Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–01–31U

В. І. Третяк

# ПОНДЕРОМОТОРНІ СИЛИ У СТАБІЛЬНИХ КОМПЛЕКСАХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК І ПРОБЛЕМИ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОЇ СЕПАРАЦІЇ

ЛЬВІВ

**УДК:** 532; 533; 533.9:530.182; 536.75

**PACS:** 05.60.+w, 05.70.Ln, 05.20.Dd, 75.50.Mm, 75.20.+g

**Пондеромоторні сили у стабільних комплексах заряджених частинок і проблеми електромагнетної сепарації**

В. І. Третяк

**Анотація.** Сили, що діють на електроневтральний стабільний комплекс заряджених частинок у неоднорідному електромагнетному полі, виведено шляхом прямого усереднення нерелятивістичних рівнянь руху центра мас комплекса за неспостережуваними рухами складових частинок. Показано, що за наявности лише електричного або лише магнетного поля отримані рівняння руху виводяться з функції Лаґранжа. Обговорено застосування рівнянь руху з побудованими силами до проблем електромагнетної сепарації.

**Ponderomotive forces in the stable complexes of charged particles and the problems of electromagnetic separation**

V. I.Tretyak

**Abstract.** Forces acting on the electrically neutral stable complex of charged particles in nonhomogeneous electromagnetic field are derived by direct averaging nonrelativistic equations of motion of the center of mass of the complex over the nonobservable motions of the constituent particles. It is shown, if only electric or magnetic field is present, the obtained equations of motion are derivable from the Lagrangian function. The application of the equation of motion with constructed forces to the problems of electromagnetic separation is discussed.

## Вступ

Виведення рівнянь руху складеної частинки у зовнішньому електромагнетному полі має довгу історію [1,2] та низку важливих застосувань. Серед останніх вагоме місце посідає електромагнетна сепарація [3–6], яка базується на залежності такого руху від електричних та магнетних сприйнятливостей речовини, що дозволяє ефективно розділяти матеріяли з різними електромагнетними характеристиками. Експериментальне встановлення своєрідних магнетних та діелектричних властивостей паливомістних матеріялів, що утворилися внаслідок вибуху в четвертому енергоблоці Чорнобильської АЕС, поставило проблему застосування методів електромагнетної сепарації для їх відділення від оточуючих елементів конструкцій, піску та бетону [7].

У область з неоднорідним електромагнетним полем сепаровні матеріяли подаються у подрібненому вигляді із розмірами частинок від міліметрів до сотень нанометрів, які, як правило, не несуть електричного заряду. Хоча встановлення сил (їх називають пондеромоторними), що діють на такі об'єкти з боку електромагнетного поля, належить до класичних розділів фізики, слід відзначити, що багато існуючих виведень цих сил не вільні від певних непослідовностей і зайвих обмежень та спрощень, які, замість прояснювати, приховують справжню загальність результатів та межі їх застосовности. Найбільш повним та послідовним викладом засад макроскопічної електродинаміки нам видається монографія [1]. Наведений там підхід використовується і в нашій роботі. Однак замість апелювати до термодинамічних міркувань та методів механіки суцільних середовищ тут рівняння руху складених частинок подаються як результат усереднення рівнянь руху центра мас системи заряджених (мікроскопічних) частинок за неспостережуваними рухами її складових. Це становить предмет першого розділу праці.

У другому розділі отримані вирази для пондеромоторної сили конкретизуються у випадку лінійних ізотропних матеріяльних співвідношень для діелектриків і пара(діа)магнетиків. У третьому аналізуються отримані рівняння руху з врахуванням однорідного силового поля тяжіння та розглядаються деякі ілюстративні приклади.

Критерії ефективности сепарації та числові оцінки для речовин з фізичними характеристиками паливомістних мас об'єкту "Укриття" будуть подані в окремій праці.



## 1. Пондеромоторні сили у комплексах заряджених частинок

На мікроскопічному рівні розглядаємо складену частинку як компактне утворення (комплекс), породжене системою точкових зарядів $e_a$ з координатами $\mathbf{y}_a$ $(a = 1, 2, \ldots)$. Вони створюють електромагнетне поле $\mathbf{e}, \mathbf{b}$, яке визначається рівняннями Максвела [1]

$$\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{b} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

з відповідними густинами заряду і струму:

$$\rho = \sum_a e_a \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a\right), \qquad \mathbf{j} = \sum_a e_a \dot{\mathbf{y}}_a \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}_a\right). \tag{3}$$

Закікавмося тепер поведінкою такого комплексу в зовнішньому електромагнетному полі $\mathbf{E}_\mathrm{e}, \mathbf{B}_\mathrm{e}$, створеному своїми власними густинами заряду і струму $\rho_\mathrm{e}, \mathbf{j}_\mathrm{e}$. Нерелятивістичні рівняння руху складових частинок нашого комплексу детермінує звичайна сила Лоренца

$$m_a \ddot{\mathbf{y}}_a = e_a \left( \mathbf{e}_\mathrm{t}\left(t, \mathbf{y}_a\right) + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{b}_\mathrm{t}\left(t, \mathbf{y}_a\right) \right), \tag{4}$$

де внаслідок лінійности рівнянь Максвела повне електричне і магнетне поля $\mathbf{e}_\mathrm{t}$, $\mathbf{b}_\mathrm{t}$ є сумою зовнішніх полів $\mathbf{E}_\mathrm{e}$, $\mathbf{B}_\mathrm{e}$ та полів, утворених іншими частинками у точці знаходження заряду $e_a$. В нерелятивістичному наближенні останні зводяться до кулонового електричного поля, так що

$$\mathbf{e}_\mathrm{t}\left(t, \mathbf{y}_a\right) = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b \mathbf{y}_{ab}}{\left|\mathbf{y}_{ab}\right|^3} + \mathbf{E}_\mathrm{e}\left(t, \mathbf{y}_a\right), \qquad \mathbf{y}_{ab} \equiv \mathbf{y}_a - \mathbf{y}_b; \tag{5}$$

$$\mathbf{b}_\mathrm{t}\left(t, \mathbf{y}_a\right) = \mathbf{B}_\mathrm{e}\left(t, \mathbf{y}_a\right). \tag{6}$$

Уявімо собі тепер, що маємо справу з достатньо стабільним комплексом точкових частинок, коли в силу тих чи інших обставин відхилення $\mathbf{y}_a$ від деякої виділеної точки комплексу $\mathbf{y}$ (наприклад, центра мас) є достатньо малі. Якщо покласти

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{y} + \mathbf{r}_a, \tag{7}$$

то розв'язки польових рівнянь $\mathbf{e}(t,\mathbf{x}),\mathbf{b}(t,\mathbf{x})$ можна подати у вигляді збіжних рядів за параметром $|\mathbf{r}_a|/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. З цією метою можна скористатися формальним розвиненням $\delta$-функції

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}_a)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{r}_a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\mathbf{r}_a\cdot\nabla\right)^n\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{8}$$

або використати символічний інтеґрал

$$\int_0^1 d\tau\frac{d}{d\tau}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{r}_a)-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{9}$$

що дає

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{r}_a)=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{r}_a\cdot\nabla)\int_0^1 d\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a). \tag{10}$$

На відміну від [1], тут використовується друга можливість. Це дозволяє подати неоднорідні рівняння Максвела (1) у вигляді

$$\operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})-4\pi\operatorname{div}\mathbf{p}, \tag{11}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{b}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}q\dot{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+4\pi\operatorname{rot}\mathbf{m}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial t}. \tag{12}$$

Тут

$$q=\sum_a e_a \tag{13}$$

— повний заряд комплекса, а мікроскопічні вектори поляризовности $\mathbf{p}$ та намагнічення $\mathbf{m}$ задаються співвідношеннями

$$\mathbf{p}=\sum_a e_a\mathbf{r}_a\int_0^1 d\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a), \tag{14}$$

$$c\mathbf{m}=\mathbf{p}\times\dot{\mathbf{y}}+\sum_a e_a\mathbf{r}_a\times\dot{\mathbf{r}}_a\int_0^1 d\tau\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a). \tag{15}$$

У одержанні виразу (15) для $\mathbf{m}$ слід скористатися формулою

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{r}_a)-\int_0^1 d\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a)=-(\mathbf{r}_a\cdot\nabla)\int_0^1 d\tau\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a), \tag{16}$$



яка випливає з очевидного співвідношення

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\mathbf{r}_a)=\int_0^1 d\tau\frac{d}{d\tau}\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a)$$
$$=\int_0^1 d\tau\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a)+\int_0^1 d\tau\tau\frac{d}{d\tau}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}-\tau\mathbf{r}_a). \tag{17}$$

Проведемо тепер усереднення за неспостережуваними рухами внутрішніх координат $\mathbf{r}_a$, яке згладить синґулярності мікроскопічних величин (14), (15), як і породжених ними полів $\mathbf{e}$ і $\mathbf{b}$. Позначаючи усереднені величини відповідними великими буквами, з рівнянь (11), (12) отримаємо

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})-4\pi\operatorname{div}\mathbf{P}, \tag{18}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}q\dot{\mathbf{y}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+4\pi\operatorname{rot}\mathbf{M}+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{19}$$

Звісно, однорідні рівняння (2) далі виконуватимуться і для усереднених полів $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0. \tag{20}$$

Наведений виклад є цілком стандартний і його в тій чи іншій формі можна знайти у низці підручників з класичної електродинаміки. Якщо ще ввести позначення

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P},\qquad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}, \tag{21}$$

то можна прийти до звичної форми рівнянь Максвела у середовищі. Як слушно, однак, віднотовано у книзі де Гроота й Сатторпа [1], така форма цих рівнянь, хоча у зручна у певних відношеннях (наприклад, у формулюванні граничних задач), насправді завуальовує той факт, що реальний фізичний сенс навіть у середовищі мають власне (усереднені) поля $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$, що характеризуються системою рівнянь (18)—(20), а величини (21) служать лише зручними позначеннями.

Розгляньмо тепер подібну процедуру усереднення для рівнянь руху (4). У попередньому розгляді вектор $\mathbf{y}$ фактично лишався довільним і необхідности в якійсь його конкретизації не виникало. Він міг бути (нерелятивістичним) центром мас комплексу, а міг ним і не бути. Тому рівняння (11)—(15) справедливі як у нерелятивістичній, так і в релятивістичній області[1]. Аналогічно і процедура

[1]Важливе з багатьох точок зору питання виділення незвідних складових з мультипольних розвинень (14), (15) [8,9] лишається за межами нашого розгляду.

усередення, принаймні у використаній тут словесній формі, нечутлива до конкретного вибору вектора "центра" комплексу $\mathbf{y}$. Звісно, усі координати $\mathbf{r}_a$, що піддаються усередненню, не можуть бути незалежними, між ними мусить існувати одна векторна в'язь (чи 3 скалярні в'язі)[2], однак явний вигляд цих в'язей ніяк не відіб'ється на рівняннях Максвела (18)—(20). З рівняннями руху ситуація принципово інша. Ми повинні тут чітко обмежитись нерелятивістичним наближенням[3] і вектор $\mathbf{y}$ вибрати власне як нерелятивістичний центр мас

$$\mathbf{y} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{y}_a}{m}, \qquad m = \sum_a m_a. \tag{22}$$

За такого вибору $\mathbf{y}$ згадана вище в'язь між змінними $\mathbf{r}_a$ має вигляд

$$\sum_a m_a \mathbf{r}_a = 0. \tag{23}$$

Підсумувавши рівняння Лоренца (4) за $a$ і віднотувавши скорочення внесків від внутрішньої кулонівської взаємодії (третій закон Нютона!), одержимо

$$m\ddot{\mathbf{y}} = \sum_a e_a \left( \mathbf{E}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a) + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{B}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a) \right)$$

$$\equiv \sum_a e_a \left( \mathbf{E}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \mathbf{r}_a) + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{y}}_a + \dot{\mathbf{r}}_a) \times \mathbf{B}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \mathbf{r}_a) \right) \equiv \mathbf{f}. \tag{24}$$

Враховуючи тепер, що для кожної функції $g(\mathbf{y})$ виконується співвідношення, подібне до (10),

$$g(\mathbf{y} + \mathbf{r}_a) = g(\mathbf{y}) + \int_0^1 d\tau \frac{d}{d\tau} g(\mathbf{y} + \tau \mathbf{r}_a)$$

$$= g(\mathbf{y}) + (\mathbf{r}_a \cdot \nabla) \int_0^1 d\tau g(\mathbf{y} + \tau \mathbf{r}_a), \tag{25}$$

можемо подати силу $\mathbf{f}$, що діє на наш комплекс, у вигляді

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}_L + \mathbf{f}'. \tag{26}$$

[2] Так що функція розподілу, яка здійснюватиме таке усереднення, повинна містити $\delta$-функцію від згаданої в'язі.

[3] Слабкорелятивістичні поправки [10,11] тут, звісно, можуть бути враховані, однак це зовсім не проста і досить громіздка задача.



Тут $\mathbf{F}_L$ — звичайна сила Лоренца,

$$\mathbf{F}_L = q \left( \mathbf{E}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{y}}_a \times \mathbf{B}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}) \right), \tag{27}$$

а

$$\mathbf{f}' = \sum_a e_a \int_0^1 d\tau \left[ (\mathbf{r}_a \cdot \nabla) \mathbf{E}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \tau \mathbf{r}_a) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{y}}_a \times (\mathbf{r}_a \cdot \nabla) \mathbf{B}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \tau \mathbf{r}_a) + \frac{\dot{\mathbf{y}}_a}{c} \times \mathbf{B}_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \mathbf{r}_a) \right] \tag{28}$$

— мікроскопічний відповідник пондеромоторної сили. Після низки дещо втомливих, хоч і безпосередніх перетворень, використовуючи те, що зовнішні поля $\mathbf{E}_\mathrm{e}$, $\mathbf{B}_\mathrm{e}$ теж повині задовольняти однорідним рівнянням Максвела (20), та формулу

$$g(\mathbf{y} + \mathbf{r}_a) = \int_0^1 d\tau \frac{d}{d\tau} \tau g(\mathbf{y} + \tau \mathbf{r}_a)$$

$$= \int_0^1 d\tau \left[ g(\mathbf{y} + \tau \mathbf{r}_a) + \tau (\mathbf{r}_a \cdot \nabla) g(\mathbf{y} + \tau \mathbf{r}_a) \right], \tag{29}$$

аналогічну до (16), можна виразу (28) надати такого вигляду:

$$f'_i = \sum_a e_a \int_0^1 d\tau \left[ r_{aj} \frac{\partial E^j_\mathrm{e}}{\partial y^i}(t, \mathbf{y}_a + \tau \mathbf{r}_a) + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} r^j_a B^k_\mathrm{e}(t, \mathbf{y}_a + \tau \mathbf{r}_a) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\epsilon_{kln} r^l_a (\dot{y}^n + \tau \dot{r}^n_a) \frac{\partial B^k_\mathrm{e}}{\partial y^i}(t, \mathbf{y}_a + \tau \mathbf{r}_a) \right], \tag{30}$$

де $\epsilon_{ijk}$ — повністю антисиметричний тензор Леві–Чівіта. Тепер, враховуючи означення (14), (15) векторів мікроскопічної поляризовности $\mathbf{p}$ та намагнічення $\mathbf{m}$, можна виразити цю формулу інтеґралом за об'ємом $V$ системи:

$$f'_i = \int_V d^3x \left( p_j \frac{\partial E^j_\mathrm{e}}{\partial x^i} + m_j \frac{\partial B^j_\mathrm{e}}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk} \frac{d}{dt} p^j B^k_\mathrm{e} \right) \tag{31}$$

Здійснюючи тут усереднення за внутрішніми рухами змінних $\mathbf{r}_a$, приходимо до виразу для пондеромоторної сили $\mathbf{F}_\mathrm{em} = \langle \mathbf{f}' \rangle$,

$$F^i_\mathrm{em} = \int_V d^3x \left( P_j \frac{\partial E^j_\mathrm{e}}{\partial x_i} + M_j \frac{\partial B^j_\mathrm{e}}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\epsilon^i{}_{jk} \frac{d}{dt} P^j B^k_\mathrm{e} \right), \tag{32}$$

що діє на комплекс об'єму $V$, локалізований поблизу точки $\mathbf{y}$. Віднотуємо, що ні зовнішні поля, ні координата центра мас $\mathbf{y}$ при цьому не усереднюються. Уважаючи тепер об'єм $V$ достатньо малим, щоб середні у ньому лишались однорідними, можна, застосовуючи теорему про середнє, записати

$$F^i_{\mathrm{em}} = V\left(P_j\frac{\partial E^j_{\mathrm{e}}}{\partial y_i} + M_j\frac{\partial B^j_{\mathrm{e}}}{\partial y_i} + \frac{1}{c}\epsilon^i{}_{jk}\frac{d}{dt}P^jB^k_{\mathrm{e}}\right), \tag{33}$$

де всі величини у правій частині беруться у точці $\mathbf{y}$.

## 2. Врахування матеріяльних співвідношень

Практично величини макроскопічної поляризовности $\mathbf{P}$ й намагніченості $\mathbf{M}$ рідко розраховуються згідно їх означення як середні від мікроскопічних виразів (14), (15). Звичайно вирази для цих величин конструюються в рамках певних феноменологічних моделей. Зрештою, одну пару співвідношень, що пов'язують максвелові поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, зовнішні поля $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ та вектори $\mathbf{P}$ і $\mathbf{M}$ можна одержати з рівнянь Максвела (18)–(20) незалежно від постульованих матеріяльних співвідношень.

Уводячи звичайним чином скалярний та векторний потенціяли і розв'язуючи отримані рівняння в нерелятивістичному наближенні, для електроневтрального ($q = 0$) діелектричного комплексу отримуємо [1]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\int_V d^3x'\,\frac{\operatorname{div}\mathbf{P}(t,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \tag{34}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\times\int_V d^3x'\,\frac{\operatorname{rot}\mathbf{M}(t,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \tag{35}$$

де інтеґрали беруться за об'ємом $V$ нашого комплексу. Вираз $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ у знаменниках цих формул походить від нерелятивістичного наближення функції Ґріна відповідного хвильового рівняння для потенціялів.

Міняючи тепер у формулі (34) порядок диференціювання та інтеґрування та інтеґруючи частинами, можна отримати

$$E^i = E^i_{\mathrm{e}} + \int_V d^3x'\,P_k(t,\mathbf{x}')\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{36}$$

Якщо об'єм $V$ комплексу достатньо малий, то, застосовуючи теорему про середнє, отримуємо

$$E^i(t,\mathbf{x}) = E^i_{\mathrm{e}}(t,\mathbf{x}) - 4\pi P_k(t,\mathbf{x})\pi^{ik}, \tag{37}$$



де

$$\pi^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3x'\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{38}$$

Аналогічно з рівняння (35) можна одержати

$$B^i(t,\mathbf{x}) = B^i_{\mathrm{e}}(t,\mathbf{x}) + 4\pi M_k(t,\mathbf{x})\left(\delta^{ik} - \pi^{ik}\right), \tag{39}$$

де $\delta^{ik}$ позначає символ Кронекера.

Тензор $\pi^{ik}$ (у електричному контексті він називається тензором деполяризації, а у магнетному — тензором розмагнічення, див. [12]), як видно з його означення (38), є симетричним,

$$\pi^{ik} = \pi^{ki}, \tag{40}$$

а його слід

$$\operatorname{Tr}\|\pi^{ik}\| \equiv \pi^i_i = 1. \tag{41}$$

Остання властивість випливає з формули $\Delta|\mathbf{x}|^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{x})$.

У випадку тіла кулястої форми співвідношень (40), (41) достатньо, щоб отримати

$$\pi^{ik} = \frac{1}{3}\delta^{ki}. \tag{42}$$

Тоді формули (37), (39) набирають вигляду [12,1]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{e}} - \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{e}} + \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}. \tag{43}$$

Хоча компоненти тензора (38) пораховано (в еліптичних функціях) для еліпсоїда з довільними осями, простих рівностей (43) достатньо для більшості застосувань.

Щоб конкретизувати вигляд функцій $\mathbf{P}$ і $\mathbf{M}$, слід долучити до формул (37), (39) ще пару (векторних) рівнянь. Вони звичайно формулюються у термінах т.зв. матеріяльних співвідношень, що пов'язують вектори $\mathbf{E}$ і $\mathbf{D}$ та $\mathbf{B}$ і $\mathbf{H}$. Найпростіша форма таких співвідношень виникає просто з припущення про їх пропорційність:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{44}$$

Коефіцієнти $\epsilon$ і $\mu$ з термодинамічних міркувань обмежені нерівностями [12]

$$\epsilon > 1, \qquad \mu > 0. \tag{45}$$

Тепер для кулястого комплексу формули (43) і (44) дозволяють знайти вектори $\mathbf{P}$ і $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{P} = \frac{3(\epsilon-1)}{4\pi(\epsilon+2)}\mathbf{E}_{\mathrm{e}} = \frac{3\kappa}{3+4\pi\kappa}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}, \tag{46}$$

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mu-1)}{4\pi(\mu+2)}\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = \frac{3\chi}{3+4\pi\chi}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}. \tag{47}$$

Паралельно тут подано вигляд цих співвідношень у термінах електричної та магнетної сприйнятливостей

$$\kappa = \frac{\epsilon-1}{4\pi}, \qquad \chi = \frac{\mu-1}{4\pi}, \tag{48}$$

які часто використовуються.

Підставляючи формули (46) і (47) у вираз (33) для пондеромоторної сили, одержимо

$$\mathbf{F}_{\mathrm{em}} = \frac{3V}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{2(\epsilon+2)}\frac{\partial E_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\mu-1}{2(\mu+2)}\frac{\partial B_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\epsilon-1}{c(\epsilon+2)}\frac{d}{dt}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\right). \tag{49}$$

Оскільки вираз для сили (49) має низку практичних застосувань, варто переписати його і в Міжнародній системі одиниць. Враховуючи правила підстановки у переході від ґавсової системи до СІ [13],

$$\mathbf{E} \mapsto \sqrt{4\pi\epsilon_0}\mathbf{E}, \qquad 4\pi\kappa \mapsto \kappa,$$
$$\mathbf{B} \mapsto \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\mathbf{B}, \qquad 4\pi\chi \mapsto \chi, \qquad c \mapsto \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{50}$$

матимем

$$\mathbf{F}_{\mathrm{em}} = V\left(\frac{3\kappa\epsilon_0}{2(3+\kappa)}\frac{\partial E_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{y}} + \frac{3\chi}{2\mu_0(3+\chi)}\frac{\partial B_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{y}} + \frac{3\kappa\epsilon_0}{3+\kappa}\frac{d}{dt}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\right). \tag{51}$$

Варто віднотувати, що безрозмірні сприйнятливості $\kappa$, $\chi$ мають різні числові значення у двох згаданих системах одиниць.

## 3. Рівняння руху і питання електромагнетної сепарації

Рівняння руху комплексу масою $m$ під дією пондеромоторної сили (49) і однорідної сили тяжіння $m\mathbf{g}$ мають вигляд

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{3}{4\pi\rho}\left(\frac{\epsilon-1}{2(\epsilon+2)}\frac{\partial E_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mu-1}{2(\mu+2)}\frac{\partial B_{\mathrm{e}}^2}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\epsilon-1}{c(\epsilon+2)}\frac{d}{dt}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}\times\mathbf{B}_{\mathrm{e}}\right) + \mathbf{g} \tag{52}$$



(тут і далі вектор центра мас комплекса позначатимем через $\mathbf{x}$); $\rho = m/V$ — густина.

Перш за все віднотуємо, що у випадку відсутности одного з полів $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}$ чи $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ ці рівняння можна отримати з функції Лаґранжа із потенціялом, залежним від координат і часу. Наприклад, якщо $\mathbf{E}_{\mathrm{e}} = 0$ (або $\kappa = 0$), маємо лаґранжіян

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{V(\mu-1)}{8\pi(\mu+2)}B_{\mathrm{e}}^2(t,\mathbf{x}) + m\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \tag{53}$$

Звідси видно, що потенціял, зумовлений магнетним полем, є притягальним або відштовхувальним залежно тільки від знаку $\mu - 1$ (або $\chi$).

Невідомо, чи існує функція Лаґранжа для повних рівнянь руху (52). З іншого боку, ці рівняння, як і кожну систему рівнянь парного порядку, можна подати у вигляді рівнянь Гамільтона з деякими канонічними змінними $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ [14]. При цьому, однак, канонічна координата $\mathbf{q}$ може не збігатися з $\mathbf{x}$.

Існування функції Лаґранжа дозволяє застосовувати до аналізу рівнянь руху широко опрацьовані методи лаґранжевої та гамільтонової механіки: симетрійний аналіз, побудова інтеґралів руху, зведення до квадратур, асимптотичні розвинення і теорія збурень [15,16]. Так, якщо поле $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}$ не залежить від часу, то негайно отримуємо інтеґрал енергії

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{V(\mu-1)}{8\pi(\mu+2)}B_{\mathrm{e}}^2(\mathbf{x}) - m\mathbf{g}\cdot\mathbf{x}. \tag{54}$$

У випадку плоского руху існування ще одного інтеґрала дозволяє ефективно звести задачу до квадратур.

З ілюстративною метою розгляньмо тут рух у такому полі:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = B_0 e^{-kx}(\cos ky,\ \sin ky,\ 0). \tag{55}$$

Цей вираз використовується в теорії магнетної сепарації, моделюючи поле лінійної послідовности постійних магнетів періодично змінної полярности з кроком $l$ [3]. Тут $B_0$ — величина поля на поверхні магнетної системи, $k = \pi/l$ — коефіцієнт неоднорідности поля. Поле (55) задовольняє однорідні рівняння $\operatorname{div}\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{B}_{\mathrm{e}} = 0$.

Як видно з лаґранжіяна (53), фактично рух визначається функцією

$$B_{\mathrm{e}}^2 = B_0^2 e^{-2kx}. \tag{56}$$

Підставивши її в (53) і поклавши $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$, де $g$ — величина прискорення вільного падання, одержимо

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{mA}{2}e^{-2kx} - mgy, \tag{57}$$

де позначено

$$\mathrm{A} = \frac{3(\mu-1)B_0^2}{4\pi\rho(\mu+2)}. \tag{58}$$

Як бачимо, змінні в лаґранжіяні розділились, так що рухи по осях $x$ і $y$ будуть цілком незалежні (і кожен зі своїм інтеґралом енергії). Явно рівняння руху є

$$\ddot{x} = -Ake^{-2kx}, \tag{59}$$

$$\ddot{y} = -g. \tag{60}$$

Задамо початкові умови:

$$\mathbf{x}(0) = (x_0, y_0, 0), \qquad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, -v_0, 0). \tag{61}$$

Тоді рівняння (60) інтеґрується безпосередньо;

$$y(t) = y_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{62}$$

а інтеґрал енергії для рівняння (59) з врахуванням початкових умов (61) дає

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}Ae^{-2kx} = \mathrm{const} = -\frac{m}{2}Ae^{-2kx_0}, \tag{63}$$

так що

$$\dot{x}^2 = A\left(e^{-2kx} - e^{-2kx_0}\right). \tag{64}$$

Якщо $A > 0$ (парамагнетна частинка), то рух можливий при $x(t) < x_0$. З (64) отримуємо квадратуру

$$t = \frac{1}{\sqrt{A}}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{e^{-2kx} - e^{-2kx_0}}}. \tag{65}$$

Інтеґрал розраховується елементарно, даючи розв'язок

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln|\cos bt|; \qquad b = k\sqrt{A}e^{-kx_0}. \tag{66}$$

Формули (66), (62) задають параметричне рівняння траєкторії. Коли $t \to \pi/2b$, то $x(t) \to -\infty$ — за скінченний час траєкторія виходить на нескінченність. Зрештою, в контексті даної задачі розв'язки з $x(t) < 0$ не мають фізичного сенсу, так що часовий інтервал тут слід обмежити нерівністю



$$t < \frac{1}{b}\arccos e^{-kx_0}. \tag{67}$$

Якщо $A < 0$ (діамагнетна частинка), то $x(t) > x_0$, а розв'зок має вигляд

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln \operatorname{ch} bt; \qquad b = k\sqrt{|A|}e^{-kx_0}. \tag{68}$$

Тут $x(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Звичайно у дослідженнях питань електромагнетної сепарації обмежуються двома першими доданками у правій частині рівнянь руху (52). Тож розгляньмо тут вплив третього доданка у найпростішій ситуації, коли крім неоднорідного магнетного поля (55) на систему діє постійне електричне поле $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}$.

Якщо вектор $\mathbf{E}_{\mathrm{e}}$ лежатиме у тій же площині, що й вектори $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{E}_{\mathrm{e}} = E(\sin\alpha, \cos\alpha, 0), \tag{69}$$

то згаданий доданок продувуватиме силу, ортоґональну до цієї площини. Траєкторія частинки вже не буде плоскою. Рух у площині $(x, y)$ далі визначатиметься рівняннями (59), (60), та долучиться рівняння

$$\ddot{z} = hEB_0\left(\sin\alpha\frac{d}{dt}e^{-kx}\sin ky - \cos\alpha\frac{d}{dt}e^{-kx}\cos ky\right), \tag{70}$$

де позначено

$$h = \frac{3(\epsilon-1)}{4\pi\rho c(\epsilon+2)} > 0. \tag{71}$$

Рівняння (70) має очевидний перший інтеґрал

$$\dot{z} + hEB_0e^{-kx}\cos(ky+\alpha) = \mathrm{const} = hEB_0e^{-kx_0}\cos(ky_0+\alpha), \tag{72}$$

звідки інтеґруванням одержуємо

$$z(t) = hEB_0\left\{te^{-kx_0}\cos(ky_0+\alpha) - \int_0^t d\tau e^{-kx(\tau)}\cos(ky(\tau)+\alpha)\right\}. \tag{73}$$

Враховуючи тут знайдені вище розв'язки (66), (62) рівнянь (59), (60), маємо

$$z(t) = hEB_0 e^{-kx_0} \left\{ t\cos(ky_0+\alpha) - \int_0^t d\tau \frac{\cos(ky_0+\alpha-kv_0\tau-kg\tau^2/2)}{\cos b\tau} \right\} \quad (74)$$

(для визначености ми обмежились випадком $A > 0$). З фізичних міркувань часовий інтервал повинен задовольняти нерівність (67).

Як бачимо, виникає цікава можливість застосовувати сепарацію у напрямку, ортоґональному до прикладеного поля.

Якщо зовнішнє поле $\mathbf{E}_{\rm e}$ ортоґональне до площини (x,y),

$$\mathbf{E}_{\rm e} = (0, 0, E), \quad (75)$$

то рух частинки лишатиметься плоским, однак рівняння руху значно ускладняться:

$$\ddot{x} = -Ake^{-2kx} - hEB_0 \frac{d}{dt} e^{-kx} \sin ky, \quad (76)$$

$$\ddot{y} = -g + hEB_0 \frac{d}{dt} e^{-kx} \cos ky. \quad (77)$$

Рівняння (77) можна один раз проінтеґрувати, понижуючи його порядок:

$$\dot{y} = -gt - v_0 + hEB_0 \left( e^{-kx}\cos ky - e^{-kx_0}\cos ky_0 \right), \quad (78)$$

але цього ще недостатньо для зведення задачі до квадратур. Розкриваючи похідну за часом у правій стороні (76), маємо

$$\ddot{x} = -Ake^{-2kx} + hEB_0 ke^{-kx} \left( \dot{x}\sin ky - \dot{y}\cos ky \right). \quad (79)$$

## Підсумки

У праці подано виведення рівнянь руху складеної частинки у зовнішньому електромагнетному полі (рівняння (52)). Крім звичайних членів з ґрадієнтами зовнішніх полів воно містить доданок з похідною за часом від векторного добутку самих полів. Деяку інформацію про історію його виведення і експериментальну верифікацію можна знайти в огляді [2].

Рівняння (52) чутливі до форми матеріяльних співвідношень. Якби, наприклад, замість другої формули в (44) взяти

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu\mathbf{H} \quad (80)$$



з деяким постійним $\mathbf{B}_0$, то замість (47) ми б мали

$$\mathbf{M} = \frac{3[\mathbf{B}_0 + (\mu-1)\mathbf{B}_{\rm e}]}{4\pi(\mu+2)}, \quad (81)$$

і в рівнянні (52) з'явиться додатковий член

$$\frac{3}{4\pi\rho(\mu+2)} \frac{\partial \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_{\rm e}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (82)$$

У практичних застосуваннях важливу роль відіграє сила опору середовища, яка вимагає чисто феноменологічного трактування, прив'язаного до конкретних експериментальних чи технічних умов [5]. Це питання розглядатиметься в контексті магнетної сепарації паливомісних мас об'єкту "Укриття" в окремій праці.

## Посилання


1. С. Р. де Гроот, Л. Г. Сатторп. Электродинамика. — Москва, Наука, 1982.
2. L.G. Suttorp. Statistical foundation of electrodynamic theory. In: Physics in the Making, ed. by A. Sarlemjin, M.J. Sparnaay. Amsterdam, North-Holland, 1989, pp. 167–194.
3. В.И. Кармазин, В.В. Кармазин. Магнитные методы обогащения. — Москва, Недра, 1984.
4. Н.Ф. Мясников, Г.А. Бехтле, А.Ф. Кальвасинский. Полиградиентные магнитные сепараторы. — Москва, Недра, 1973.
5. А.И. Ангелов, И.П. Верещагин, В.С. Ершов и др. Физические основы электрической сепарации. — Москва, Недра, 1983.
6. А.И. Месеняшин. Электрическая сепарация в сильных полях. — Москва, Недра, 1978.
7. Л.В. Жидков. Ферримагнетизм топливосодержащих материалов объекта "Укрытие" // Проблеми Чорнобиля. — Вип. 6. — Чорнобиль, МНТЦ "Укриття" НАН України, 2000, с. 6–12.
8. Б.В. Медведев. Начала теоретической физики. — Москва, Наука, 1977.
9. В.М. Дубовик, Л.А. Тосунян. Тороидные моменты в физике электромагнитных и слабых взаимодействий // Физ. ЭЧАЯ 1983, **14**, вып. 5, с. 1193–1228.
10. Р. П. Гайда. Квазирелятивистские системы взаимодействующих частиц // Физ. ЭЧАЯ 1982, **13**, вып. 2, с. 427–493.

11. R. P. Gaida, Yu. B. Kluchkovsky, V. I. Tretyak. Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles. — Constraint's Theory and Relativistic Dynamics. Eds. G. Longhi, L. Lusanna. — Singapore, World Scientific Publ., 1987, pp. 210–241.
12. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. — Москва, Наука, 1982.
13. Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Том III. Электричество. — Москва, Наука, 1982.
14. R. N. Hill. Canonical formulation of relativistic mechanics // J. Math. Phys., 1967, **8**, No 9, pp. 1756–1773.
15. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. — Москва, Наука, 1974.
16. Г. Іро. Класична механіка. — Львів, ЛНУ, 1999.

Володимир Іванович Третяк

Пондеромоторні сили у стабільних комплексах заряджених частинок і проблеми електромагнетної сепарації

Роботу отримано 2 грудня 2001 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів і сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України