

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Володимир Михайлович Фітьо
Михайло Васильович Шовгенюк

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТА ТАЛЬБОТА НА ОСНОВІ ДВОХ МОДЕЛЕЙ
ДИФРАКЦІЇ

Роботу отримано 28 грудня 2007 р.

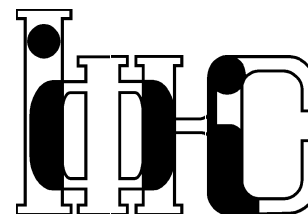
Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТЕКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-07-22U

В.М.Фітьо*, М.В.Шовгенюк

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТА ТАЛЬБОТА
НА ОСНОВІ ДВОХ МОДЕЛЕЙ ДИФРАКЦІЇ

*Національний університет "Львівська політехніка", 79013 Львів,
вул. С. Бандери 12

ЛЬВІВ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 42.15.E, 42.30.K, 42.30.V, 42.79, 52.25.F

Дослідження ефекта Тальбота на основі двох моделей дифракції

В.М.Фітьо, М.В.Шовгенюк

Анотація. Описана теорія формування оптичних зображень при ефекті Тальбота на основі векторної та скалярної моделей дифракції. В рамках векторної теорії методом зв'язаних хвиль отримана система диференціальних рівнянь дифрагованих хвиль для ТЕ і ТМ-поляризацій. Показано, що враховуючи симетрію функції діелектричної проникності ґратки систему диференціальних рівнянь розмірності $2N + 1$ можна переформатувати на дві рівнозначні системи рівнянь розмірностей $N + 1$ і N . На основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда отримані аналітичні розв'язки для дифрагованих та поверхневих хвиль. Приведені чисельні результати розрахунку самозображень ґратки в трьох площинах Тальбота. Отримані результати дають ідентичні розподіли положення локальних максимумів та мінімумів інтенсивності самозображень.

Investigation of the Talbot effect on the basis of two diffraction models

V.M.Fitio, M.V.Shovgenyuk

Abstract. The theory of diffraction grating image forming according to the Talbot effect is described on the basis of the vector as well as scalar diffraction theories. In the frame of the vector theory we use the coupled-wave method and obtain a set of differential equations describing diffraction of TE and TM-polarized waves. We show that the symmetry of the dielectric permittivity function allows to rewrite the differential equations set of $2N+1$ dimensionality as two equation sets of $N + 1$ and N dimensions. Using Rayleigh-Sommerfeld integral we obtain analytic solutions for diffracted and surface waves. Numerical calculation of the grating self-images in the three Talbot-planes using these two methods are given. The obtained results give identical self-images intensity distribution of local maximums and minimums.

Подається в Український журнал фізичної оптики
Submitted to Ukrainian Journal of Physical Optics

© Інститут фізики конденсованих систем 2007
Institute for Condensed Matter Physics 2007

1. Вступ

Особливий науковий інтерес дослідження зображень періодичних оптичних елементів пояснюється тим, що в такому процесі найбільш повно розкривається тісний взаємозв'язок явищ дифракції та інтерференції світла. Ще в минулому столітті на особливості формування зображень на періодичних ґратках вперше звернули увагу Ф. Тальбот [1] і лорд Релей [2]. Відомий нині ефект Тальбота, який спостерігається на періодичних ґратках, полягає в тому, що в області дифракції Френеля на скінченних відстанях $d_N = NZ_T$, N - ціле число, $Z_T = 2T^2/\lambda$ спостерігається повне відновлення зображення періодичного оптичного елемента. Положення еквідистантних площин Тальбота Z_T , в яких формуються самозображення, залежить від періоду ґратки T та довжини хвилі світла λ . Між цими площинами існує багато т. з. дробових площин Тальбота, в яких теж формуються самозображення періодичних структур.

Традиційно дослідження явища формування самозображень протягом тривалого часу проводилися на основі скалярної теорії дифракції - дифракції Френеля на плоских періодичних об'єктах в монохроматичному світлі [3, 4]. В ряді робіт в рамках цієї теорії досліджувалися умови формування самозображень для різних типів амплітудних і фазових ґраток. Отримані результати теоретичних досліджень добре узгоджуються з експериментальними та числовими результатами. Проте, ряд експериментальних картин формування складних багаторівневих самозображень періодичних фазових елементів не мають простого теоретичного пояснення. Важливою є теоретична робота [5], в якій розглядається дробовий ефект Тальбота у фазовому просторі. Даними авторами отримана формула, згідно якої формування дробових зображень Тальбота в фазовому просторі описується скінченною сумою зміщених функцій розподілу Вігнера.

На основі використання дробового ефекту Тальбота на періодичних фазових структурах Ломанн [6] запропонував новий клас оптичних елементів - т. з. бінарні фазові ТАІ ("Talbot array illuminators"), зображення яких характеризуються 100% контрастом.

В роботі [7] з позицій просторової фільтрації встановлений тісний взаємозв'язок явища формування самозображень в зоні дифракції Френеля та в області дробового фур'є-перетворення (ДФП). Теоретично обґрунтовано і показано чисельними розрахунками, що в області ДФП в різних площинах Тальбота просторова частота відновлених самозображень амплітудних решіток суттєво залежить від параметра p ДФП. Пізніше в роботі [8] дається узагальнення теорії

формування самозображень в дробових фур'є-площинах. Використовуючи умови реалізації ДФП в оптичних системах, показано, що самозображення періодичних об'єктів з просторовим періодом T можуть спостерігатися в кількох площинах ДФП-Тальбота, які характеризуються дійсним чи комплексним параметром ДФП, а просторова частота самозображень ДФП масштабується гармонічною функцією з параметром p ДФП.

Ефект Тальбота можна змоделювати на основі векторної теорії дифракції, маючи комплексні амплітуди всіх дифрагованих пучків, які поширюються у вільному просторі за ґраткою. Відповідні амплітуди можна знайти методом зв'язаних хвиль (МЗХ), який використовується для дослідження дифракції світла на ґратках [9]. Цей метод розроблений у 80-тих роках минулого століття. Проте він широко не використовувався в ті часи, особливо для точного аналізу дифракції світла на ґратках із значною модуляцією діелектричної сталості, оскільки необхідно було використовувати неповну систему диференціальних рівнянь, яка містить по крайній мірі декілька десятків рівнянь для забезпечення необхідної точності. Ситуація змінилася з появою високошвидкісних персональних комп'ютерів в 90-тих роках. МЗХ отримав додатковий розвиток в ті часи [10–13], були знайдені стабільні числові алгоритми аналізу дифракції на ґратках любого типу [14, 15]. МЗХ використовують для аналізу різних типів періодичних структур: ґраткових поляризаторів [16], ґраткових вузькосмугових фільтрів на основі резонансу зв'язаних хвиль [17–19], фотонних кристалів [20, 21]. Цим методом також вивчають взаємодію когерентного випромінювання з рельєфними ґратками на металі [22–25].

Для багатьох ґраток періодична залежність діелектричної проникливості від координати x являється симетричною функцією: $\varepsilon(z, x) = \varepsilon(z, -x)$. Наприклад, планарні ґратки, які отримані методами фотолітографії мають прямокутний або трапецеївидний рельєф з рівними боковими сторонами. Приклад такої ґратки наведений на рис. 1. Особливо тривалого часу розрахунку вимагають ґратки на основі тонкої металічної плівки, в яких період набагато більший ніж ширина щілин [26, 27].

Дослідження таких структур актуально в теперішній час, оскільки вони володіють аномально високим пропусканням [28, 29], і на їх основі можливо виготовляти селективні оптичні фільтри. Також металізовані ґратки, які виготовляють голографічним методом, (використовують в спектральних приладах) мають косинусоїдальний рельєф [30]. Також великого часу розрахунку вимагають ґратки,

в яких період набагато більший ніж довжина хвилі. Очевидно, що для якісного спостереження ефекту Тальбота остання умова повинна також виконуватися. Вище перелічені ґратки мають симетричну структуру.

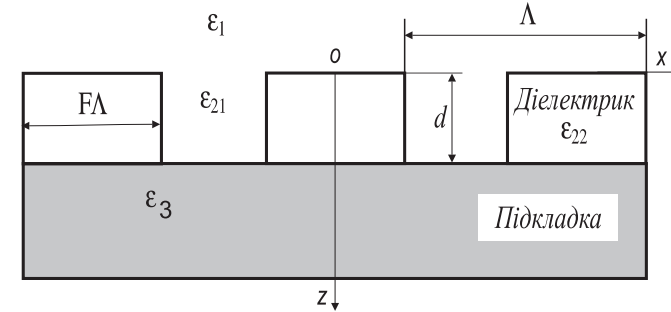


Рис. 1. Симетрична ґратка

Досить часто ґратки симетричної структури використовують при нормальному падінні світла [16]. Інтуїтивно ясно, що в цьому випадку амплітуди зв'язаних хвиль, що дифрагують в $\pm n$ -ий порядок будуть однаковими. Цей останній випадок реалізується при спостереженні ефекту Тальбота. Тобто відповідна система диференціальних рівнянь буде володіти певною симетрією. Отже слід очікувати, що об'єднавши в МЗХ $\pm n$ -ні порядки в один n -ий порядок, ми тим самим можемо перейти від системи диференціальних рівнянь порядку $2N + 1$ до рівнозначної системи порядку $N + 1$, але з суттєво меншим комп'ютерним часом розрахунку. Такий підхід успішно продемонстровано в роботі [31], причому час розрахунку переформатованої системи зменшився приблизно в 10 разів. Можливі також більш складні випадки симетрії. Якщо пучок падає на ґратку під таким кутом, що один з дифрагованих пучків поширюється по нормалі до ґратки, ми знову ж таки отримуємо систему диференціальних рівнянь, що має певну симетрію. Отримуємо також систему диференціальних рівнянь зі симетрійними властивостями, якщо пучок падає на ґратку по схемі Літрова чи під кутом Бреґга [30]. В цьому випадку спостерігаємо також симетричне поширення дифрагованих пучків відносно нормалі до ґратки. При такій схемі падіння для розрахунку доцільно використати $2N$ дифракційних порядків. Отже, слід очікувати, що симетрія ґратки, та симетричне поширення дифрагованих пучків дають можливість скоротити час розрахунку

дифракції без втрати точності шляхом переформатування відповідної системи диференціальних рівнянь на дві системи рівнянь, кожна з яких має значно меншу розмірність в порівнянні з вихідною системою.

В даній роботі для моделювання ефекту Тальбота МЗХ були використані симетричні властивості дифракції, що б мати можливість за оптимальний час розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь максимальної розмірності, тобто врахувати максимальну кількість дифрагованих порядків.

З другої сторони, в даній роботі на основі використання методу координатно-частотного розподілу сигналів [39] описана теорія формування зображень періодичних оптичних елементів на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда. Дано теоретичне обґрунтування інваріантних умов формування самозображень періодичних елементів в області дифракції. Отримані формули для розрахунку самозображень ДФП періодичних фазових елементів при різних значеннях інваріантних параметрів. Головна мета досліджень полягала в співставленні результатів розрахунку самозображень класичної амплітудної ґратки на основі векторної та скалярної теорій дифракції.

2. Теорія

2.1. Метод зв'язаних хвиль

Коротко опишемо МЗХ і наведемо відповідні системи диференціальних рівнянь для дифракції хвиль ТЕ і ТМ поляризацій, в основному ґрунтуючись на роботах [12, 31, 32], в яких детально описано процес отримання цих рівнянь. Спочатку розглянемо випадок ТЕ поляризації. Рівняння мають такий вигляд:

$$\frac{dG_n(z)}{dz} = -ik_0 F_n(z), \quad (2.1)$$

$$\frac{dF_n(z)}{dz} = i \frac{k_{nx}^2}{k_0} F_n(z) - ik_0 \sum_p \|\varepsilon\|_{np} G_p(z), \quad (2.2)$$

де $G_n(z)$ – напруженість електричного поля зв'язаної хвилі з індексом n , $F_n(z)$ – напруженість тангенціальної складової магнітного поля зв'язаної хвилі з індексом n , $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, k_{nx} – проекція хвильового вектора зв'язаної хвилі з індексом n на вісь x , $\|\varepsilon\|_{np}$ – матриця Теплиця, яка складена з коефіцієнтів ε_n розкладу діелектричної сталі в ряд Фур'є.

Хвильовий вектор k_{nx} зв'язаний з хвильовим вектором k_{0x} наступним виразом:

$$k_{nx} = k_{0x} - n \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad (2.3)$$

де Λ – період ґратки, $k_{0x} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_1}}{\lambda} \sin \theta_{10}$, θ_{10} – кут падіння плоскої хвилі на ґратку в першому середовищі.

Системи рівнянь (2.1) і (2.2) можна звести до системи рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2 G_n(z)}{dz^2} = k_{nx}^2 G_n(z) - k_0^2 \sum_p \|\varepsilon\|_{np} G_p(z). \quad (2.4)$$

Доповнюючи систему диференціальних рівнянь (2.4) додатковою системою рівнянь, що впливає з рівності тангенціальних складових напруженостей електричного і магнітного полів на границях ($z = 0$ і $z = d$) періодичного і однорідних середовищ, ми можемо однозначно розрахувати амплітуди хвиль в першому та третьому однорідних середовищах, відповідно R_n і T_n . Алгебраїчна система рівнянь, що впливає з умов на границях, має такий вид:

$$\begin{cases} R_n - G_n(0) = -V_n, \\ C_{1n} R_n - F_n(0) = C_{1n} V_n, \\ T_n - G_n(d) = 0, \\ C_{3n} T_n - F_n(d) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

де $V_n = \delta_{rn}$, тобто символу Кронекера, C_{1n} і C_{3n} – елементи діагональних матриць, і які відповідно рівні: $C_{1n} = \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_{1n}$, $C_{3n} = \sqrt{\varepsilon} \cos \theta_{3n}$. Чисельно розв'язати систему диференціальних рівнянь (2.4) разом з крайовими умовами (2.5) можна модифікованим стійким S – алгоритмом [14, 31].

Рівняння МЗХ для ТМ поляризації мають такий вид [12, 31]:

$$\frac{dG_n(z)}{dz} = -ik_0 F_n(z) + i \frac{k_{nx}}{k_0} \sum_p \|\varepsilon\|_{np}^{-1} k_{px} F_p(z), \quad (2.6)$$

$$\frac{dF_n(z)}{dz} = -ik_0 \sum_p \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\|_{np} G_p(z). \quad (2.7)$$

Системи рівнянь (2.6) і (2.7) можна звести до системи рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2 F_n(z)}{dz^2} = \sum_m \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\|_{nm}^{-1} \sum_p (k_{mx} \|\varepsilon\|_{np} k_{px} - k_0^2 \delta_{mp}) F_p(z). \quad (2.8)$$

Відповідно краєві умови у вигляді системи алгебраїчних рівнянь для дифракції хвиль ТМ поляризації запишемо так:

$$\begin{cases} \cos \theta_{1n} R_n - G_n(0) = \cos \theta_{1n} \delta_{rn}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} R_n - F_n(0) = -\sqrt{\varepsilon_1} \delta_{rn}, \\ \cos \theta_{3n} T_n - G_n(d) = 0, \\ \sqrt{\varepsilon_3} T_n - F_n(d) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Системи диференціальних рівнянь (2.4) можна записати у матричній формі, які матимуть для хвиль ТЕ поляризації такий вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{G}(z)}{dz^2} = \mathbf{B}_e \mathbf{G}(z), \quad (2.10)$$

а для ТМ поляризації відповідні рівняння (2.8) запишемо так:

$$\frac{d^2 \mathbf{F}(z)}{dz^2} = \mathbf{B}_m \mathbf{F}(z). \quad (2.11)$$

2.2. Симетризація МЗХ та зменшення розмірності системи диференціальних рівнянь

В загальному випадку системи рівнянь (2.4) і (2.8) є нескінченно вимірними, але для практичних розрахунків обмежуються врахуванням скінченного числа дифракційних порядків, виходячи з необхідної точності аналізу. Здебільшого при комп'ютерних розрахунках враховують не більше 100 порядків дифракції [10–13], якщо період ґратки сумірний з довжиною хвилі. В той же час моделювання ефекту Тальбота краще реалізується при великих відношеннях періоду ґратки та довжини хвилі. Наприклад, при $\Lambda = 100, 5\lambda$ для отримання задовільної точності достатньо врахувати 301 порядки [33]. Збільшення розмірності системи диференціальних рівнянь в два рази приводить до збільшення часу розрахунку приблизно у 8 разів. Отже, слід очікувати, що зменшуючи розмірність системи приблизно в два рази, використовуючи симетричність систем диференціальних рівнянь, можна суттєво зменшити час розрахунку.

Розглянемо матриці \mathbf{B}_e і \mathbf{B}_m при таких двох умовах:

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon_{-n}, \\ k_{0x} = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon_{-n}, \\ k_{0x} = \frac{\pi}{\Lambda}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Умова (2.12) виконується при падінні пучка на ґратку по нормалі або під брегівським кутом парного порядку. В цьому випадку при розрахунках бажано враховувати $2N+1$ дифракційних порядків. Той дифракційний порядок, який поширюється по нормалі до ґратки, буде нульовим порядком і має амплітуду G_0 (F_0). Відповідно перша і остання компоненти векторів $\mathbf{G}(z)$ і $\mathbf{F}(z)$ будуть мати позначення: G_{-N} , G_N і F_{-N} , F_N .

Умова (2.13) виконується при падінні пучка на ґратку під першим або вищим брегівським кутом непарного порядку. В цьому випадку при розрахунках доцільно враховувати $2N$ дифракційних порядків. Той дифракційний порядок, для якого $k_{0x} = \frac{\pi}{\Lambda}$, буде нульовим порядком і має амплітуду G_0 (F_0). Відповідно перша і остання компоненти векторів $\mathbf{G}(z)$ і $\mathbf{F}(z)$ будуть мати позначення: G_{-N+1} , G_N і F_{-N+1} , F_N .

При такому впорядкуванні векторів $\mathbf{G}(z)$ і $\mathbf{F}(z)$ елементи $b_{i,j}$ матриць \mathbf{B}_e і \mathbf{B}_m задовільняють таким умовам симетрії:

$$\begin{cases} b_{i,j} = b_{2N+2-i,2N+2-j}, \text{ якщо } k_{0x} = 0, \\ b_{i,j} = b_{2N+1-i,2N+1-j}, \text{ якщо } k_{0x} = \frac{\pi}{\Lambda}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Крім умови (2.14) елементи $b_{i,j}$ матриці \mathbf{B}_e задовільняють ще такий додатковій умові: $b_{i,j} = b_{j,i}$.

Спочатку, використовуючи властивості симетричності (2.14), перейдемо від системи рівнянь (2.4) до рівнозначних двох систем диференціальних рівнянь, але вдвічі меншого порядку (аналогічно для системи (2.8)). Для утворення першої системи рівнянь додамо перше і останнє рівняння системи (2.4), друге і передостаннє і так далі. В результуючих рівняннях, кількість яких N , погрупуємо члени і виділимо суми, які позначимо таким чином:

$$\begin{aligned} G_{-N+1} + G_N &= G_N^+ \\ G_{-N+2} + G_{N-1} &= G_{N-1}^+ \\ &\dots = \dots \\ G_0 + G_1 &= G_1^+ \end{aligned}$$

В результаті отримаємо лінійну систему диференціальних рівнянь розмірності N відносно нових змінних, причому матричні елементи $b_{i,j}^+$ матриці \mathbf{B}_e^+ зв'язані з елементами $b_{i,j}$ матриці \mathbf{B}_e таки чином:

$$b_{i,j}^+ = b_{N+i,N+j} + b_{N-i+1,N+j} \quad (2.15)$$

Для утворення другої системи рівнянь від першого віднімемо останнє рівняння системи (2.4), потім таку саму операцію проведемо з

другим і передостаннім і так далі. В результируючих рівняннях, кількість яких N , погрупуємо члени і виділимо різниці, які позначимо таким чином:

$$\begin{aligned} G_{-N+1} - G_N &= G_N^- \\ G_{-N+2} - G_{N-1} &= G_{N-1}^- \\ &\dots = \dots \\ G_0 - G_1 &= G_1^- \end{aligned}$$

В результаті отримаємо лінійну систему диференціальних рівнянь розмірності N відносно нових змінних, причому матричні елементи $b_{i,j}^-$ матриці \mathbf{B}_e^- зв'язані з елементами $b_{i,j}$ матриці \mathbf{B}_e таким чином:

$$b_{i,j}^- = b_{N+i,N+j} - b_{N-i+1,N+j} \quad (2.16)$$

Краєві умови для нових систем рівнянь формуються на основі алгебраїчних систем (2.5) для ТЕ поляризації і (2.9) для ТМ поляризації шляхом додавання і віднімання відповідних рівнянь.

Якщо пучок на ґратку падає по нормалі, або виконуються брегівські умови парного порядку і система (2.4) має $2N + 1$ рівнянь, то ми поступаємо аналогічним чином, як при виконанні брегівських умови непарного порядку. Але в цьому випадку нульовий порядок дифракції немає пари. Як наслідок отримаємо таку заміну змінних:

$$\begin{aligned} G_{-N} + G_N &= G_{N+1}^+ \\ G_{-N+1} + G_{N-1} &= G_N^+ \\ &\dots = \dots \\ G_1 + G_{-1} &= G_2^+ \\ G_0 &= G_1^+ \end{aligned}$$

Отже, при додаванні отримаємо лінійну систему диференціальних відносно нових змінних розмірності $N + 1$, причому матричні елементи $b_{i,j}^+$ матриці \mathbf{B}_e^+ зв'язані з елементами $b_{i,j}$ матриці \mathbf{B}_e таким чином:

$$\begin{aligned} b_{i,j}^+ &= \frac{b_{N+1,2N+2-j}}{2} + \frac{b_{N+1,2N+2-j}}{2}, \quad \text{якщо } i = 1, \\ b_{i,j}^+ &= b_{N+2-i,N+2-j} + b_{N+2-i,N+j}, \quad \text{в інших випадках.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для отримання додаткової системи диференціальних рівнянь відносно різниці змінних, віднімаємо відповідні рівняння системи

(2.4). Отримаємо таку заміну змінних:

$$\begin{aligned} G_{-N} - G_N &= G_N^- \\ G_{-N+1} - G_{N-1} &= G_{N-1}^- \\ &\dots = \dots \\ G_{-1} - G_1 &= G_1^- \end{aligned}$$

В цьому випадку матричні елементи $b_{i,j}^-$ матриці \mathbf{B}_e^- зв'язані з елементами $b_{i,j}$ матриці \mathbf{B}_e таким чином:

$$\begin{aligned} b_{i,j}^- &= \frac{b_{N+1,2N+2-j}}{2} - \frac{b_{N+1,2N+2-j}}{2} = 0, \quad \text{якщо } i = 1, \\ b_{i,j}^- &= b_{N+2-i,N+2-j} - b_{N+2-i,N+j}, \quad \text{в інших випадках.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

З (2.18) випливає, що елементи першого рядка і першого стовпця матриці \mathbf{B}_e^- рівні нулю. Звідси можна зробити висновок, що додаткова система диференціальних рівнянь має в своєму складі N рівнянь. Тут маємо два важливі випадки. Якщо пучок падає по нормалі до ґратки, то достатньо розв'язувати першу систему рівнянь розмірності $N + 1$, оскільки в крайових умовах додаткової системи рівнянь розмірності N права частина рівна нулю. Це означає, що $G_{-n}(z) = G_n(z)$. У другому випадку, коли виконуються брегівські умови парного порядку, потрібно шукати розв'язки обох систем рівнянь.

2.3. Чисельний аналіз МЗХ при наявності симетрії в дифракції

Спочатку розглянемо випадок нормального падіння електромагнітної хвилі з $\lambda = 1.5\text{мкм}$ на діелектричну ґратку, яка розміщена на підкладці із срібла ($\varepsilon_3 = -121 - i6.6$). Згідно роботи [24] в такій системі може відбуватися повне поглинання енергії хвилі при таких параметрах [31]: $F = 0.5$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{22} = 10$, причому період і товщина ґратки складала для хвиль ТЕ поляризації: $d = 0.372164\text{мкм}$, $\Lambda = 1.17109\text{мкм}$, а для ТМ поляризації: $d = 0.538\text{мкм}$, $\Lambda = 1.374\text{мкм}$. При таких параметрах коефіцієнт відбивання від ґратки був менший ніж 10^{-4} , якщо $2N + 1 = 53$. При розрахунку виявилось, що множина власних чисел матриці \mathbf{B}_e співпадає з сумою множин власних чисел матриць \mathbf{B}_e^+ і \mathbf{B}_e^- . Це твердження справедливе для обох поляризацій. Оскільки ґратка діелектрична, то всі власні числа дійсні. В таблиці 1 приведені власні значення матриці \mathbf{B}_e (ліва колонка) та власні значення матриць \mathbf{B}_e^+ (перших п'ять чисел правої колонки)

і \mathbf{B}_e^- (останні чотири числа правої колонки) для $2N + 1 = 9$. На всіх наступних рисунках даної роботи результати, які розраховані традиційним методом, відображені квадратами, а які отримані з врахуванням симетрії, відображені малими кільцями.

Табл. 1. Власні значення, нормальне падіння

Власні значення матриці \mathbf{B}_e	Власні значення матриць \mathbf{B}_e^+ і \mathbf{B}_e^-
380.912460259574	-157.702586528506
373.469257345380	177.807848090498
161.149887718856	-35.6974506147848
177.807848090498	373.469257345380
-157.702586528506	23.1847045393712
-106.482433821119	161.149887718856
41.9846572630759	380.912460259574
-35.6974506147848	-106.482433821119
23.1847045393712	41.9846572630759

На рис.2 наведено залежності коефіцієнта відбивання в залежності від кількості врахованих порядків. По осі ординат відкладено корінь четвертого степеня від коефіцієнта відбивання, тому горизонтальна лінія на рис.2 відповідає коефіцієнту відбивання 10^{-4} . Коефіцієнти відбивання, які розраховані двома методами для тої самої кількості дифракційних порядків повністю співпадають. Цей висновок також справедливий для інших видів симетрії, а також для ТМ поляризації. З графіка також видно, що коефіцієнт відбивання суттєво не міняється (10^{-4}) при зміні кількості дифракційних порядків від 39 до 101.

На рис.3 показані аналогічні криві для ТМ поляризації. Бачимо, що в межах широких змін кількості дифракційних порядків коефіцієнт відбивання менший (10^{-4}).

На рис. 4 і 5, відповідно для хвиль ТЕ і ТМ поляризацій, наведені залежності часу t_c комп'ютерного розрахунку від кількості врахованих дифракційних порядків. З графіків видно, що для переформатованих систем диференціальних рівнянь час розрахунку зменшується приблизно у 8 – 10 разів. Програми для аналізу дифракції зроблені в програмному середовищі MAPLE6. Розрахунок проводився на комп'ютері з тактовою частотою 1.8ГГц. Якщо програму зробити на FORTRAN чи DELPHI, то час розрахунку суттєво зменшиться (як показує досвід на два порядки). Але якщо потрібно розрахувати залежність відбивання від довжини хвилі чи товщини ґратки,

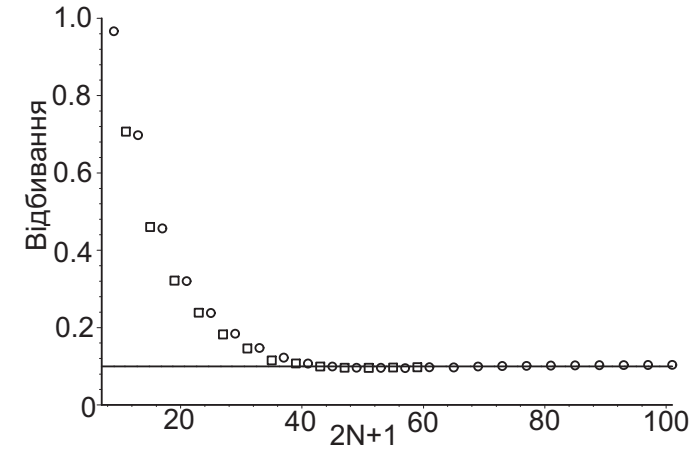


Рис. 2. Відбивання від симетричної ґратки для хвиль ТЕ поляризації в залежності від кількості врахованих порядків при нормальному падінні (Відбивання ТЕ, нормальне).

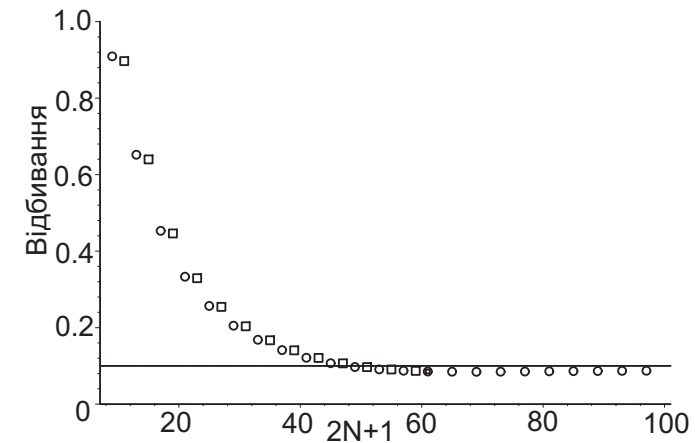


Рис. 3. Відбивання від симетричної ґратки для хвиль ТМ поляризації в залежності від кількості врахованих порядків при нормальному падінні (Відбивання ТМ, нормальне).

або розрахувати поля всередині ґратки [34] і, відповідно, потік енергії [35], то необхідно затратити значний час. Тому переформатування приведе навіть у цьому випадку до суттєвого скорочення часу.

У випадку симетрії іншого виду (на ґратку падає плоска хвиля під берегівським кутом непарного порядку), то доцільно взяти при розрахунках $2N$ дифракційних порядки, які будуть поширюватися в 1-му і 3-му середовищі симетрично відносно нормалі до ґратки. Для аналізу нами розглянута ґратка, яка описана в [11] і [36], і для якої розраховані точні значення дифракційної ефективності. Така ґратка має наступні параметри: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{22} = (0.22 - i6.71)^2$, $\varepsilon_3 = (0.22 - i6.71)^2$, $d = 1\text{мкм}$, $\lambda = 1\text{мкм}$, $\Lambda = 1\text{мкм}$, $F = 0.5$ [11, 36]. Кут між падаючим пучком ТЕ поляризації і нормаллю до ґратки складає 30 кутових градусів. Оскільки ґратка виготовлена з металу (золото), то всі власні числа комплексні. В таблиці 2 приведені власні значення матриці \mathbf{B}_e (ліва колонка) та власні значення матриць \mathbf{B}_e^+ (перших п'ять чисел правої колонки) і \mathbf{B}_e^- (останні п'ять чисел правої колонки) для $2N = 10$.

Табл. 2. Власні значення, 1-ший кут Брегга

Власні значення матриці \mathbf{B}_e	Власні значення матриць \mathbf{B}_e^+ і \mathbf{B}_e^-
$-5.257400315 + i.2393658762$	$96.17406363 + i1.038017728$
$96.17406363 + i1.038017728$	$507.9148831 + i5.609551450$
$271.4283459 + i2.432451957$	$2227.093719 + i109.1278881$
$507.9148831 + i5.609551450$	$1755.501441 + i101.2753344$
$1022.947227 + i32.06923808$	$1864.401705 + i105.3157594$
$2283.005949 + i111.2108047$	$2283.005949 + i111.2108047$
$2227.093719 + i109.1278881$	$1914.214761 + i114.4619888$
$1755.501441 + i101.2753344$	$1022.947227 + i32.06923808$
$1864.401705 + i105.3157594$	$-5.257400315 + i.2393658762$
$1914.214761 + i114.4619888$	$271.4283459 + i2.432451957$

Для цієї ґратки при виконанні симетричних умов була розрахована дифракційна ефективність нульового і першого порядків дифракції, що поширюються в першому середовищі в залежності від кількості врахованих дифракційних порядків для хвиль ТЕ і ТМ поляризацій. Ці залежності відображені, відповідно на рис. 6 і 7. Горизонтальні лінії на рис.6 і 7 відповідають точним значенням дифракційної ефективності, які взяті з [11] і [36]. Бачимо, що хід кривих відповідає рис.2 і рис.3 роботи [36]. З рис. 6 і 7 також випливає, що використання умов симетричності дає той самий результат розра-

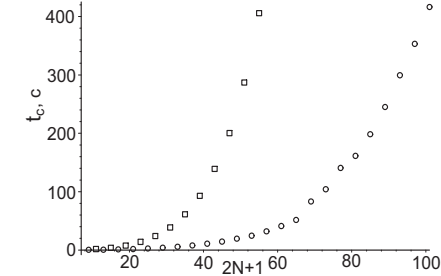


Рис. 4. Час розрахунку, ТЕ, нормальне

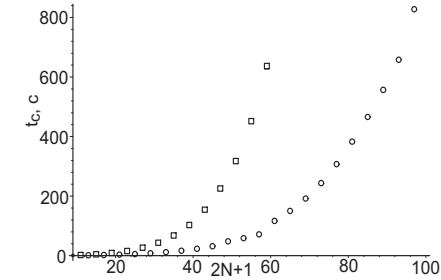


Рис. 5. Час розрахунку, ТМ, нормальне

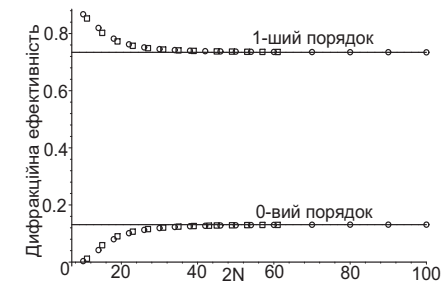


Рис. 6. Ефективність, ТЕ, 1-ший кут Брегга

хунку, що і при розрахунку традиційним методом.

Оскільки час розрахунку пропорційний N^3 [14], то слід очікувати, що переформатування систем диференціальних рівнянь симетричності другого виду також приведе до скорочення комп'ютерного часу t_c розрахунку приблизно в чотири рази. Насправді вигравш в часі є навіть більшим для хвиль ТЕ поляризації. Це підтверджують графіки, які відображені на рис. 8 і 9, відповідно для хвиль ТЕ і ТМ поляризації.

3. Моделювання ефекту Тальбота МЗХ

Одним з вражаючих ефектів дифракції монохроматичного світла на ґратках з великим періодом ($\Lambda \gg \lambda$) являється ефект Тальбота, який проявляється в відтворенні ґратки дифрагованими пучками у вільному просторі на певній віддалі L від ґратки. Моделювання ефекту Тальбота МЗХ здійснювалось на ґратці, яка представлена на рис.10.

Якщо ґратка з періодом Λ освітлюється по нормалі плоским хвильовим фронтом з довжиною хвилі λ , то віддаль L від ґратки, на якій формується її зображення, можна знайти з таких простих співвідношень.

$$\frac{2\pi L}{\lambda} - \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2} L = 2\pi \quad (3.1)$$

На основі останнього виразу (3.1) визначимо L у відповідності до формули

$$L = \frac{\Lambda^2(1 + \sqrt{1 - (\lambda/\Lambda)^2})}{\lambda} \simeq 2\frac{\Lambda^2}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2\Lambda}\right)^2\right] \quad (3.2)$$

Напруженість електричного поля за ґраткою, яка визначається всіма дифрагованими порядками згідно (2.3) та (2.5) можна записати таким чином

$$E(x, z) = \sum_{n=1}^N G_n(d) \cos(2\pi nx/\Lambda) \exp\left(-i\sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (2\pi n/\Lambda)^2}z\right) \quad (3.3)$$

Напруженість тангенціальної складової магнітного поля (в даному випадку ми розглядаємо дифракцію хвиль ТЕ поляризації) електромагнітної хвилі виразимо подібним чином

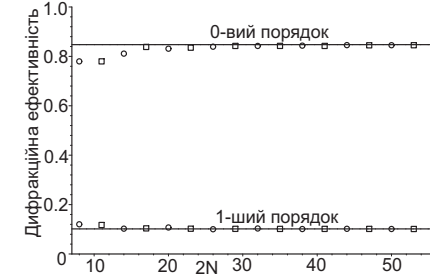


Рис. 7. Ефективність, ТМ, 1-ший кут Брегга

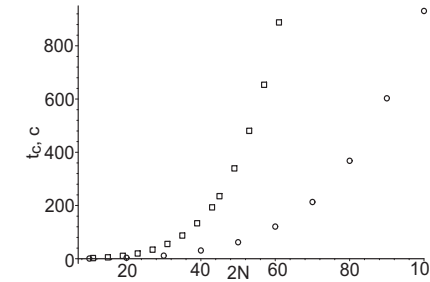


Рис. 8. Час розрахунку, ТЕ, 1-ший кут Брегга

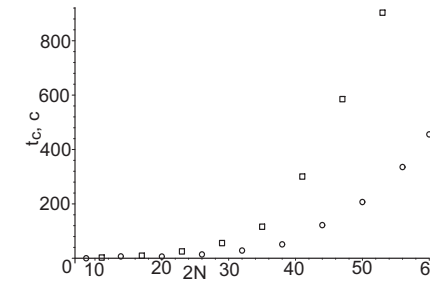


Рис. 9. Час розрахунку, ТМ, 1-ший кут Брегга

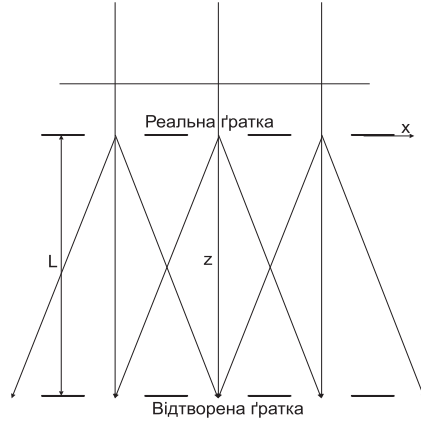


Рис. 10. Ефект Тальбота

$$H(x, z) = \sum_{n=1}^N F_n(d) \cos(2\pi n x / \Lambda) \exp\left(-i\sqrt{(2\pi/\lambda)^2 - (2\pi n/\Lambda)^2} z\right) \quad (3.4)$$

На основі виразів (3.3) і (3.4) можна розрахувати проекцію вектора Пойтінга на вісь z у відповідності до такої формули

$$\langle S_z \rangle = \Re[E(x, z)\bar{H}(x, z)] \quad (3.5)$$

Ефект Тальбота найпростіше спостерігати для амплітудних ґраток з великим періодом, що мають пропускання на періоді 0 або 1. Для таких ґраток дифракційна ефективність швидко спадає з ростом номера порядку і найбільшу дифракційну ефективність мають 0-ий і ± 1 порядки.

4. Опис ефекту Тальбота на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда.

4.1. Спектр плоских хвиль.

В рамках скалярної теорії дифракції формування комплексної амплітуди дифрагованого поля на апертурі скінченних розмірів описує-

ться інтегральною формулою Релея-Зоммерфельда [37]

$$g(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x', y', 0) \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{z}{r} \left(ik - \frac{1}{r}\right) dx' dy' \quad (4.1)$$

де $g(x', y', 0)$ - комплексна амплітуда поля в площині апертури, $k = 2\pi/\lambda$ - хвильове число, $r = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}$ - відстань між двома довільними точками в площині апертури $A(x', y', 0)$ та в просторі поширення дифрагованої хвилі $B(x, y, z)$.

Формування дифрагованої амплітуди (4.1) запишемо у вигляді перетворення подвійної згортки (\otimes - оператор згортки)

$$g(x, y, z) = g(x, y, 0) \otimes \otimes \phi(x, y, z), \quad (4.2)$$

ядром якого служить функція

$$\phi(x, y, z) = \phi(R) = \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{z}{R} \left(ik - \frac{1}{R}\right). \quad (4.3)$$

В роботі [38] показано, що інтегральну формулу (4.1) можна представити у вигляді кутового спектру плоских хвиль. Спочатку запишемо спектр комплексної амплітуди $g(x, y, 0)$

$$G(\xi, \eta, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y, 0) \exp(-ik[\xi x + \eta y]) dx dy. \quad (4.4)$$

Використаємо інтегральну формулу Вейля [38]

$$\frac{\exp(-ikr)}{r} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik[\xi(x - x') + \eta(y - y') + mz]) \frac{d\xi d\eta}{m}, \quad (4.5)$$

де

$$m = \begin{cases} \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} & \text{коли } \xi^2 + \eta^2 \leq 1; \\ i\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1} & \text{коли } \xi^2 + \eta^2 > 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Якщо взяти частинну похідну по z від лівої і правої частин формули (4.5) і записати ядро (4.3) у вигляді частинної похідної

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{z}{r} \left(ik - \frac{1}{r}\right), \quad (4.7)$$

то отримуємо

$$\phi(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik[\xi x + \eta y + mz]) d\xi d\eta. \quad (4.8)$$

Тепер, використовуючи теорему згортки, спектр дифрагованої хвилі набуває простого вигляду [37]

$$G(\xi, \eta, z) = G(\xi, \eta, 0) \exp(ikz\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}). \quad (4.9)$$

4.2. Опис зображення ґратки на основі методу розподілу сигналів.

Опишемо формування зображення амплітудної ґратки, яку запишемо у вигляді згортки:

$$f(x) = f_0(x) \otimes \text{comb}(x) = \text{rect}(x/T) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT), \quad (4.10)$$

де $f_0(x)$ - функція амплітудного пропускання елементарної комірки у формі прямокутного імпульсу $\text{rect}(x/T)$, T - період, $\text{comb}(x)$ - генеруюча функція ґратки у формі "гребінки Дірака" [40].

На основі використання методу розподілу сигналів [39] рівняння згортки (4.2) і еквівалентне йому рівняння фільтрації (4.9) записується аналогічним операторним рівнянням згортки розподілів

$$\mathcal{A}_{gg^*}(x_0; k\xi_0) = \mathcal{A}_{ff^*}(x_0; k\xi_0) \otimes_{x_0} \mathcal{A}_{\phi\phi^*}(x_0; k\xi_0). \quad (4.11)$$

Перевага методу в тому, що за розподілом (4.11) оператором оберненого Фур'є-перетворення повністю відновлюється розподіл інтенсивності $I(x; z)$ дифрагованого світла в площині z

$$\begin{aligned} I(x; z) &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{gg^*}(0; k\xi_0) \exp(ik\xi_0 x) d\xi_0 \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{ff^*}(t; k\xi_0) \mathcal{A}_{\phi\phi^*}(-t; k\xi_0) \exp(ik\xi_0 x) d\xi_0 dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

На основі (4.10) розподіл амплітудної ґратки має вигляд

$$\mathcal{A}_{ff^*}(t; k\xi_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(ik\xi_0 \frac{[n+m]T}{2}\right)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}_{f_0 f_0^*}(y; k\xi_0) \delta(t - y + [n - m]T) dy. \quad (4.13)$$

За означенням [39] розподіл елементарної комірки ґратки $f_0(x)$ в частотному представленні плоских хвиль $F_0(k\xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_0 f_0^*}(y; k\xi_0) &\equiv \mathcal{A}_{F_0 F_0^*}(k\xi_0; y) \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_0\left[k\left(\xi_1 + \frac{\xi_0}{2}\right)\right] F_0^*\left[k\left(\xi_1 - \frac{\xi_0}{2}\right)\right] \exp(iky\xi_1) d\xi_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Аналогічним чином на основі формул (4.5)-(4.8) можна представити розподіл ядра $\mathcal{A}_{\phi\phi^*}(-t; k\xi_0)$.

В результаті підстановки (4.13) і (4.14) в (4.12) отримуємо загальний розв'язок дифракційної задачі в формі розкладу в спектр плоских хвиль

$$I(x; z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_0(k\xi) \phi(k\xi; z) \exp(ik\xi x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inkT\xi) d\xi \right|^2. \quad (4.15)$$

Якщо використати теорему сумування Пуассона [41]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inkT\xi) = \frac{2\pi}{kT} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - n\xi_0), \quad (4.16)$$

то в формулі (4.15) знімається інтегрування по ξ . Таким чином, отримуємо дифракційне зображення амплітудної ґратки у вигляді сумування плоских хвиль.

Слід відмітити, що в формулі (4.15) фізичний зміст мають границі інтегрування $|\xi| \leq 1$. Відповідно до умови (4.6) в межах цієї границі формуються скінченний набір плоских дифракційних хвиль, які визначають дифракційний розподіл інтенсивності $I(x; z)$ зображення амплітудної ґратки.

Очевидно, що умови формування зображення амплітудної ґратки на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда (4.1) визначається двома інваріантними параметрами:

$$A = \frac{T}{\lambda}; \quad B = \frac{z}{\lambda}. \quad (4.17)$$

Інваріант A задає число $N_A \leq A$ граничної плоскої дифракційної хвилі, яка враховується в дифракційному розподілі інтенсивності зображення амплітудної ґратки, що раніше було показано в роботі [42].

Області $|\xi| > 1$ і, відповідно, $n > A$ відповідають поверхневій хвилі, які швидко поглинаються по мірі збільшення відстані z [37].

Зауважимо, що в френелівському наближенні дифракції два інваріантні параметри (4.17) вироджуються в один інваріантний параметр - число Френеля $F_0 = A^2/4B$.

Представимо розв'язок (4.15) у загальному виді:

$$I(x; B) = |\operatorname{Re}[g_1(x; B) + g_2(x; B)]|^2 + |\operatorname{Im}[g_1(x; B) + g_2(x; B)]|^2. \quad (4.18)$$

В результаті отримуємо наступні формули для розрахунку зображення дифракційної ґратки:

для дифракційних хвиль $g_1(x; B)$

$$\operatorname{Re}[g_1(x; B)] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N_A} \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \cos\left(2\pi B \left[\sqrt{1 - \frac{n^2}{A^2}} - 1\right]\right) \cos(n\pi x). \quad (4.19)$$

$$\operatorname{Im}[g_1(x; B)] = \sum_{n=1}^{N_A} \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \sin\left(2\pi B \left[\sqrt{1 - \frac{n^2}{A^2}} - 1\right]\right) \cos(n\pi x). \quad (4.20)$$

для поверхневих хвиль $g_2(x; B)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[g_2(x; B)] &= \cos(2\pi B) \sum_{n=N_A+1}^{N_{max}} \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \\ &\times \exp\left(-2\pi B \sqrt{\frac{n^2}{A^2} - 1}\right) \cos(n\pi x). \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[g_2(x; B)] &= \sin(2\pi B) \sum_{n=N_A+1}^{N_{max}} \frac{\sin(n\pi\eta)}{n\pi\eta} \\ &\times \exp\left(-2\pi B \sqrt{\frac{n^2}{A^2} - 1}\right) \cos(n\pi x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3. Умова формування самозображень ґратки при ефекті Тальбота.

Положення першої площини Тальбота Z_T визначається інваріантними параметрами (4.17), які задовільняють умові

$$B = 2A^2. \quad (4.23)$$

В цій площині відбувається відновлення самозображення амплітудної ґратки.

В дробовій площині Тальбота $Z_T/2$, для якої виконується умова

$$B = A^2, \quad (4.24)$$

також відбувається відновлення самозображення амплітудної ґратки, але зміщеної на півперіод.

Особливою є дробова площина Тальбота $Z_T/4$, для якої виконується умова

$$B = \frac{A^2}{2}, \quad (4.25)$$

коли повністю зникає самозображення ґратки. Аналогічна картина спостерігається в еквівалентній дробовій площині Тальбота $3Z_T/4$. Раніше в рамках скалярної теорії дифракції Френеля при виконанні умов (4.23)-(4.25) для самозображень ґратки було отримано точний аналітичний розв'язок [43].

5. Аналіз результатів чисельного розрахунку самозображень ґратки обома методами

Для моделювання ефекта Тальбота використана амплітудна ґратка, половина періоду якої має пропускання 1, а друга половина — 0. В МЗХ для реалізації такої ґратки використана плівка срібла товщиною 0,2 мкм, яка розміщена у вільному просторі з $\varepsilon = 1$. Аналіз розподілу поля за ґраткою проведений для таких періодів: $\Lambda = 10, 5\lambda; 33, 5\lambda; 50, 5\lambda; 75, 5\lambda; 100, 5\lambda$. Довжина хвилі $\lambda = 1$ мкм. При розрахунку використовувалось 301 дифракційні порядки. На основі виразу (3.5) проводився розрахунок проекції вектора Пойтінга на вісь z в залежності від координати x для таких z : $L; L/2; L/4$.

Для моделювання еквівалентних умов реалізації ефекта Тальбота на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда вибрані значення інваріантного параметра A : 10, 5; 33, 5; 50, 5; 75, 5; 100, 5. Відповідно до умов (4.23)-(4.25) для трьох характерних дробових площин Тальбота розраховувалося значення інваріантного параметра B .

При заданих значеннях параметрів A і B за формулами (4.19)-(4.22) проведені розрахунки дифракційних зображень ґратки, які представлені на рис. 11-15. Розрахунки проводилися при значенні $N_{max} = 500$, тобто враховувався 501 дифракційний порядок.

Спочатку проаналізуємо випадок $A = 10, 5$ на рис. 11. В площині Тальбота Z_T в області $x = -0, 5 \div 0, 5$, яка відповідає прозорій комірці ґратки, формують два інтенсивні локальні максимуми,

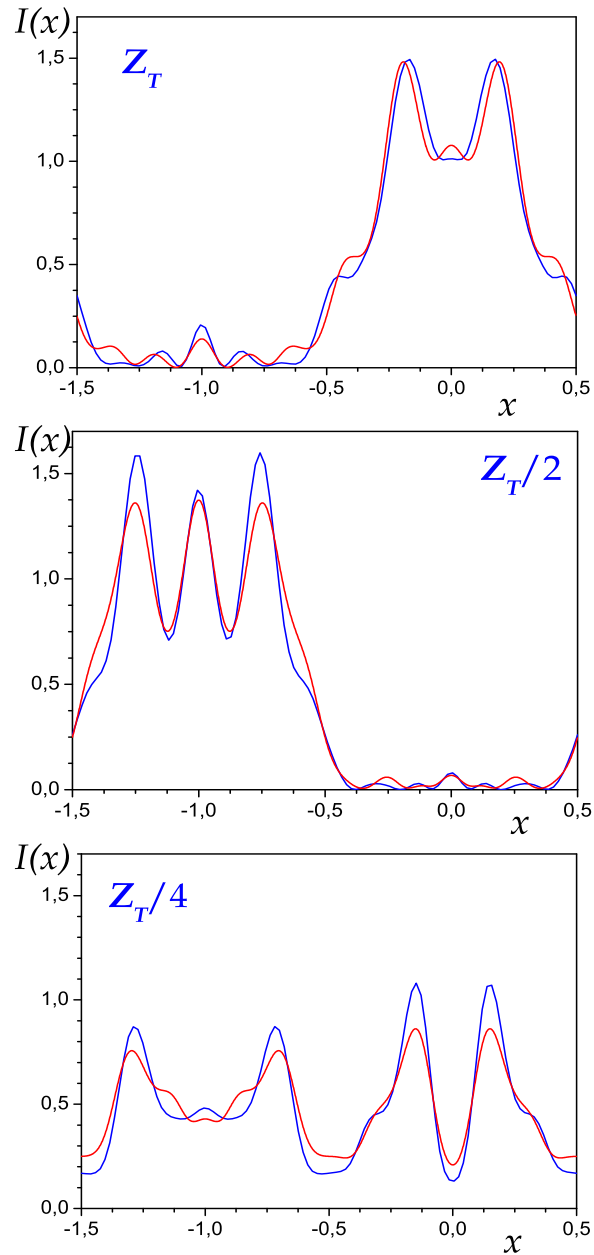


Рис. 11. Самозображення амплітудної ґратки $T = 10,5\lambda$ в трьох дробових площинах Тальбота: синя лінія - метод зв'язаних хвиль; червона лінія - інтегральна формула Релея-Зоммерфельда

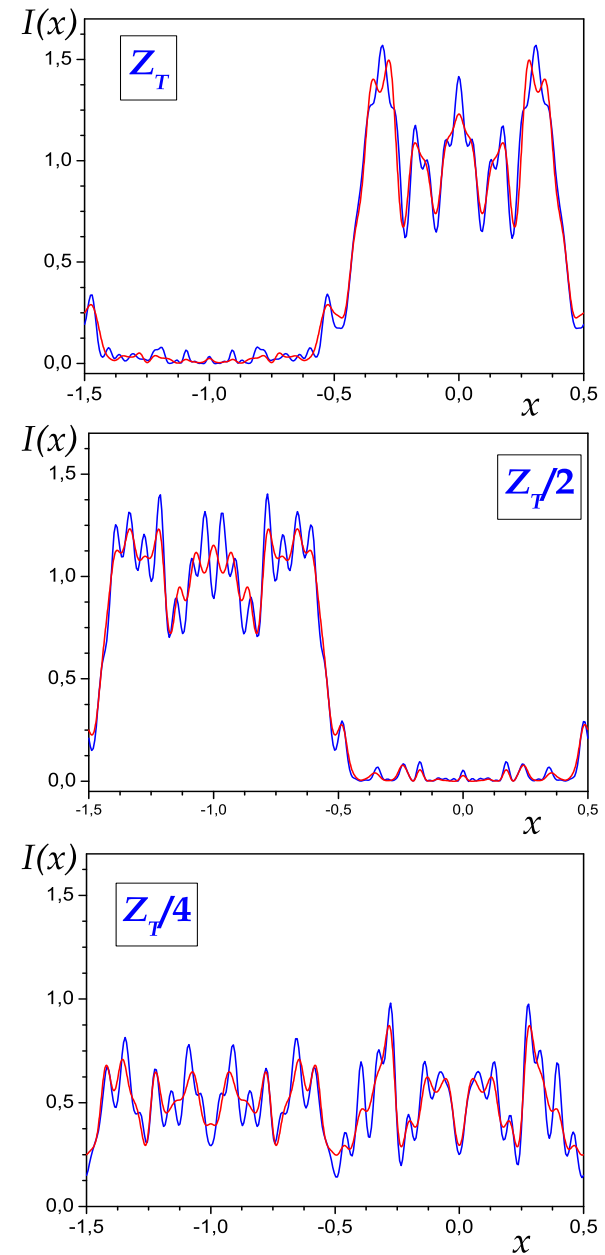


Рис. 12. Самозображення амплітудної ґратки $T = 33,5\lambda$ в трьох дробових площинах Тальбота: синя лінія - метод зв'язаних хвиль; червона лінія - інтегральна формула Релея-Зоммерфельда

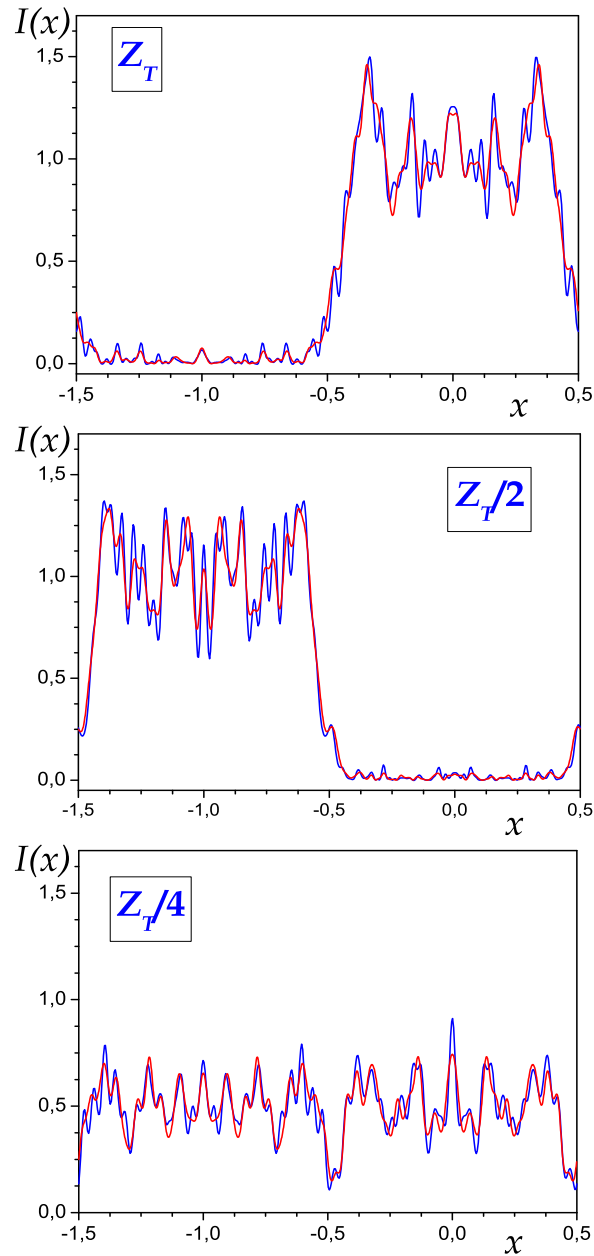


Рис. 13. Самозображення амплітудної ґратки $T = 50,5\lambda$ в трьох дробових площинах Тальбота: синя лінія - метод зв'язаних хвиль; червона лінія - інтегральна формула Релея-Зоммерфельда

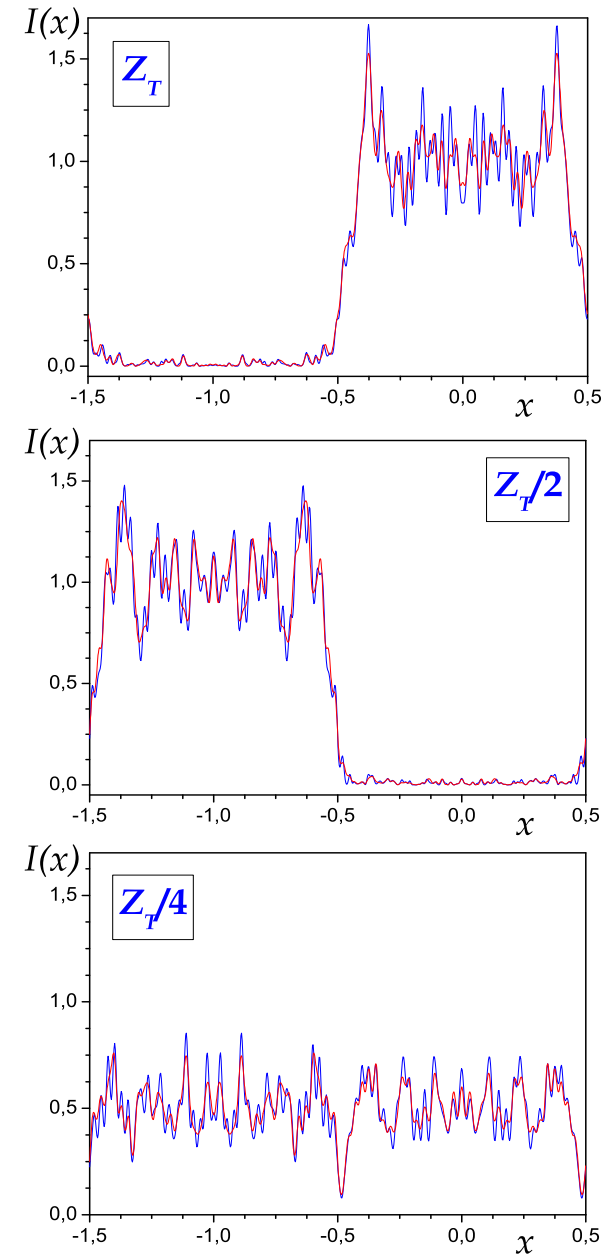


Рис. 14. Самозображення амплітудної ґратки $T = 75,5\lambda$ в трьох дробових площинах Тальбота: синя лінія - метод зв'язаних хвиль; червона лінія - інтегральна формула Релея-Зоммерфельда

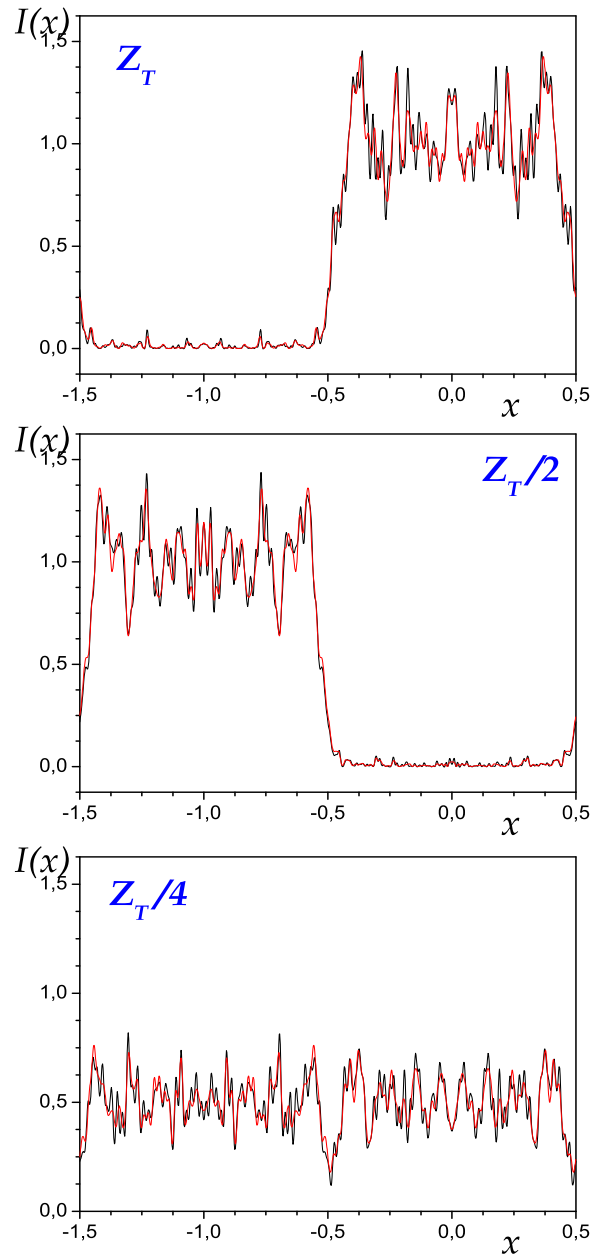


Рис. 15. Самозображення амплітудної ґратки $T = 100,5\lambda$ в трьох дробових площинах Тальбота: синя лінія - метод зв'язаних хвиль; червона лінія - інтегральна формула Релея-Зоммерфельда

положення яких за двома моделями дифракції практично співпадають. В області непрозорої комірки ґратки ($x = -1,5 \div -0,5$) теж за двома теоріями формується група локальних максимумів, інтенсивність яких є відносно малою. Це говорить про те, що на відстані $z = 220,5\lambda$ починає спостерігатися відновлення дифракційного зображення ґратки. Навпаки, в дробовій площині Тальбота $Z_T/2$ отримуємо за двома моделями дифракції в області непрозорої комірки ґратки ($x = -1,5 \div -0,5$) три інтенсивні дифракційні максимуми, що підтверджує зміщення дифракційного самозображення ґратки на півперіод. Як і слід очікувати, в дробовій площині Тальбота $Z_T/4$ в межах періоду дифракційного зображення формуються локальні рівноінтенсивні максимуми, які підтверджують ефект зникнення зображення ґратки.

По мірі збільшення значення інваріантного параметра A закономірність формування самозображень ґратки, характерна для ефекта Тальбота, повністю повторюється. Проте, пропорційно величині параметра A зростає кількість локальних максимумів, положення яких за двома теоріями дифракції відтворюється з достатньо великою точністю. Це є підтвердженням того, що при збільшенні періоду T ґратки відносно λ відбувається перехід до повного відновлення самозображення ґратки.

В рамках скалярної теорії для випадку на рис. 11 маємо 10 дифрагованих хвиль, а наступним дифракційним порядкам відповідають поглинаючі поверхневі хвилі, інтенсивність яких є малою, і тому дифракційне самозображення ґратки в трьох характерних дробових площинах Тальбота є розмитим.

Тоді як для випадку на рис. 15 формування самозображення ґратки відбувається в результаті суперпозиції вже 100 дифрагованих хвиль. В результаті в площині Тальбота Z_T в області $x = -0,5 \div 0,5$ формується ціла серія локальних дифракційних максимумів і мінімумів, інтенсивності яких коливаються в околі 1. Таким чином при $A = 100,5$ спостерігається більш точне відновлення самозображення ґратки. Аналогічна картина спостерігається в дробових площинах Тальбота $Z_T/2$ і $Z_T/4$.

Отримані числові результати розрахунків показують, що векторна і скалярна теорії дифракції дають практично ідентичні розподіли локальних максимумів та мінімумів інтенсивності самозображення ґратки в площині характерних дробових площинах Тальбота. Це дозволяє стверджувати, що на ґратках, період яких в межах 10-100 λ , можна чітко експериментально спостерігати ефект Тальбота.

6. Висновки

Якщо діелектрична стала планарної ґратки описується симетричною періодичною функцією і дифракційні порядки володіють просторовою симетрією відносно нормалі до ґратки, то відповідна лінійна система диференціальних рівнянь також має певну симетрію, що відображається в попарній рівності коефіцієнтів при змінних. Такі системи диференціальних рівнянь можна переформатувати на дві системи рівнянь меншої розмірності. Якщо один з дифрагованих порядків поширюється по нормалі до ґратки (виконуються умови Брега парного порядку), то переформатування приводить від системи рівнянь розмірності $2N + 1$ до двох разом рівнозначних систем розмірності $N + 1$ і N . Якщо плоска хвиля падає на ґратку під прямим кутом, то вихідна система диференціальних рівнянь розмірності $2N + 1$ еквівалентна трансформованій системі рівнянь розмірності $N + 1$. Якщо два просторово сусідні дифракційні порядки поширюються симетрично відносно нормалі (виконуються умови Брега не парного порядку), то переформатування приводить від системи рівнянь розмірності $2N$ до двох разом рівнозначних систем розмірності N . Множина коренів характеристичного рівняння вихідної системи рівнянь рівна сумі двох множин коренів характеристичних рівнянь відповідних переформатованих систем. Переформатування систем дає можливість врахувати більше дифракційних порядків, що покращує точність аналізу і зменшує в 5 – 10 разів час розрахунку без втрати точності. В роботі отримано зв'язок між коефіцієнтами вихідної системи рівнянь та трансформованих систем рівнянь.

В рамках скалярної теорії дифракції на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда отримані аналітичні розв'язки для розрахунку самозображень амплітудної ґратки в довільних дробових площинах Тальбота. Показано, що дифракційні умови формування самозображень визначаються двома інваріантними параметрами - відношенням періоду T ґратки до довжини хвилі світла λ і відношенням відстані z площини дифракції до довжини хвилі світла λ . Кількість дифракційних хвиль, які формують самозображення ґратки при ефекті Тальбота пропорційна відношенню T/λ .

Результати чисельних розрахунків самозображень ґратки показали, на основі використання методу зв'язаних хвиль і на основі інтегральної формули Релея-Зоммерфельда з достатньо високою точністю отримуємо ідентичні розподіли положення локальних дифракційних максимумів та минимумів інтенсивності в трьох характерних дробових площинах Тальбота.

Література

1. Talbot W. H. F. *Facts relating to optical science N° IV* // Phil. Mag., Vol. 9. - P. 401-407 (1836).
2. Rayleigh L. *On copying diffraction-grating and on some phenomena connected with therewith* // Phil. Mag., Vol. 11. - P. 196-205 (1881).
3. Winthrop J.T., Worthington C.R. *Theory of Fresnel Images. I. Plane periodic objects in monochromatic light* // J. Opt. Soc. Am., **55**, P. 373-381 (1965).
4. Edgar R.F. *The Fresnel diffraction of periodic structures* // Opt. Acta, Vol. 16, P 281-287 (1969).
5. Banaszek K., Wodkiewicz K., Schleich W. P. *Fractional Talbot effect in phase space: A compact summation formula* // Optics Express, Vol. 2, No 5, P. 169-172 (1998).
6. Lohman A.W. *An array illuminator based on the Talbot effect* // Optik, Vol. 79, P. 41-45 (1988).
7. Granieri S., Trabocchi O., Sicre E.E. *Fractional Fourier transform applied to spatial filtering in the Fresnel domain* // Opt. Commun., Vol. 119, P. 275-278 (1995).
8. Bernardo L.M. *Talbot self-imaging in fractional Fourier planes of real and complex order* // Opt. Commun., Vol. 140, P. 195-198 (1997).
9. Гейлорд Т.К., Мохарам М. Г. *Анализ и применение оптической дифракции на решетках* // ТИИЭР **73**, С. 53-103 (1985).
10. Lalanne Ph., Morris G. M. *Highly improved convergence of the coupled-wave method for TM polarization* // J. Opt. Soc. Am. A **13**, P. 779-784 (1996).
11. Granet G., Guizal B. *Efficient implementation of the coupled-wave method for metallic lamellar gratings in TM polarization* // J. Opt. Soc. Am. A **13**, P. 1019-1023 (1996).
12. Li L. *Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures* // J. Opt. Soc. Am. A **13** P. 1870-1876 (1996).
13. Popov E., Nevière M. *Grating theory: new equation in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization* // J. Opt. Soc. Am. A **17**, P. 1773-1784 (2000).
14. Li L. *Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings* // J. Opt. Soc. Am. A **13**, P. 1024-1035 (1996).
15. Li L. *Note on the S - matrix propagation algorithm* // J. Opt. Soc. Am. A **20**, P. 655-660 (2003).
16. Schnabel B., Kley E.-B., Wyrowski F. *Study on polarizing visible light by subwavelength-period metal-stripe gratings* Opt. Eng. **38**, P.

- 220-226 (1999).
17. Norton S. M., Erdoohan T., Morris G. M., *Coupled-mode theory of resonant-grating filters* // J. Opt. Soc. Am. A **14**, P. 629-639 (1997).
 18. Norton S. M., Morris G. M., Erdoohan T. *Experimental investigation of resonant-grating filter lineshapes in comparison with theoretical models* // J. Opt. Soc. Am. A **15**, P. 464-472 (1998).
 19. Shin D., Tibuleas S., Maldonado T., Magnusson R. *Thin-film optical filters with diffractive elements and waveguides* // Opt. Eng. **37**, P. 2634-2646 (1998).
 20. Dansas P., Paraire N. *Fast modeling of photonic bandgap structures by use of diffraction-grating approach* // J. Opt. Soc. Am. A **15**, P. 1586-1597 (1998).
 21. Фітьо В. М., Бобицький Я. В., Лаба Г. П. *Аналіз зонної структури 1D і 2D фотонних кристалів методом зв'язаних хвиль* // *Радіофізика і електроніка* **10**, No 5, С. 123-131 (2005).
 22. Skigin D., Fantino A., Grosz S. J. *Phase resonance in compound metallic gratings* // Opt. A: Pure and Appl. Opt. **5**, P. 129-135 (2003).
 23. Matsuda T., Zhou D., Okuno Y. *Numerical analysis of plasmon-resonance absorption in sinusoidal metal grating* // J. Opt. Soc. Am. A **19**, P. 695-701 (2002).
 24. Фітьо В. М., Бобицький Я. В. *Резонансне поглинання електромагнітних хвиль системою <діелектрична ґратка на металі>* // *Доповіді НАН України, математика, природознавство, технічні науки*. No 6. С. 84 - 91 (2004).
 25. Fitio V. M., Bobitski Y. V. *Resonance effects in a dielectric grating; total absorption of electromagnetic waves by dielectric grating on metal system* // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **6**, P. 943- 951 (2004).
 26. Porto J. A., Garcia-Vidal F. J., Pendry J. B. *Transmission Resonances on Metallic Gratings with Very Narrow Slits* // *Physical Review Letters* **83**, P. 2845-2848 (1999).
 27. Treacy M. M. J. *Dynamical diffraction explanation of the anomalous transmission of light through metallic gratings* // *Phys. Rev. B* **66**, P. 195105-1 - 195105-11 (2002).
 28. D. Gerard, L. Salomon, F. de Fornel, A. V. Zayats // *Phys. Rev. B* **69**, 113405, (2004).
 29. Gerard D., Salomon L., de Fornel F., Zayats A. V. *Analysis of the Bloch mode spectra of surface polaritonic crystals in the weak and strong coupling regimes: grating-enhanced transmission at oblique incidence and suppression of SPP radiative losses* // *Optics Express*, **12**, No. 12, P. 3652-3663 (2004).

30. Palmer C., Loewen E. *Diffraction Grating*. Handbook, Thermo RGL, Richardson Grating Laboratory, (2002).
31. Фітьо В. М., Бобицький Я. В. *Аналіз планарних ґраток з симетрийними властивостями (МЗХ)* // *Вісник Національного університету "Львівська політехніка", Електроніка*, No. 513, С. 203-213 (2004).
32. Moharam M. G., Grann E. B., Pommet D. A., Gaylord T. K. *Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary grating* // J. Opt. Soc. Am. A, **12** 1068, (1995).
33. Фітьо В. М., Петровська Г. А., Мисак В. В. *Області застосування наближених методів аналізу дифракції на фазових ґратках* // *Вісник Національного університету "Львівська політехніка", Електроніка*, No 532, С. 178-183 (2004).
34. Popov E., Neviere M., Enoch S., Reinisch R. *Theory of light transmission through subwavelength periodic hole arrays* // *Phys. Rev. B* **62**, No. 23 P. 16100-16108 (2000).
35. Stelle J. M., Moran C. E., Lee A., Aguirre C. M., Halas N. J. *Metallodielectric gratings with subwavelength slots: Optical properties* // *Phys. Rev. B* **68**, P. 205103-1-25103-7 (2003).
36. L. Li, C. W. Haggans // J. Opt. Soc. Am. A **10**, 1184 (1993).
37. Кольер Р., Беркхард К., Лин Л. *Оптическая голография*. М.: Мир, 686 с. (1973).
38. Lalor E. *Conditions for the Validity of the Angular Spectrum of Plane Waves* // *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 58, No 9, P. 1235-1237 (1968).
39. Шовгенюк М. В. *Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції* // *Препринт ІФКС-92-25У*, 40 с. (1992).
40. Gaskill J. D. *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, John Wiley & Sons, New York (1978).
41. Papoulis A. *Systems and Transforms with Application in Optics*, McGraw-Hill, New York (1968).
42. Megias P. M., Herrero R. M. *Diffraction by one-dimensional Ronchi grids: on the validity of the Talbot effect* // J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 8, No. 2, P. 266-269 (1991).
43. Swanson G. J., Leith E. N. *Lau effect and grating images* // J. Opt. Soc. Am., Vol. 72, No 5, P. 552-555 (1982).

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- "Referativnyi Zhurnal"
- "Dzhirelo"

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Freiburg*; R. Folk, *Linz*; D. Henderson, *Provo*; Yu. Holovatch, *Lviv*; M. Holovko, *Lviv*; O. Ivankiv, *Lviv*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; H. Krienke, *Regensburg*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod, *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; N. Plakida, *Dubna*; G. Röpke, *Rostock*; Yu. Rudavskii, *Lviv*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; M. Vavrukh, *Lviv*; A. Zagorodny, *Kyiv*.

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +380(322)760908; Fax: +380(322)761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>