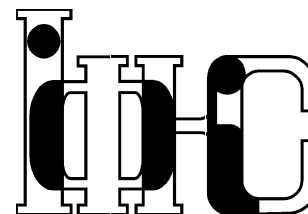


Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

Юрій Михайлович Козловський

СПІЛЬНИЙ ПРОСТОРОВО-ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ ОПТИЧНИХ СИГНАЛІВ

Роботу отримано 27 листопада 2007 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТєКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

ICMP-07-15U

Ю.М. Козловський

СПІЛЬНИЙ ПРОСТОРОВО-ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ
ОПТИЧНИХ СИГНАЛІВ

ЛЬВІВ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 03.65.Bz, 42.30.K, 42.30.V, 42.79, 42.25.F, 42.50.Dv, 52.25.Fi

Спільний просторово-частотний розподіл оптичних сигналів

Ю.М. Козловський

Анотація. В роботі запропоновано спільний просторово частотний розподіл, частковими випадками якого є розподіли Вейля та Вігнера. Вперше отримано частотне представлення спільного просторово-частотного розподілу, використання якого дало можливість усунути особливості, які мали місце при використанні координатного представлення. Аналітично розраховано вираз для спільного розподілу прямокутного імпульсу. Встановлено однозначний взаємозв'язок між розподілами Вейля та Вігнера. Показано, що розподіл Вігнера формується при повороті розподілу Вейля на інформаційній діаграмі спряжених координат $(x; p)$ на кут пропорційний спільному параметру t . Приведено чисельні розрахунки спільного просторово-частотного розподілу прямокутного імпульсу при різних значеннях спільного параметра.

Joint space-frequency distribution of optical signals

Yu.M. Kozlovskii

Abstract. Joint space-frequency distribution is proposed and it is shown that Wigner and Weyl distribution functions are only particular cases of joint distribution. The frequency representation of joint distribution is firstly obtained and it is shown that in such way we can eliminate peculiarities which take place in coordinate representation. Joint distribution for rectangular impulse is analytically obtained. The simple connection between Wigner and Weyl distributions is established. It is shown that Wigner distribution forms as the rotational displacement of Weyl distribution on informational diagram of conjugate coordinates $(x; p)$ on an angle proportional to the joint parameter t . The results of numerical calculations of rect distribution in the joint domain are presented.

1. Вступ

В останні десятиліття просторово-частотні розподіли займають особливе місце при описі оптичних систем обробки інформації. Вперше використання такого типу розподілів було з успіхом здійснене для задач квантової механіки Е.Вігнером [1] (1932 р.), а згодом Й.Вейлем [2] (1948 р.). В цих фундаментальних роботах закладені основи теорії розподілів та досліджено основні їх властивості. Згодом розглядалися різні модифікації розподілів Вігнера та Вейля, але перша спроба систематизувати просторові частотні розподіли була здійснена Л.Коеном [3] лише в 1989 році. В цій роботі вперше чітко сформульовані цілі, завдання та шляхи їх вирішення. Основне завдання побудови просторово-частотного розподілу полягає в знаходженні деякої спільної функції координати та частоти $W(x, \omega)$. Причому, ця функція повинна описувати інтенсивність сигналу $f(x)$ на одночасно визначених координаті і частоті. Узагальнене формулювання просторово-частотного розподілу, який задовольняє вищезгаданим умовам, було запропоноване Л.Коеном [3], та описується формулою

$$C(x, \omega; \Phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y + \frac{x_0}{2}\right) f^*\left(y - \frac{x_0}{2}\right) \Phi(x, \omega) \times \\ \exp -i(\omega x_0 - \omega_0 x + \omega_0 y) dx_0, \quad (1)$$

де $f(x)$ - сигнал, а $\Phi(x, \omega)$ - так звана функція ядра. Різні форми розподілів Коєнівського класу можуть бути отримані з формули (1) шляхом підстановки різних значень функції ядра $\Phi(x, \omega)$. Для прикладу, при значенні $\Phi(x, \omega) = 1$ формула (1) переходить в функцію розподілу Вігнера, а при значенні $\Phi(x, \omega) = \delta(x - x_0)\delta(\omega - \omega_0)$ в функцію розподілу Вейля. Оскільки дослідження стосується саме взаємозв'язку розподілів Вігнера та Вейля зупинимося більш детально саме на цих двох розподілах, які знайшли широке застосування в просторово-частотному аналізі та зокрема в оптичних системах обробки інформації.

Розглянемо два сигнали з координатами x_1 та x_2 та просторовими частотами ω_1 та ω_2 відповідно. Нас цікавить як пов'язані між собою координатна та частотна структура цих сигналів. Тобто необхідно встановити співвідношення між чотирьма змінними x_1, x_2, ω_1 та ω_2 . В роботі [6] показано, що замість вказаних вище координат можна

використати чотири узагальнені координати сигналів

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \omega &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\ x_0 &= x_1 - x_2, & \omega_0 &= \omega_1 - \omega_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Функція розподілу Вейля залежить від координат (x_0, ω_0) , які тожто перетворюються в нуль коли $f_1(x) = f_2(x)$, тобто коли сигнали ідентичні за всіма координатами. В координатах “швидкої різниці” (x_0, ω_0) задається розподіл Вейля (функція невизначеності [7])

$$\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) = \int f_1\left(x + \frac{x_0}{2}\right) f_2^*\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \exp(-i\omega_0 x) dx. \quad (3)$$

Перевага використання цього розподілу полягає в тому, що за допомогою (3) безпосередньо відновлюється розподіл інтенсивності вхідного сигналу

$$|f(x)|^2 = \int \mathcal{A}_{f f^*}(0; \omega_0) \exp(i\omega_0 x) d\omega_0. \quad (4)$$

Розподіл Вігнера є одним з найбільш вживаних координатно-частотних розподілів, які використовуються у просторово-частотному аналізі [8, 9]. На відміну від розподілу Вейля він задається в координатах (x, ω) , це координати, які ідентичні по частоті ω та координаті x коли $f_1(x) = f_2(x)$. За означенням розподіл Вігнера записується наступним чином

$$\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x; \omega) = \int f_1\left(x + \frac{x_0}{2}\right) f_2^*\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \exp(-i\omega x_0) dx_0. \quad (5)$$

Легко бачити, що при виконанні умови $f_1(x) = f_2(x)$ розподіл інтенсивності вхідного сигналу відновлюється за маргінальним розподілом, а саме

$$|f(x)|^2 = \int \mathcal{W}_{f f^*}(x; \omega) d\omega. \quad (6)$$

В подальших розрахунках будемо використовувати схему відновлення (4), оскільки саме вона є простішою в плані математичної реалізації. Хоча використання розподілу Вейля передбачає дещо простіші розрахунки при відновленні розподілу інтенсивності вхідного сигналу, більшість авторів в своїх роботах все ж використовують розподіл Вігнера. Логічним кроком в цьому напрямку була робота Чоунтасіса з співавторами [4] в якій введено узагальнену функцію Вігнера. Ця функція побудована таким чином, що дозволяє здійснювати перехід

від формалізму Вігнера до формалізму Вейля шляхом зміни деякого параметра θ . З огляду на широкі можливості використання розподілу Вейля в теорії оптичної обробки інформації в роботі [5] нижче пропонується метод побудови узагальненого координатно-частотного розподілу з використанням в якості базисної функції Вейля. Обидва згаданих вище підходи є рівноправними, однак використання останнього дозволяє знайти цілий клас нових розподілів, зокрема для прямокутного імпульсу.

2. Спільний просторово-частотний розподіл двох сигналів

2.1. Теоретичні положення

В роботі [5] нами введено та досліджено основні властивості дробового перетворення деякого сигналу $f_p(x)$ з використанням розподілів Вейля та Вігнера. Показано, що в залежності від параметра дробового фур'є-перетворення p опис такої системи здійснюється або за розподілом Вігнера ($p = 0$) або за розподілом Вейля ($p = 1$). З іншого боку, актуальною задачею побудови розподілів є конструювання розширеного типу розподілу з деяким параметром $0 \leq t \leq 1$, який при граничних значеннях t співпадає з відомими розподілами Вейля та Вігнера, а при проміжних значеннях $0 < t < 1$ є більш загальною конструкцією. Перша спроба побудови розширеного типу розподілу з параметром θ була здійснена в роботі С. Чоунтасіса із співавторами [4] на базі узагальненої функції розподілу Вігнера. Отримані в цій роботі результати засвідчили перспективність такого підходу.

В даній роботі вводиться розширений тип розподілу з параметром t на базі узагальненої функції розподілу Вейля. Використання функції Вейля має принципову перевагу в порівнянні з функцією розподілу Вігнера, яка полягає в можливості відновлення розподілу інтенсивності, що експериментально реєструється на виході оптичної системи. Ведемо розподіл двох сигналів $f_1(x)$ та $f_2(x)$ описується наступною формулою

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \exp\{i[x_0 p - \omega_0 x]\} \\ &\exp\left\{-i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)}\right\} \\ &\int f_1\left(z + \frac{x_0}{2}\right) f_2^*\left(z - \frac{x_0}{2}\right) \exp(-i\omega_0 z) dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Константа C_t та параметр узагальненого розподілу t визначаються співвідношеннями

$$C_t = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - \exp i\theta}, \quad t = \frac{\theta}{\pi}. \quad (8)$$

Надалі розподіл (7) називатимемо спільним просторово-частотним розподілом, або скорочено спільним розподілом. Легко бачити, що вираз (7) є узагальненням звичайної функції розподілу Вейля з параметром t . Граничними випадками розподілу (7) є розподіл Вейля (функція невизначеності) (3) при значенні параметра $t = 0$ та розподіл Вігнера (5) при значенні параметра $t = 1$. Таким чином, на альтернативу двом відомим розподілам (3) та (5) ми отримуємо цілу множину розподілів кожному з яких відповідає певне значення параметра t .

Вираз для спільного розподілу (7) можна також зобразити в спрощеному вигляді з використанням добре відомих розподілів Вейля $\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0)$ (3) та крос-кореляційної функції $F(z, x_0)$. В першому випадку отримуємо

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) = C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) \exp \{i[x_0 p - \omega_0 x]\} \exp \left\{ -i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)} \right\}. \quad (9)$$

Виконуючи *обернене перетворення* можна виразити розподіл Вейля через введenu вище функцію спільного розподілу

$$\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x'_0; \omega'_0) = \int \int dx dp \mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) \exp \left\{ -i [2x'_0 p - 2\omega'_0 x] \right\} \exp \left\{ i \frac{(x - x'_0)^2 + (p - \omega'_0)^2}{\tan(\theta/2)} \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) встановлює зворотній зв'язок між звичайною $\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0)$ та узагальненою $\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p)$ функцією невизначеності. Це відкриває можливість відновлення розподілу інтенсивності сигналу за спільним розподілом, що не було встановлено при використанні узагальненого розподілу Вігнера [4].

Крос-кореляційне представлення. На основі позначення крос-кореляційної функції сигналів $f_1(z)$ та $f_2(z)$

$$F(z, x_0) = f_1 \left(z + \frac{x_0}{2} \right) f_2^* \left(z - \frac{x_0}{2} \right), \quad (11)$$

та позначення

$$\tau = -\frac{1}{\tan(\theta/2)}, \quad \theta = [0.. -\pi]. \quad (12)$$

отримуємо

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) = C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \times \exp \{i [2x_0 p + \tau^2 (x - x_0)^2]\} \times \exp \{-ip [z + 2x]\} \exp \left\{ -i \frac{1}{4\tau^2} [z + 2x]^2 \right\}. \quad (13)$$

Представлення (13) є зручним для використання у випадку коли важко розрахувати аналітично явний вигляд узагальненого розподілу. Перевага цього представлення полягає в зведенні загальної формули (7) до двохкратного інтегралу, що суттєво спрощує чисельні обчислення.

Умова нормування. Виконаємо інтегрування лівої та правої частини виразу (13) за змінною p . Отримуємо

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x) = C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \exp \{i\tau^2 [x - x_0^2]\} \times \exp \left\{ -i \frac{1}{4\tau^2} [z + 2x]^2 \right\} \delta(z + 2x - 2x_0). \quad (14)$$

Якщо проінтегрувати вираз (14) за координатою x то отримуємо наступну умову нормування для узагальненого координатно-частотного розподілу

$$\mathcal{K}_{ff^*}^{(t)} = C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \exp \left\{ -i\tau^2 \frac{z^2}{4} \right\} \exp \left\{ -i \frac{x_0^2}{\tau^2} \right\}. \quad (15)$$

Формули (14) та (15) можна детально дослідити шляхом інтегрування за однією із змінних x_0 чи z .

2.2. Частотне представлення

З метою співставлення отриманих результатів з існуючими аналогами необхідно мати можливість точно проводити розрахунок граничних випадків. Розрахунок граничного випадку $t = 1$ за формулою (9) можна провести точно, а от випадок $t = 0$ точно розрахувати не можна. З метою вирішення цієї проблеми введемо частотне

представлення спільного просторово-частотного розподілу. Для цього скористаємося відомою тотожністю

$$\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) = \int \int d\xi d\eta \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(\eta; \xi) \exp(-i\omega_0 \eta) \exp(-i\xi x_0), \quad (16)$$

яка пов'язує розподіли Вейля та Вігнера.

Підставивши (16) в вираз (9) та виконавши низку перетворень отримуємо формулу, що описує спільний просторово-частотний розподіл в частотному представленні

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) &= \tilde{C}_t \int \int dx_0 d\omega_0 \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) \exp\{i[-x_0 p + \omega_0 x]\} \\ &\exp\left\{i\frac{1}{4}\tan\frac{\theta}{2}[(x+x_0)^2 + (p+\omega_0)^2]\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

де константа \tilde{C}_t визначаються співвідношенням

$$\tilde{C}_t = \frac{(1-i)^2}{1-\exp i\theta} \tan\frac{\theta}{2}. \quad (18)$$

Як легко бачити, у випадку частотного представлення спільного розподілу особливості в точці $t = 0$ та її околі зникають, проте з'являються особливості в околі точки $t = 1$. Таким чином пара представлень: координатне та частотне взаємодоповнюють одне одного та повністю описують спільний просторово-частотний розподіл на відрізок $t = [0..1]$.

2.3. Граничні випадки

Метою даної роботи є встановлення механізму перерозподілу між розподілами Вігнера і Вейля та дослідження властивостей спільних розподілів, що описують область значень $0 < t < 1$. Тому принципово важливими є дослідження граничних випадків спільних розподілів (9) та (17). Маємо два граничних випадки.

Випадок $t = 1$.

Для опису цього випадку скористаємося координатним представленням спільного розподілу (9). Покладаючи в (9) $t = 1$ (чи $\theta = \pi$), отримуємо наступний результат

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{t=1}(x; p) = \frac{2}{\pi} \int \int dx_0 d\omega_0 \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) \exp(ix_0 p - i\omega_0 x). \quad (19)$$

Таким чином

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{t=1}(x; p) = \frac{2}{\pi} \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x; p). \quad (20)$$

Вираз (20) відповідає функції розподілу Вігнера.

Випадок $t = 0$.

Для опису цього випадку скористаємося частотним представленням спільного розподілу (17). В цьому випадку $t = 0$ (чи $\theta = 0$) отримуємо наступний результат

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{t=0}(x; p) = \int \int dx_0 d\omega_0 \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) \exp(i\omega_0 x - ix_0 p). \quad (21)$$

Таким чином

$$\mathcal{K}_{f_1 f_2^*}^{t=0}(x; p) = \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x; p). \quad (22)$$

Вираз (22) відповідає функції розподілу Вейля. Можна стверджувати, що введений нами розподіл є дійсно узагальненим, так як при граничних значеннях параметра описує відомі розподіли. Дослідження множини проміжних $t = 0 : 1$ розподілів $0 < t < 1$ є предметом подальшого дослідження.

3. Аналітичні розрахунки спільного розподілу прямокутного імпульсу

3.1. Функція прямокутного імпульсу в оптиці

Використання функції прямокутного імпульсу в оптиці є важливим з огляду на те, що з допомогою цієї функції вдається вдало описати ізольовану щілину [7]. З іншого боку функція прямокутного імпульсу виступає як елемент оптичного зображення. Таким чином зображення можна розглядати як впорядковану множину прямокутних щілин різного контрасту. Тому детальне дослідження властивостей функції прямокутного імпульсу лежить в основі побудови різних оптичних зображень. Прямокутний імпульс представляється добре відомою формулою

$$\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

де $2a$ - ширина імпульсу.

Фур'є-образ такої функції добре відомий

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right)\right] = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = 2a \frac{\sin(\omega a)}{\omega a}, \quad (23)$$

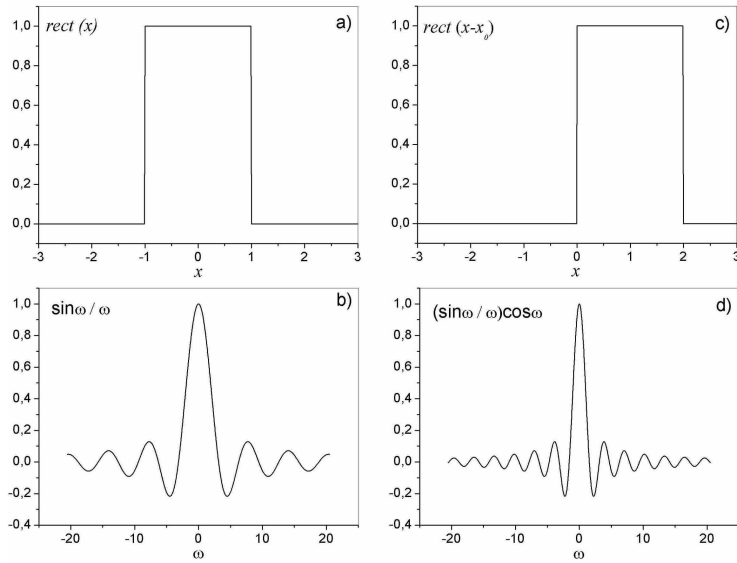


Рис. 1. Графіки функції прямокутного імпульсу (а), його фур'є-образу (б), зміщеного прямокутного імпульсу (с) та його фур'є-образу (д) [10]

де функція $\text{sinc} \frac{x}{\pi} = \frac{\sin x}{x}$ - функція відліків. Очевидним є той факт, що має місце обернене перетворення [10], тобто фур'є-образ функції відліків

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}} \left[\text{sinc} \frac{\omega_0 x}{\pi} \right] = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_0}, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases} \quad (24)$$

З огляду на те, що в основі побудови оптичного зображення лежить зміщення елементів один відносно одного доцільно є навести формулу зсуву прямокутного імпульсу на величину x_0

$$\hat{\mathcal{F}} \left[\text{rect} \left(\frac{x - x_0}{2a} \right) \right] = e^{-i\omega x_0} 2a \frac{\sin \omega a}{\omega a} \quad (25)$$

Функція прямокутного імпульсу та її зміщений варіант проілюстровані на рис. 1

3.2. Розподіл прямокутного імпульсу в області Вейля

Розподіл Вейля прямокутного імпульсу може бути отриманий безпосередньо з означення (3) чи розрахований аналітично [7]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) &= 2 \frac{\sin[\omega_0(a + \frac{x_0}{2})]}{\omega_0} \text{rect} \left(\frac{a + x_0}{2a} \right) \\ &+ 2 \frac{\sin[\omega_0(a - \frac{x_0}{2})]}{\omega_0} \text{rect} \left(\frac{a - x_0}{2a} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Вигляд розподілу Вейля для прямокутного імпульсу наведений на рис. 2. Згідно до означення цей розподіл визначений шириною функції прямокутного імпульсу $2a$ по координаті та не має скінченної границі по частоті. У випадку $\omega_0 = 0$ розподіл вироджується в трикутний імпульс, а при $x_0 = 0$ у фур'є-спектр функції прямокутного імпульсу - функцію відліків.

3.3. Розподіл прямокутного імпульсу в області Вігнера

Аналогічно розподіл Вігнера для прямокутного імпульсу можна розрахувати безпосередньо з означення (5)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x; \omega) &= 2 \frac{\sin[2\omega(a + x)]}{\omega} \text{rect} \left(\frac{a + 2x}{2a} \right) \\ &+ 2 \frac{\sin[2\omega(a - x)]}{\omega} \text{rect} \left(\frac{a - 2x}{2a} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

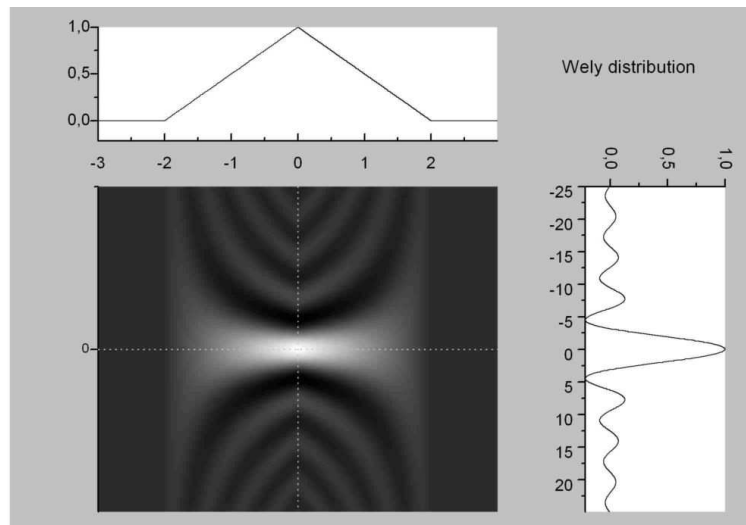
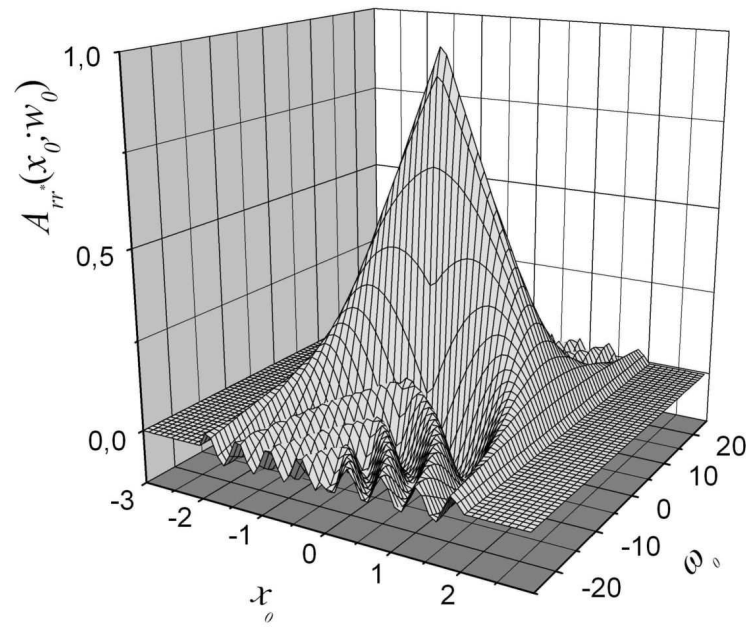


Рис. 2. Розподіл Вейля прямокутного імпульсу.

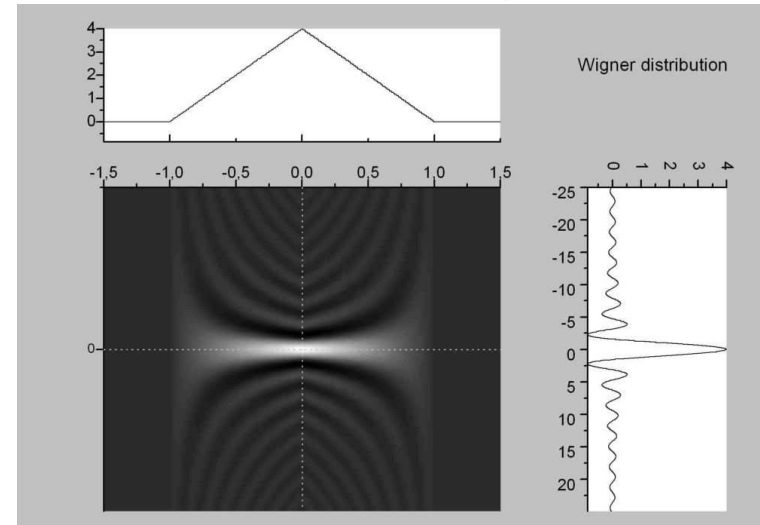
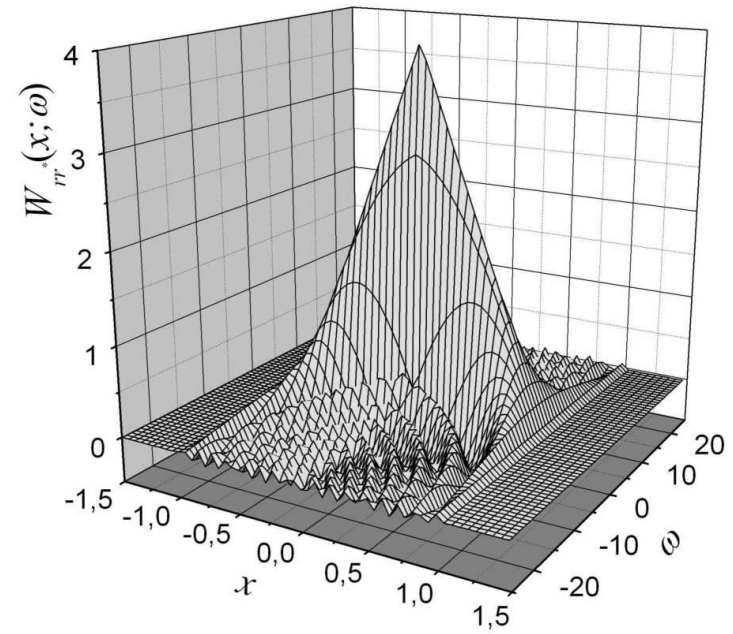


Рис. 3. Розподіл Вігнера прямокутного імпульсу.

Розподіл Вігнера для прямокутного імпульсу наведений на рис. 3. Цей розподіл вже визначений шириною a по координаті та, аналогічно до розподілу Вейля не має скінченої границі по частоті. У випадку $\omega_0 = 0$ розподіл вироджується в трикутний імпульс, а при $x_0 = 0$ у фур'є-спектр функції прямокутного імпульсу - функцію відліків.

3.4. Спільний розподіл прямокутного імпульсу

Слід зауважити, що хоча зовнішній вигляд розподілів Вейля та Вігнера для прямокутного імпульсу має зовнішню подібність відновлення сигналу з допомогою цих розподілів має суттєві відмінності. Тому основним завданням даної роботи є детальне дослідження властивостей спільного розподілу прямокутного імпульсу. Спробуємо на основі теоретичних формул отримати спільний розподіл функції прямокутного імпульсу, яка має широке використання при описі оптичних систем обробки інформації. Підставивши в означення спільного розподілу (9) вираз розподілу Вейля для прямокутного імпульсу (26) чи безпосередньо функцію прямокутного імпульсу (3.1) в означення (7) отримуємо наступний вираз

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{rr^*}^{(t)}(x; p) &= \\ &= 2C_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0 \int_{-2a}^0 dx_0 \frac{\sin[\omega_0(a + \frac{x_0}{2})]}{\omega_0} \\ &\times \exp\{i[x_0 p - \omega_0 x]\} \exp\left\{-i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right\} \\ &+ 2C_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0 \int_0^{2a} dx_0 \frac{\sin[\omega_0(a - \frac{x_0}{2})]}{\omega_0} \\ &\times \exp\{i[x_0 p - \omega_0 x]\} \exp\left\{-i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Наближені розрахунки можна проводити вже за цією формулою, але розрахунок нескінченного інтегралу є складним і результати не достатньо точними. Тому доцільно перетворити вираз (28) таким чином, щоб усунути нескінченні межі інтегрування та зробити його максимально простим для числових розрахунків чи іншими словами аналітично отримати формулу для спільного розподілу прямокутно-

го імпульсу. Аналітичний розрахунок спільного розподілу прямокутного імпульсу (28) можна здійснити двома альтернативними шляхами. Розглянемо детально кожен з них.

3.4.1. Метод зведених формул

Завдання полягає в тому, щоб звести формулу (28) до одного доданку та максимально його спростити. Таким чином, врахувавши той факт, що функція прямокутного імпульсу є парною та виконавши ряд математичних перетворень отримуємо наступну формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{rr^*}^{(t)}(x; p) &= \\ &= 2C_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0 \int_0^{2a} dx_0 \frac{\sin[\omega_0(a - \frac{x_0}{2})]}{\omega_0} \cos\left\{px_0 + 2\frac{xx_0}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right\} \\ &\times \exp\{-i[\omega_0 x]\} \exp\left\{-i \frac{(p - \omega_0)^2}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right\} \exp\left\{-i \frac{x^2 + x_0^2}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогічну формулу можна отримати для частотного представлення

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{rr^*}^{(t)}(x; p) &= \\ &= 2\tilde{C}_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0 \int_0^{2a} dx_0 \frac{\sin[2\omega_0(a - x_0)]}{\omega_0} \cos\left\{px_0 - \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)xx_0\right\} \\ &\times \exp\{i[\omega_0 x]\} \exp\left\{i \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(p + \omega_0)^2\right\} \times \\ &\times \exp\left\{i \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(x^2 + x_0^2)\right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Формули (29) та (30) добре описують спільний розподіл прямокутного імпульсу в області $t = [0..1]$. Та все ж ці формули містять нескінченний інтеграл по ω_0 , що не дозволяє з достатньою точністю розраховувати тривимірні графіки, які лежать в основі просторово-частотного аналізу. Можна показати, що на основі формули (29) можна отримати наступу формулу

$$\mathcal{K}_{rr^*}^{(t)}(x; p) = C_t \sqrt{\pi \left| \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right\} \exp \left\{ -i \frac{p^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \int_0^{2a} dx_0 A \exp \left\{ -i \frac{x^2 + x_0^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \cos \left\{ px_0 + 2 \frac{xx_0}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \int_{-1}^1 dt \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} \sqrt{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[At - 2 \left(\frac{1}{2} x - \frac{p}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) \right] \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

де $A = a - \frac{x_0}{2}$. Формула (31) точно описує спільний розподіл прямокутного імпульсу та має ряд переваг в порівнянні з формулами (28), (29) та (30). По-перше спільний розподіл в такій формі включає в себе лише скінченні інтеграли, що суттєво спрощує числові розрахунки та підвищує їх точність. По-друге формула добре описує спільний розподіл прямокутного імпульсу на всьому інтервалі $t = (0,1)$ та дозволяє впритул наблизитися до граничних випадків $t = 0$ та $t = 1$. Таким чином, в даній роботі формула (31) є базовою для чисельних розрахунків.

3.4.2. Метод інтегралів Френеля

Використання спеціальних функцій, а саме інтегралів Френеля, дозволяє аналітично звести формулу для розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу до однократних інтегралів. Для цього представимо формулу (31) в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{rr^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \sqrt{\pi \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|} \\ & \times \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right\} \exp \left\{ -i \frac{p^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \int_0^{2a} dx_0 \exp \left\{ -i \frac{x^2 + x_0^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \cos \left\{ px_0 + 2 \frac{xx_0}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \frac{2}{\sqrt{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta e^{i\eta^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left(-A - \left[x - \frac{2p}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right] \right), \\ \eta_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left(A - \left[x - \frac{2p}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right] \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Розписавши внутрішній інтеграл

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta e^{i\eta^2} = \int_{\eta_1}^0 d\eta e^{i\eta^2} + \int_0^{\eta_2} d\eta e^{i\eta^2}, \quad (34)$$

та врахувавши означення інтегралів Френеля

$$S(x) = \int_0^x dx e^{ix^2} \quad (35)$$

отримуємо остаточну формулу для розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу через інтеграли Френеля

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{rr^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \sqrt{\pi \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|} \\ & \times \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right\} \exp \left\{ -i \frac{p^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \int_0^{2a} dx_0 \exp \left\{ -i \frac{x^2 + x_0^2}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \cos \left\{ px_0 + 2 \frac{xx_0}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right\} \\ & \times \frac{2}{\sqrt{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)}} (S(\eta_1) + S(\eta_2)). \end{aligned} \quad (36)$$

4. Результати чисельного розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу

В попередньому параграфі ми вивели ряд важливих формул для розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу. В цьому параграфі ми проаналізуємо результати отримані на основі чисельного

розрахунку. Головна мета чисельних результатів дати інтерпретацію перерозподілу спільного розподілу прямокутного імпульсу між площинами розподілів Вейля та Вігнера. З отриманих аналітичних формул відомо, що такий перерозподіл відбувається при зміні спільного параметру t . При $t = 0$ маємо розподіл Вейля, а при $t = 1$ - розподіл Вігнера. Змінюючи спільний параметр t ми опиняємося в області, яку в даній роботі пропонується називати спільною, так як вона містить спільну інформацію про обидва розподіли. Формування розподілу прямокутного імпульсу в спільній області і є предметом подальших досліджень.

4.1. Граничні випадки формування спільного розподілу прямокутного імпульсу

Перш за все необхідно дослідити формування спільного розподілу прямокутного імпульсу в граничних випадках, з метою порівняння отриманих результатів з відомими аналогами. Лише після їх детального порівняння можна розпочинати дослідження перерозподілу в спільній області. Отже розглянемо окремо кожен з граничних випадків. В попередніх параграфах ми отримали результати чисельного розрахунку розподілів Вейля та Вігнера за загальновідомими формулами. В даному розділі ми будемо намагатися порівняти отримані результати з результатами отриманими в результаті чисельного розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу при граничних значеннях спільного параметра t .

4.1.1. Розподіл Вейля

Таким чином, як згадувалось вище, розподіл Вейля можна отримати поклавши $t = 0$ в формулі (9). Перевіримо цей факт шляхом чисельного розрахунку поклавши $t = 0$ у виразі для спільного розподілу прямокутного імпульсу (31). Результати чисельного розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу приведені на рис. 4.

Таким чином в граничному випадку $t = 0$ спільний розподіл прямокутного імпульсу точно відтворює аналогічний розподіл Вейля. Тепер перейдемо до розгляду іншого граничного випадку.

4.1.2. Розподіл Вігнера

У випадку $t = 1$ у виразі для спільного розподілу прямокутного імпульсу (31) отримуємо результати приведені на рис. 5.

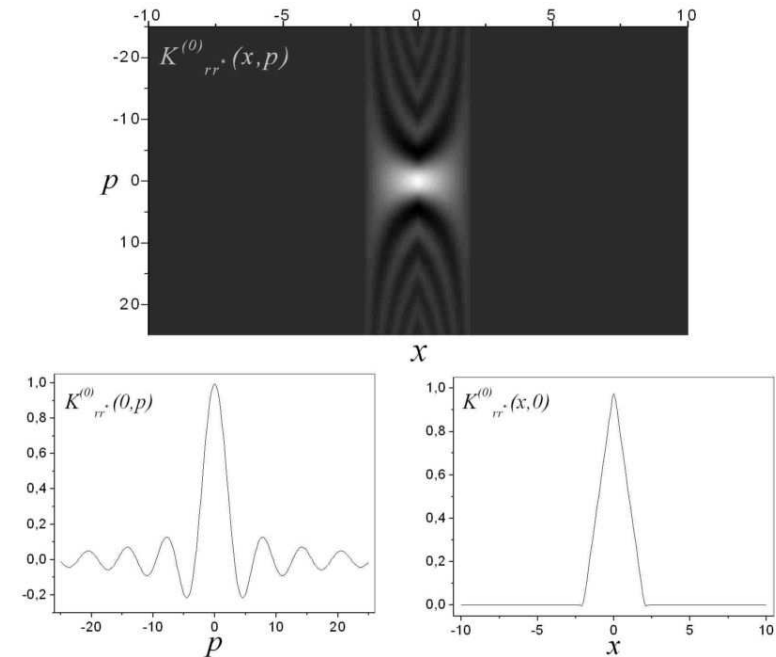


Рис. 4. Граничний випадок спільного розподілу прямокутного імпульсу при $t = 0$.

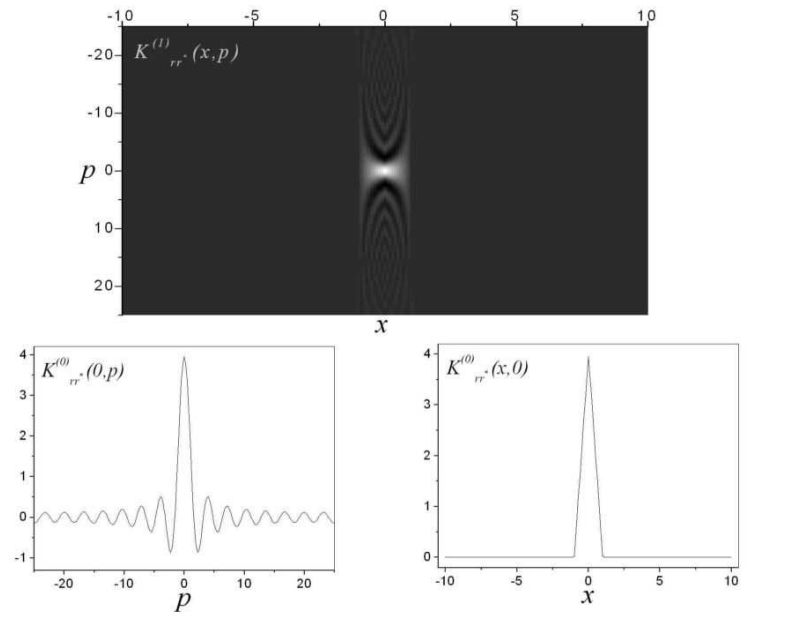


Рис. 5. Граничний випадок спільного розподілу прямокутного імпульсу при $t = 1$.

Подібно до попереднього випадку в граничному випадку $t = 1$ спільний розподіл прямокутного імпульсу точно відтворює аналогічний розподіл Вігнера.

Отже тут можна зробити важливий висновок про те, що спільний розподіл дійсно є узагальненням відомих розподілів Вейля та Вігнера та в граничних випадках вироджується в один з цих розподілів.

4.2. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу

Предметом дослідження є безумовно змішана область з допомогою якої ми спробуємо встановити механізм перерозподілу між розподілами Вейля та Вігнера. Так як змішана область включає в себе фактично нескінченну множину розподілів то її дослідження є дуже громіздким процесом. З метою систематизації нашого дослідження розглянемо три області.

4.2.1. Область розподілу Вейля $t = [0..0, 1]$

Перш за все нас цікавить, що відбувається при найменших змінах змішаного параметру t . Отже при зміні параметру t ми переходимо в змішану область де при малих змінах цього параметру розподіл починає функціонально змінюватися, хоча візуально нагадує граничний випадок. При подальшій зміні параметру t така візуальна подібність зникає. Тому область де змішаний розподіл візуально нагадує розподіл Вейля в подальшому будемо називати - область розподілу Вейля. Розглянемо детально формування спільного розподілу прямокутного імпульсу в області Вейля.

Результати відповідних чисельних розрахунків приведені на рис. 6. Отже класичний випадок $t = 0$ для отримання повних даних про вхідний сигнал на визначеній координаті потребує сумування всіх просторових частот. Враховуючи той факт, що таких частот є нескінченна кількість проаналізуємо що відбувається в спільній області. При зміні спільного параметра $t = 0, 01..0, 07$ (рис. 6) відбувається поворот на інформаційній діаграмі спряжених координат (x, p) пропорційно до спільного параметра t . Легко бачити, що навіть при малих змінах параметра, за рахунок повороту, відбувається зміщення частотних ліній (як і координатних), яке має тенденцію до виходу цих ліній з частотної області. Таким чином вже при значенні спільного параметра $t = 0, 1$ на нульовій координаті можна отримати інформацію про вхідний сигнал на основі скінченної кількості частот. Отже розглянемо детально два випадки нульової частоти та

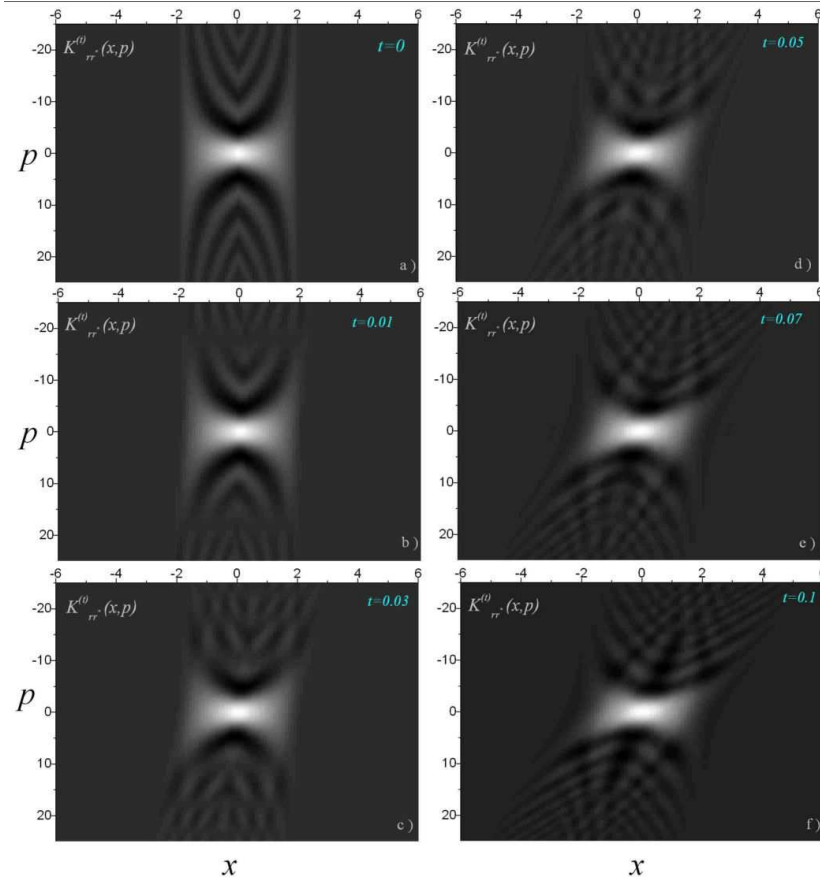


Рис. 6. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу в області розподілу Вейля при різних значення спільного параметра t .

нульової координати. Випадок $t = 0$, що відповідає розподілу Вейля детально описаний в роботі М. Шовгенюка [21]. В цьому випадку при $x = 0$ розподіл прямокутного імпульсу ідентичний його фур'є-образу. В роботі [21] автор наголошує, що так як розподіл заданий в нескінченних межах по частоті для його відновлення необхідно враховувати всі просторові частоти. При $p = 0$ розподіл набуває форми трикутного імпульсу. Перейдемо тепер до розгляду змішаної області. Змінюючи спільний параметр t ми змінюємо вхідний сигнал та відповідно його розподіл. Тому вже при не великих змінах параметру t відбувається поворот розподілу прямокутного імпульсу на інформаційній діаграмі. При повороті змінюються відповідно перерізи розподілу як по координаті так і по частоті. Так бачимо, що при значенні спільного параметру $t = 0,03$ (рис. 6) частина просторових частот вже є заданою в скінченних межах, хоча частина залишається в нескінченних межах. Відповідно розподіл при $x = 0$ змінюється та є тотожний фур'є-спектру вхідного сигналу. При подальшому зменшенні спільного параметра t спостерігається тенденція до зменшення числа просторових частот заданих в нескінченних межах та подальша зміна вхідного сигналу. Подібні ефекти спостерігаються також в області дробового фур'є-перетворення [12] та при дослідженні дифракції Френеля на ізольованій щілині [21]. Таким чином в області розподілу Вейля спостерігається поворот розподілу прямокутного імпульсу за годинниковою стрілкою на кут пропорційний до спільного параметра t . Принципова відмінність формування розподілу в області Вейля полягає в тому, що для відновлення вхідного сигналу необхідно враховувати меншу кількість нескінченних частот ніж у граничному випадку $t = 0$.

4.2.2. Область розподілу Вігнера $t = [0, 9..1]$

Другим граничним випадком є розподіл Вігнера $t = 1$. В цьому випадку теж необхідно дослідити область в якій розподіл візуально нагадує вхідний. Таку область називаємо область розподілу Вігнера. Отже при $t = 1$ (розподіл Вігнера) подібно як і попередньому випадку для відновлення вхідного сигналу в обмеженому по координаті розподілі необхідно враховувати всі просторові частоти. При зменшенні спільного параметра t (область розподілу Вігнера), подібно до області Вейля, відбувається поворот на інформаційній діаграмі, але в протилежному напрямку. При подальшому зменшенні спільного параметра кількість зменшується кількість невизначених частот, хоча в даній області вони все ж присутні. Лише при значенні спільного параметра $t = 0,9$ виникає певна максимальна частота (скінченна) і

відновлення вхідного сигналу стає чітко визначеним. Отже в області розподілу Вігнера відбувається поворот розподілу прямокутного імпульсу на інформаційній діаграмі проти годинникової стрілки.

4.2.3. Спільна область. Перерозподіл між областями Вігнера та Вейля

В попередніх параграфах було проаналізовано граничні області, які знаходяться близько до граничних випадків (розподіли Вейля та Вігнера). Між цими областями знаходиться спільна область, яка представляє особливий інтерес так як описує механізм перерозподілу між областями Вейля та Вігнера. Перед детальним аналізом спільної області необхідно уточнити методику чисельних розрахунків. Отже в теоретичній частині було отримано формули які описують координатне (29) та частотне (30) представлення спільного розподілу прямокутного імпульсу. Два представлення необхідні для цілісного опису розподілу так як кожне з них добре працює в певній області. Так координатне представлення (29) добре описує область розподілу Вігнера, тоді як частотне представлення (30) описує область розподілу Вейля. В спільній області обидва представлення дають тотожні та точні результати. Формування зображень перерізів розподілу прямокутного імпульсу представлено на рис. 8 (чисельні розрахунки за формулою координатного представлення (29)) та рис. 9 (чисельні розрахунки за формулою частотного представлення (30)). Як видно з рис. 8 координатне представлення добре описує область розподілу Вігнера та спільну область. Тим не менше точно описати область розподілу Вейля за допомогою координатного представлення не можна. Частотне представлення (рис. 9) навпаки добре описує область розподілу Вейля та спільну область, але не працює в області розподілу Вігнера. Звідси можна зробити важливий висновок, що обидва представлення добре описують спільну область, яка представляє центральний інтерес в даній роботі. Отже, рисунки рис. 9 та рис. 8 описують формування спільного розподілу на нульовій координаті, а рис. 10 на нульовій частоті. Група рисунків рис. 11 - рис. 14 описує спільний розподіл прямокутного імпульсу при різних значеннях спільного параметра t .

Розглянемо детально процес, що відбувається при зміні спільного параметру t . Такий процес зображений на рис. 8 - рис. 14, кожен з яких описує певний етап чи аспект перерозподілу.

Випадок $t = 10^{-5}$. Розпочнемо аналіз з граничного випадку $t = 0$ (розподіл Вейля). В цьому випадку розподіл є дійсним, а його

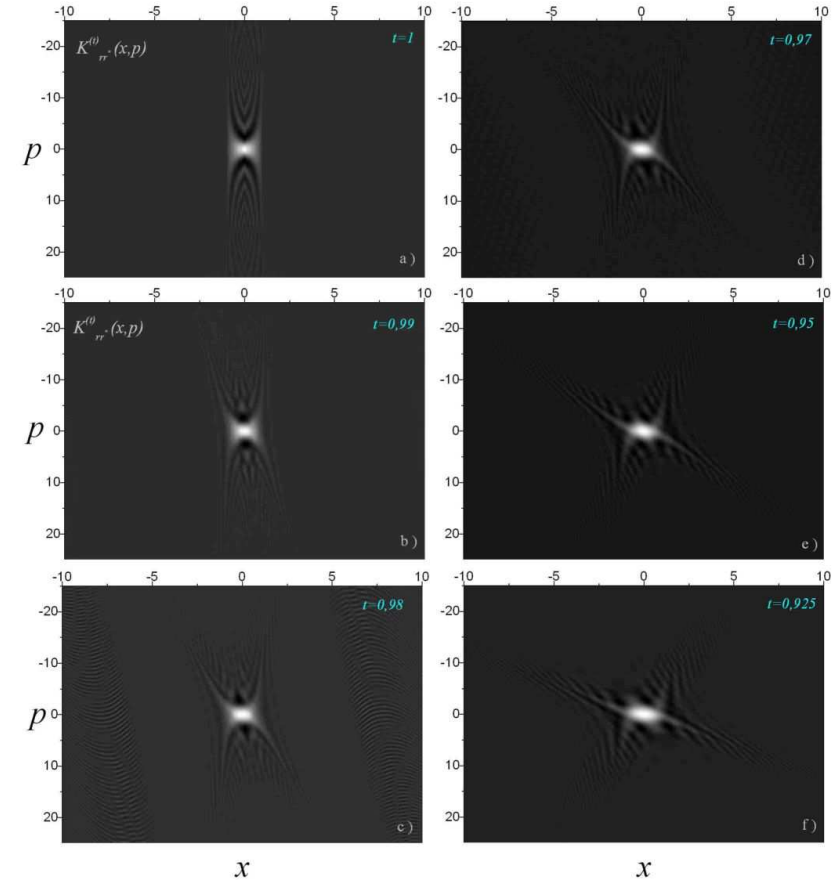


Рис. 7. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу в області розподілу Вігнера при різних значеннях спільного параметра t .

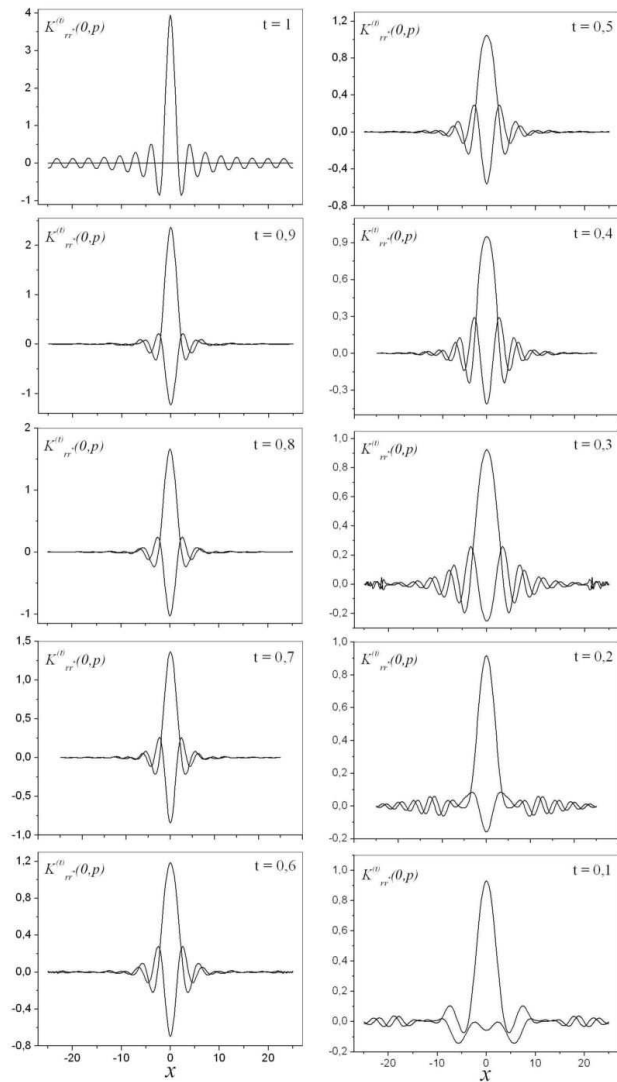


Рис. 8. Формування перерізу при $x = 0$ спільного розподілу прямокутного імпульсу в спільній області при різних значення спільного параметра t . Суцільна лінія - дійсна частина, пунктирна лінія - комплексна частина.

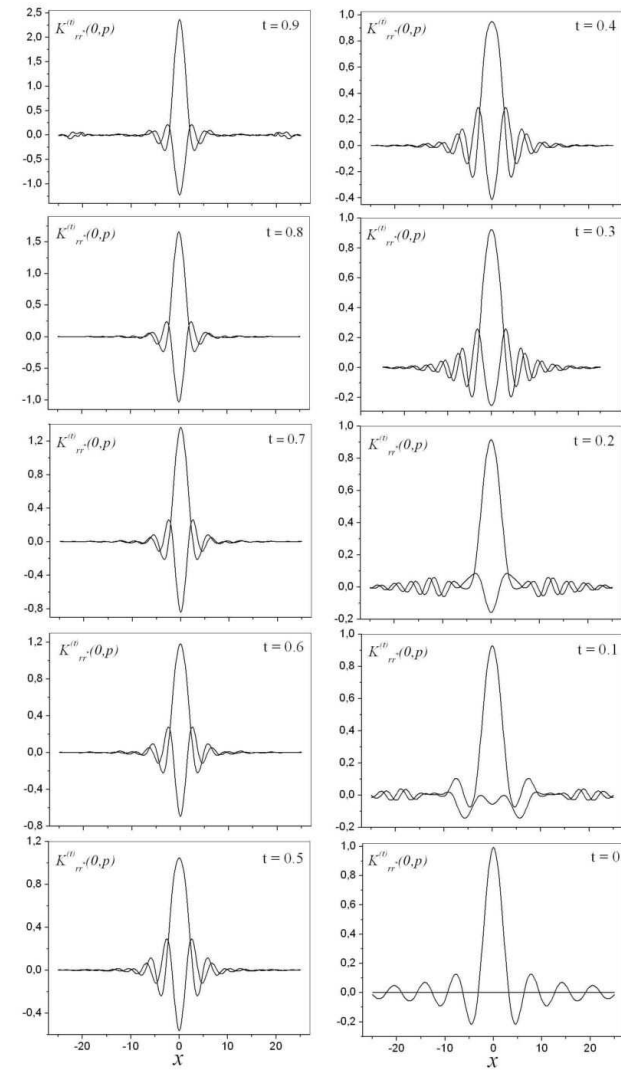


Рис. 9. Формування перерізу при $x = 0$ спільного розподілу прямокутного імпульсу в спільній області при різних значення спільного параметра t . Суцільна лінія - дійсна частина, пунктирна лінія - комплексна частина.

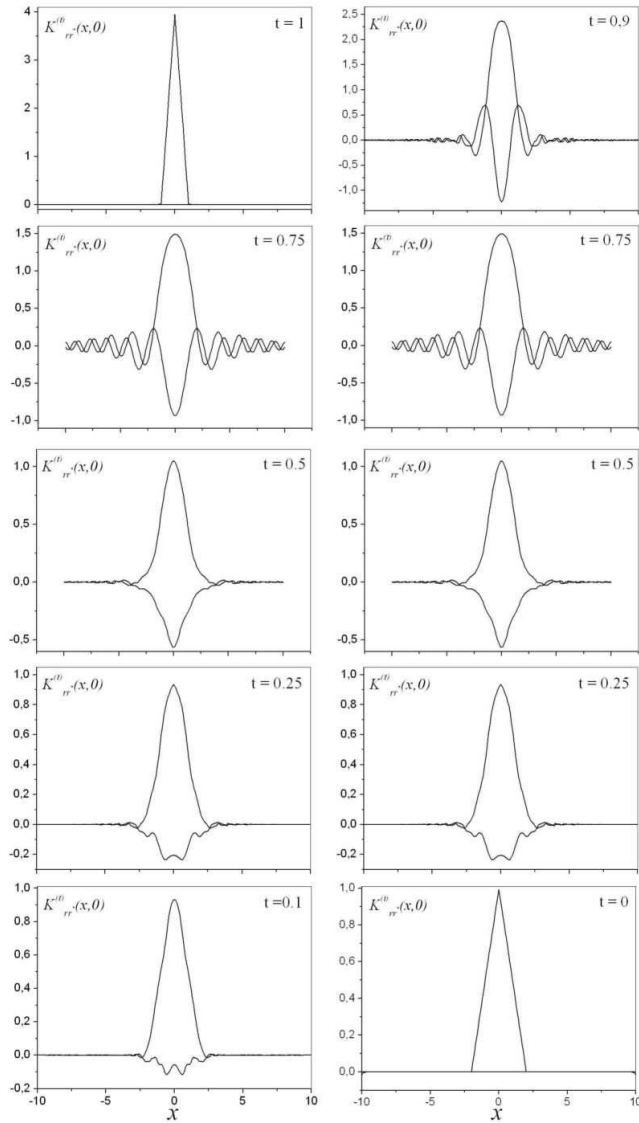


Рис. 10. Формування перерізу при $p = 0$ спільного розподілу прямокутного імпульсу в спільній області при різних значення спільного параметра t . Суцільна лінія - дійсна частина, пунктирна лінія - комплексна частина.

го перерізи є добре відомими трикутний імпульс у випадку $x = 0$ (рис. 9, $t = 10^{-5}$) та фур'є-спектр прямокутного імпульсу у випадку $p = 0$ (рис. 10, $t = 10^{-5}$). Повний розподіл прямокутного імпульсу у випадку $t = 10^{-5}$ зображений на рис. 11 - а) та рис. 14, $t = 10^{-5}$. Як було згадано вище для відновлення вхідного сигналу в даному випадку необхідно врахувати всі просторові частоти, які задані в інтервалі частот $-\infty < \omega < \infty$.

Випадок $t = 0, 1$. Змінюючи спільний параметр до значення $t = 0,9$ ми робимо перший крок в змішану область. Тут ситуація кардинально змінюється. Розподіл стає комплексним, тобто за формування спільного розподілу відповідають дійсна та комплексна частини, які окремо досліджуються. На інформаційній діаграмі відбувається поворот дійсної (рис. 11 - с) та комплексної (рис. 11 - d) частин розподілу прямокутного імпульсу пропорційно до спільного параметра t . Спільний розподіл на нульовій координаті починає перерозподілятися за рахунок чого змінюється (рис. 9, $t = 0, 1$). З'являється комплексна частина в той час як дійсна частина є визначеною вже в фіксованих межах по частоті. Це вказує на той факт, що для відновлення вхідного сигналу досить врахувати скінченну кількість частот.

Область $t = 0, 2 - 0, 4$. В цій області має місце подальший поворот розподілу вхідного сигналу як у дійсній так і у комплексній частинах (рис. 11 - e-f та рис. 12 - a-b). Причому слід зауважити, що в межах даної області дійсна частина зменшується за амплітудою, а уявна зростає. Такий процес є закономірний так як розподіли Вігнера та Вейля є пронормовані таким чином, що за величиною розподіл Вігнера є в чотири рази більший ніж розподіл Вейля. Тому "рух" від розподілу Вігнера до розподілу Вейля супроводжується зменшення його величини. Переріз спільного розподілу на нульовій координаті (рис. 9, $t = 0, 2 - 0, 4$) вказує на тенденцію до зростання смуги скінченних частот на яких однозначно відновлюється вхідний сигнал.

Випадок $t = 0, 5$. Цей випадок представляє особливий інтерес в рамках даного дослідження так як спільний розподіл тут знаходиться рівно посередині між розподілами Вігнера та Вейля (рис. 12 - c-d). Якщо розглядати процес перерозподілу з позиції повороту розподілу вхідного сигналу то цей випадок відповідає повороту розподілу на кут $\varphi = 45^0$. Причому розподіл Вейля відповідає випадку $\varphi = 0^0$, а розподіл Вігнера відповідно $\varphi = 90^0$. Особливість розподілу який формується в даному випадку полягає також у тому, що при $\varphi = 45^0$ тангенс стає рівний одиниці і зникають будь-які особливості як в частотному так і в координатному представленнях. Частковий випадок

спільного розподілу при значенні спільного параметра $t = 0,5$ потребує детального дослідження, яке виходить за рамки даної роботи.

Область $t = 0,6 - 0,8$. При таких значеннях спільного параметра продовжується перерозподіл шляхом повороту дійсної та уявної частин розподілу вхідного сигналу (рис. 12 - e-f та рис. 13 - a-b). Переріз спільного розподілу на нульовій координаті (рис. 9, $t = 0,6 - 0,8$) повністю знаходиться в смузі обмежених частот на яких однозначно відновлюється вхідний сигнал.

Випадок $t = 0,9 - 1,0$. В даній області відбувається остаточний поворот розподілу вхідного сигналу на кут $\varphi = 90^0$, який описує розподіл Вігнера (рис. 13 - c-f). Уявна частина розподілу зникає, а в перерізі за нульовою координатою з'являються нескінченні частоти. Попередні дослідження дозволяють нам зробити важливий висновок про те, що існує чіткий зв'язок між розподілами Вейля та Вігнера. Як встановлено вище розподіл Вігнера формується в процесі повороту розподілу Вейля на інформаційній діаграмі на кут $\varphi = 90^0$.

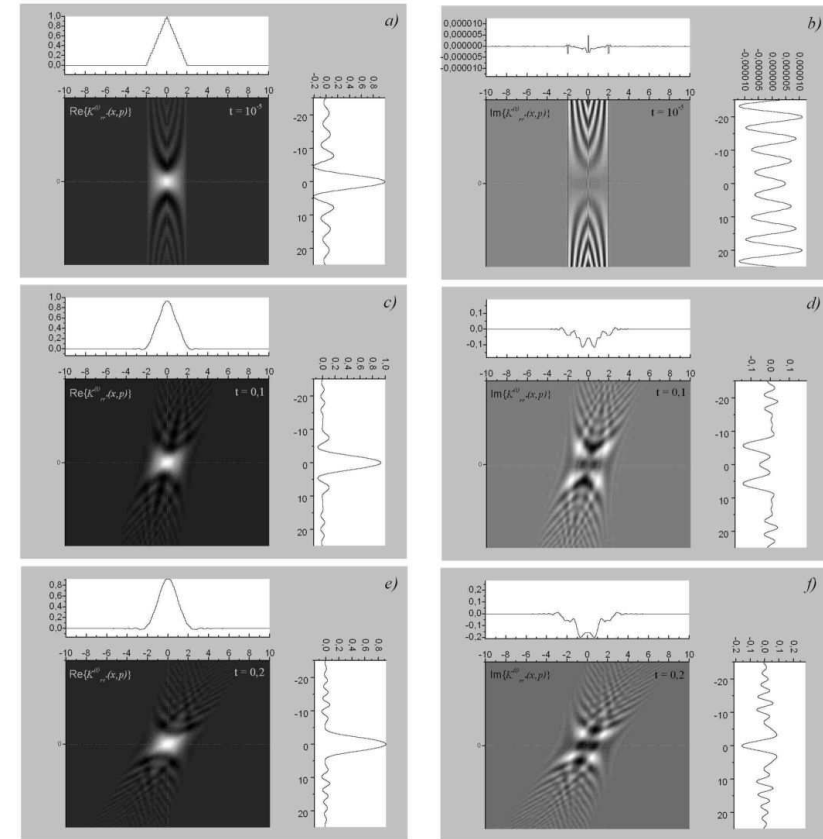


Рис. 11. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу у випадку $t = 0 - 0,3$.

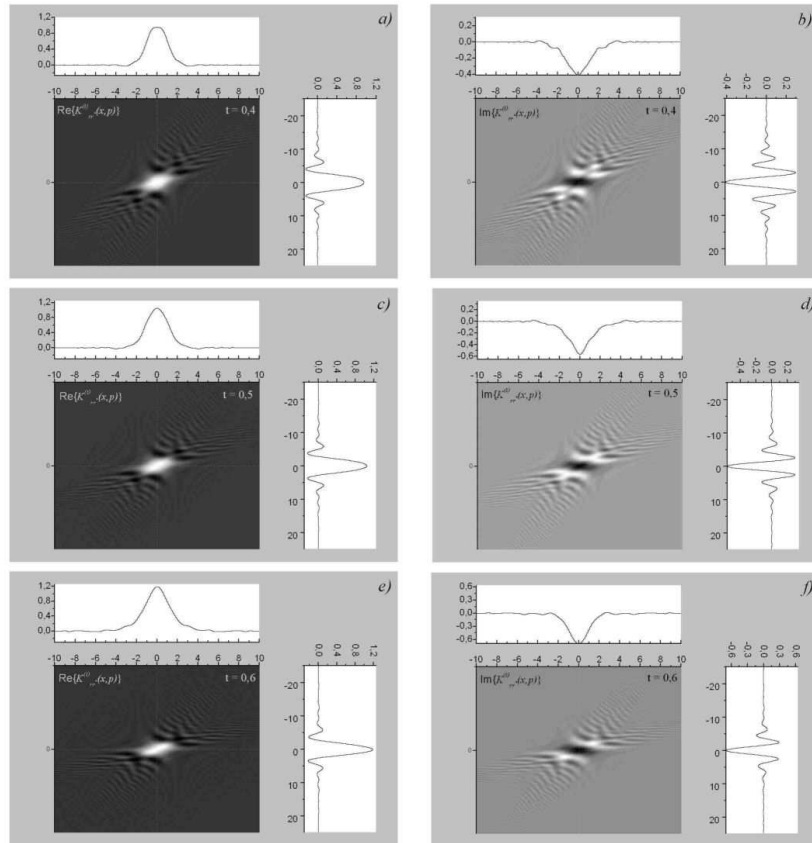


Рис. 12. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу у випадку $t = 0, 4 - 0, 6$.

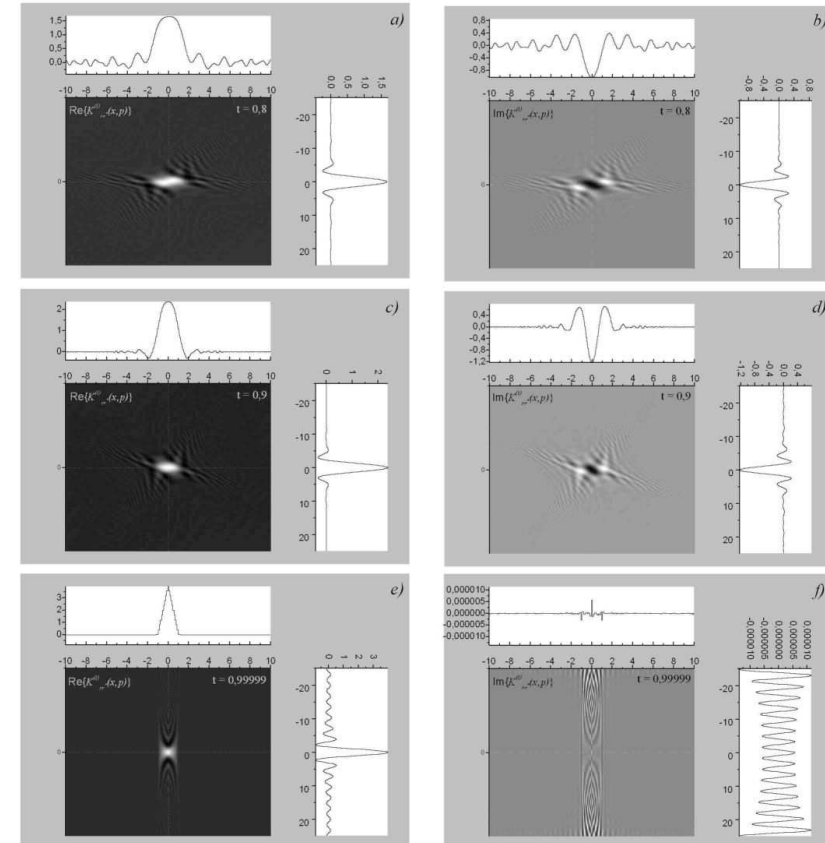


Рис. 13. Формування спільного розподілу прямокутного імпульсу у випадку $t = 0, 8 - 1, 0$.

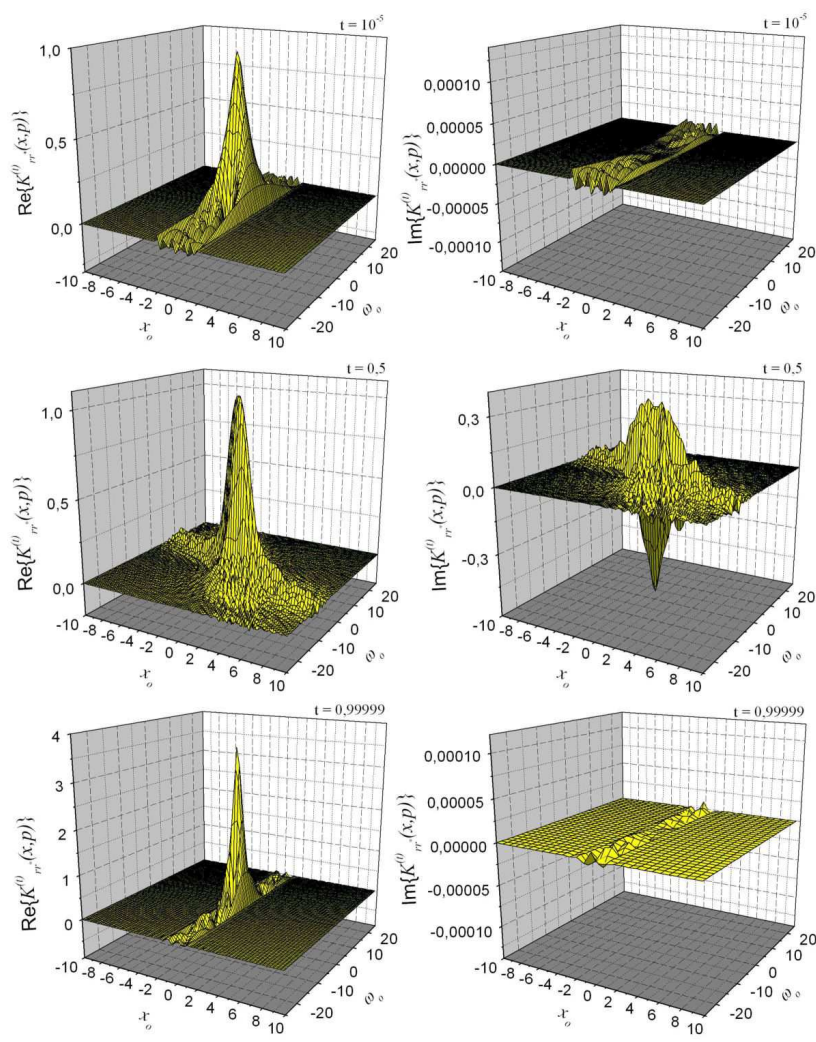


Рис. 14. Перерозподіл спільного розподілу прямокутного імпульсу між областями Вейля та Вігнера (дійсна та уявна частини).

5. Висновки

В роботі запропоновано спільний просторово-частотний розподіл, як узагальнення до відомих розподілів Вейля та Вігнера. В результаті чисельних та аналітичних розрахунків досліджено механізм перерозподілу між згаданими вище розподілами. Показано, що розподіли Вейля та Вігнера є граничними випадками спільного розподілу. Детально досліджено область між цими двома граничними випадками та встановлено неперервний зв'язок між розподілами Вігнера та Вейля, як поворот на інформаційній діаграмі спряжених координат пропорційно до спільного параметра t . Для цілісного опису спільного розподілу вперше запропоновано частотне представлення з допомогою якого вдалося розрахувати граничні випадки, чого не можна було зробити на основі використання лише координатного представлення. Враховуючи той факт, що дослідження спільного розподілу спрямовані на його використання при описі оптичних систем детально досліджено розподіл функції прямокутного імпульсу, як елементу оптичного зображення. В роботі вперше було отримано ряд аналітичних формул для розрахунку спільного розподілу прямокутного імпульсу. Результати чисельних розрахунків підтвердили теоретичні оцінки та констатували факт встановлення однозначного зв'язку між розподілами Вейля та Вігнера та механізму перерозподілу між ними. Основна перевага використання спільного розподілу полягає в можливості відновлення інтенсивності вхідного сигналу, що експериментально реєструється на виході оптичної системи. Попередні висновки про ефективність використання спільного розподілу при описі оптичних систем можна зробити на основі того факту, що розподіл Вейля який є його граничним випадком успішно використовується в подібних задачах [11]. Важливо також відмітити, що спільний розподіл включає в себе два розподіли, які широко використовуються при описі оптичних систем обробки інформації. Тому є всі підстави вважати, що спільний просторово-частотний розподіл знайде використання при описі сучасних оптичних систем.

Подяка Автор висловлює щире подяку професору Козловському М.П., доктору фіз.-мат. наук Шовгенюку М.В. та кандидату фіз.-мат. наук Крохмальському Т.Є. за цінні поради та плідні наукові дискусії під час виконання цієї роботи. Окрема подяка Президенту України за надання гранту, в рамках фінансової підтримки якого була виконана ця робота.

Література

1. Wigner E.P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. - 1933. - vol 40. - P.749-759.
2. Ville J. Theorie et applications de la notion de signal analytique // Cables et Transmissions - 1948. - vol 2A. - P.61-74.
3. Коэн Л. Время-частотные распределения: Обзор // ТИИЭР - 1989. - т. 77.- № 10 - P.72-120.
4. Chountasis S., Vourdas A. and Bendjaballah C. *Fractional Fourier operators and generalized Wigner functions* // Phys. Rev. A Vol. 60, № 5, 1999, P. 3467-3473.
5. Козловський Ю.М. *Узагальнений координатно-частотний розподіл: дробове представлення*. Препринт ICMP-06-27U, 2006, 25 с.
6. Сы Х. Х., Колфилд Дж. Х. Взаимное время-частотное содержание двух сигналов // ТИИЭР, 1984, т.72, № 7 с.173-180.
7. Шовгенюк М.В. *Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції*. Препринт ІФКС-92-25У, 1992, 40 с.
8. Lohmann A.W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // J. Opt. Soc. Am. A. - 1993. - vol 10. - No 10. - P.2181-2186.
9. Ozaktas H.M., Kutay M.A., Zalevsky Z. *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* // John Wiley & Sons. 2000. 500 p.
10. Сороко Л.М. *Основы голографии и когерентной оптики*. М.: Наука, 1971. 616 с.
11. Kozlovskii Yu.M. Generalized fractional Fourier transform and optical systems // Ukr.J.Phys.Opt. - 2003 vol.3 - P.124-134.
12. Шовгенюк М.В., Козловський Ю.М. *Дробове фур'є-перетворення оптичних сигналів*. Препринт ICMP-01-05U, 2001, 40 с.
13. Шовгенюк М. В., Козловський Ю. М. Самоподібність спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // Доповіді НАН України. - 2000. - №.6. - С.92-97.
14. Chountasis S., Vourdas A. *Weyl functions and their use in the study of quantum interference* // Phys. Rev. A Vol. 58, № 2, 1998, P. 848-855.
15. Chountasis S., Vourdas A. *Weyl and Wigner functions in an extended phase-space formalism* // Phys. Rev. A Vol. 58, № 3, 1998, P. 1794-1798.
16. Namias V. The Fractional Order Fourier transform and its Appli-

- cation to Quantum Mechanics // J. Instr. Maths Applics. - 1980. - vol 25. - P.241-265.
17. Roy S. and Singh V. *Generalized coherent states and the uncertainty principle* // Phys. Rev. D Vol. 25, № 12, 1982, P. 3413-3416.
18. Royer A. *Wigner function in Liouville space: A canonical formalism* // Phys. Rev. A Vol. 43, № 1, 1991, P. 44-56.
19. Royer A. *Wigner function as the expectation value of a parity operator* // Phys. Rev. A Vol. 15, № 2, 1977, P. 449-450.
20. Bishop R. *Displaced and squeezed parity operators: Its role in classical mappings of quantum theories.* // Phys. Rev. A Vol. 50, № 6, 1994, P. 4488-4501.
21. Шовгенюк М.В. *Координатно-частотний розподіл сигналів: виведення формули дифракції Френеля на ізольованій щільності*. Препринт ІФКС-92-21У, 1992, 28 с.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Freiburg*; R. Folk, *Linz*; D. Henderson, *Provo*; Yu. Holovatch, *Lviv*; M. Holovko, *Lviv*; O. Ivankiv, *Lviv*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; H. Krienke, *Regensburg*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod, *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; N. Plakida, *Dubna*; G. Röpke, *Rostock*; Yu. Rudavskii, *Lviv*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; M. Vavrukh, *Lviv*; A. Zagorodny, *Kyiv*.

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +380(322)760908; Fax: +380(322)761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>