} &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \beta\Phi(0) E_2 c_{1k} \left(1 + \frac{q_e \sigma_0^2}{12} \right), \\ \gamma_{sd}^{(+)} &= \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{1}{5\nu}} \frac{d\gamma_s^{(+)}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

У випадку $h = 0$ величина $\gamma_{sd}^{(+)} = \tilde{\tau} \frac{d\gamma_s^{(+)}}{d\tau}$ і прямує до постійної величини при $\tau \rightarrow 0$. Вираз (9.15) відповідає області температур $T \geq T_c$. Для області значень $T \leq T_c$ можна отримати відповідний вираз, використовуючи замість $F^{(+)}$ величину $F^{(-)}$ із (7.53).

Теплоємність системи $C^{(+)}$ будемо розраховувати, приймаючи до уваги (9.15). Запишемо

$$C^{(+)} = C_a + C_1^{(+)} + C_2^{(+)}. \quad (9.18)$$

Тут

$$C_a = 2k(\gamma_1 + \gamma_2), \quad (9.19)$$

а для вкладів $C_n^{(+)}$ маємо вирази

$$\begin{aligned} C_1^{(+)} &= kT \frac{d}{dT} \left[S_1 \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{\frac{3\nu-1}{5\nu}} \right], \\ C_2^{(+)} &= kT \frac{d}{dT} \left[S_2 \tilde{\tau}^{5\nu-1} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{-2/5} \right]. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Легко переконатися, що

$$C_1^{(+)} = k \left(\tilde{h}^2 + h_c^2\right)^{-\frac{\alpha}{5\nu}} \left[S_{1t} + (3\nu - 1) S_1 \frac{c_{1k}}{f_0} \tau_T \right], \quad (9.21)$$

де $\alpha = 2 - 3\nu$, а S_{1t} має вигляд

$$S_{1t} = \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{1}{5\nu}} \frac{dS_1}{d\tau}. \quad (9.22)$$

Скориставшись із явного виразу для S_1 із (9.16) знаходимо

$$S_{1t} = \frac{c_{1k}}{f_0} \tau_T \left(\gamma_{sd}^{(+)} + 5\nu E_{0t0} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \right) - \\ - c_{1k} \sigma_0 s^{-3} \beta \Phi(0) E_2 (1 + \sigma_0^2 q_e / 6) \sigma_{0d} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} + \gamma_{sdd}^{(+)} \quad (9.23)$$

Тут введені позначення

$$\tau_T = \left(\frac{\tilde{\tau}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/5\nu}} \right)^{5\nu-1}, \\ \sigma_{0d} = (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/5\nu} \frac{d\sigma_0}{d\tau}, \\ \gamma_{sdd}^{(+)} = (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{2/5\nu} \frac{d^2 \gamma_s^{(+)}}{d\tau^2}. \quad (9.24)$$

Розрахунок похідної за температурою від величини σ_0 виконується із тієї ж рівності, із якої розраховувалася вище похідна за полем. В результаті такого розрахунку знаходимо

$$\sigma_{0d} = - \frac{c_{1k}}{f_0} \frac{\sigma_0}{r_R} \beta \Phi(0) f_0 E_2 (1 + \sigma_0^2 q_e / 6) \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} - \\ - \frac{c_{1k}}{f_0} \frac{5\nu s^{5/2}}{2 r_R} \tau_T \frac{h'}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}}. \quad (9.25)$$

Приймаючи до уваги приведені вище рівності, знаходимо вклад до теплоємності $C_1^{(+)}$. Він має вигляд

$$C_1^{(+)} = k C_{11} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-\frac{\alpha}{5\nu}}, \quad (9.26)$$

де

$$C_{11} = \frac{c_{1k}}{f_0} \left[3\nu \tau_T \gamma_{sd}^{(+)} + (2\nu + 1) \tau_T E_{0t0} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} - \right. \\ \left. - \sigma_{02} \sigma_{0d} \frac{\tilde{h}^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} + \frac{f_0}{c_{1k}} \gamma_{sdd}^{(+)} \right]. \quad (9.27)$$

Тут

$$\sigma_{02} = \sigma_0 s^{-3} f_0 \beta \Phi(0) E_2 (1 + \sigma_0^2 q_e / 6).$$

Вклад до теплоємності $C_2^{(+)}$ із (9.18) має вигляд

$$C_2^{(+)} = k C_{21} \frac{\tilde{\tau}^{5\nu-1}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{(2\nu+1)/5\nu}} + k C_{22} \frac{\tilde{\tau}^{5\nu-2}}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{2/5}}. \quad (9.28)$$

Для коефіцієнтів C_{2n} маємо:

$$C_{21} = \frac{c_{1k}}{f_0} 3\nu \left(\gamma_{sd}^{(+)} - e_{2d} \right) + \frac{h'}{(\tilde{h}_c^2 + \tilde{h}^2)^{1/2}} \left(\frac{\nu}{2} e_{0d} - \frac{c_{1k}}{f_0} \frac{5\nu^2}{4} e_{0\tau_T} \right), \\ C_{22} = \left(\frac{c_{1k}}{f_0} \right)^2 \left(5\nu - 1 - 2\nu \frac{h_c^2}{\tilde{h}^2 + h_c^2} \right) \times \\ \times \left(3\nu \left(\gamma_s^{(+)} - e_2 \right) + \frac{\nu}{2} e_0 \frac{h'}{(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}} \right). \quad (9.29)$$

Тут введено позначення

$$e_{2d} = \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{\frac{1}{5\nu}} \frac{de_2}{d\tau}. \quad (9.30)$$

Таким чином вирази (9.26) та (9.28) описують поведінку теплоємності системи поблизу точки фазового переходу при наявності зовнішнього поля. Графік залежності теплоємності системи від змінної z приведений на Рис.14.

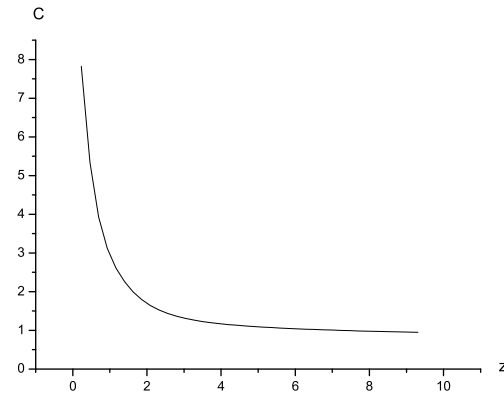


Рис. 14. Теплоємність системи.

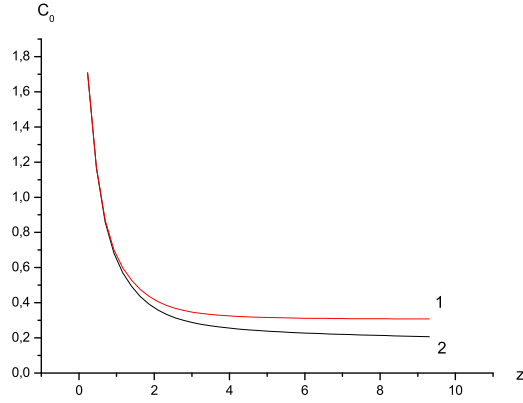


Рис. 15. Залежність від змінної z критичної амплітуди C_{00} теплоємності, зображеної у вигляді $C^{(+)} = C_{00}/(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-\varphi/2}$ (крива 1) та амплітуди C_{01} теплоємності у вигляді $C^{(+)} = C_{01}/\tilde{h}^{-\varphi}$ (крива 2).

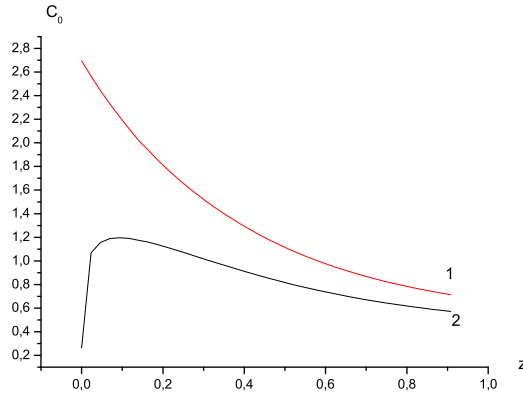


Рис. 16. Залежність від змінної z критичної амплітуди C_{0h} теплоємності, зображеної у вигляді $C^{(+)} = C_{0h}/\tilde{h}^{-\varphi}$ (крива 1) та амплітуди C_{0t} теплоємності у вигляді $C^{(+)} = C_{0t}/\tau^{-\alpha}$ (крива 2).

На Рис.15 та Рис.16 приведені залежності критичної амплітуди теплоємності для різних способів нормування від змінної z .

Легко бачити, що при умові $h \rightarrow 0$ вирази (9.20) мають вигляд

$$C_1^{(+)}(h=0) = |\tilde{\tau}|^{-\alpha} C_{1\tau}, \quad (9.31)$$

де $C_{1\tau} = C_{11}(h=0)$ має вигляд

$$C_{1\tau} = k \frac{c_{1k}}{f_0} 3\nu \gamma_{sd}^{(+)} + k \gamma_{sdd}^{(+)}.$$

Для $C_2^{(+)}$ при $h=0$ знаходимо

$$C_2^{(+)}(h=0) = C_{2\tau} |\tilde{\tau}|^{-\alpha}, \quad (9.32)$$

де

$$C_{2\tau} = \frac{c_{1k}}{f_0} 3\nu (\gamma_{sd}^{(+)} - e_{2d}) + \left(\frac{c_{1k}}{f_0}\right)^2 (3\nu - 1) \left[3\nu (\gamma_3^{(+)} - e_2)\right].$$

В границі $\tau \rightarrow 0$ теплоємність залежить від поля. Для $C_1^{(+)}$ маємо

$$C_1^{(+)}(\tau=0) = \tilde{h}^{-\frac{2\alpha}{3\nu}} C_{1h}.$$

Тут

$$C_{1h} = k \frac{c_{1k}}{f_0} \left[-\sigma_{02} \sigma_{0d} + \frac{f_0}{c_{1k}} \gamma_{sdd}^{(+)} \right].$$

Вираз для $C_2^{(+)}$ при $\tau=0$ рівний нулеві. Тому поведінка теплоємності при $T = T_c$ має польову особливість з критичним показником

$$\varphi = \frac{\alpha}{\delta\beta},$$

де в використаному нами наближенні $\alpha = 2 - d\nu$, $\delta = (d+2)$ та $\beta = \nu/2$.

10. Висновки

Запропонований метод розрахунку, який дозволяє встановити в рамках єдиного підходу поведінку основних фізичних величин 3D ізінгоподібної системи поблизу точки фазового переходу. Від звичної моделі Ізінга, яка описується потенціалом взаємодії найближчих сусідів, дана модель відрізняється потенціалом взаємодії. Формула

(4) задає фур'є-образ потенціалу, який відповідає модифікованому експонентно-спадному потенціалу взаємодії $\Phi(r) = A \exp(-r/b)$. При малих значеннях хвильового вектора \vec{k} для $\Phi(k)$ використовується параболічна апроксимація (як це є в звичайній моделі Ізінга), а для значень \vec{k} поблизу границі зони Бріллоена $\Phi(k)$ замінюється на деяке постійне значення Φ_0 . Усереднення $\Phi(k)$ для великих значень \vec{k} спотворює модель Ізінга, однак критична поведінка при цьому змінюється не принципово, оскільки визначається областю малих значень хвильового вектора. Тому можна сподіватися, що така модифікація потенціалу $\Phi(k)$ несуттєво вплине на її критичну поведінку.

Використовуючи підхід Юхновського [1], записано функціональне представлення статистичної суми моделі, узагальнене на випадок присутності зовнішнього поля. Шляхом поетапного інтегрування обчислено статистичну суму моделі поблизу точки фазового переходу. Метод поетапного розрахунку статистичної суми використовує ідею Вільсона [11,12], однак, на відміну від підходу [12], де обчислення передбачають використання теорії збурень відносно гаусового розподілу флуктуацій параметра порядку, розрахунок виконано з використанням негаусових розподілів флуктуацій. В результаті отримано рекурентні співвідношення (РС) між коефіцієнтами ефективних блочних структур. Знайдена нерухома точка цих співвідношень та записані явні розв'язки РС в околі нерухокої точки. Встановлено, що загальні рекурентні співвідношення можна наближено замінити їхніми розв'язками лише для певної області хвильових векторів $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n_p}$. Вона названа областю критичного режиму флуктуацій параметра порядку (КРФ) і характеризується деяким значенням номера ітерацій n_p . Показано, що величина n_p залежить від величини відносної температури τ та значення поля h . Встановлено характер такої залежності. При ненульових значеннях τ та h в системі крім області КРФ має місце область граничного гаусового режиму флуктуацій для $T > T_c$ та область інверсного гаусового режиму (ІГР) для всіх $T < T_c$.

Знайдено явний вираз для вільної енергії системи поблизу точки фазового переходу як суму вкладів від згаданих вище областей флуктуацій параметра порядку як функції температури та поля. Відповідно до відомих термодинамічних рівностей розраховані вирази для параметра порядку, сприйнятливості системи та теплоємності.

Виконані розрахунки є наближеними. Вони пов'язані, по-перше, з використанням функціонального представлення статистичної суми моделі (1), яке містить в показнику експоненти лише другу та четверту степені змінної $\eta_{\vec{k}}$. Як відомо [8], таке наближення не до-

зволяє отримати достатньо доброго значення критичного показника кореляційної довжини ν . Відповідні використаному наближенню рекурентні співвідношення дають значення $\nu = 0.605$, що є заниженим по відношенню до загальноприйнятого значення $\nu_I = 0.630$ для 3D моделі Ізінга. Однак, як показано нами в [7], врахування шостої степені змінної $\eta_{\vec{k}}$ в показнику експоненти виразу (1) дозволяє отримати значення ν зовсім близьке до ν_I . Викладена в роботі схема розрахунку не змінюється при використанні вищих (за четверту) степенів змінної $\eta_{\vec{k}}$, однак робить їх більш громіздкими. Тому для викладу самого методу розрахунку використана модель " η^4 ". Друге наближення, яке використано в роботі полягає в тому, що критичний показник кореляційної функції $\eta = 0$. Таке наближення зобумовлене усередненням фур'є-образу потенціалу $\Phi(k)$ для кожного з етапів розрахунку статистичної суми на деяке середнє значення Φ_n для певної області хвильових векторів $\vec{k} \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n+1}$. Нехтування залежності від \vec{k} є причиною того, що $\eta = 0$. Однак, цей недолік можна усунути, якщо розглянути поправку на усереднення потенціалу, як це описано, зокрема, в [1,8].

Будучи свідомим, що запропонований метод розрахунку фізичних величин поблизу точки фазового переходу другого роду є наближеним, він дозволяє здійснити опис ряду фізичних величин без використання феноменологічних параметрів (як параметр порядку). Крім неklasичних значень критичних показників він дозволяє отримати загальні характеристики системи, зокрема значення температури фазового переходу. Однак основною перевагою запропонованого методу є можливість розрахунку аналітичних виразів для таких величин, як параметр порядку, сприйнятливості, теплоємності тощо. Частковим результатом розрахунку є нова форма рівняння стану (8.10), яка в граничних випадках переходить в добре відомі представлення цього рівняння.

Література

1. Yukhnovskii I.R. Phase Transitions of the Second Order. Collective Variables Method (Singapore: World Scientific), 1987.
2. Kozlovskii M.P. Critical Behaviour of 3D Systems in the External Field // *Ferroelectrics*, 317: 25-29, 2005.
3. Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V., Prytula O.O. Analytic Method of Calculating Thermodynamic Functions for Ising-Like System in an External Field // *Ferroelectrics*, 317: 43-37, 2005.

4. Kozlovskii M.P. // Condens. Matter Phys. 2005, 8, N 3(43), pp. 473-506.
5. Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V., Prytula O.O. // Physica A 369 (2006), p.562-576.
6. Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V., Prytula O.O. // Phys. Rev. B 73, 174406 (2006).
7. Yukhnovskii I.R., Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V. Phys. Rev. B, 2002, **66**, 13440.
8. Юхновський І.Р., Козловський М.П., Пилук І.В. Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах. - Львів: Євросвіт, 2001. - 592с.
9. Kadanoff L.P. Physics (N.Y.), 1966, **2**, 263.
10. Kadanoff L.P. Rev. Mod. Phys., 1967, 39, 395.
11. Wilson K.G. Phys. Rev. B **4**, 1971, 3174; 3184.
12. Wilson K.G., Kogut J. Phys. Rep. 1974, **C 12**, 75.
13. Pelissetto A., Vicari E. Nucl. Phys. B , **519** (1998) p.626-660.
14. Compostrini M., Pelissetto A., Rossi P. Phys. Rev. E, **60** (1999) p. 3526-3562.
15. Zinn S.Y., Fisher M.E. Physica A **226** (1996) p.168-180.
16. Hasenbusch M. J. Phys. A 32 (1999) 4/851 [hep-lat/9902026].
17. Guida R., Zinn-Justin J. Nucl. Phys. B **489** (1977) p.626-652.
18. Engels J., Fromme L., Seniuch M. Nucl. Phys. B **655** (2003) p. 277-299.
19. Козловський М.П. Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку тривимірного магнетика. III. Вільна енергія для випадку граничного значення полч ($h \neq 0$ та $\tau \neq 0$). - Львів, 2003. - 35с. - (Препринт ІФКС НАН України; ISMP-03-13U).
20. Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V., Prytula O.O. // Condens. Matter Phys., 2004, 7, № 2 (38), p.p. 361-382.
21. Kozlovskii M.P. Phase Transitions, 2007, 80, p.3-9.
22. Widom B. J.Chem. Phys. **43**, p.3898 (1965).
23. Griffiths R.B. Phys. Rev **158**, p.176 (1967).

Додаток 1. Дослідження рекурентних співвідношень

Запишемо явний вигляд РС (1.17) у випадку великих значень y_n .
Маємо

$$r_{n+1} = s^2 \left[-q + \left(\frac{u_n}{3} \right)^{1/2} \frac{1}{U(x_n)} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{1}{y_n^2} + 0(y_n^{-4}) \right) \right],$$

$$u_{n+1} = s u_n \frac{\varphi(x_n)}{3U^4(x_n)} \left(1 - \frac{21}{2} \frac{1}{y_n^2} + 0(y_n^{-4}) \right). \quad (Д1.1)$$

Приймаючи до уваги (1.13), знаходимо їхній явний вигляд

$$r_{n+1} = s^2 \left[-q + \left(\frac{u_n}{3} \right)^{1/2} \frac{1}{U(x_n)} - \frac{s^{-3}}{2} \left(\frac{u_n}{3} \right)^{1/2} \frac{\varphi(x_n)}{U^3(x_n)} \right],$$

$$u_{n+1} = s u_n \frac{\varphi(x_n)}{3U^4(x_n)} \left[1 - \frac{7}{2} s^{-3} \frac{\varphi(x_n)}{U^2(x_n)} \right]. \quad (Д1.2)$$

Нерухома точка РС (Д1.2) шукається із умов

$$r_{n+1} = r_n = r^*, \quad u_{n+1} = u_n = u^*. \quad (Д1.3)$$

Друге рівняння (Д1.2) при виконанні (Д1.3) приводить до рівності

$$s^{-1} = \frac{\varphi(x^*)}{3U^4(x^*)} \left(1 - \frac{7}{2} \frac{\varphi(x^*)}{U^2(x^*)} s^{-3} \right), \quad (Д1.4)$$

яка кожному значенню параметра РГ перетворення s ставить у відповідність деяке значення $x^* = \sqrt{3}(r^* + q)/\sqrt{u^*}$.

Як відомо [8], при $s = s^*$ маємо $x^* = 0$. Значення s^* знаходимо із рівняння (Д1.4)

$$s^* = 3.5977. \quad (Д1.5)$$

При $s = s^*$ маємо (див. (1.4) та (1.5))

$$r^* = -q = -f_0 \beta \Phi(0). \quad (Д1.6)$$

Величина u^* знаходиться із першого рівняння (Д1.2) при $x = x^*$.
Маємо

$$u^* = \varphi_0 (\beta \Phi(0))^2, \quad (Д1.7)$$

де

$$\varphi_0^{1/2} = f_0 (1 - s^{-2}) \sqrt{3} U(0) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(y^*)^2} \right). \quad (Д1.8)$$

Знайдемо матричні елементи матриці \mathcal{R} із (2.5).

$$R_{11} = \frac{\partial w_{n+1}}{\partial w_n}, \quad R_{12} = \frac{\partial w_{n+1}}{\partial r_n}, \quad R_{13} = \frac{\partial w_{n+1}}{\partial u_n},$$

$$R_{21} = \frac{\partial r_{n+1}}{\partial w_n}, \quad R_{22} = \frac{\partial r_{n+1}}{\partial r_n}, \quad R_{23} = \frac{\partial r_{n+1}}{\partial u_n},$$

$$R_{31} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial w_n}, \quad R_{32} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r_n}, \quad R_{33} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_n}. \quad (Д1.9)$$

Приймаючи до уваги, що

$$\left. \frac{\partial x_n}{\partial r_n} \right|_{x^*} = \left(\frac{3}{u^*} \right)^{1/2}, \quad \left. \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \right|_{x^*} = 0, \quad (\text{Д1.10})$$

маємо ($R_{12} = R_{13} = 0$, а також $R_{21} = R_{31} = 0$)

$$\begin{aligned} R_{11} &= s^{\frac{d+2}{2}}, \quad R_{22} = s^2 \left[-\frac{U'(0)}{U(0)^2} - \frac{s^{-3}}{2} \left(\frac{\varphi'(0)}{U^3(0)} - 3 \frac{\varphi(0)U'(0)}{U^4(0)} \right) \right], \\ R_{23} &= R_{23}^{(0)} / \sqrt{u^*}, \quad R_{32} = R_{32}^{(0)} \sqrt{u^*}, \\ R_{23}^{(0)} &= \frac{s^2}{2\sqrt{3}} \frac{1}{U(0)} \left(1 - \frac{s^{-3}}{2} \frac{\varphi(0)}{U^2(0)} \right), \\ R_{32}^{(0)} &= \frac{s}{\sqrt{3}} \frac{\varphi(0)}{U^4(0)} \left[\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} - 4 \frac{U'(0)}{U(0)} - \frac{7}{s^3} \frac{\varphi(0)}{U^2(0)} \left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} - 3 \frac{U'(0)}{U(0)} \right) \right], \\ R_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (\text{Д1.11})$$

Спеціальні функції $U(t)$ та $\varphi(t)$ із (1.16) та їхні похідні за аргументом t мають вигляд

$$\begin{aligned} U(t) &= U(1, t) / U(0, t), \\ \varphi(t) &= 3U^2(t) + 2tU(t) - 2, \\ U'(t) &= tU(t) + \frac{1}{2}U^2(t) - 1, \\ U''(t) &= U(t)U'(t) + U(t) + tU'(t), \\ \varphi'(t) &= 6U(t)U'(t) + 2tU'(t) + 2U(t), \\ \varphi''(t) &= 6(U'(t))^2 + 6U(t)U''(t) + 4U'(t) + 2tU''(t). \end{aligned} \quad (\text{Д1.12})$$

Покладаючи в (Д1.12) $t = 0$ із (Д1.11) знаходимо

$$\begin{aligned} R_{22} &= s^2 \frac{1 - 4\gamma^2}{8\gamma^2} \left[1 + s^{-3} \left(2 \frac{1 - 6\gamma^2}{1 - 4\gamma^2} - \frac{3}{8} \frac{12\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \right) \right], \\ R_{23}^{(0)} &= \frac{s^2}{4\sqrt{6}\gamma} \left(1 - s^{-3} \frac{12\gamma^2 - 1}{8\gamma^2} \right), \\ R_{32}^{(0)} &= s \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{1}{32\gamma^5} [(12\gamma^2 - 1)(1 - 4\gamma^2) - 4\gamma^2(1 - 6\gamma^2) + \\ &+ s^{-3} \frac{7(12\gamma^2 - 1)}{16\gamma^2} (3 - 32\gamma^2 + 48\gamma^4)], \end{aligned} \quad (\text{Д1.13})$$

де введено позначення

$$\gamma = \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) / \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) = 0.377989.$$

При $s = s^*$ маємо числові значення матричних елементів

$$\begin{aligned} R_{11} &= 24.5506, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = 0, \\ R_{21} &= 0, \quad R_{22} = 7.6817, \quad R_{23}^{(0)} = 3.8745, \\ R_{31} &= 0, \quad R_{32}^{(0)} = 1.1811, \quad R_{33} = 1.0000. \end{aligned} \quad (\text{Д1.14})$$

Внаслідок блочної форми матриці \mathcal{R} її власне значення $E_1 = R_{11}$, а решту власних значень шукаємо із рівняння

$$E_{2,3} = \frac{1}{2} \left[R_{11} + R_{22} \pm \sqrt{(R_{11} - R_{22})^2 + 4R_{12}R_{21}} \right].$$

Приймаючи до уваги (Д1.14) знаходимо

$$E_1 = 24.551, \quad E_2 = 8.308, \quad E_3 = 0.374. \quad (\text{Д1.15})$$

Для постійних величин

$$R^{(0)} = \frac{R_{23}^{(0)}}{E_3 - R_{22}}, \quad R_1^{(0)} = \frac{E_2 - R_{22}}{R_{23}^{(0)}}, \quad (\text{Д1.16})$$

які входять до розв'язків РС (2.14), маємо

$$R^{(0)} = -0.530, \quad R_1^{(0)} = 0.162. \quad (\text{Д1.17})$$

Додаток 2. Про форми рівняння стану

Як відомо [16-18] існує декілька форм рівняння стану ізінгоподібних систем. Для випадку відсутності зовнішнього поля ($H = 0$) намагніченість системи M існує лише при $T < T_c$ і записується у вигляді

$$M = B(-\tau)^\beta, \quad (\text{Д2.1})$$

де β – критичний показник (температурний), $\tau = (T - T_c)/T_c$ – приведена температура, а B – критична амплітуда. Для випадку $\tau = 0$ при $H > 0$ маємо залежність

$$M = B^c H^{1/\delta} \quad \text{або} \quad H = D_c M^{1/\delta}. \quad (\text{Д2.2})$$

Тут δ – критичний показник (польовий), а B^c та D_c – відповідні критичні амплітуди.

В загальному випадку ($\tau \neq 0$ та $H = 0$) поблизу температури фазового переходу T_c рівняння стану записується у формі

$$M = h^{1/\delta} f_G(z), \quad (\text{Д2.3})$$

де використовуються наступні позначення

$$h = H/H_0, \quad \bar{\tau} = \tau \frac{T_c}{T_0}, \quad z = \frac{\bar{\tau}}{h^{1/\beta\delta}}, \quad (\text{Д2.4})$$

величина f_G є скейлінговою функцією, а H_0 та T_0 – деякі постійні нормування. Така форма рівняння стану відповідає великим значенням поля (або малим температурам $z \leq 1$). Інша форма рівняння стану (запропонована Вайдомом [22] та досліджувалася Гріфітсом [23]) має вигляд

$$y = f(x), \quad (\text{Д2.5})$$

де

$$y \equiv h/M^\delta, \quad x = \frac{\bar{\tau}}{M^{1/\beta}}. \quad (\text{Д2.6})$$

Приймаючи до уваги (Д2.6), вираз (Д2.5) можна записати у вигляді

$$M = h^{1/\delta} f(x)^{-1/\delta}. \quad (\text{Д2.7})$$

Зауважимо, що якщо (Д2.3) виражає намагніченість M через змінні $\bar{\tau}$ та h з допомогою невідомої функції $f_G(z)$, то (Д2.7) є по-суті нелінійним рівнянням для величини M , яке містить невідому функцію $f(x)$.

При аналізі рівняння стану (Д2.5) використовуються стандартні умови нормування

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 0, \quad (\text{Д2.8})$$

які дозволяють отримати постійні нормування H_0 та T_0 із (Д2.4). Дійсно, покладаючи $T = T_c$ та використовуючи умову $f(0) = 1$, знаходимо

$$M(\tau = 0) = h^{1/\delta} \quad (\text{Д2.9})$$

або із (Д2.2) $H_0 = D_c$. Параметр T_0 визначається із умови $H = 0$. Тоді відповідно до (Д2.1)

$$M(H = 0) = (-\bar{\tau})^\beta, \quad (\text{Д2.10})$$

що приводить до умови $T_0 = B^{-1/\beta} T_c$.

Умови нормування (Д2.8) можна переписати як функції $f_G(z)$. Вони мають вигляд

$$f_G(0) = 1 \quad (\text{Д2.11})$$

для випадку $\tau = 0$ та

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f_G(z) = (-z)^\beta \quad (\text{Д2.12})$$

для випадку $H \rightarrow 0$. Приймаючи до уваги (Д2.12), із (Д2.3) отримуємо (Д2.10). Зауважимо, що такий перехід має місце при $z \rightarrow -\infty$.

Таким чином, умови (Д2.9) та (Д2.10) є загальноприйнятими умовами нормування змінних h та τ , з допомогою яких записується рівняння стану. Приймаючи до уваги явний вигляд кросоверного рівняння стану (8.10), маємо

$$M = \sigma_{00} \left(s_0^3 \left(\frac{h'}{h_0} \right)^2 + \tau^2 \left(\frac{c_{1k}}{p_0} \right)^2 \right)^{1/10} + h'(1 - 2F_{02}). \quad (\text{Д2.13})$$

У випадку великих значень поля $\alpha \gg 1$ із (Д2.13) знаходимо

$$M = \sigma_{00} \left(s_0^{3/10} h_0^{-1/5} \right) (h')^{1/5} \left[1 + \frac{1}{\alpha^2} \right]^{1/10} + h'(1 - 2F_{01}). \quad (\text{Д2.14})$$

Вибір величини h_0 полягає у виконанні умови

$$\sigma_{00} s_0^{3/10} h_0^{-1/5} (1 + \alpha^{-2})^{1/10} = 1$$

або

$$h_0 = \sigma_{00}^5 s_0^{3/2} (1 + \alpha^{-2})^{1/2}. \quad (\text{Д2.15})$$

Зауважимо, що (Д2.15) справедливо при $T = T_c$, де $\alpha \rightarrow \infty$. Тому

$$h_0 = s_0^{3/2} \sigma_{00}^5(T_c).$$

Для $\sigma_{00}(T_c)$ маємо вираз

$$\sigma_{00} = \frac{6}{5} e_0 + e_{00},$$

де

$$e_0 = \sigma_0 s^{-1/2}, \quad e_{00} = \frac{6}{5} s_0^{3/2} f_0^{-1}(\gamma_s - e_2).$$

Тут $\sigma_0 = \sigma_c = 1.500$ при виконанні (5.20).

$$e_1(T_c) = \frac{1}{2} \sigma_c^2 s^{-3} \left(r^* + \frac{1}{12} u^* s_0^3 \sigma_c^2 \right).$$

При ($\alpha = 2 \cdot 10^8 \gg 1$) маємо $\sigma_c = 1.500$; $e_0 = 0.791$; $e_{00} = -0.206$

$$\sigma_{00}(T_c) = 0.743. \quad (z = 2 \cdot 10^{-6} \Rightarrow h_0 = 0.640).$$

Додаток 3. Температурна та польова залежність несингулярних вкладів до вільної енергії

Знайдемо явну температурну та польову залежності виразу для F_1 із (4.1). Відповідно до (11) та (1.8) маємо

$$F_1 = +kTNs_0^{-3} [\ln Z_j - \ln Q(d)], \quad (Д3.1)$$

де

$$Z_j = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left(a_1 \sqrt{N} \eta - \frac{a_2}{2} \eta^2 - \frac{1}{4!} a_4 \eta^4 \right) \\ Q(d) = (2\pi)^{1/2} (3/a_4)^{1/4} \exp \left(\frac{x^2}{4} \right) U(0, x). \quad (Д3.2)$$

Тут коефіцієнти a_l приведені в (3), а для x маємо співвідношення

$$x = d(B_1, B_0) (3/a_4)^{1/2}, \quad (Д3.3)$$

де $d(B_1, B_0)$ – середнє значення коефіцієнта $d(k)$ в області значень $\vec{k} = \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$

$$d(B_1, B_0) = a_2 - \beta \Phi(0)(1 - \bar{q} - \bar{\Phi}). \quad (Д3.4)$$

Обчислимо явний вигляд Z_j . Виконаємо в (Д3.2) заміну змінних

$$\eta = \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} x.$$

Тоді

$$Z_j = \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \exp \left(s_0^{d/2} h' \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} x - gx^4 \right), \quad (Д3.5)$$

де

$$g = \frac{a_4}{6a_2} \approx \frac{1}{3} \epsilon.$$

Величини h' та g приймають малі значення. Тоді для розрахунку (Д3.5) скористаємося наближенням малих ϵ . Маємо

$$Z_j = \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \left[1 + s_0^{d/2} \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} h' x + \frac{1}{2} s_0^d \frac{2}{a_2} h'^2 x^2 - \right. \\ \left. - gx^4 + \dots \right] \approx \left(\frac{2}{a_2} \right)^{1/2} \sqrt{\pi} \left(1 + \frac{s_0^d}{2a_2} h'^2 - \frac{3}{4} g \right),$$

або

$$\ln Z_j = \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{a_2} + \frac{1}{2a_2} s_0^d h'^2 - \frac{3}{4} g. \quad (Д3.6)$$

При розрахунку $Q(d)$ запишемо (Д3.4) у вигляді

$$d(B_1, B_0) = d_0 + d_1 \tau - d_1 \tau^2, \quad (Д3.7)$$

де

$$d_0 = a_2 - \beta_c \Phi(0)(1 - \bar{q} - \bar{\Phi}), \\ d_1 = \beta_c \Phi(0)(1 - \bar{q} - \bar{\Phi}). \quad (Д3.8)$$

Відповідно до (Д3.7) отримуємо

$$x = x_0 + x_1 \tau - x_1 \tau^2, \quad (Д3.9)$$

тут

$$x_0 = d_0 (3/a_4)^{1/2}, \quad x_1 = d_1 (3/a_4)^{1/2}. \quad (Д3.10)$$

Розкладемо величину $\ln U(0, x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_0$. Маємо

$$\ln U(0, x) = u_{l0} + u_{l1} \tau + u_{l2} \tau^2, \quad (Д3.11)$$

де

$$u_{l0} = \ln U(0, x_0), \\ u_{l1} = -\frac{1}{2} x_1 (x_0 + U(0, x_0)), \\ u_{l2} = -\frac{1}{4} x_1^2 (x_0 + \frac{1}{2} U(0, x_0)) U(x_0) - u_{l1}. \quad (Д3.12)$$

Таким чином, при малих значеннях τ отримуємо

$$\ln Q(d) = q_{00} + q_{01} \tau + q_{02} \tau^2, \quad (Д3.13)$$

де введені позначення

$$q_{00} = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{4} \ln(3/a_4) + \frac{1}{4} x_0^2 + u_{l0}, \\ q_{01} = -\frac{1}{2} x_1 U(x_0), \\ q_{02} = \frac{1}{4} x_1^2 - \frac{1}{2} x_0 x_1 + u_{l2}. \quad (Д3.14)$$

Приймаючи до уваги (Д3.6) та (Д3.13) із (Д3.1) отримуємо

$$F_1 = kTN \left[F_{01} + F_{02} h'^2 - F_{03} \tau - F_{04} \tau^2 \right]. \quad (Д3.15)$$

Тут для коефіцієнтів F_{0m} маємо

$$\begin{aligned} F_{01} &= s_0^{-3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{a_2} - \frac{1}{4} s_0^{-d} - q_{00} \right), \\ F_{02} &= (2a_2)^{-1}, \quad F_{03} = s_0^{-3} q_{01}, \quad F_{04} = s_0^{-3} q_{02}. \end{aligned} \quad (\text{Д3.16})$$

Коефіцієнт F_{01} може бути записаний в явному вигляді

$$F_{01} = -s_0^{-3} \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{3a_2^2}{a_4} \right) + \frac{1}{4} s_0^{-3} + \frac{x^2}{4} + \ln U(0, x_0) \right). \quad (\text{Д3.17})$$

Додаток 4. Розрахунок вкладів до вільної енергії від критичного режиму флуктуацій параметра порядку

Виділимо в (4.12) явну залежність величини f_n від номера n . Використовуючи явні розв'язки рівнянь РГ-перетворення, отримуємо [8]

$$x_n = x^* + c_{1T} B_3 \tau E_2^n + c_{1T}^2 B_6 \tau^2 E_2^{2n}, \quad (\text{Д4.1})$$

де

$$B_3 = \varphi_0^{-1/2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} x^* R_1^{(0)} \right), \quad B_6 = \varphi_0^{-1} R_1^{(0)} \left(\frac{3}{8} x^* R_1^{(0)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (\text{Д4.2})$$

У випадку $x^* = 0$ ці формули спрощуються.

Для коефіцієнта c_{1T} маємо вираз (2.16), який визначає його температурну залежність. Проміжний аргумент y_n поблизу фіксованої точки може бути записаний у вигляді

$$y_n = y^* (1 + r_1(x_n - x^*)), \quad (\text{Д4.3})$$

де

$$\begin{aligned} y^* &= s^{3/2} U(x^*) (3/\varphi(x^*))^{1/2}, \\ r_1 &= U'(x^*)/U(x^*) - \frac{1}{2} \varphi'(x^*)/\varphi(x^*). \end{aligned} \quad (\text{Д4.4})$$

Похідні спеціальних функцій $U(x)$ та $\varphi(x)$ приведені в Додатку 1. Підставляючи формули (Д4.1) та (Д4.3) в (4.12), знаходимо

$$f_n = f_{\text{KP}}^{(0)} + A_1 (x_{n-1} - x^*) + A_3 (x_n - x^*), \quad (\text{Д4.5})$$

де

$$\begin{aligned} f_{\text{KP}}^{(0)} &= \frac{1}{2} \ln y^* + \frac{9}{4} (y^*)^{-2} + \ln U(0, 0), \\ A_1 &= \frac{1}{2} r_1 (1 - 9(y^*)^{-2}), \quad A_3 = -\frac{1}{2} U(0). \end{aligned} \quad (\text{Д4.6})$$

Оскільки $x^* = 0$, маємо

$$\begin{aligned} U(0, 0) &= \sqrt{\pi} 2^{-1/4} / \Gamma \left(\frac{3}{4} \right) \approx 1.21628, \\ U(1, 0) &= \sqrt{\pi} 2^{-3/4} / \Gamma \left(\frac{5}{4} \right) \approx 1.16273, \\ U(0) &= U(1, 0) / U(0, 0) = 2\sqrt{2}\gamma \approx 0.9560, \\ y^*(0) &= s^{3/2} 2\sqrt{3}\gamma (12\gamma^2 - 1)^{-1/2} \approx 13.1201. \end{aligned} \quad (\text{Д4.7})$$

Похідні спеціальних функцій $U(x^*)$ та $\varphi(x^*)$ при $x^* = 0$ приймають значення

$$U'(0) = 4\gamma^2 - 1 \approx -0.5430 \quad \varphi'(0) = 8\sqrt{2}\gamma(1 - 6\gamma^2) \approx -1.2029$$

тому

$$r_1 = \frac{U'(0)}{U(0)} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \approx 0.2429.$$

Приймаючи до уваги (Д4.1) із (Д4.5) знаходимо

$$f_n = f_{\text{KP}}^{(0)} + c_{1T} d_1 \tau E_2^n + c_{1T}^2 d_3 \tau^2 E_2^{2n}. \quad (\text{Д4.8})$$

Тут введені позначення

$$d_1 = B_3 \left(A_3 + \frac{A_1}{E_2} \right), \quad d_3 = B_6 \left(A_3 + \frac{A_1}{E_2^2} \right). \quad (\text{Д4.9})$$

Приймаючи до уваги (Д4.8), виконуємо операцію сумування в (4.4). Отримуємо

$$\begin{aligned} F_{CR} &= -kTN_0 \left(\gamma_{01} + \gamma_{02}\tau + \gamma_{03}\tau^2 - \gamma_1^+ s^{-3(n_p+1)} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2^+ s^{-3(n_p+1)} H_c - \gamma_3^+ s^{-3(n_p+1)} H_c^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{Д4.10})$$

де

$$H_c = h_c^{1/p_0} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{1/2p_0}, \quad (\text{Д4.11})$$

а для коефіцієнтів маємо

$$\begin{aligned}\gamma_{01} &= f_{\text{КР}}^{(0)} s^{-3} (1 - s^{-3})^{-1}, \\ \gamma_{02} &= s^{-3} c_{1k} d_1 E_2 (1 - E_2 s^{-3})^{-1}, \\ \gamma_{03} &= s^{-3} c_{1k}^2 d_3 E_2^2 / (1 - E_2^2 s^{-3}) + s^{-3} c_{1k1} d_1 E_2 (1 - E_2 s^{-3})^{-1}, \\ \gamma_1^+ &= \frac{f_{\text{КР}}^{(0)}}{1 - s^{-3}}; \quad \gamma_2^+ = \frac{d_1 f_0}{1 - E_2 s^{-3}}; \quad \gamma_3^+ = \frac{d_3 f_0^2}{1 - E_2^2 s^{-3}}. \quad (\text{Д4.12})\end{aligned}$$

Додаток 5. Поведінка деяких величин в області слабких та сильних значень поля

При описі фазового переходу малі та великі значення поля є поняттями відносними. Це залежить від того, наскільки близько знаходиться температура до T_c . Одні і теж значення поля \tilde{h} може вважатися як малим так і великим по відношенню до температурнозалежної величини $h_c = \tilde{\tau}^{p_0}$. В подальшому розгляді будемо фіксувати відносну температуру τ , задаючи тим самим значення h_c . Тоді для всіх $\tilde{h} \ll h_c$ для H_c із (4.18) маємо наближений вираз

$$H_{c,\tau} = 1 - \frac{\tilde{h}^2}{2p_0 h_c^2}. \quad (\text{Д5.1})$$

Як видно із Рис. Д5.1 значення $H_{c,\tau}$ співпадають із точним виразом для H_c із (4.18) для всіх $\tilde{h} \leq 0.2h_c$. У випадку $\tilde{h} \gg h_c$ маємо іншу апроксимаційну формулу для H_c , а саме

$$H_{c,h} = \left(h_c / \tilde{h} \right)^{1/p_0} \left(1 - \frac{h_c^2}{2p_0 \tilde{h}^2} \right). \quad (\text{Д5.2})$$

Як легко бачити із Рис. Д5.2 для всіх $\tilde{h} \geq 5h_c$ значення $H_{c,h}$ співпадають із H_c . Для проміжної області значень поля

$$h_c/5 < \tilde{h} < 5h_c \quad (\text{Д5.3})$$

для величини H_c необхідно використовувати більш складні наближення як (Д4.1) або (Д4.2).

У випадку слабких полів для H_c справедливе наближення (Д5.1) і відповідно до цього можемо знайти величини r_{n_p+m} , u_{n_p+m} , а також відповідні їм значення аргументів x_{n_p+m} . Із (4.26) маємо

$$r_{n_p+m} = \beta \Phi(0) f_0 \left(E_2^{m-1} - 1 - \frac{E_2^{m-1}}{2p_0} \frac{\tilde{h}}{h_c^2} \right), \quad (\text{Д5.4})$$

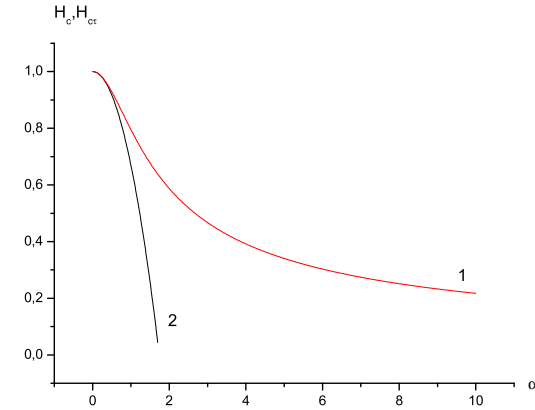


Рис. Д5.1. Порівняння точного значення величини H_c (крива 1), та наближеного виразу $H_{c\tau}$ (крива 2).

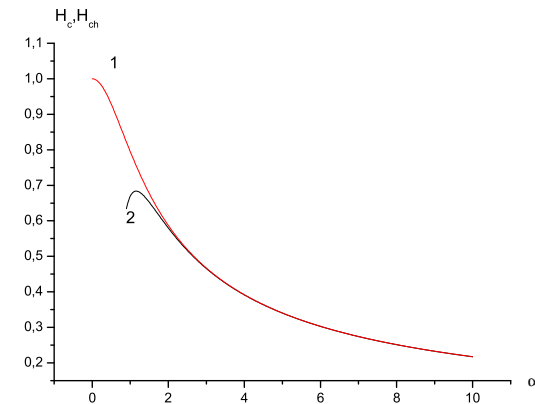


Рис. Д5.2. Порівняння точного значення величини H_c (крива 1), та наближеного виразу H_{ch} (крива 2).

$$u_{n_p+m} = (\beta\Phi(0))^2 \varphi_0 (1 + \Phi E_2^{m-1}) \left(1 - \frac{\Phi E_2^{m-1}}{1 + \Phi E_2^{m-1}} \frac{\tilde{h}}{2\rho_0 h_c^2} \right).$$

Легко бачити, що $u_{n_p+m} > 0$ для довільних значень m . Величина $r_{n_p+m} > 0$ лише при $m > 1$, а для всіх $m \leq 1$ вона є від'ємною. Зауважимо, що знак величини r_{n_p+m} однозначно визначає знак коефіцієнта $d_{n'+1}$, який входить до складу величини $Z_{n'+1}$ із (4.10). Розрахунок величини $Z_{n'+1}$ із використанням гаусового розподілу флуктуацій параметра порядку можливий лише для значень $m \geq 2$, де $r_{n_p+m} > 0$.

Скористаємося формулою

$$x_{n_p+m} = \sqrt{3} \frac{r_{n_p+m} + q}{(u_{n_p+m})^{1/2}} \quad (Д5.5)$$

для розрахунку значень аргумента спеціальних функцій $U(x_{n_p+m})$ та $\varphi(x_{n_p+m})$. Маємо

$$x_{n_p+m} = x_{n_p+m}^{(0)} \left(1 + x_{n_p+m}^{(1)} \frac{\tilde{h}^2}{h_c^2} \right), \quad (Д5.6)$$

де

$$\begin{aligned} x_{n_p+m}^{(0)} &= \bar{x} E_2^{m-1} (1 + \Phi E_2^{m-1})^{-1/2}, \quad \bar{x} = \sqrt{3} f_0 \varphi_0^{-1/2}, \\ x_{n_p+m}^{(1)} &= \frac{1}{2\rho_0} \left(-1 + \frac{1}{2} \Phi E_2^{m-1} (1 + \Phi E_2^{m-1})^{-1} \right). \end{aligned} \quad (Д5.7)$$

Приймаючи до уваги (Д5.6) із (1.13) знаходимо

$$y_{n_p+m} = y_{n_p+m}^{(0)} \left(1 + y_{n_p+m}^{(1)} \frac{\tilde{h}^2}{h_c^2} \right). \quad (Д5.8)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} y_{n_p+m}^{(0)} &= s^{3/2} U(x_{n_p+m}^{(0)}) \left(\frac{3}{\varphi(x_{n_p+m}^{(0)})} \right)^{1/2}, \\ y_{n_p+m}^{(1)} &= x_{n_p+m}^{(0)} x_{n_p+m}^{(1)} \left[U'(x_{n_p+m}^{(0)}) / U(x_{n_p+m}^{(0)}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varphi'(x_{n_p+m}^{(0)}) / \varphi(x_{n_p+m}^{(0)}) \right], \end{aligned} \quad (Д5.9)$$

де вирази для похідних спеціальних функцій $U'(t)$ та $\varphi'(t)$ приведені в Додатку 1.

Додаток 6. Розрахунок явного вигляду коефіцієнтів e_{01} рівняння стану (8.10)

Критична амплітуда рівняння стану (8.10) має вигляд

$$\sigma_{00}^{(+)} = e_0 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) + e_{00} \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} + e_{01} (\tilde{h}^2 + h_c^2)^{1/2}. \quad (Д6.1)$$

Коефіцієнт e_0 пов'язаний із розв'язком (5.8) та має вигляд $e_0 = \sigma_0 / \sqrt{s}$. Для e_{00} відповідно до (8.12) маємо

$$e_{00} = \frac{6}{5} \left(\frac{s_0^{3/2}}{h_0} \right) (\gamma_s^{(+)} - e_2), \quad (Д6.2)$$

де величина $\gamma_s^{(+)}$ означена в (6.6) та є сумою доданків до вільної енергії системи від області критичного режиму флуктуацій параметра порядку $\tilde{\gamma}^+$, перехідної області f_{n_p+1} та від області граничного гаусового режиму

$$\gamma_s^+ = s_0^{-3} (f_{n_p+1} - \tilde{\gamma}^+ + f_G / s^3), \quad (Д6.3)$$

а величина e_2 приведена в (5.30) та має вигляд

$$e_2 = \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \left(r_{n_p+2} + \frac{1}{12} u_{n_p+2} s_0^3 \sigma_0^2 \right). \quad (Д6.4)$$

Зрозуміло, що перші два доданки правої частини рівності (Д6.1) залежать лише від змінної

$$\alpha = \tilde{h} / h_c, \quad (Д6.5)$$

яка є відношенням перенормованого поля $\tilde{h} = h' (s_0^{3/2} / h_0)$ та перенормованої температури $\tilde{\tau} = \tau (c_{1k} / f_0)$.

Останній доданок рівності (Д6.1) включає явним чином поле та температуру. Для того, щоб амплітуда $\sigma_{00}^{(+)}$ була функцією лише величини α (а не окремо \tilde{h} чи h_c) необхідно, щоб коефіцієнт e_{01} із (8.11)

$$e_{01} = \frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} - \frac{de_2}{dh'} \quad (Д6.6)$$

був пропорційним до $(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}$.

В цьому легко переконатися шляхом прямого розрахунку похідних величин $\gamma_s^{(+)}$ та e_2 . Знайдемо похідну за полем від e_2

$$\frac{de_2}{dh'} = \frac{1}{2} \sigma_0^2 s^{-3} \left[\frac{dr_{n_p+2}}{dh'} + \frac{1}{12} s_0^3 \sigma_0^2 \frac{du_{n_p+2}}{dh'} \right].$$

Зауважимо, що похідна від σ_0 не береться, оскільки такі вклади компенсуються відповідно до умови (5.6). Приймаючи до уваги (4.26), знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{dr_{n_p+2}}{dh'} &= \beta\Phi(0)f_0E_2\frac{dH_c}{dh'}, \\ \frac{du_{n_p+2}}{dh'} &= (\beta\Phi(0))^2\varphi_0E_2\Phi\frac{dH_c}{dh'}.\end{aligned}\quad (\text{Д6.7})$$

Приймаючи до уваги (Д6.7), знаходимо

$$\frac{de_2}{dh'} = \frac{1}{2}\sigma_0^2s^{-3}\beta\Phi(0)f_0E_2\frac{dH_c}{dh'}\left(1 + \frac{q_e}{12}\sigma_0^2\right), \quad (\text{Д6.8})$$

де

$$q_e = s_0^3\beta\Phi(0)\frac{\varphi_0}{f_0}\Phi. \quad (\text{Д6.9})$$

Оскільки $H_c = \tilde{\tau}(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2p_0}$ маємо

$$\frac{dH_c}{dh'} = -\frac{s_0^{d/2}}{h_0}H_{cd}(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.10})$$

де

$$H_{cd} = \frac{H_c}{p_0}\frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}},$$

то вираз (Д6.8) записується у вигляді

$$\frac{de_2}{dh'} = -\frac{s_0^{d/2}}{h_0}q_s\sigma_0^2\left(1 + \frac{q_e}{12}\sigma_0^2\right)(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.11})$$

де

$$q_s = \frac{E_2}{2p_0}\beta\Phi(0)f_0s^{-3}\frac{H_c\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}}. \quad (\text{Д6.12})$$

Таким чином, вклад до коефіцієнта e_{01} від похідної de_2/dh' є пропорційним до множника $(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}$, а отже залишається лише залежність від α .

Знайдемо явний вираз похідної величини $\gamma_s^{(+)}$ за полем. Скориставшись (Д6.3), знаходимо

$$\frac{d\gamma_s^{(+)}}{dh'} = s_0^{-3}\left[\frac{df_{n_p+1}}{dh'} - \frac{d\tilde{\gamma}^{(+)}}{dh'} + s^{-3}\frac{df_G}{dh'}\right].$$

Для f_{n_p+1} маємо вираз

$$\ln y_{n_p} + \frac{9}{4}y_{n_p}^{-2} + \frac{1}{4}x_{n_p+1}^2 + \ln U(0, x_{n_p+1}).$$

Зауважимо, що

$$\frac{dy_{n_p+m}}{dx_{n_p+m}} = y_{n_p+m}r_{p+m}, \quad r_{p+m} = \frac{u'(x_{n_p+m})}{u(x_{n_p+m})}\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x_{n_p+m})}{\varphi(x_{n_p+m})},$$

причому

$$\frac{dx_{n_p+m}}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0}q_{p+m}(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.13})$$

де

$$\begin{aligned}g_p &= -\frac{\tilde{x}}{E_2}H_{cd}\left(1 + \Phi\frac{H_c}{E_2}\right)^{-1/2}\left[1 - \frac{\Phi H_c}{2E_2}\left(1 + \Phi\frac{H_c}{E_2}\right)^{-1}\right], \\ g_{p+1} &= -\tilde{x}H_{cd}(1 + \Phi H_c)^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\Phi H_c(1 + \Phi H_c)^{-1}\right]\end{aligned}\quad (\text{Д6.14})$$

Приймаючи до уваги приведені вище рівності, отримуємо

$$\frac{df_{n_p+1}}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0}f_p(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.15})$$

де введено позначення

$$f_p = \frac{1}{2}r_p g_p\left(1 - \frac{9}{y_{n_p}^2}\right) - \frac{1}{2}U(x_{n_p+1})g_{p+1}. \quad (\text{Д6.16})$$

Похідна за полем від $\tilde{\gamma}^+$ відповідно до (4.23) має вигляд

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{(+)}}{dh'} = -\frac{s_0^{d/2}}{h_0}\gamma_p(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.17})$$

де

$$\gamma_p = H_{cd}(\gamma_2 + 2\gamma_3 H_c). \quad (\text{Д6.18})$$

При розрахунку похідної величини f_G за полем скористаємося із рівності (5.33). Тут слід приймати до уваги, що величина зміщення σ_0 є функцією поля. Для розрахунку $d\sigma_0/dh'$ скористаємося із рівності (5.6), що дозволяє отримати

$$\frac{d\sigma_0}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0}g_\sigma(\tilde{h}^2 + h_c^2)^{-1/2}, \quad (\text{Д6.19})$$

де

$$g_\sigma = \frac{h_0}{s_0^{d/2}} \frac{s_0^{5/2}}{r_R} \frac{1}{1 + \alpha^2} + \frac{\sigma_0}{r_R} H_{cd} \beta \Phi(0) f_0 E_2 \left(1 + \frac{q_l}{6} \sigma_0^2 \right),$$

$$r_R = r_{n_p+2} + \frac{1}{2} u_{n_p+2} s_0^3 \sigma_0^2. \quad (Д6.20)$$

Для похідної величини r_R маємо

$$\frac{dr_R}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} g_R \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2}, \quad (Д6.21)$$

де

$$g_R = -\beta \Phi(0) f_0 E_2 H_{cd} \left(1 + \frac{1}{2} q_e \sigma_0^2 \right) + u_{n_p+2} s_0^3 g_\sigma \sigma_0,$$

а для похідної величини a із (5.36) знаходимо

$$\frac{da}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} g_a \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2}, \quad g_a = -\frac{a g_R}{2 r_R}.$$

Величина f_G'' , що входить до складу f_G із (5.33) має наступну похідну

$$\frac{df_G''}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} g_a a_g \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2},$$

де

$$a_g = \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4}{a^3} + \frac{6}{a^4} \operatorname{arctg} a - \frac{2}{a^3} \frac{1}{1+a^2}.$$

приймаючи до уваги записані вище рівності, знаходимо

$$\frac{df_G}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} f_{gv} \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2}, \quad (Д6.22)$$

де

$$f_{gv} = -\frac{1}{4} \frac{H_{cd}}{u_{n_p+1}} (\beta \Phi(0))^2 \varphi_0 \Phi - \frac{g_R}{2 r_R} - \frac{1}{2} g_a a_g +$$

$$+ \left(\frac{3}{4} \frac{r_{p+1}}{(y_{n_p+1})^2} - \frac{1}{2} \frac{U'(x_{n_p+1})}{U(x_{n_p+1})} \right) g_{p+1}. \quad (Д6.23)$$

Підсумовуючи вклади (Д6.15), (Д6.17) та (Д6.22), отримуємо похідну величини $\gamma_3^{(+)}$ за полем

$$\frac{d\gamma_3^{(+)}}{dh'} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} f \gamma_1 \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2}, \quad (Д6.24)$$

де

$$f \gamma_1 = s_0^{-3} [f_p + \gamma_p + s^{-3} f_{gv}]. \quad (Д6.25)$$

Підставимо тепер вирази (Д6.11) та (Д6.24) у (Д6.6). Отримуємо

$$e_{01} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} (f \gamma_1 + f \gamma_2) \left(\tilde{h}^2 + h_c^2 \right)^{-1/2} \quad (Д6.26)$$

$$f \gamma_2 = q_3 \sigma_0^2 \left(1 + (q_e/12) \sigma_0^2 \right).$$

Таким чином, критична амплітуда рівняння стану $\sigma_{00}^{(+)}$ записується у вигляді

$$\sigma_{00}^{(+)} = e_0 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right) + e_{00} \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} + e_{02}, \quad (Д6.27)$$

де

$$e_{02} = \frac{s_0^{d/2}}{h_0} (f \gamma_1 + f \gamma_2). \quad (Д6.28)$$

Коефіцієнти $f \gamma_1$ та $f \gamma_2$, приведені в (Д6.12) та (Д6.25) і залежать лише від відношення $\alpha = \tilde{h}/h_c$.