

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Сергій Іванович Сороков
Роман Романович Левицький
Андрій Степанович Вдович

РЕЛАКСАЦІЯ ТА ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛІ
ПРОТОННОГО СКЛА З СУТТЄВИМИ КОРОТКОСЯЖНИМИ
КОНКУРУЮЧИМИ ВЗАЄМОДІЯМИ

Роботу отримано 28 грудня 2007 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії модельних
спінових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України
© Усі права застережені

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-07-25U

С.І. Сороков, Р.Р. Левицький, А.С. Вдович

РЕЛАКСАЦІЯ ТА ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ
МОДЕЛІ ПРОТОННОГО СКЛА З СУТТЄВИМИ
КОРОТКОСЯЖНИМИ КОНКУРУЮЧИМИ ВЗАЄМОДІЯМИ

ЛЬВІВ

УДК: 537.622, 537.9

PACS: 75.10.Nk, 75.10.Nr, 77.22.Ch

Релаксація та термодинамічні властивості моделі протонного скла з суттєвими короткосяжними конкуруючими взаємодіями

С.І. Сороков, Р.Р. Левицький, А.С. Вдович

Анотація. В межах наближення двохчастинкового кластера і в рамках реплічно-симетричного підходу вивчається модель протонного скла з суттєвими конкуруючими короткосяжними і слабкими далекосяжними взаємодіями. Вивчено вплив випадкових внутрішніх полів і далекодії на параметри порядку протонного скла, статичну сприйнятливість і фазову діаграму. В рамках глауберівського підходу отримано вираз для лінійної динамічної сприйнятливості моделі. Показано, що уявна частина сприйнятливості має низькотемпературний пік, який відповідає переходу системи в неергодичний стан. Обговорена можливість застосування даної теорії для опису властивостей протонних стекел типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$.

Relaxation and thermodynamic properties of the proton-glass model with essential short-range competing interactions

S.I.Sorokov, R.R.Levitskii, A.S.Vdovych

Abstract. Within the two-particle cluster approximation and in the framework of the replica symmetric approach we study a proton glass model with essential competing short-range and weak long-range interactions. Influence of random internal fields and long-range interactions on the order parameters of proton glass, static susceptibility, and phase diagram of the model is explored. Within the Glauber approach we obtain an expression for the linear dynamic susceptibility of the model. It is shown that the imaginary part of the susceptibility exhibits a low-temperature peak which corresponds to the system transition to a non-ergodic state. We discuss a possibility to apply the present theory to description of the proton glasses of the $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ type.

Подається в Журнал фізичних досліджень

Submitted to Journal of Physical Studies

© Інститут фізики конденсованих систем 2007
Institute for Condensed Matter Physics 2007

1. Основні підходи в теорії спінових і протонних стекел.

Структурно невпорядковані системи, які описуються псевдоспіновими гамільтоніанами з конкуруючими взаємодіями, вивчаються біля 30-ти років [1-4]. При низьких температурах і в певних областях концентрацій в них можливий перехід в стан спінового скла.

Головні особливості систем із спіновим склом можна описати на основі ізінго-подібного гамільтоніана H з випадковими параметрами h_i і k_{ij}

$$H = - \sum_i h_i S_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} S_i S_j \quad (1)$$

У випадку ґратки Браве індекси i і j позначають вузли ґратки.

В моделі Шеррінгтона-Кіркпатріка (SK) [2, 3] використовується гаусовий розподіл для k_{ij} , де їхнє середнє значення $\langle k_{ij} \rangle$ і дисперсія (парний кумулянт) $\langle k_{ij}^2 \rangle^{cum}$ не залежать від i, j . Тому ця модель відповідає системі з далекосяжними взаємодіями. Для цієї моделі в рамках реплічно-симетричного підходу отримані фазова діаграма, намагніченість, параметр порядку спінового скла q , ентропія і теплоємність. Проте, обчислена в межах цього підходу ентропія і теплоємність стають від'ємними при низьких температурах. В [4] запропонований розв'язок з порушенням реплічної симетрії для SK моделі, який є стабільний при низьких температурах. Пізніше правильність розв'язку з порушенням реплічної симетрії підтверджена чисельними моделюваннями.

Модель Едвардса-Андерсона [1] враховує тільки взаємодії між найближчими сусідами $k_{ij} = k$. Для k звичайно використовується гаусова функція розподілу або розподіл $P(k) = (1-c) \cdot \delta(k+1) + c \cdot \delta(k-1)$ (позначення $k = (-1, 1)$). Таку ізінгівську модель зручно вивчати на ґратці Бете, тому що наближення двохчастинкового кластера для вільної енергії на таких ґратках є точне. В [5] для ґратки Бете отримано інтегральне рівняння для функції розподілу $R(\sigma, 1) = \langle \delta(\sigma - \varphi_{1r}) \rangle_{conf}$ одного ефективного поля φ_{1r} , що діє на вузол 1 з боку найближчого вузла r . В [6] аналітичні розв'язки (з врахуванням перших гармонік фур'є розвинення) отримані для $T = 0$ і для координатних чисел $z = 4, 5, 6$ і $c = 0.5$. Ці розв'язки містять δ -функції і симетричну неперервну частину і відповідають стану спінового скла. В [7] асиметричні розв'язки з неперервною частиною знайдені при $T = 0$ для $z = 3, h = 0$ і довільного c . Асиметричні розв'язки відповідають змішаному феромагнітному стану. Необхід-

но зазначити, що для ґратки Бете для чистої феромагнітної фази функція $R(\sigma, 1)$ містить тільки одну $\delta(\sigma - \varphi(T))$ функцію, а в чистій параелектричній фазі $\varphi(T) = 0$.

Значно пізніше Мезард і Парізі [8] врахували перший крок порушення реплічної симетрії (1RSB) для ґратки Бете. Було показано, що попередні результати [5-7] відповідають реплічно-симетричному (RS). Недавно [9] ЕА модель для ґратки Бете з гаусовим розподілом констант взаємодії вивчалася чисельно на основі алгоритму, запропонованого в [8]. Різниця між вільною енергією в межах RS і RSB розв'язків є менша ніж 4% для $z = 4, 6$. Подібний висновок зроблений раніше для розподілу $k = (-1, 1)$. Різниця між RS і 1RSB розв'язками зростає при зростанні z .

Ми будемо важати, що для опису систем з конкуруючими короткосяжними і далекосяжними взаємодіями, в яких переважаючу роль у формуванні стану спінового скла відіграють короткосяжні взаємодії, можна використати реплічно-симетричний підхід. Ми очікуємо, що така ситуація має місце в системі з водневими зв'язками типу $Rb_x(NH_4)_{1-x}H_2PO_4$ (протонне скло). В цій суміші тетраедри PO_4 і їх хаотичне оточення іонами Rb або NH_4 відіграють вирішальну роль у формуванні енергетичних рівнів системи.

Кристали з водневими зв'язками типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ ($T_c \approx 147.6K$ для RbH_2PO_4 , $T_N \approx 148K$ для $NH_4H_2PO_4$), в яких при низьких температурах реалізується стан протонного скла, інтенсивно вивчаються експериментально [10-18] і теоретично [19-28] вже більше 20 років. На основі робіт [10-14] була побудована фазова діаграма $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$, на якій область концентрацій приблизно $0.20 < x < 0.75$ відповідає стану протонного скла (нижче певної $T_g(x)$). Фероелектричний і антифероелектричний фазові переходи знайдені при нижчих і вищих концентраціях відповідно. Пізніше проводились дослідження різноманітних властивостей змішаних сегнетоелектриків з водневими зв'язками даного типу, зокрема діелектричної проникливості [15-18]. Була побудована фазова діаграма для сумішей $K_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ ($T_c \approx 122.5K$ для KH_2PO_4 , $T_N \approx 148K$ для $NH_4H_2PO_4$) [15, 16] і $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2AsO_4$ ($T_c \approx 110K$ для RbH_2AsO_4 , $T_N \approx 216K$ для $NH_4H_2AsO_4$) [17, 18]. В роботах [16, 18] проведені низькотемпературні дослідження уявної частини сприйнятливості в області $x < 0.2$, $x > 0.8$, що дало можливість встановити області співіснування (нижче лінії заморожування) неергодичного анти- і сегнетоелектричного стану з неергодичними протонними станами.

В перших теоретичних роботах [19-21] присвячених суміші

$Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ приймалась до уваги енергетична структура кластера, який складається з тетраедра PO_4 і протонів на водневих зв'язках. В наступних роботах використовують прості спінові моделі з безмежним радіусом для середнього значення і дисперсії випадкової взаємодії [22-26]. Для адекватного опису переходу в стан протонного скла в цих системах необхідно врахувати внутрішні поля з гаусовою дисперсією $\sim x(1-x)$. Ці поля викликані структурним безладом завдяки різниці між іонними радіусами іонів Rb і NH_4 [27]. В [22] показано, що в присутності гаусових випадкових полів перехід в протонне скло є розмитий, тобто сприйнятливості є згладжена, а параметр порядку протонного скла залишається скінченним при температурах, вищих від номінальної температури заморожування (пік статичної сприйнятливості). В роботі [25] досліджується функція розподілу ефективного поля, що діє на виділений водневий зв'язок і яка при не дуже низьких температурах задовільно описує ЕПП спектр Tl^{2+} (заміщує іон Rb) в сполучі $Rb_{0.52}(NH_4)_{0.48}H_2PO_4$. В роботі [26] в рамках глауберівської динаміки і модельного підходу [22] запропонована теорія діелектричних властивостей дейтерованих сполук типу $Rb_{1-x}(ND_4)_xD_2PO_4$. Однак, в цьому підході не вдалося отримати перенормування затравочного часу релаксації τ_0 за рахунок усереднення по концентраційних конфігураціях, що мало би призвести до розподілу часів релаксації і переходу системи в неергодичний стан при низьких температурах.

Слід також зауважити, що у всіх згаданих теоретичних роботах адекватне врахування всіх типів взаємодій (як короткосяжних так і далекосяжних) проведено не було. Ми вважаємо, що послідовна мікроскопічна теорія сумішей типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ ще не створена. Тому доцільно розвинути математичний підхід і апробувати його на простих ізінгівських моделях.

Метою даної роботи є обчислення в межах реплічної симетрії термодинамічних характеристик, частотно залежної діелектричної проникливості і фазових діаграм ізінгоподібних систем з суттєвими конкуруючими короткосяжними і слабкими далекосяжними взаємодіями.

2. Термодинамічні властивості моделі протонного скла в кластерному наближенні

В наближенні двохчастинкового кластера вільну енергію F можна записати як

$$F = \sum_i F_0(h_i + \sum_{r_i} \varphi_{ir_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} [F_{cl}(h_i + \sum_{r_i \neq j} \varphi_{ir_i} | h_j + \sum_{r_j \neq i} \varphi_{jr_j} | k_{ij}) - F_0(h_i + \sum_{r_i \neq j} \varphi_{ir_i}) - F_0(h_j + \sum_{r_j \neq i} \varphi_{jr_j})]. \quad (2)$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$\begin{aligned} -\beta F_0(x) &= \ln(2 \cosh(\beta x)) \\ -\beta F_{cl}(x_1 | x_2 | k) &= \ln(2(e^{\beta k} \cosh(\beta x_1 + \beta x_2) + e^{-\beta k} \cosh(\beta x_1 - \beta x_2))) \end{aligned} \quad (3)$$

$$F_0^{(l)}(x) = \frac{\partial^l}{\partial x^l} F_0(x) \quad F_{cl}^{(l,m)}(x_1 | x_2 | k) = \frac{\partial^l}{\partial x_1^l} \frac{\partial^m}{\partial x_2^m} F_{cl}(x_1 | x_2 | k)$$

Кластерні поля φ_{ir_i} , φ_{jr_j} діють на вузли i , j з боку вузлів r_i , r_j різних координаційних сфер. Вони задовільняють рівнянню

$$\beta \varphi_{1r} = \text{Arc tanh}[\tanh(\beta k_{1r}) \cdot \tanh(\sum_{k \neq 1} \beta \varphi_{rk})] \quad (4)$$

При врахуванні M координаційних сфер і нехтуванні кореляцією між кластерними полями в роботах [28, 29] була отримана система M інтегральних рівнянь для M функцій розподілу $R_n(\sigma, 1) = \langle \delta(\sigma - \varphi_{1r_n}) \rangle_{conf}$. Через них можна записати вираз для середнього від вільної енергії (2).

Для випадку, коли взято до уваги тільки взаємодію між найближчими сусідами (базисна система з $M=1$, $z = z_1$) з розподілом $P(k) = (1-c) \cdot \delta(k+1) + c \cdot \delta(k-1)$ в роботі [29] чисельно розв'язано інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} R(\sigma, z-1) &= \left\langle \delta(\sigma - \sum_r \varphi_{1r}) \right\rangle_{conf} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\zeta e^{-i\sigma\zeta} \left[\int d\xi \left\langle e^{i\zeta \beta^{-1} \text{Arc tanh}(\tanh \beta k \tanh \beta \xi)} \right\rangle_k R(\xi, z-1) \right]^{z-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Показано [29], що вже перша ітерація (нульове наближення є гаусовським) дає якісно правильну структуру спектра для $R(\sigma, z-1)$,

який містить при $t = T/k \ll 1$ δ -подібні піки зі скінченною шириною біля $\pm(z-1), \pm(z-3), \dots$. Ітераційна процедура швидко збігається і при $t \rightarrow 0$ чисельні результати прямують до відомих при $t = 0$ точних результатів [15]. Вже при $t \sim 0.1$ для параметрів $z = 6, c = 0.5$ форма лінії для $R(\sigma, z-1)$ є дуже близька до гаусової функції (Рис.1). При цій концентрації і температурі система є в стані спінового скла ($\langle \sigma \rangle_{R(\sigma, z-1)} = 0, \langle \sigma^2 \rangle_{R(\sigma, z-1)}^{cum} \neq 0$). При $t \geq t_g$ форма лінії стане $\sim \delta(\sigma)$ подібною і система перейде в стан парафази. При менших значеннях z тонка структура спектру зникає при більш високій температурі. Наприклад, для $z = 4$ функція $R(\sigma, z-1)$ згладжується при $t \gg 0.1$. На Рис.2 система з $z = 4, c = 0.95$ при $t = 0.1$ знаходиться в неоднорідному фероелектричному стані ($\langle \sigma \rangle_{R(\sigma, z-1)} \neq 0, \langle \sigma^2 \rangle_{R(\sigma, z-1)}^{cum} \neq 0$).

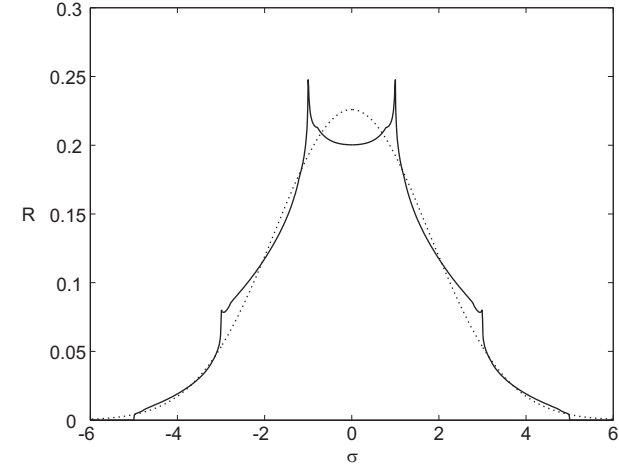


Рис. 1. Функція розподілу $R(\sigma, z-1)$ для $z = 6, c = 0.5$ (SG - фаза спінового скла): затравочна гаусова функція (пунктирна лінія) і 5-а ітерація (суцільна лінія) при $t = 0.1$

В роботі [29] показано, що вільна енергія, обчислена з гаусовою функцією розподілу, що знайдена з умов екстремуму, і вільна енергія, обчислена з функцією розподілу, знайденою з інтегрального рівняння, є близькі.

Для системи зі слабкими далекосяжними взаємодіями вивчено двопідграткову модель [29]. Для вільної F/N енергії запропонова-

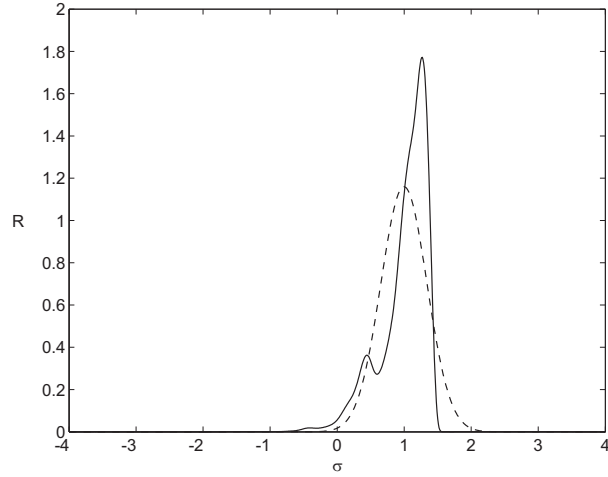


Рис. 2. Функція розподілу $R(\sigma, z-1)$ для $z=4, c=0.95$ (IF – неоднорідна фероелектрична фаза): гаусова функція (пунктирна лінія) і 5-а ітерація (суцільна лінія) при $t=0.6$.

но наближення двохчастинкового кластера для першої координаційної сфери і наближення середнього поля для інших координаційних сфер з гаусівськими функціями розподілу кластерних полів. Це дозволяє описувати систему з допомогою двох параметрів стану $\varphi_f, q_f (f=1, 2)$ для першої координаційної сфери і двох параметрів стану $\varphi_{L,f}, q_{L,f} (f=1, 2)$, які описують всі інші координаційні сфери

$$\begin{aligned}
 R_f(\sigma, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z q_f}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\sigma - \varphi_f)^2}{z q_f} \right\}, \\
 R_{L,f}(\sigma, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z q_{L,f}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\sigma - \varphi_{L,f})^2}{z q_{L,f}} \right\} \\
 \varphi_{L,f} &= \sum_{i \geq 2} \sum_{f'} z_i \langle \varphi_{i,ff'} \rangle_c, \quad Q_{L,f} = \sum_{i \geq 2} \sum_{f'} z_i \langle Q_{i,ff'} \rangle_c, \\
 \bar{k}_{L,ff'} &= \sum_{i \geq 2} z_i \langle k_{i,ff'} \rangle_c
 \end{aligned} \tag{6}$$

З умови екстремуму F/N знаходимо систему рівнянь для параметрів $\varphi_f, q_f; \varphi_{L,f}, q_{L,f}$.

У випадку сегнетоелектричного і антисегнетоелектричного впорядкування можна записати:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \varphi_2 = \varphi, & \varphi_{L,1} &= \varphi_{L,2} = \varphi_L, & q_1 &= q_2 = q, \\
 q_{L,1} &= q_{L,2} = q_L, & J &= \bar{k}_{L,11} + \bar{k}_{L,12}, \\
 \varphi_1 &= -\varphi_2 = \varphi, & \varphi_{L,1} &= -\varphi_{L,2} = \varphi_L, & q_1 &= q_2 = q, \\
 q_{L,1} &= q_{L,2} = q_L, & J_- &= \bar{k}_{L,11} - \bar{k}_{L,12}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Чисельні розрахунки проведені для випадку нехтування флуктуаціями далекосяжної взаємодії. Тобто вважається, що стан протонного скла (спінове скло при врахуванні флуктуацій внутрішніх полів) формується в основному завдяки короткосяжним взаємодіям. Наприклад, для антисегнетоелектричного впорядкування система рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
 \varphi_L &= \left\langle F_0^{(1)}(\sigma + \varphi_L) \right\rangle_{R(\sigma, z)} J_-, \\
 \left\langle F_0^{(1)}(\sigma + \varphi_L) \right\rangle_{R(\sigma, z)} &= \\
 &= \left\langle \left\langle F_{cl}^{(10)}(\sigma_1 + \varphi_L | \sigma_2 - \varphi_L | k) \right\rangle_k \right\rangle_{R(\sigma_1, z-1), R_2(\sigma_2, z-1)} \\
 \left\langle F_0^{(2)}(\sigma + \varphi_0) \right\rangle_{R(\sigma, z)} &= \\
 &= \left\langle \left\langle F_{cl}^{(20)}(\sigma_1 + \varphi_L | \sigma_2 - \varphi_L | k) \right\rangle_k \right\rangle_{R(\sigma_1, z-1), R_2(\sigma_2, z-1)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Вирази для середнього спіна $m_1 = -m_2$ і квадрату спіна $Q_1 = Q_2 = Q = \left\langle \langle S_i \rangle_{TERM}^2 \right\rangle_{conf}$ наступні

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{\delta F}{\delta h N} = \left\langle F^{(1)}(\sigma + z\varphi + \varphi_0) \right\rangle_{R(\sigma, z)}; \\
 Q_1 = Q_2 &= \left\langle [F^{(1)}(\sigma + z\varphi + \varphi_0)]^2 \right\rangle_{R(\sigma, z)}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Врахування дисперсії для вищих координаційних сфер буде предметом наступних досліджень.

На рисунках 3-6 приведені деякі чисельні результати з роботи [29] з функцією розподілу взаємодії між найближчими сусідами

$$P(k) = (1-c) \cdot \delta(k + \alpha) + c \cdot \delta(k - 1); \vec{k} = (-\alpha, 1); \tag{10}$$

Для моделі протонного скла маємо врахувати внутрішні випадкові гаусові поля з нульовим середнім значенням і дисперсією Q_h . Система рівнянь для φ_L, φ, q має наступні розв'язки: $\varphi_L = \varphi = 0, q = 0$

(P – чиста параелектрична фаза), що існує тільки при $Q_h = 0$, $\varphi_L = \varphi = 0, q \neq 0$ (SG- фаза спінового скла), $\varphi_L, \varphi \neq 0, q = 0$ (F-phase – чиста сегнетоелектрична фаза), існує тільки при $c = 0$ або $c = 1$, $\varphi_L, \varphi \neq 0, q \neq 0$ (F- сегнетоелектрична фаза або AF- антисегнетоелектрична - в залежності від умов (6) і значення вільної енергії).

На рис.3 і рис.4 приведена фазова діаграма для кубічної ґратки для симетричного $k = (-1, 1)$ і асиметричного розподілу $k = (-0.5, 1)$ при різних значеннях дисперсії Q_h внутрішніх випадкових полів при не випадковій малій додатній далекосяжній взаємодії $J(J_- = 2/3J)$.

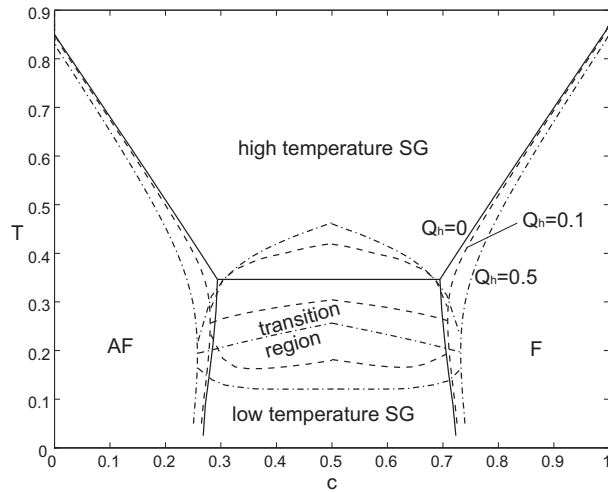


Рис. 3. Фазова діаграма для $z = 6$ для розподілу $k = (-1, 1)$ і при гаусівському розподілі внутрішніх полів з дисперсією $Q_h = 0; 0.1; 0.5$ при $zJ = 0.225$.

Малі внутрішні поля призводять до суттєвого розмиття SG фазового переходу. Між високотемпературною SG-фазою (вище верхньої штрихової лінії на рис.3, 4, $q \ll 1$) і низькотемпературною SG-фазою (нижче найнижчої штрихованої лінії на рис. 3, 4), є перехідна область. Ми визначили t - границі перехідної області як верхню і нижню точки перегину в температурній залежності сприйнятливості (рис.6). В той же час внутрішні випадкові поля слабо змінюють форму піка сприйнятливості при переході між SG фазою і фероелек-

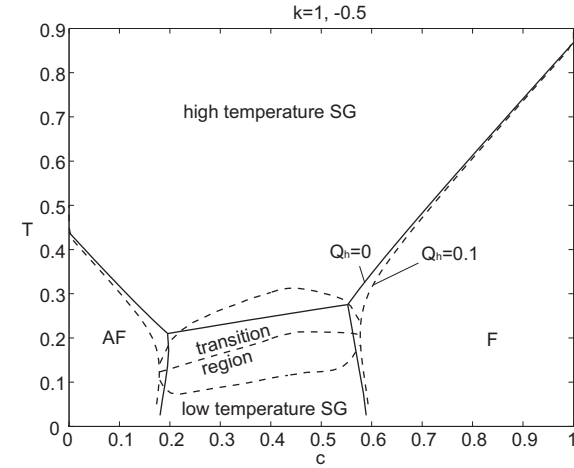


Рис. 4. Фазова діаграма для $z = 6$ для розподілу $k = (-0.5, 1)$ і при гаусівському розподілі внутрішніх полів з дисперсією $Q_h = 0; 0.1$ при $zJ = 0.225$.

тричною фазою [29].

3. Глауберівська динаміка в кластерному наближенні

Кінетичне рівняння Глаубера для унарної функції $\langle S_1 \rangle_{\rho(t)}$ можна записати у вигляді

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \langle S_1 \rangle_{\rho(t)} = \left\langle F_0^{(1)} \left(h_1 + \sum_{r_1} k_{1r_1} \cdot S_{r_1} \right) \right\rangle_{\rho(t)} \quad (11)$$

Для замикання рівняння (11) в одночастинковому наближенні проводимо заміну $\sum_{r_1} k_{1r_1} \cdot S_{r_1} \approx \sum_{r_1} \varphi_{1r_1}(t)$:

$$\left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) m_1(t) \approx \left\langle F_0^{(1)} \left(h_1 + \sum_{r_1} \varphi_{1r_1} \right) \right\rangle_{\rho(t)} = F_0^{(1)}(x_1(t)), \quad (12)$$

Тут в праву частину входять кластерні поля φ_{1r_1} , які діють на вузол 1 з боку вузлів r_1 . Для їх знаходження потрібні додаткові рівняння.

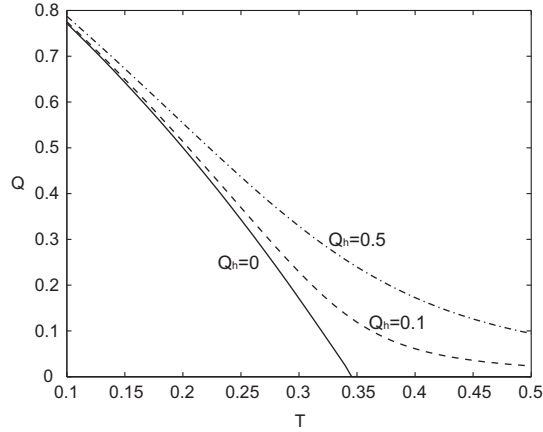


Рис. 5. Температурна залежність середнього квадрату намагніченості $Q = \langle \langle S_i \rangle_{TERM}^2 \rangle_{conf}$ для $z=6$ для розподілу $k = (-1, 1)$ і для гаусового розподілу внутрішніх полів з дисперсією Q_h при $zJ = 0.225$ і $c=0.5$ (перехід з високотемпературної SG-фази до низькотемпературної SG-фази).

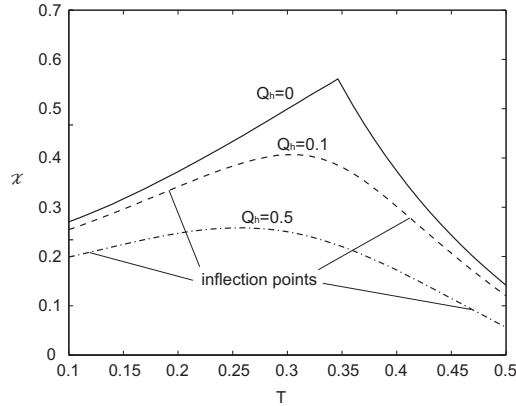


Рис. 6. Температурна залежність сприйнятливості $\chi = \frac{\partial}{\partial h} \langle \langle S_i \rangle_{TERM} \rangle_{conf}$ для $z=6$ для розподілу $k = (-1, 1)$ і для гаусового розподілу внутрішніх полів з дисперсією Q_h при $zJ = 0.225$ і $c=0.5$ (перехід з високотемпературної SG-фази до низькотемпературної SG-фази).

В 2-х частинковому наближенні виділяємо явно два вузла 1 і 2, а для решти вузлів використовуємо наближення аналогічне одночастинковому

$$\begin{aligned} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) m_1(t) &\approx \left\langle F_0^{(1)} \left(h_1 + \sum_{r_1 \neq 2} \varphi_{1r_1}(t) + k_{12} \cdot S_2 \right) \right\rangle_{\rho(t)} \\ &= L(y_1(t)) + P(y_1(t)) m_2(t) \\ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) m_2(t) &\approx \left\langle F_0^{(1)} \left(h_2 + \sum_{r_2 \neq 1} \varphi_{2r_2}(t) + k_{21} \cdot S_1 \right) \right\rangle_{\rho(t)} \\ &= L(y_2(t)) + P(y_2(t)) m_1(t), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} x_i(t) &= h_i(t) + \sum_{r_i} \varphi_{ir_i}(t); \quad y_i(t) = h_i(t) + \sum_{r_i \neq j} \varphi_{ir_i}(t) \\ P(y) &= P(y; k_{12}) = \frac{sh(2k_{12})}{ch(2y) + ch(2k_{12})}; \\ L(y) &= L(y; k_{12}) = \frac{sh(2y)}{ch(2y) + ch(2k_{12})} \end{aligned} \quad (14)$$

Ми використовуємо ті самі позначення для m_i, φ_{ir_i} , як і в 1-одночастинковому наближенні. Це дозволяє отримати замкнуту самоузгоджену систему рівнянь для змінних m_i, φ_{ir_i} . Як ми покажемо нижче, в статичному випадку ця система дає результати наближення 2-х частинкового кластера, яке можна отримати також на основі розвинення вільної енергії системи. Тому ми будемо називати отриману систему рівнянь наближенням двочастинкового кластера для рівняння Глаубера.

З двох останніх рівнянь можна отримати одне рівняння 2-го порядку для m_1

$$\begin{aligned} \left\{ \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - P(y_1(t))P(y_2(t)) - \tau \frac{\partial P(y_1(t))}{\partial t} \frac{1}{P(y_1(t))} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} m_1(t) \\ = P(y_1(t))L(y_2(t)) - \tau \frac{\partial P(y_1(t))}{\partial t} \frac{L(y_1(t))}{P(y_1(t))} + \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) L(y_1(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

Нас будуть цікавити статичні розв'язки і лінійний відгук системи на зовнішнє частотно-залежне поле. Запишемо $m_i(t), x_i(t), y_i(t)$ у вигляді

$$m_1(t) = m_1 + \delta m_1(t); \quad x_1(t) = x_1 + \delta x_1(t); \quad y_1(t) = y_1 + \delta y_1(t) \quad (16)$$

Тепер з 1-частинкового и 2-частинкового рівнянь отримаємо систему для статичних частин

$$\begin{aligned} m_1 &= F_0^{(1)}(x_1); \\ m_1 &= \frac{L(y_1; k_{12}) + P(y_1; k_{12})L(y_2; k_{12})}{D(y_1, y_2; k_{12})} = F_{cl}^{(10)}(y_1, y_2; k_{12}) \quad (17) \\ D(y_1, y_2; k_{12}) &= 1 - P(y_1; k_{12})P(y_2; k_{12}), \end{aligned}$$

де використані позначення (3).

Систему рівнянь для динамічних частин в одно- і двочастинковому наближенні запишемо в частотному представленні

$$\begin{aligned} \chi_1(\omega) &= F^{(2)}(x_1) / (1 + \tau i \omega) \cdot x'_1(\omega); \quad (18) \\ \chi_1(\omega) &= \tilde{V}(y_1, y_2; k_{12}; \omega) \cdot y'_1(\omega) + \tilde{\tilde{V}}(y_1, y_2; k_{12}; \omega) \cdot y'_2(\omega) \\ \chi_1(\omega) &= m'_1(\omega) = \frac{\delta m_1(\omega)}{\delta h(\omega)}; \quad x'_1(\omega) = \frac{\delta x_1(\omega)}{\delta h(\omega)}; \quad y'_1(\omega) = \frac{\delta y_1(\omega)}{\delta h(\omega)} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y_1, y_2; k_{12}; \omega) &= \\ &= \frac{D(y_1, y_2) \cdot F_{cl}^{20}(y_1, y_2) + [F_{cl}^{20}(y_1, y_2) - P(y_1) \cdot F_{cl}^{11}(y_1, y_2)] \cdot \tau i \omega}{(1 + \tau i \omega)^2 - P(y_1)P(y_2)}; \\ \tilde{\tilde{V}}(y_1, y_2; k_{12}; \omega) &= \frac{D(y_1, y_2) \cdot F_{cl}^{11}(y_1, y_2)}{(1 + \tau i \omega)^2 - P(y_1)P(y_2)}. \quad (20) \end{aligned}$$

Надалі ми будемо використовувати гаусівське наближення для $R(\sigma, z - 1) = \left\langle \delta(\sigma - \sum_r^{z-1} \varphi_{1r}) \right\rangle_{conf}$ і тому нам потрібні два рівняння для визначення статичних параметрів φ, q . Для їх отримання прирівняємо середні для першого і другого моментів m_i і $Q_i = 1 - m_i^2$ в одно- і двочастинковому наближенні. В результаті отримаємо друге і третє рівняння з системи (8). У випадку слабо флюктууючої далекосяжної взаємодії врахування всіх координаційних сфер, починаючи з другої, можна здійснити в рамках лінійних поправок до вільної енергії [20]. Це приводить до виникнення параметра середньої далекосяжної взаємодії $\bar{k}_{L,ff}$ і перенормування зовнішнього поля $h_f \rightarrow h_f + \varphi_{L,f}$ (див. (6)). Тоді для параметрів φ, q, φ_L маємо систему трьох рівнянь типу (8).

В гаусівському наближенні по динамічних змінних $x'_1(\omega), y'_1(\omega)$ нам потрібні додаткові рівняння для другого моменту

$$\begin{aligned} Q_1(\omega) &= 1 - m_1^2(\omega); \quad (21) \\ Q'_1(\omega) &= -2m_1(\omega) \cdot m'_1(\omega) \approx -2F^{10}(y_1, y_2, k_{12}) \cdot \chi_1(\omega). \end{aligned}$$

Система рівнянь для $Q_1(\omega)$ у одно- і двочастинковому наближенні запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Q'_1(\omega) &= F^{(3)}(x_1, \omega) \cdot x'_1(\omega); \quad F^{(n)}(x_1; \omega) = F^{(n)}(x_1) / (1 + i \omega \tau) \\ Q'_1(\omega) &= \tilde{V}_Q(y_1, y_2; \omega) \cdot y'_1(\omega) + \tilde{\tilde{V}}_Q(y_1, y_2; \omega) \cdot y'_2(\omega) \\ \tilde{V}_Q(y_1, y_2; \omega) &= -2F_{12}^{10} \cdot \tilde{V}(y_1, y_2; \omega); \quad (22) \\ \tilde{\tilde{V}}_Q(y_1, y_2; \omega) &= -2F_{12}^{10} \cdot \tilde{\tilde{V}}(y_1, y_2; \omega) \end{aligned}$$

Після усереднення рівняння в 1-частинковому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{m}'(\omega) &= \langle F^{(2)}(\sigma; \omega) \rangle_\sigma [1 + z\varphi'(\omega) + \bar{J}m'(\omega)] + \langle F^{(3)}(\sigma; \omega) \rangle_\sigma \frac{1}{2}zq'(\omega) \\ \bar{Q}'(\omega) &= \langle F^{(3)}(\sigma; \omega) \rangle_\sigma [1 + z\varphi'(\omega) + \bar{J}m'(\omega)] + \langle F^{(4)}(\sigma; \omega) \rangle_\sigma \frac{1}{2}zq'(\omega) \quad (23) \end{aligned}$$

Аналогічно в рамках двочастинкового наближення отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{m}'(\omega) &= \langle V(\omega) \rangle_{cl} \cdot [1 + z_1\varphi'(\omega) + \bar{J}m'(\omega)] + \langle V'(\omega) \rangle_{cl} \cdot \frac{1}{2}z_1q'(\omega) \\ \bar{Q}'(\omega) &= \langle V_Q(\omega) \rangle_{cl} \cdot [1 + z_1\varphi'(\omega) + \bar{J}m'(\omega)] + \langle V'_Q(\omega) \rangle_{cl} \cdot \frac{1}{2}z_1q'(\omega) \quad (24) \end{aligned}$$

Тут введено позначення для коефіцієнтів (з індексом Q аналогічно)

$$\begin{aligned} \langle V(\omega) \rangle_{cl} &= \left\langle \left\langle \tilde{V}(h + \sigma_1, h + \sigma_2; \omega) + \tilde{\tilde{V}}(h + \sigma_1, h + \sigma_2; \omega) \right\rangle_k \right\rangle_{\sigma_1, \sigma_2}; \\ \langle V'(\omega) \rangle_{cl} &= \\ &= \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial \sigma_1} \tilde{V}(h + \sigma_1, h + \sigma_2; \omega) + \frac{\partial}{\partial \sigma_2} \tilde{\tilde{V}}(h + \sigma_1, h + \sigma_2; \omega) \right\rangle_k \right\rangle_{\sigma_1, \sigma_2} \quad (25) \end{aligned}$$

а також для динамічних параметрів

$$\begin{aligned} \langle x'_1(\omega) \rangle_c &= z\varphi'(\omega); \quad \langle x_1 \cdot x'_1(\omega) \rangle_c^{cum} = zq'(\omega)/2. \\ \langle y'_1(\omega) \rangle_c &= z_1\varphi'(\omega); \quad \langle y_1 \cdot y'_1(\omega) \rangle_c^{cum} = z_1q'(\omega)/2. \quad (26) \end{aligned}$$

З системи рівнянь (23), (24) ми знаходимо вираз для $m'(\omega)$ (усередненої сприйнятливості)

$$\begin{aligned} -\bar{m}'(\omega) &= -\bar{\chi}(\omega) = [D(\omega)/B(\omega) - \beta\bar{J}]^{-1} \overrightarrow{PGState} \\ &= [z/\langle V(\omega) \rangle - z_1/\langle F^{(2)}(\omega) \rangle - \beta\bar{J}]^{-1} \quad (27) \end{aligned}$$

Де введені позначення

$$\begin{aligned} D(\omega) &= [z \langle F^{(2)}(\omega) \rangle - z_1 \langle V(\omega) \rangle][z \langle F^{(4)}(\omega) \rangle - z_1 \langle V'_Q(\omega) \rangle] - \\ &= [z \langle F^{(3)}(\omega) \rangle - z_1 \langle V_Q(\omega) \rangle][z \langle F^{(3)}(\omega) \rangle - z_1 \langle V'(\omega) \rangle] \end{aligned}$$

$$B(\omega) = \langle F^{(2)}(\omega) \rangle \cdot \langle V(\omega) \rangle [z \langle F^{(4)}(\omega) \rangle - z_1 \langle V_Q'(\omega) \rangle] + \quad (28)$$

$$+ z_1 \langle F^{(2)}(\omega) \rangle \langle V_Q(\omega) \rangle \langle V'(\omega) \rangle - z [\langle F^{(3)}(\omega) \rangle]^2 \langle V(\omega) \rangle$$

Проаналізуємо тепер результати чисельних розрахунків.

На рис.7-10 представлена температурна залежність сприйнятливості для моделі на кубічній ґратці для симетричного розподілу короткодії $k = (-1, 1)$ і з різними розподілами внутрішніх полів $Q_h = 0; 0.1$. При $c = 0.5$ (стан протонного скла при всіх T) дійсна частина сприйнятливості $\bar{\chi}'(\omega, T)$ при $\omega = 0$ (статична сприйнятливості) і при малих частотах ($\omega = 0.01$) на рис.7 відрізняються лише при малих температурах. ($\bar{\chi}'(\omega \neq 0, T \rightarrow 0) \rightarrow 0$) і мають пік в точці T_g . Пік уявної частини $\bar{\chi}''(\omega \rightarrow 0, T)$ відповідає точці перегину дійсної частини $\bar{\chi}'(\omega \rightarrow 0, T)$. Малий випадковий поляр $Q_h = 0.1$ приводить до суттєвого згладжування піку $\bar{\chi}'(\omega, T)$, $\bar{\chi}''(\omega, T)$ в околі T_g . Нами проаналізована температурна поведінка ефективного часу релаксації $\langle \tau_{eff} \rangle$ при $c = 0.5$.

$$\langle \tau_{eff} \rangle = -i\chi(0) \lim_{\omega \rightarrow 0} T_0 \frac{\partial}{\partial \omega} \chi^{-1}(\omega); \quad Re \langle \tau_{eff} \rangle \xrightarrow{T \rightarrow 0} \tau_0 \exp\left(\frac{E}{T}\right) \quad (29)$$

При високих температурах частотна залежність комплексної сприйнятливості $\bar{\chi}(\omega, T)$ близька до дебаєвської форми. При низьких температурах дебаєвська залежність зникає. При цьому мають місце співвідношення

$$Re \langle \tau_{eff} \rangle \rightarrow \infty, \quad Im \langle \tau_{eff} \rangle \rightarrow \infty; \quad Im \langle \tau_{eff} \rangle / Re \langle \tau_{eff} \rangle \ll 1 \quad (30)$$

Чисельний аналіз показує, що в нашій моделі при $T \rightarrow 0$ температурний хід $Re \langle \tau_{eff} \rangle$ описується співвідношенням Ареніуса (29)

При $c = 0.8$ в моделі при пониженні температури при T_c відбувається фазовий перехід з високотемпературної фази протонного скла ($m = 0, Q > 0$) до сегнетоелектричної фази ($m > 0, Q > 0$). В точці переходу $\bar{\chi}'(\omega = 0, T)$ має розрив (перехід другого роду), а $\bar{\chi}'(\omega \neq 0, T)$ занулюється (для частоти $\omega = 0.01$ на рис.9 область занулення не відображена). Уявна частина $\bar{\chi}''(\omega, T)$ в точці T_c має температурний пік, значення якого зменшується при збільшенні частоти. В реальній протонних стеклах типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ можливі відхилення від стехіометрії в по об'єму зразка. Ми змоделювали цей макроскопічний концентраційний безлад усереднивши комплексну сприйнятливості $\bar{\chi}(\omega, T, c)$ по c з гаусівським розподілом з дисперсією $q_c = 0.004 \cdot c(1 - c)$. Як видно з рис.10 незначні флюктуації від заданої концентрації $c = 0.8$ приводять до значного спадання піків в

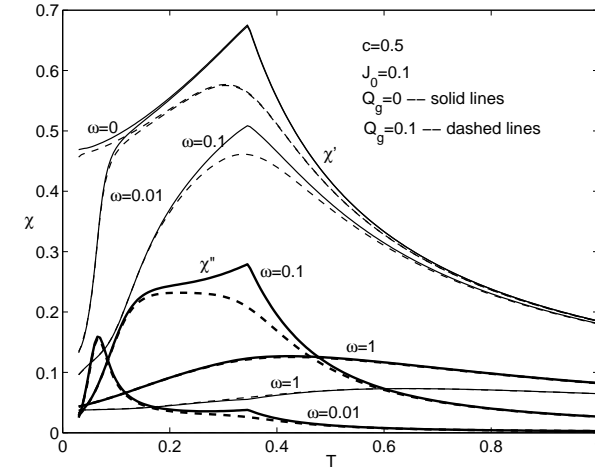


Рис. 7. Температурна залежність дійсної (суцільна лінія) і уявної (штрихова) частин сприйнятливості при $z = 6$ в моделі $k = (-1, 1)$ при флюктуаціях внутрішніх полів $Q_h = 0; 0.1$ при різних частотах у стані протонного скла. ($c = 0.5$).

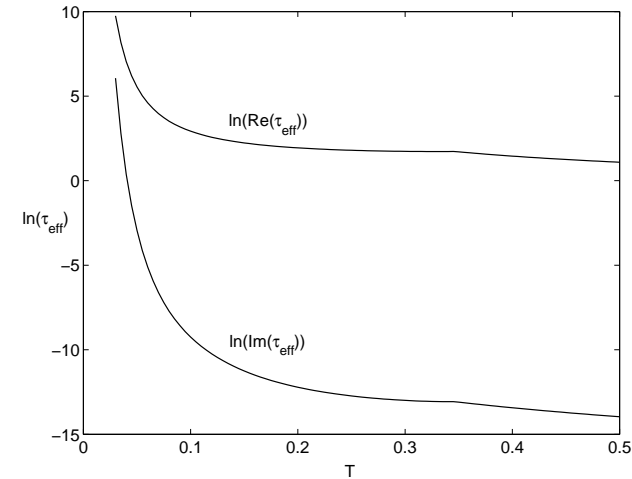


Рис. 8. Температурна залежність дійсної і уявної частини ефективного часу релаксації при $z = 6$ в моделі $k = (-1, 1)$ при флюктуаціях внутрішнього поля $Q_h = 0$ у стані протонного скла. ($c = 0.5$).

області переходу як для дійсної $\langle \bar{\chi}'(\omega, T, c) \rangle_c$, так і для уявної частин $\langle \bar{\chi}''(\omega, T, c) \rangle_c$ сприйнятливостей. При цьому занулення $\langle \bar{\chi}'(\omega, T, c) \rangle_c$ в області фазового переходу вже відсутнє, а сама область переходу суттєво розмивається.

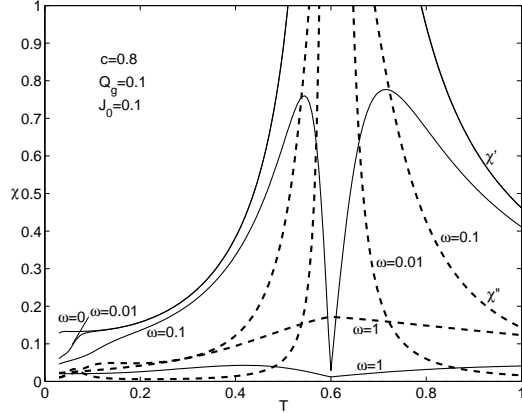


Рис. 9. Температурна залежність дійсної (суцільна лінія) і уявної (штрихова) частин сприйнятливості при $z = 6$ в моделі $k = (-1, 1)$ при флуктуації внутрішнього поля $Q_h = 0.1$ при переході з високо-температурного стану протонного скла у сегнетоактивний станного. ($c = 0.8$).

На основі чисельних розрахунків комплексної сприйнятливості $\bar{\chi}(\omega, T)$ нами побудована фазова діаграма моделі $k = (-1, 1)$ при $z = 6$. Низькотемпературні лінії заморожування розраховані по положенню піка уявної частини $\bar{\chi}''(\omega, T)$ при низьких частотах $\omega = 0.01; 0.001$. В нашій моделі при $c \rightarrow 1$ лінія заморожування прямує до певного значення, хоча в протонних стеклах типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$ лінія заморожування прямує до нуля при $c \rightarrow 1$. На нашу думку, це пов'язано з гаусівським наближенням для функції розподілу кластерних полів. Тоді як в реальних протонних стеклах при низьких температурах ця функція розподілу є двопікова [24, 25]. Розрахунки статичних і динамічних характеристик моделі з негаусівськими функціями розподілу кластерних полів будуть проведені в окремій роботі.

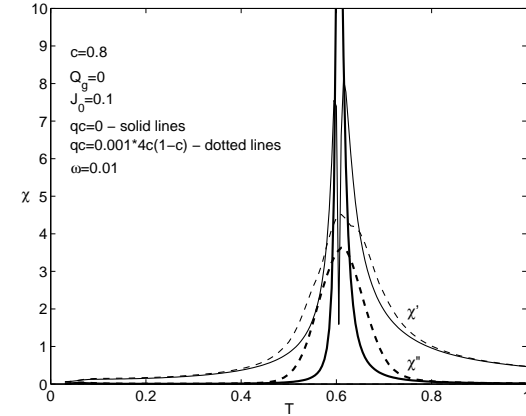


Рис. 10. Температурна залежність дійсної (тонкі лінії) і уявної (повтовщені лінії) частин сприйнятливості при $z = 6$ в моделі $k = (-1, 1)$ при флуктуаціях внутрішнього поля $Q_h = 0$ при частоті $\omega = 0.01$ і середній концентрації $c = 0.8$. Штрихові лінії відповідають флуктуаціям концентрацій з дисперсією $q_c = 0.004 \cdot c(1 - c)$.

4. Висновки

Запропонована модель протонного скла з довільним радіусом конкуруючих взаємодій. В межах наближення двохчастинкового кластера і реплічної симетрії виведена система M інтегральних рівнянь для функцій розподілу кластерних полів M координаційних сфер. Чисельно вивчена функція розподілу кластерних полів для першої координаційної сфери (гратка Бете). Запропонована модель протонного скла з суттєвими короткосяжними взаємодіями (перша координаційна сфера) і слабкими далекосяжними взаємодіями (лінійне наближення). Для неї в наближенні гаусівських кластерних полів обчислена фазова діаграма, ентропія, параметри порядку, питома теплоємність і сприйнятливості. Показано, що малі флуктуації внутрішніх полів можуть призвести до суттєвого розмивання області фазового переходу в стан протонного скла. В межах глауберівської динаміки запропоновано кластерне наближення для динамічної сприйнятливості. Показано, що в даній моделі в стані протонного скла динаміка має характер близький до дебаєвської релаксації тільки при високих температурах. При цьому в нашій моделі при $T \rightarrow 0$ температурний хід реальної частини ефективного часу релаксації описується

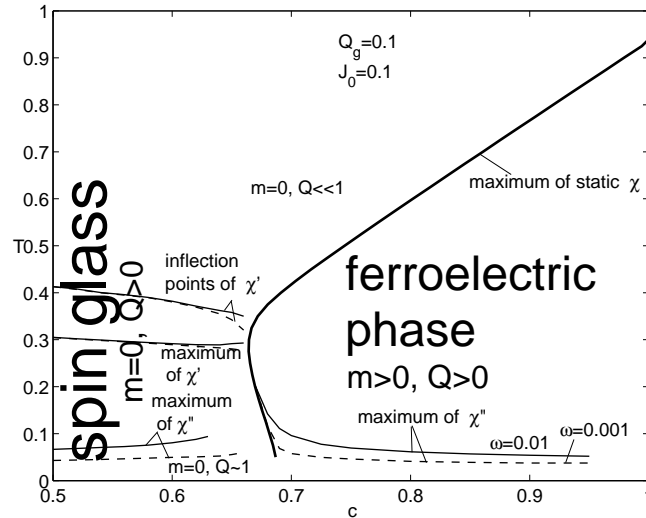


Рис. 11. Фазова діаграма моделі $k = (-1, 1)$ при $z = 6$. Лінії заморожування побудовані на основі максимуму уявної частини сприйнятливості $\chi''(T, \omega)$ при низьких частотах $\omega = 0.01; 0.001$.

співвідношенням Ареніуса. Уявна частина сприйнятливості у фазі протонного скла і у феро- і антиферофазі має низькотемпературний пік, який відповідає лінії заморожування протонних стекел. В області переходу до феростану або антиферовпорядкування продемонстровано суттєве згладження температурних піків дійсної і уявної частин сприйнятливості за рахунок малих макроскопічних флуктуацій концентрацій конкуруючих взаємодій. Побудована фазова діаграма моделі з врахуванням ліній заморожування. Обговорюються причини відмінності в поведінці при $c \rightarrow 1$ ($c \rightarrow 0$) отриманої лінії заморожування від спостережувальної в протонних стеклах типу $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$.

Література

1. Edwards S.F., Anderson P.W. Theory of spin glasses. // J.Phys. F. Metal. Phys. – 1975.–Vol. 5. – P. 965-974.
2. Sherrington D., Kirkpatrick S. Solvable Model of Spin Glass. // Phys.Rev. Lett. – 1975.–Vol. 35. – P. 1792-1796.
3. Kirkpatrick S., Sherrington D. Infinite-Ranged Model of Spin-Glasses. // Phys.Rev B. – 1978.–Vol. 17, N 11. – P. 4384-4403.
4. Parisi G. The order parameter for spin glasses: A function on the interval 0-1. // J. Phys A. – 1980.–Vol. 13. – P. 1101-1112.
5. Matsubara F., Sakata M. Theory of Random Magnetic Mixture. III. Glass-Like phase. // Progr.Theor.Phys. – 1976.–Vol. 55, N. 3. – P. 672-682.
6. Sasaki M., Katsura Sh. The Distribution Function of the Effective Field of the Ising Spin Glass on the Bethe Lattice for the Coordination Number $z=4,5,6$. // Physica A. – 1989.–Vol. 155. – P. 206-220.
7. Sasaki M., Katsura Sh. The Assymmetric Continuous Distribution Function of the Effective Field of the Ising Spin Model in the Spin Glass and Ferromagnetic States on the Bethe Lattice. // Physica A. – 1989.–Vol. 157. – P. 1195- 1202.
8. Mezard M., Parisi G. The Bethe Lattice Spin Glass Revisited. // Eur.Phys B. – 2001.–Vol. 20. – P. 217-233.
9. Liers F., Palassini M., Hartmann A.K., Junger M. Ground State of the Bethe-lattice Spin Glass and Running Time of an exact optimization. // Phys. Rev B. – 2003.–Vol. 68. – P. 094406 - 094406.
10. Courtens E. Competing structural ordering and transitions to glass in mixed crystals of $Rb_{1-x}(NH_4)_xH_2PO_4$. //J.Phys. (Paris) Lett.– 1982.– Vol. 43.– L199.
11. Moriya K., Matsuo T., Suga H., Terauchi H. Heat Capacities and

- Phase Transitions of the $(\text{NH}_4)_x\text{Rb}_{1-x}\text{H}_2\text{PO}_4$ System. // Jap. J. Appl. Phys.– 1985.– 24 Suppl. 24-2– P. 955-957.
12. Takashige M., Terauchi H., Miura Y., Hoshino S., Nakamura T. Dielectric Dispersion of $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. // Jap. J. Appl. Phys.– 1985.– 24 Suppl. 24-2– P. 947-949.
 13. Hattori T., Araki H., Nakashima S., Mitsushishi A., Terauchi H. Temperature Dependence of the ν_2 Band of PO_4 tetrahedrons in $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$ Mixed Crystals. // J. Phys. Soc. Jpn. – 1988.– Vol. 57, N 3.– P. 1127-1135.
 14. Hayase S., Sakashita H., Terauchi H. Temperature and concentration dependence of x-ray diffuse scattering in a random mixture $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. // Ferroelectrics. – 1987. – Vol. 72.– P. 245-256.
 15. Kwon O.J., Kim J.J. Proton glass behavior and phase diagram of the $K_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$ system. //Phys.Rev B. – 1993. – Vol. 48, N 9. – P. 6639-6642.
 16. Trybula Z. and Kaszynski J., Maluszynska H. Phase coexistence of hydrogen-bonds $K_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$ crystal.// Ferroelectrics. - 2005.-Vol. 316. - P. 125-129.
 17. Trybula Z., Schmidt V.H. Drumheller E.J. Coexistence of proton-glass and ferroelectric order in $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{AsO}_4$. // Phys. Rev. -1991.–Vol. 43, N 1. – P. 1287-1289.
 18. Trybula Z. and Kaszynski J. Phase coexistence of hydrogen-bonded mixed ferroelectric and antiferroelectric crystal. // Ferroelectrics. - 2004.-Vol. 298. – P. 347-351.
 19. Prelovcek P., Blinc R. Spin glass phase in mixed ferroelectric-antiferroelectric hydrogen bonded systems. // J. Phys. C.: Solid State Phys. – 1982. – Vol. 15. – P. L985-L990.
 20. Matsushita E., Matsubara T. Theory of Phase Transition in Mixed Crystals $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. //Prog.Theor.Phys. - 1984. - Vol. 71, N 2. - P. 235-241.
 21. Matsushita E., Matsubara T. Matsubara: Cluster Theory of Glass in $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. // J.Phys.Soc.Jap. – 1985. – Vol. 54, N 3. – P. 1161-1167.
 22. Pirc R., Tadic B., and Blinc R. Random-Field Smearing of the Proton-Glass Transition. // Phys.Rev.B. – 1987. – Vol. 36, N 16. – P. 8607-8615.
 23. Kim D.H., Kim J.J. Replica Symmetric Solution of Random Field Tunneling Model for Proton Glasses. // Ferroelectrics. – 2002.–Vol. 268. – P. 263-268.
 24. Cevc P., Zalar B., and Blinc R. EPR study of random field smearing

- of the proton glass transition in Tl^{2+} doped $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. // Solid state Comm. – 1989. – Vol. 70, N 4. – P. 451-464.
25. Kind R., Blinc R., Dolinsek J., Korner N., Zalar B., Cevc P., Dalal N., DeLooze J. Tl^{2+} EPR study of the dynamics of the proton-glass transition in $\text{Rb}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$. //Phys.Rev.B. – 1991. – Vol. 43, N 4. – P. 2511-2518.
 26. Banerjee V., Dattagupta S. Dielectric relaxation in a deuteron glass. // Phys.Rev B. – 2003. – Vol. 68. – P. 054202.
 27. Smolyaninov I., Glinchuk M. The peculiarities of glass state formation and the role of random elastic fields in mixed crystals of the KH_2PO_4 family. // J.Phys.: Cond. Matt. – 1994. – Vol. 6, N 15. – P. 2869-2880.
 28. Levitskii R.R., Sorokov S.I., Vdovych A.S. Spin model with different types of competing interactions. // Ferroelectrics. – 2005. – Vol. 316. – P. 111-119.
 29. Sorokov S.I., Levitskii R.R., Vdovych A.S. Spin-glass model with essential short-range competing interactions. // Condens. Matter Phys. – 2005, – Vol. 8, N 3(43). – P. 603-622.