Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

САРКАНИЧ Петро Васильович

УДК 537.9

ДИСЕРТАЦІЯ

УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ СКЛАДНИХ СИСТЕМ: АНАЛІЗ НУЛІВ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ І СКЛАДНІ МЕРЕЖІ

01.04.02 — теоретична фізика
(104 — фізика та астрономія)
10 — природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ П. В. Сарканич

Наукові керівники:
Головач Юрій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор
Ральф Кенна, доктор філософії, професор

Львів — 2019

АНОТАЦІЯ

Саркanич П.В. Універсальність складних систем: аналіз нулів статистичної суми і складні мережі. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 — Фізика та астрономія). — Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2019.

Метою дисертації є дослідження універсальності у складних системах. Поняття універсальності – незалежності характерної поведінки макроскопічної системи, що складається з багатьох взаємодіючих частин, від деталей будови цієї системи – є одним із підставових понять статистичної фізики. Все частіше це поняття виходить за межі суто фізичних задач і використовується в загальнонауковому чи загальнокультурному контексті. Під складними системами ми розуміємо такі, для яких характерна колективна поведінка, яка не є простим наслідком властивостей їх складових частин. Поняття складної системи стосується багатьох традиційних дисциплін науки і є предметом нової міждисциплінарної галузі знань - науки про складні системи. Методи і концептуальний апарат статистичної фізики є однією із важливих складових цієї науки.

Оскільки складні системи складаються з багатьох зв'язаних компонент, яким притаманна колективна поведінка, для їх дослідження природно використовувати інструментарій теорії фазових переходів. Зокрема, дослідження впорядкування у складних спінових моделях дозволяє зрозуміти на принциповому рівні та кількісно описати формування універсальної – спільної для всіх – поведінки в різних за своєю природою фізичних, хімічних, біологічних, соціальних системах. При цьому стани спінової змінної відповідають станам різних за своєю природою агентів, а структура розташування агентів-спінів та тип взаємодії моделюють їх відповідники у реальній складній системі.

Дисертація складається з чотирьох розділів. В першому розділі дисертації подано огляд літератури. Основна увага приділяється моделям та методам їх

опису, що використовуються в дисертаційному дослідженні. Зокрема, в дисертації використовуються дві моделі: модель Ізінга з дипольною взаємодією та модель Поттса з невидимими станами. Модель Ізінга з дипольною взаємодією використовується для опису формування структури в складних системах, а модель Поттса з невидимими станами використовується для дослідження того, як ентропія впливає на універсальність. Серед методів, які використовуються в дослідженні, два описані детально в Розділі 1.3. Перший метод - це аналіз нулів статистичної суми у комплексній площині. Два найбільш вживаних випадки - комплексне магнітне поле (нулі Лі-Янга) і комплексна температура (нулі Фішера). Виходячи із властивостей розташування цих нулів, можна отримати критичні властивості системи такі як критичні показники, відношення критичних амплітуд і положення критичних точок. Другий - метод складних мереж. У рамках цього методу розглядається система багатьох частинок (агентів) представлена у вигляді графа, де вузлами виступають взаємодіючі частинки, а ребра позначають взаємодією між ними.

В другому розділі дисертації використано метод аналізу нулів статистичної суми для вивчення критичної поведінки двовимірної моделі Ізінга із дипольно взаємодією і одновимірної моделі Поттса з невидимими станами. Двовимірна модель Ізінга із дипольною взаємодією може описувати тонкоплівкові матеріали, які використовуються для виготовлення пристроїв із високою густиною зберігання інформації. Для неї проаналізовано ділянку фазової діаграми та показано, що критичні показники неперервно залежать від відношення констант короткосяжної та дипольної взаємодії δ. В усій ділянці параметра δ, де основний стан характеризується смужковою антиферомагнітною фазою із товщиною смужок $h = 1$, перехід до високотемпературної парамагнітної (тетрагональної) фази відбувається за сценарієм фазового переходу другого роду. А для вищих значень δ, коли є перехід між смужковою фазою із $h = 2$ і парамагнітною фазою, спостерігається фазовий перехід першого роду. Отримані в дисертаційній роботі значення критичних показників, знайдені з густини нулів статистичної суми, добре узгоджуються із результатами короткочасових Монте-Карло симуляцій. Для одновимірної моделі Поттса

з q видимими і r невидимими станами було вперше знайдено точний розв'язок за допомогою методу матриці переносу. Аналізуючи поведінку нулів статистичної суми, було знайдено дві умови, за яких ця модель має фазовий перехід при додатній температурі. Перша умова полягає в розгляді зовнішніх комплексних магнітних полів. Такі, на перший погляд нефізичні поля, нещодавно вдалося опосередковано виміряти на експерименті через часи декогеренції квантової системи-відповідника. Таким чином, розгляд зовнішніх магнітних полів дозволяє пов'язати класичні та квантові спінові моделі. Другий механізм полягає у розгляді від'ємної кількості невидимих станів. Оскільки збільшення кількості невидимих станів веде до зростання ентропії в системі, їх від'ємну кількість можна трактувати як зовнішній впорядковуючий параметр.

В третьому розділі дисертації застосовано наближення неоднорідного середнього поля для дослідження моделі Поттса з невидимими станами на довільному графі. В межах цього підходу отримано вираз для вільної енергії. Зокрема розглянуто два часткові випадки: повний граф та безмасштабних мережа. На повному графі показано, що в області $1 \leq q < 2$ фазова діаграма характеризується двома граничними вимірностями, r_{c1} і r_{c2}. Нижче r_{c1} у системі відбувається лише фазовий перехід другого роду. Вище r_{c2} є лише фазовий перехід першого роду. А в області $r_{c1} < r < r_{c2}$ є два фазових переходи: першого роду при нижчій температурі і другого роду при вищій температурі. Для значень параметрів, де існує фазовий перехід другого роду, спостерігаємо критичні показники традиційні для теорій середнього поля, а саме $\beta = 1/2$, $\alpha = 0$, $\nu = 1/2$. Для випадку моделі Ізінга, $q = 2$, на повному графі два граничні значення збігаються при $r_c \approx 3.62$. На безмасштабній мережі із функцією розподілу ступенів вузлів $P(k) \sim k^{-\lambda}$ розглянуто випадок $q = 2$. На противагу випадку повного графа, де існує лише одне граничне значення, було отримано $\lambda-$залежні граничні значення $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$. Ці величини відіграють ту ж саму роль, що і їх відповідники у попередньому випадку повного графа. Також показано, що скрізь, де існує фазовий перехід другого роду, критичні показники залишаються λ-залежними, а кількість невидимих станів r не впливає на значенні критичних показників.

В четвертому розділі дисертації застосовано підхід складних мереж для аналізу соціальної мережі персонажів давньоруських билин. Проведені дослідження дозволяють класифікувати різні наративи і слугують джерелом додаткової інформації про їх особливості. Як виявилося в результаті аналізу, соціальна мережа персонажів билин володіє низкою властивостей, спільних із властивостями соціальних мереж інших епосів. Ці властивості залишаються незмінними для мереж, що характеризують епічні наративи різних культур і були створені в різний час. Таким чином, епоси володіють універсальними властивостями, що дозволяє отримати додаткову класифікацію, яка базується на їх кількісному аналізі. Зокрема, подібно до соціальних мереж інших епосів, соціальні мережі билин виявилися сильно скорельованими тісними світами зі значенням середнього коефіцієнту кластерності, що значно перевищує відповідне значення для класичного випадкового графу Ердоша-Рені. Однак тісними світами є мережі, в яких беруться до уваги всі або лише дружні зв'язки. Мережа ворожих зв'язків має значення коефіцієнта кластерності й середньої відстані порівнянні із відповідними значеннями для графу Ердоша-Рені, що є кількісним проявом гіпотези соціального балансу. Тому ефекти тісного світу в ній не проявляються. Крім перелічених вище універсальних характеристик, аналіз навів нові аргументи щодо тих чи інших гіпотез про структуру билин.

Ключові слова: універсальність, складні системи, складні мережі, критична поведінка, граничні вимірності, критичні показники

ABSTRACT

Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics on the speciality 01.04.02 “Theoretical Physics” (104 — Physics and Astronomy). — Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2019

The goal of the dissertation is to study the universality of complex systems. The notion of universality - the independence of the characteristic behaviour of a macroscopic system, consisting of many interacting parts, from the details of the structure of this system - is one of the basic concepts of statistical physics. Increasingly, this concept is used beyond purely physical problems and is used in a general scientific or cultural context. By complex systems we mean those characterized by collective behaviour that is not a simple consequence of the properties of their constituent parts. The concept of complex system is applied in many traditional disciplines of science and is the subject of a new interdisciplinary field of knowledge - the complexity science. Methods and concepts of statistical physics are among the important components of this branch as is concept of universality that has become one of the basic concepts of the complex systems science.

Since complex systems are characterized by the collective behaviour of many interacting components, the theory of phase transitions provides a natural tool for their study. So the study of ordering in complex spin models allows us to understand at a principal level, and to quantitatively describe the formation of a universal behaviour in different physical, chemical, biological, and social systems. In this case, the states of the spin variable correspond to the states of agents of different nature, and their configuration and interactions simulate real complex system equivalent. Often, in such studies, the processes of ordering on complex networks - random graphs, whose topological properties reproduce the structure of a complex system, are considered. Examples of network structures are numerous. Thus modelling the critical behaviour of complex spin systems is becoming increasingly widespread.

The dissertation consists of four sections. The first section of the dissertation

provides a literature review. The main focus of this section is on the models and methods of their description used in the dissertation. In particular, two models are used in the thesis: the Ising model with dipole interactions and the Potts model with invisible states. The Ising model with dipole interactions is used to describe patterns formation in complex systems, and the Potts model with invisible states is used to study how entropy affects the universality. Among the methods used in the thesis, two are described in detail in Section 1.3. The first method is the analysis of the zeros of a partition function in a complex plane. The two most commonly used cases are the complex magnetic field (Lee-Yang zeros) and the complex temperature (Fisher zeros). Based on the properties of the location of these zeros, it is possible to obtain the critical properties of the system such as critical exponents, the ratio of critical amplitudes and the location of critical points. The second is the method of complex networks. Within this method, a system of many particles (agents) is represented in the form of a graph, where the nodes are interacting particles, and the edges denote the interaction between them.

The second section of the dissertation uses the method of analysis of partition function zeros to study the critical behaviour of a two-dimensional Ising model with dipole interaction and a one-dimensional Potts model with invisible states. A two-dimensional Ising model with dipole interactions can describe the thin-film materials used to produce high-density information storage devices. For this model, the region of the phase diagram is analysed and it is shown that the critical exponents depend continuously on the ratio of the short-range and dipole interaction constants δ. In the whole region of the parameter δ, where the ground state is characterized by a striped antiferromagnetic phase with a strip width $h = 1$, the transition to the high-temperature paramagnetic (tetragonal) phase undergoes the second-order phase transition scenario. For higher values of δ, when there is a transition between the stripped phase with $h = 2$ and the paramagnetic phase, a first-order phase transition is observed. The values of the critical exponents obtained in the partition function zeros density approach, agree well with the results of short-time Monte-Carlo simulations. For the one-dimensional Potts model with q visible and r invisible states, the exact solution was found usi-

ng the transfer matrix method. Analysing the behaviour of partition function zeros, two conditions were found under which this model has a phase transition at positive temperature. The first condition is the consideration of external complex magnetic fields. Such seemingly non-physical fields have recently been indirectly measured experimentally through the decoherence times of the quantum counterpart system. Thus, the consideration of external magnetic fields allows us to link classical and quantum spin models. The second mechanism is to consider the negative number of invisible states. Since an increase in the number of invisible states leads to an increase in entropy in the system, their negative number can be interpreted as an external ordering parameter.

The third section of the dissertation uses an approximation of a nonuniform mean field to investigate a Potts model with invisible states on an arbitrary graph. Within this approach, the expression for free energy is obtained. In particular, two partial cases are considered: a complete graph and a scale-free network. For the complete graph it is shown that in the region $1 \leq q < 2$ the phase diagram is characterized by two marginal values, r_{c1} and r_{c2}. Below r_{c1}, only the second-order phase transition occurs in the system. There is only a first-order phase transition above r_{c2}. And in the area $r_{c1} < r < r_{c2}$ there are two phase transitions: a first-order transition at lower temperature and a second-order at higher temperature. For values of parameters where there is a second-order phase transition, we observe critical exponents usual for the mean-field theories, namely $\beta = 1/2$, $\alpha = 0$, $\nu = 1/2$. In the Ising model case $q = 2$, on the complete graph, the two marginal values coincide at $r_c \approx 3.62$. The case of $q = 2$ is considered on a scale-free network with the node degree distribution $P(k) \sim k^{-\lambda}$. In contrast to the case of a complete graph with only one marginal value, two $\lambda-$dependent marginal values $r_{c1}(\lambda)$ and $r_{c2}(\lambda)$ were obtained. These quantities play the same role as their counterparts in the previous case of the complete graph. It is also shown that wherever there is a second-order phase transition, the critical exponents remain λ-dependent and the number of invisible states r does not affect the value of them.

The fourth section of the dissertation uses the complex networks approach to analyse the social network of characters of Bylyny. This quantitative approach allows

to classify different narratives and serve as a source of additional information about their features. As it turned out, the social network of characters of Bylyny possesses a number of properties, common with the properties of social networks of other epics. These properties remain unchanged for networks that characterize epic narratives of different cultures and have been created at different times. Thus, epics have universal properties, which allows to obtain additional classification based on their quantitative analysis. In particular, like the social networks of other epics, social networks of Bylyny are strongly correlated small-worlds with an average clustering coefficient significantly exceeding the corresponding value for the classical random Erdös-Rènyi graph. However, only networks where all or only friendly connections are taken into account are small-world networks. The network of hostile links has the value of the clustering coefficient and the average distance compared to the corresponding values for the Erdös-Rènyi random graph, which is a quantitative manifestation of the social balance hypothesis. Therefore, the small-world effects are not manifested in it. In addition to the above universal characteristics, the analysis has made new arguments for various hypotheses about the characters of Bylyny.

Keywords: universality, complex systems, complex networks, critical behaviour, marginal dimensions, critical exponents.

Список публікацій здобувача

1. Sarkanych, P. On the phase diagram of the 2d Ising model with frustrating dipole interaction / P. Sarkanych, Yu. Holovatch and R. Kenna// Український фізичний журнал – 2014. – Т. 60, № 4. – с. 337-342.
2. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states / M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical – 2016. – Vol. 49, no. 25. – P. 255001-1-15.
3. Сарканич, П. Універсальність і мережевий аналіз билин / П. Сарканич, Ю. Головач, Р. Кенна і П. Мак Керрон // Журнал Фізичних Досліджень. – 2016. – Т. 20, №4. – с.4801-1-17.
4. Sarkanych, P. Exact solution of a classical shortrange spin model with a phase transition in one dimension: the Potts model with invisible states / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Physics Letters A. – 2017. – Vol. 381, no. 41. – P. 3589-3593.
5. Sarkanych, P. Classical phase transitions in a one dimensional short-range spin model / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Vol. 51, no. 50. – P. 505001-1-26.
6. Sarkanych, P. Ising model with invisible states on scale-free networks/ P. Sarkanych, M. Krasnytska // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, no. 27. – P.125844.
7. Головач, Ю. Математика і міфи – кількісний підхід до порівняльної міфології / Ю. Головач, Р. Кенна, П. Мак Керрон, П. Сарканич, Н. Федорак, Дж. Хосе// прийнято о друку в Україна Модерна. – (Препринт / Національна академія наук України, Інститут фізики конденсованих систем; ICMP-18-01U).
8. Sarkanych, P. Partition function zeros as a measure of phase transition strength // V young scientist conference Problems of theoretical physics, Kyiv, Ukraine,

December 24 – 27, 2013, Program and Proceedings. – Kyiv:2013. – P. 101.

9. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // The 41st conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Vienna, Austria, February 14 – 17, 2016, Book of Abstracts. – Vienna:2016. – p. 72

10. Сарканич, П. Одновимірна модель Поттса з невидимими станами // 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, Україна, 9 – 10 червня, 2016, Збірка тез. – Львів:2016 – с. 43.

11. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // Workshop on current problems in physics, Lviv, Ukraine, 5 – 7 July, 2016, Book of abstracts. – Lviv:2016 – p. 7.

12. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states // Різдвяні дискусії – 2017, Львів, Україна, 11-12 січня, 2017, Програма і тези доповідей. – Львів:2017 – с. 9.

13. Сарканич, П. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовиниб Львів, Україна, 8 – 9 червня 2017, Збірка тез – Львів:2017 – с. 24.

14. Сарканич, П. Точний розв'язок 1D моделі поттса з невидимими станами: Аналіз нулів статистичної суми // Різдвяні дискусії – 2018, Львів, Україна, 11-12 січня, 2018, Програма і тези доповідей – Львів: 2018 – с. 9.

15. Sarkanych, P., Network analysis of Bylyny — Traditional East Slavic epic narratives // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Krakow, Poland, May 1-4, 2018, Book of Abstracts – Krakow:2018 – p. 95

ЗМІСТ

Вступ **14**

1 Огляд літератури **21**

1.1 Деякі моделі і методи аналізу складних систем 21

1.2 Моделі 22

1.2.1 Утворення повторюваних структур (patterns) 22

1.2.2 Взаємовплив енергії і ентропії: універсальність і граничні вимірності 24

1.3 Методи 27

1.3.1 Аналіз нулів статистичної суми 27

1.3.2 Складні мережі 30

1.4 Висновки 31

2 Впорядкування у складних спінових системах: аналіз нулів статистичної суми **33**

2.1 Двовимірна модель Ізінга з дипольною взаємодією 33

2.1.1 Модель 33

2.1.2 Густина нулів Фішера 36

2.2 Одновимірна модель Поттса з невидимими станами 38

2.2.1 Фазовий перехід у класичних одновимірних системах 38

2.2.2 Модель Поттса з невидимими станами на одновимірному ланцюжку 41

2.2.3 Матриця переносу 42

2.2.4 Нулі статистичної суми і матриця переносу 43

2.2.5 Показник розбіжності краю Янга-Лі 47
2.2.6 Співвідношення дуальності 49
2.2.7 Нулі Лі-Янга моделей з прямою фізичною реалізацією. . . . 50
2.2.8 Фазові переходи при додатніх температурах 54
2.2.9 Нулі Фішера 63
2.3 Висновки 66

3 Універсальність критичної поведінки спінових систем на мережах різної топології 68

3.1 Модель Поттса з невидимими станами на графі. Наближення середнього поля. 68
3.2 Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами на повному графі 72
3.2.1 Випадок $q = 2$ 73
3.2.2 Випадок $1 \leq q < 2$ 76
3.3 Модель Ізінга з невидимими станами на безмасштаній мережі. . . . 81
3.4 Висновки 88

4 Універсальні топологічні властивості складних соціальних мереж наративів 90

4.1 Билини 90
4.2 Соціальна мережа персонажів билин 92
4.3 Мережеві характеристики 97
4.3.1 Ступінь вузла 97
4.3.2 Відстані між персонажами 101
4.3.3 Центральність близькості 103
4.3.4 Центральність посередництва 104
4.3.5 Коефіцієнт кластерності 105
4.3.6 Тісносвітність 108
4.3.7 Ступенева асортативність 109

4.3.8 Кластерна асортативність 112
4.3.9 Подібність вузлів за Пірсоном 112
4.3.10 Стійкість 113
4.3.11 Спільноти 114
4.4 Висновки 117

Висновки **120**

Список використаних джерел **122**

А Список публікацій здобувача **141**

Б Апробація результатів дисертації **144**

ВСТУП

Поняття універсальності – незалежності характерної поведінки макроскопічної системи, що складається з багатьох взаємодіючих частин, від деталей будови цієї системи – є одним із підставових понять статистичної фізики. Все частіше це поняття виходить за межі суто фізичних задач і використовується в загальнонауковому чи загальнокультурному контексті. Метою дисертації є дослідження універсальності у складних системах. Під складними системами ми розуміємо такі, для яких характерна колективна поведінка, яка не є простим наслідком властивостей їх складових частин [1, 2]. Складним системам притаманна самоорганізація, виникнення нових функціональних можливостей (нових якостей), висока чутливість до малих змін початкових умов, підпорядкування степеневим законам (розподіли типу "товстих хвостів") [3, 4]. Поняття складної системи стосується багатьох традиційних дисциплін науки і є предметом нової міждисциплінарної галузі знань - науки про складні системи [5]. Методи і концептуальний апарат статистичної фізики є однією із важливих складових цієї науки. То ж і поняття універсальності стало одним із підставових понять науки про складні системи.

Оскільки складні системи складаються з багатьох зв'язаних компонент яким притаманна колективна поведінка, для їх дослідження природньо використовувати інструментарій теорії фазових переходів. Зокрема, дослідження впорядкування у складних спінових моделях дозволяє зрозуміти на принциповому рівні та кількісно описати формування універсальної – спільної для всіх – поведінки в різних за своєю природою фізичних, хімічних, біологічних, соціальних системах (див., наприклад, [6]). При цьому стани спінової змінної відповідають станам різних за своєю природою агентів, а структура розташування агентів-спінів та тип взаємодії моделюють їх відповідники у реальній складній системі [7]. Часто в та-

ких дослідженнях розглядаються процеси впорядкування на складних мережах - випадкових графах, топологічні властивості яких відтворюють структуру тої чи іншої складної системи [8–11]. Приклади мережевих структур – численні. Тому конкретні реалізації моделювання критичної поведінки складних спінових систем знаходять все ширше застосування.

Актуальність теми. Дослідження складних систем є, без перебільшення, головним, чи, принаймні одним із найголовніших напрямків сучасної науки. За словами Стівена Хокінґа, 21-е століття буде століттям складності. То ж застосування моделей і методів статистичної фізики у цій ділянці викликане потребами часу. Поряд із загальною актуальністю проведених досліджень, кожне із обраних нами завдань має свою мотивацію:

– Модель Ізінга з дипольною взаємодією на простій квадратній гратці використовується для опису тонкоплівкових антиферомагнетиків. Деякі дослідники вважають, що такі матеріали можна застосовувати для виготовлення пристроїв зберігання із високою густиною зберігання інформації [12]. З іншого боку, цій моделі властива дуже багата фазова діаграма, на якій бачимо цілу низку низкотемпературних антиферомагнітних фаз (Неелівський антиферомагнетик, смужковий антиферомагнетик із різною шириною смуг). Дослідженню фазової діаграми цієї моделі присвячена значна кількість робіт, однак природа деяких типів впорядкування у ній і досі залишається нез'ясованою.

– Недавно запропонована модель Поттса з невидимими станами дозволяє пояснити спостережувані розбіжності між теоретичними передбачення і експериментальними спостереженнями фазових переходів у деяких сполуках, де відбувається спонтанне порушення Z_3 симетрії [13, 14]. Принцип універсальності дозволяє застосувати цю модель і для пояснення фазового переходу денатурації ДНК [15]. Здебільшого цю модель раніше розглядали тільки в частковому випадку $q = 2$ видимих станів, а випадок довільного q часто залишався поза увагою. Кількість невидимих станів можна трактувати як міру ентропії в системі, тому модель Поттса з невидимими станами дає унікальну можливість вивчати вплив ентропії на фазові переходи і класи універсальності зокрема.

– Розгляд спінових моделей на мережах має зв'язок із задачами соціофізики і, зокрема, з задачами вивчення формування суспільної думки (opinion formation) [7]. Впорядкування таких моделях дозволяє досліджувати формуванням консенсусу у суспільних формаціях.

– Застосування методів і підходів науки про складні системи для вивчення давніх наративів є новою областю досліджень, що зародилася лише декілька років тому [16, 17]. В межах цього підходу вже були проаналізовані соціальні мережі зв'язків між героями низки творів світової літературної спадщини, як от Іліада, Одісея, Беовульф, ірландські скели, ісландські саги та багато інших. Проведені дослідження дозволяють класифікувати різні наративи і слугують джерелом додаткової інформації про їх особливості. До давньоруських текстів цей підхід раніше не застосовувався.

Мета і задачі дослідження. *Об'єктами дослідження* у дисертаційній роботі вибрано три приклади складних системи: модель Ізінга з дипольною взаємодією, модель Поттса з невидимими станами і соціальна мережа персонажів давнього наративу. *Предметом дослідження* є вивчення зміни у класі універсальності двовимірної моделі Ізінга із дипольною взаємодією, вплив ентропійного внеску на процес впорядкування в одновиміних системах, характеристики критичної поведінки багаточастинкових систем на складних мережах, топологічні характеристики складних соціальних мереж наративів. *Мета дисертації* – пояснення виникнення універсальності і скейлінґу в складних системах різної природи. Для досягнення цієї мети ми використовували такі *методи*: наближення неоднорідного середнього поля, метод матриці переносу, формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми у випадку комплексного поля та температури та методи теорії складних мереж.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі було проаналізовано ділянку фазової діаграми двовимірної моделі Ізінга із дипольними взаємодіями та показано, що критичні показники неперервно залежать від відношення констант взаємодії δ. Наші результати підтверджують перехід другого роду в усій ділянці значення δ, де відбувається перехід між смужковою антифероma-

гнітною із товщиною смужок $h = 1$ і парамагнітною (тетрагональною) фазами. Натомість, перехід між смужковою фазою із $h = 2$ і парамагнітною фазою відбувається за сценарієм першого роду [18]. Значення критичних показників, знайдених нами з густини нулів статистичної суми добре узгоджуються із результатами короткочасових Монте-Карло симуляцій [19].

Використовуючи метод матриці переносу, було вперше знайдено точний розв'язок моделі Поттса з q видимими і r невидимими станами на одновимірному ланцюжку. Проаналізовано умови, за яких ця модель має фазовий перехід при додатній температурі і пояснено, чому ці результати не узгоджуються із строгими теоремами [20, 21].

Вперше було отримано вираз для вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на довільному графі. Зокрема на повному графі, передбачено існування двох граничних значень r, при яких змінюється характер критичної поведінки. Схожий ефект передбачено і у частковому випадку $q = 2$ для безмасштабної мережі [22, 23].

Вперше було застосовано підхід складних мереж для аналізу соціальної мережі персонажів давньоруських билин. Зокрема, показано, що соціальна мережа персонажів билин володіє низкою спільних кількісних характеристик із відповідними мережами інших наративів, а також запропоновано певні аргументи на користь тих чи інших гіпотез щодо зв'язку билинних персонажів із історичними постатями [24, 25].

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати описують властивості фазової діаграми двовимірної моделі Ізінга із дипольною взаємодією. Саме цю модель часто використовують для опису тонкоплівкових матеріалів, які можна використати для виготовлення засобів зберігання із великою густиною інформації.

Незважаючи на ряд теорем, що забороняють фазові переходи в одновимірних класичних рівноважних системах із короткосяжною взаємодією, наші результати показують, що існують два способи обійти такі обмеження. Перший полягає в розгляді зовнішніх комплексних магнітних полів. На перший погляд вони нефі-

зичні, проте нещодавно їх вдалося непрямо виміряти на експерименті через часи декогеренції квантової системи відповідника [26]. Таким чином, розгляд зовнішніх магнітних полів дозволяє пов'язати класичні та квантові спінові моделі. Другий механізм полягає у розгляді від'ємної кількості невидимих станів. Оскільки збільшення кількості невидимих станів веде до зростання ентропії в системі, їх від'ємну кількість можна трактувати як зовнішній впорядковуючий механізм.

Отримані результати для моделі Поттса з невидимими станами на мережах можуть бути застосовані для задач соціофізики. Зокрема, концепція невидимого стану прямо проектується на соціальні задачі, де індивіда, що не взаємодіє з оточенням можна представити як такого, що знаходиться в невидимому стані.

Використання підходу складних мереж до наративів, дозволяє порівняти кількісні характеристики творів та перекласифікувати їх.

Особистий внесок здобувача. У роботах, виконаних із співавторами, авторству належить:

- аналіз густини нулів статистичної суми моделі Ізінга із дипольною взаємодією [18];
- точний розв'язок моделі Поттса із невидимими станами на одновимірному ланцюжку. Аналіз нулів Лі-Янга і Фішера цієї моделі [20, 21];
- розгляд умов, за яких фазовий перехід в одновимірній моделі Поттса із невидимими станами відбувається за додатніх температур [20, 21];
- аналіз виразів для вільної енергії в наближенні неоднорідного середнього поля моделі Поттса з невидимими станами на повному графі [22] і безмасштабній мережі [23];
- побудова та аналіз соціальної мережі персонажів давньоруських билин і її порівняння з мережами персонажів інших народів світу [24].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України та Дослідницькому центрі рідинних і складних систем університету Ковентрі

(Ковентрі, Великобританія) згідно з планами робіт за темами: “Про розвиток теоретичних підходів опису флюїдів, граткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” (2014-2017 рр., номер держреєстрації 0112U007763), “Нові концепції статистичного опису і їх застосування до теорії багаточастинкових систем” (2017-2019 рр., номер держреєстрації 0117U002093), “Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінґу у складних системах” (2018-2019 рр., номер держреєстрації 0118U003012); за підтримки аспірантської програми “Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems” (Ляйпціґ-Лотарингія-Львів-Ковентрі) ($\mathbb{L}^4$), та проектів співпраці FP7 EU IRSES 269139 “Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media”, 295302 “Statistical Physics in Diverse Realizations”, 612707 “Dynamics of and in Complex Systems”, 612669 “Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences’.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представленні на таких конференціях: п’ята конференія молодих вчених “Problems of theoretical physics” (Київ, Україна, 24-27 грудня 2013), конференція MECO-41 (Відень, Австрія, 15-17 лютого 2016), 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 9-10 червня 2016), “Workshop on current problems in physics” (Львів, Україна, 5-7 липня 2016), Різдвяні дискусії – 2017 (Львів, Україна, 11-12 січня 2017), 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 8-9 червня 2017), Різдвяні дискусії – 2018 (Львів, Україна, 11-12 січня 2017), конференція MECO-43 (Краків, Польща, 1-4 травня 2018). А також на таких семінарах: семінар групи статистичної фізики університету Анрі Пуанкаре (Нансі, Франція, 15.01.16); аспірантський семінар дослідницького центру рідин і складних систем університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 30.05.18, 27.03.19); семінар астрономічної обсерваторії ЛНУ ім. І. Франка (Львів, Україна, 08.06.15); стендова доповідь на дослідницькому симпозіумі факультету інженерних, екологічних і комп’ютерних наук університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 06.06.18); семінари Лабораторії статистичної фізики складних

систем ІФКС НАНУ.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 6 статей в журналах [18, 20–24], одна прийнята до друку [25] та 10 тез конференцій [27–36].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із чотирьох розділів основного тексту (огляду літератури та трьох оригінальних розділів), висновків та списку використаних джерел. У розділі 1 здійснено огляд літератури, подано означення основних понять; у розділі 2 метод аналізу нулів статистичної суми застосовано до аналізу моделі Ізінга із дипольною взаємодією і одновимірної моделі Поттса з невидимими станами; 3 розділ присвячений аналізу моделі Поттса з невидимими станами на мережах; у 4 розділі, використовуючи підхід теорії складних мереж, проведено аналіз мереж персонажів давньоруських билин; у висновках коротко підведені підсумки роботи та окреслено подальші перспективи. Робота викладена на 121 сторінці (разом зі списком використаної літератури і дадатками – 146 сторінок), бібліографічний список містить 208 найменувань публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі наведено огляд основних робіт, що стосуються тематики дисертаційної роботи. Спочатку (підрозділ 1.1) ми введемо основні поняття науки про складні системи. Далі, у підрозділі 1.2, розглянемо модель Ізінга з дипольною взаємодією і модель Поттса з невидимими станами, що використовуються в дисертаційній роботі, їх властивості і застосування. У підрозділі 1.3 ми пояснимо метод аналізу нулів статистичної суми і метод складних мереж, які, поряд із більш поширеними методами, застосовувалися в дисертаційній роботі. І в підрозділі 1.4 зробимо висновки.

1.1. Деякі моделі і методи аналізу складних систем

Поняття складної системи починає все більше зустрічатися у заголовках наукових публікацій. З точки зору фізики, початком науки про складні системи можна вважати роботу Філіпа Андерсона *More is different* [1]. Під складною системою будемо розуміти систему, що складається із багатьох взаємодіючих частин (агентів), колективна поведінка яких не є простим наслідком індивідуальних властивостей кожної зі складових. Важливим аспектом є те, що ми не накладаємо ніяких обмежень на природу цих агентів і типи їх взаємодії. Використовуючи таке загальне означення, до складних систем можна віднести дуже широке коло об'єктів. Чисто фізичними прикладами є детерміністичний хаос, спінові стекла чи макромолекули білків [4, 37]. Нефізичними прикладами складних систем є фондові ринки, соціум чи, навіть, мова [37].

Оскільки для складної системи визначальними є колективні ефекти, то ста-

тистична фізика, як наука про колективну поведінку, зайняла одне із центральних положень в науці про складні системи. Зі статистичної фізики були запозичені (й адаптовані) такі поняття як універсальність, критична поведінка, скейлінг, ентропія, перколяція та багато інших [38]. Разом із цими поняттями прийшли і методи статистичної фізики.

Особливим прикладом складних систем є системи із адаптивною взаємодією. Для них макро- і мікростан системи є взаємопов'язаними: взаємодії визначають макростан чи конфігурацію агентів у системі, що, в свою чергу, змінює взаємодію [39].

1.2. Моделі

1.2.1. Утворення повторюваних структур (patterns)

Однією із важливих рис поведінки складних систем є утворення у них так званих паттернів (patterns) - структур, що повторюються в просторі чи часі. Для опису цього явища використовуються різні моделі (див. напр. [40]). У дисертаційній роботі для аналізу цього явища нами було розглянуто одну із таких моделей - модель Ізінга із дипольною взаємодією [41].

Формування паттернів (patterns),є одним з низки захоплюючих явищ, які можуть бути викликані конкуруючими довго- та короткосяжними взаємодіями у багаточастинкових фізичних системах. Конкуренція короткосяжної та далекосяжної дипольної взаємодії призводить до різноманіття експериментально спостережуваних структур в ультратонких магнітних плівках на металевих підкладках, рідких кристалах, полімерних плівках, двовимірних електронних газах, Ленгмюрівських та ліпідних моношарах тощо (див. [42]). Вищезазначені системи мають важливе промислове застосування, тому стали предметом інтенсивних експериментальних досліджень. Зокрема, вищезгадані ультратонкі магнітні плівки стали предметом особливого інтересу через їх можливе застосування у створенні високощільних запам'ятовуючих пристроїв [12].

Теоретичне уявлення про особливості формування повторюваних структур

у вищезгаданих системах отримано шляхом аналізу двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими феромагнітною взаємодією найближчих сусідів (з константою взаємодії J) і антиферомагнітною далекосяжною дипольними взаємодією (константа взаємодії g) [41–51]. У рамках цієї моделі багатство фазової діаграми пояснюється фрустраціями, викликаними конкуруючим характером феромагнітних і антиферомагнітних взаємодій. Аналітичні підходи, підкріплені чисельним моделюванням, показують, що, залежно від значень J і g, низькотемпературна фаза цієї моделі характеризується спіновими конфігураціями, класифікованими як регулярні і нерегулярні Неелівські фази або смуги різної ширини h, виміряні в граткових одиницях, зі спіном, орієнтованим в одному напрямку [43–47]. У певних роботах наведені дані про модульовані фази для співвідношення J/g поблизу лінії розмежувань низькотемпературних фаз ширини h і $h+1$ [50]. Вищезазначені низькотемпературні магнітні структури мають багато спільного з тими, що спостерігаються в рідких кристалах, а смугасті, модульовані і парамагнітні фази часто називають смектичними, нематичними і тетрагональними. В останньому випадку домени із протележною орієнтацією спінів є взаємно перпендикулярними. Більше того, аналіз в наближенні середнього поля виявив, що структура доменної стінки в таких плівках подібна до двовимірних рідких кристалів [41].

Наведені вище статті загалом узгоджуються з класифікацією повторюваних структур, що спостерігаються в двовимірній моделі Ізінга з конкуруючими дипольною і взаємодією найближчих сусідів, однак деталі фазової діаграми залишається невідомими. Зокрема, предметом недавнього обговорення стала ділянка фазової діаграми в області низьких значень температури T і $\delta = J/g$ (ескіз фазової діаграми в цій області наведено на рис. 1.1). В цій ділянці відомо, що фазові переходи між антиферромагнітною Неелівською фазою (AF) і між смужковою $h = 2$ і тетрагональною фазами є переходами другого і першого роду відповідно. Але рід фазового переходу між смужковою $h = 1$ і тетрагональною фазами залишається невідомим. Зокрема, Монте-Карло симуляції у роботі [50] виявили фазовий перехід другого роду в області $\delta < 0.8$ і перехід першого роду в області $0.83 < \delta < 0.88$. Як наслідок, між двома цими ділянками повинна бути три-

критична точка. Подальші симуляції у роботі [51] не спостерігали передбачувану трикритичну точку і вказують на користь неперервного фазового переходу для всієї області δ, що відповідає межі між смужковою $h = 1$ і тетрагональною фазами (див. рис. 1.1).

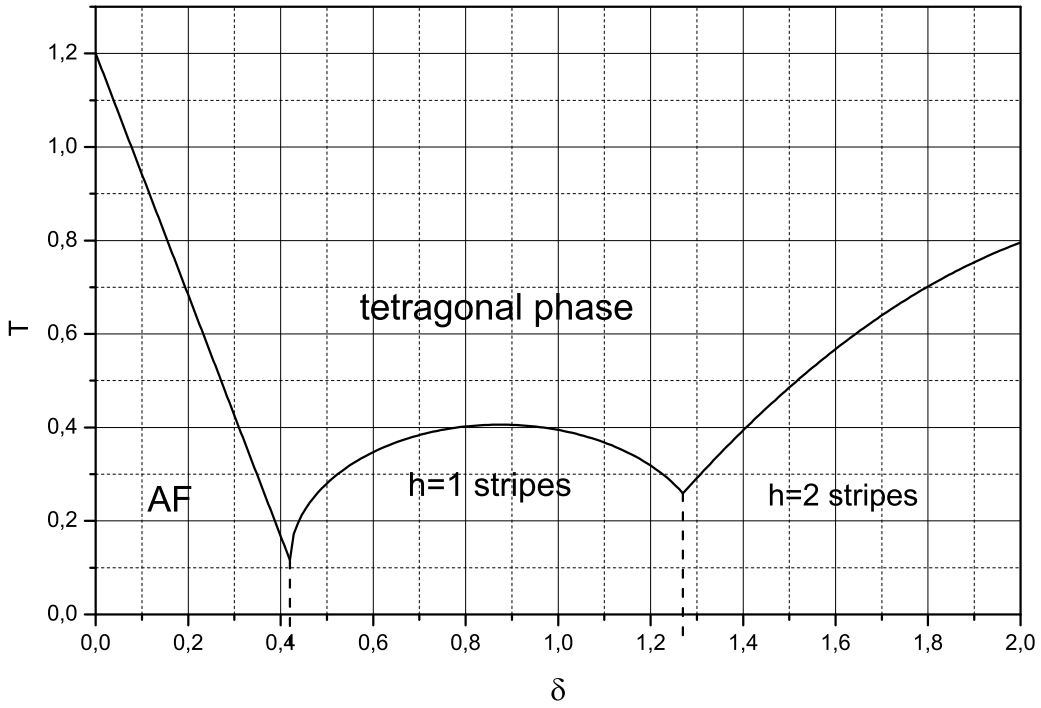


Рис. 1.1. Фазова діаграма двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими взаємодіями найближчих сусідів і дипольною (намальовано з [50, 51]). AF: Неелівський антиферомагнетик, $h = 1$, $h = 2$: смужкові фази.

1.2.2. Взаємовплив енергії і ентропії: універсальність і граничні вимірності

Концепція універсальності - незалежність певних властивостей системи від деталей її будови - відіграє центральну роль у розумінні фізичних властивостей різних багаточастинкових систем. Фазові переходи другого роду дають приклади явищ, що демонструють універсальність [52, 53]. Для систем із короткосяжною взаємодією глобальні фактори, такі як вимірність простору або вимірність і симетрії параметрів порядку, визначають універсальні властивості такого фазового

переходу. Ці особливості є характерними для різних систем, незалежно від деталей їх структури. Такі системи належать до одного і того ж класу універсальності. Зазвичай, він визначається критичними показниками, співвідношеннями критичних амплітуд та скейлінговими функціями. Іншою величиною, яка властива критичній поведінці складних систем, є граничні вимірності, які характеризують кількість компонентів параметра порядку, для яких змінюється рід фазового переходу.

Прикладами таких систем є $O(m)$ - симетричні спінові моделі [54]. В цих моделях спостерігається перехід другого роду, за умови, що вимірність простору перевищує нижнє критичне значення $d > d_{\rm lc}$ (де $d_{\rm lc} = 1$ для випадку Ізінга $m = 1$ і $d_{\rm lc} = 2$ для $m \geq 2$) [55, 56]. Однак, коли симетрія $O(m)$ порушується через наявність доданків, інваріантних до кубічної групи (так звана анізотропна кубічна модель, що відповідає розрахунку кристалічної анізотропії [57–59]) це призводить виникнення граничної вимірності m_c. Для заданої вимірності простору d, параметр $m_c(d)$ виокремлює області, де відбуваються фазові переходи за різними сценаріями. Наприклад, $d = 3$ кубічний кристал з трьома легкими осями повинен мати фазовий перехід першого роду якщо m_c менше 3, і другого роду, якщо більше. Теоретичні оцінки виступають на користь $m_c(d = 3) < 3$ [60, 61], що підтримують сценарій першого роду в цих системах [58, 59]. Іншим прикладом є q-станова моделі Поттса з короткосяжною взаємодією [62]. Оскільки ця модель має дискретну групу симетрії, Z_q, нижня критична вимірність $d_{\rm lc} = 1$. Для $d > d_{\rm lc}$, граничне значення $q_c(d)$ розділяє режими другого і першого роду. Для $d = 2$ перехід другого роду спостерігається для $q \leq q_c = 4$ і першого роду в іншому випадку. Для $d = 3$ граничне значення q_c нижче 3 [63]. Крім того, для 3- і 4-станової моделі Поттса в двох вимірах порядок фазового переходу змінюється зі збільшенням радіусу взаємодії [64]. Додаткові приклади граничних вимірностей, що розділяють області фазових переходів різних типів, включають системи з неколінеарним впорядкуванням [65], фрустраціями [66, 67], структурним безладом [61, 68, 69], конкуруючими [70–72] або нелінійними взаємодіями в $n-$векторній моделі з феромагнітним або нематичним порядком [73]. Там значення нелінійності відіграє роль граничного параметра.

Нас цікавлять граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами [74]. Модель нещодавно була введена для того, щоб пояснити розбіжності між теоретичними прогнозами та експериментальними спостереженнями фазового переходу в деяких двовимірних системах, де відбувається спонтанне порушення Z_3-симетрії [13, 14, 75]. Хоча в цих системах відбувається феромагнітний фазовий перехід, він є першого роду, в той час як стандартна модель Поттса передбачає сценарій другого порядку при $d = 2$, $q = 3$. Модель продовжує привертати значний інтерес [76–83], хоча деякі принципові питання про її поведінку залишаються невирішеними. Зокрема, для пояснення змін граничного числа станів (гранична вимірність) q_c, що відокремлює режими першого і другого роду, модель вводить r додаткових поттсівських станів (так звані невидимі стани), які не дають внесок в енергію взаємодії системи, але роблять внесок у ентропію. Відтепер ми будемо використовувати термін $(q, r)-$станова модель Поттса для моделі з q видимими та r невидимими станами. Отже, для фіксованої просторової вимірності d і числа станів q значення r_c являє собою межу, що розділяє режими першого і другого роду.

Питання про граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами є одним з центральних питань, що обговорюються в контексті цієї моделі. Середньопольовий аналіз в рамках наближення Брегга-Вільямса [74, 77, 79] приводить до оцінки $3 < r_c < 4$ для $q = 2$. Отримана в рамках підходу середнього поля, ця оцінка не несе явної залежності від розмірності простору. Інший підхід середнього поля, що використовує 3-регулярні випадкові (тонкі) графи, також демонструє зміну роду фазового переходу, але значення $r_c \simeq 17$, отримане при $q = 2$ [83], значно вище, ніж в наближенні Брегга-Вільямса. Чисельне моделювання моделі Поттса з невидимими станами на $d = 2$ гратці дало суттєві докази того, що модель має фазовий перехід першого порядку при $q = 2, 3, 4$ для високих значень r. Проте отримати точне значнення r_c чисельними методами все ще непросто [74]. Строгі результати свідчать про існування режиму першого роду для будь-якого $q > 0$, за умови, що r достатньо велике [81, 82]. Точні значення r_c відомі також на гратці Бете [80]. Більш того, для гратки Бете з трьома найближчими сусідами

значення r_c є таким же, як і для 3-регулярного випадкового графа.

1.3. Методи

1.3.1. Аналіз нулів статистичної суми

В 1952 році, завдяки роботам Лі і Янга з'явився новий спосіб опису критичної поведінки [84, 85]. Він полягав у розгляді статистичної суми Z у площині комплексного магнітного поля. Оскільки статистична сума задається формулою

$$Z(h,T) = \sum_{\{s_i\}} e^{-H(\{s_i\},h,T)/T}, \tag{1.1}$$

де h і T позначають зовнішнє магнітне поле і температуру відповідно, сумування проходить по всіх можливих спінових конфігураціях, а $H(\{s_i\},h,T)$ позначає енергію системи в заданій конфігурації і при даному значенні температури та поля. Оскільки, згідно означення, статистична сума (1.1) є сумою невід'ємних доданків, то очевидно, що усі її корені є комплексними. Розв'язки h_i рівняння

$$Z(h_i,T) = 0 \tag{1.2}$$

називають нулями Лі-Янга. В термодинамічній границі, коли розмір системи N прямує до безмежності, нулі Лі-Янга наближаються до дійсної осі в критичній точці.

Згодом, Фішер запропонував аналогічний підхід до розгляду статистичної суми в площині комплексної температури T [86]. Нулі статистичної суми в площині комплексної температури називають нулями Фішера.

Довгий час комплексні магнітні поля вважалися цілком математичними конструктами, які існують лише у фундаментальних теоріях, що описують фазові переходи. Але нещодавно було показано, що комплексні магнітні поля спінової ванни, пов'язані з квантовою когерентністю спінового зонда, розміщеного у цій ванні [26, 87]. Отримані результати показують, що часи, коли квантова когерентність досягає нуля, еквівалентні комплексним значенням магнітних полів, при яких статистична сума перетворюється в нуль, тобто нулям Лі-Янга [84, 85]. Метод нулів

вважається фундаментальним для розуміння фазових переходів і потужним інструментом для аналізу критичної поведінки. Нулі Лі-Янга дають прямий доступ до самої статистичної суми, і тому дають важливу інформацію про природу фазових переходів. Недавно точний розв'язок для класичного антиферомагнітного ланцюжка Ізінга в магнітному полі показав існування нескінченного каскаду термічних фазових переходів, витоки якого були простежені до ліній нулів Лі-Янга, таким чином поєднуючи їх із спостережуваними та потенційно вимірними величинами [88].

Нулі статистичної суми, окрім знаходження критичної точки, дозволяють знайти також і універсальні властивості фазових переходів, такі як критичні показники чи відношення критичних амплітуд [89–94]. У дисертаційній роботі будемо використовувати два методи аналізу нулів статистичної суми, а саме скейлінг найближчого до дійсної осі нуля і метод аналізу густини нулів. Далі наведемо основні риси цих двох методів.

Скейлінг найближчого до критичної точки нуля

В роботі [89], використовуючи підхід ренормалізаційної групи, було показано, що скінченно-вимірний скейлінг для координат нулів статистичної суми має вигляд

$$\operatorname{Re} z = z_c + A \cdot N^{-\Lambda} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{Im} z = B \cdot N^{-1/\nu}, \tag{1.4}$$

де z_c позначає критичну точку, ν критичний показник кореляційної довжини, а Λ це так-званий показник зсуву. Хоча ці співвідношення мають виконуватися для усієї скейлінгової області, але найкраще їх використовувати для нуля, що знаходиться найближче до критичної точки, бо для нього поправки для скейлінгу мають найменший вклад.

Густина нулів статистичної суми

Альтернативним до скейлінгу найближчого до критичної точки нуля статистичної суми є аналіз густини нулів, запропонований в роботах [95, 96]. Особливою перевагою цього методу є те, що він дозволяє розрізняти фазові переходи першого і другого роду (а також вищого роду), а також вимірювати силу фазових переходів першого і другого порядку у вигляді прихованої теплоти переходу та критичних показників. Нижче ми коротко опишемо основні етапи аналізу густини нулів статистичної суми. За умови, що нулі статистичної суми моделі в комплексній площині відомі, її можна записати у факторизованій формі

$$Z_L(z) = A(z) \prod_j \left(z - z_j(L)\right) \quad , \tag{1.5}$$

де z позначає певну функцію комплексної температури (для нулів Фішера) чи комплексного магнітного поля (для нулів Лі-Янга), L позначає лінійний розмір гратки а $A(z)$ є гладкою функцією, що ніколи не перетворюється в нуль. Тоді вільна енергія на частинку має вигляд

$$\begin{aligned} f_L(z) &= \frac{1}{L^d} \ln Z_L(z) \\ &= \frac{1}{L^d} \left(\ln A(z) + \sum_j \ln \left(z - z_j(L)\right) \right) . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Перший доданок в правій частині рівняння вносить вклад тільки до аналітичних частин термодинамічних функцій, тому в подальшому ми його упустимо. Решту ми позначимо як $f_L^{\mathrm{s}}(z)$. Цей доданок є відповідальним за розбіжності в термодинамічних функціях.

Нулі статистичної суми можна параметризувати наступним чином

$$z = z_c + r \exp\left(i\varphi\right), \tag{1.7}$$

де z_c позначає координати критичної точки. Означимо густину нулів наступним чином

$$g_L(r) = L^{-d} \sum_j \delta(r - r_j(L)) \,, \tag{1.8}$$

де $z_j = z_c + r_j \exp(i\varphi)$. Тоді вільна енергія і кумулятивна функція розподілу нулів мають вигляд

$$f_L^{\mathrm{s}}(z) = \int_0^R g_L(r) \ln(z - z_c - re^{i\varphi}) dr + \text{c.c.} \quad , \tag{1.9}$$

$$G_L(r) = \int_0^r g_L(s) ds = \begin{cases} = \dfrac{j}{L^d} & r \in (r_j, r_{j+1}) \\ = \dfrac{2j-1}{2L^d} & r = r_j \end{cases} \tag{1.10}$$

де c.c. позначає комплексне спряження а R певне обрізання. В термодинамічній границі для фазового переходу першого роду Лі і Янг [84, 85] показали, що густина нулів є ненульовою в точці перетину дійсної осі. Це означає, що кумулятивна функція розподілу нулів має вигляд

$$G_\infty(r) = g_\infty(0) r + b r^{w+1} + \ldots \quad , \tag{1.11}$$

де нахил в початку координат пов'язаний із прихованою теплотою переходу (чи намагніченістю) співвідношенням

$$\Delta e \propto g_\infty(0) \quad . \tag{1.12}$$

Було також показано (див. [90–93, 97, 98]), що для фазових переходів другого роду необхідною і достатньою умовою щоб питома теплоємність мала скейлінг $C \sim t^{-\alpha}$, є

$$G_\infty(r) \propto r^{2-\alpha} \quad . \tag{1.13}$$

Наведені вище міркування приводять до висновку, що крива $G_L(r_j) = (2j-1)/2L^d$ від $r_j(L)$ повинна: (i) перетинати початок координат, (ii) збігатися з L і j, і (iii) відображати силу і рід фазового переходу через нахил біля початку координат.

1.3.2. Складні мережі

Метод аналізу нулів статистичної суми, який було описано вище, опирається на концепцію статистичної суми - функції, що повністю описує термодинамічну поведінку системи. Її можна означати для довільної локалізації взаємодіючих

агентів. Однією із таких локалізацій є розташування на складній мережі. З математичної точки зору складна мережа є графом. Граф складається з двох множин: множина вершин (вузлів) і множина ребер (зв'язків), що з'єднують ці вершини [99]. Теорія графів є добре означеною ділянкою дискретної математики. Різниця полягає у тому, що в теорії графів цікавляться певними характеристиками конкретного графа, а в теорії складних мереж - статистичними властивостями мереж великого розміру [2].

З одного боку представлення у вигляді складної мережі є природнім для системи взаємодіючих агентів [4, 8]. В такому представленні кожному агенту ставиться у відповідність вузол, а зв'язок між вузлами відповідає факту їх взаємодії[1]. З іншого боку, багатьом природнім і антропогенним об'єктам притаманна структура мережі, а не регулярної гратки. Приклади творять велику множину від наноструктур [100] до великомасштабної структури Всесвіту [101]; від транспортних [102, 103] до соціальних мереж [104, 105]. Окремою ділянкою досліджень є вивчення фазових переходів і критичних явищ на складних мережах [10, 106–110]. Однією із причин зацікавлення такими задачами є їх застосування до описів процесів у соціумі [7]. Ще однією мотивацією є дослідження впливу топології мережі на універсальні властивості фазових переходів. Було показано, що саме існування фазового переходу і, як наслідок, критичні показники залежать від функції розмоділу ступенів вузлів $P(k)$ [110, 111]. Для безмасштабних мереж, де функція розподілу ступенів вузлів є степенево-спадною $P(k) \propto k^{-\lambda}$, критичні показники стають $\lambda-$залежними [107, 110–112]. Таким чином показник λ поряд із іншими глобальними параметрами визначає універсальні властивості системи.

1.4. Висновки

У цьому розділі ми розглянули основні моделі і методи, які використовувалися в дисертаційному дослідженні. Незважаючи на те, що універсальні властивості в статистичній фізиці досліджують вже близько півстоліття, але для складних

[1] Варто зазначити, що слово взаємодія тут вживається у широкому сенсі і не є обмеженою чотирма фундаментальними взаємодіями.

систем вони ще досі залишається мало вивченим.

Зокрема, для моделі Ізінга із дипольною взаємодією існують суперечливі дані стосовно характеру фазового переходу в ділянці $0.8 \leq \delta \leq 1.3$, а метод аналізу густини нулів статистичної суми ще не застосовувався.

Наявні результати для моделі Поттса з невидимими станами були націлені або на частковий випадок $q = 2$ видимих станів, або формулювалися у вигляді строгих теорем, які не давали можливості оцінити значення граничної кількості невидимих станів, що призводить до зміни роду фазового переходу. Більше того, ця модель ніколи не розглядалася на мережах (окрім гратки Бете), де можна спостерігати взаємовплив між ентропійним внеском від кількості невидимих станів і внеском, спричиненим топологією мережі. Також варто зазначити, що для даної моделі досі не було знайдено жодного точного розв'язку.

Хоча метод складних мереж використовували для аналізу соціальних мереж персонажів епосів низки народів світу, для дослідження билин - епосу східних слов'ян, його досі не застосовували.

Розв'язанню цих і суміжних завдань буде присвячена дисертаційна робота.

РОЗДІЛ 2

ВПОРЯДКУВАННЯ У СКЛАДНИХ СПІНОВИХ СИСТЕМАХ: АНАЛІЗ НУЛІВ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ

В цьому розділі ми застосуємо метод аналізу нулів статистичної суми для дослідження моделі Ізінга із дипольною взаємодією і моделі Поттса із невидимими станами. Цікавою особливістю обох моделей є те, що рід фазового переходу і клас універсальності кожної із них залежать від значень параметрів системи, таких як відношення констант взаємодії δ для моделі Ізінга із дипольною взаємодією (2.1), і кількість невидимих станів r для моделі Поттса. Застосовуючи метод аналізу густини нулів статистичної суми (підрозділ 2.1) ми проаналізуємо фазову діаграму та отримаємо критичний показник α для моделі Ізінга з дипольною взаємодією. Зокрема, ми покажемо, що в ній відбувається фазовий перехід другого роду із значенням критичного показника, що залежить від відношення констант взаємодії. Використовуючи метод матриці переносу, в підрозділі 2.2 отримаємо точний розв'язок моделі Поттса з невидимими станами на одновимірному ланцюжку. Основні результати цього розділу викладені в публікаціях [18, 20, 21].

2.1. Двовимірна модель Ізінга з дипольною взаємодією

2.1.1. Модель

Гамільтоніан двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими феромагнітною взаємодією найближчих сусідів і антиферомагнітною дипольною взаємодією має ви-

гляд

$$H = -\delta \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i<j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{r_{ij}^3} \,. \tag{2.1}$$

Тут, $\delta = J/g > 0$, g і J позначають відповідно константи дипольної і взаємодії між найближчими сусідами. Підсумовування виконується по спінах квадратної гратки розміру $L \times L$. Перша сума в (2.1) охоплює всі пари найближчих сусідів $\sigma_i = \pm 1$, в той час як у другому члені враховуються всі пари спінів на гратці. Вважається, шо Ізінгівські спіни напрямлені перпендикулярно до площини гратки.

У граничних випадках $J = 0$ або $g = 0$ (тобто δ дорівнює 0 або ∞) гамільтоніан (2.1) описує або модель із тільки дипольною взаємодією, або звичайну модель Ізінга. Обидва ці випадки характеризуються єдиною (антиферро- або феромагнітною) низькотемпературною фазою і неперервним фазовим переходом другого роду до парамагнітного стану. Відзначимо, що згаданий вище перехід між антиферромагнітною і парамагнітною фазами належить до класу універсальності двовимірної моделі Ізінга [49, 113]. Як було коротко описано у вступі, фазова поведінка моделі (2.1) набагато складніша для ненульового значнення δ. Частина фазової діаграми в $T - \delta$ площині схематично зображена на Рис. 1.1.

Попередні дослідження фазової діаграми виконувалися або чисельно або аналітично, і базувалися на обчисленні статистичної суми

$$Z_L(\beta) = \mathrm{Tr} \exp\left(-\beta H\right), \tag{2.2}$$

де $\beta = 1/T$, а сліди беруться по всіх можливих спінових конфігураціях. Ми будемо аналізувати поведінку статистичної суми в площині комплексної температури T (комплексне β). З часу піонерських робіт Лі і Янга [84, 85] та Фішера [86], де досліджувалися розподіли нулів статистичної суми в площинах комплексних полів і температури, цей тип аналізу став потужним інструментом для вивчення фазових переходів у різних моделях. Для розглянутої моделі (2.1) схожий аналіз раніше було проведено в роботі [51], де для різних значень коефіцієнта взаємодії δ при різних розмірах гратки $L = 12 - 72$ було розраховано перший нуль (найближчий до дійсної осі) статистичної суми. Скінченно вимірний скейлінг (FSS) координат

δ	$d\nu$ [51]	$\alpha = 2 - d\nu$	α/ν [51]	$\alpha = \frac{2\alpha/\nu}{d+\alpha/\nu}$	α_{zd}
0.89	1.807(70)	0.193(70)	0.364(20)	0.308(17)	0.194(17)
0.91	1.817(68)	0.183(68)	0.375(19)	0.316(16)	0.191(14)
0.93	1.779(61)	0.221(61)	0.399(20)	0.333(17)	0.221(16)
0.95	1.741(53)	0.259(53)	0.424(20)	0.350(17)	0.255(14)
0.97	1.706(46)	0.294(46)	0.461(19)	0.375(16)	0.292(14)
1.00	1.659(37)	0.341(37)	0.522(17)	0.414(14)	0.349(13)
1.10	1.415(25)	0.585(25)	0.888(21)	0.615(15)	0.5882(84)
1.20	1.223(21)	0.777(21)	1.496(28)	0.856(16)	0.788(17)
1.30	1.0093(28)	0.9907(28)	2.0183(66)	1.0046(33)	1.011(13)

Табл. 2.1. Критичні показники двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими феромагнітною взаємодією найближчих сусідів і антиферомагнітною дипольною взаємодією для різних значень коефіцієнта взаємодії δ. Результати роботи [51], отримані за допомогою скінченно вимірного скейлінгу нулів статистичної суми і піку питомої теплоємності, $d\nu$ і α/ν показані у другому і четвертому стовпцях відповідно. Критичний показник питомої теплоємності α, отримані за допомогою співвідношення гіперскейлінгу з цих значень, наведені у третьому та п'ятому стовпцях відповідно. Шостий стовпець містить результати, отримані за допомогою аналізу густини нулів статистичної суми (α_{zd}).

нулів дозволяє отримати значення критичного показника кореляційної довжини ν. Значення $d\nu$ наведено в Таблиці 2.1 для різних значень δ. За умови, що співвідношення гіперскейлінгу $\alpha = 2 - d\nu$ виконується, можна використовувати його для отримання критичного показника питомої теплоємності α. Відповідні значення $\alpha(\delta)$ наведені в третьому стовпчику таблиці 2.1. Оскільки $\alpha = 1$ сигналізує про фазовий перехід першого роду, отримані значення показника $\alpha < 1$ служать доказом існування фазового переходу другого роду в розглянутій області δ. Цей результат був додатково підтверджений FSS-аналізом питомої теплоємності, що приводить до співвідношення α/ν, що вказується в у четвертому стовпчику Таблиці (2.1) [51]. Знову ж таки, використовуючи співвідношення гіперскейлінгу, можна отримати значення α при $d = 2$ через: $\alpha = \frac{2\alpha/\nu}{d+\alpha/\nu}$. Останнє значення відображається як функція від δ у п'ятому стовпці таблиці.

Зазначимо, що, хоча отримані вище оцінки для α узгоджуються із фазовим переходом другого роду ($\alpha < 1$), вони не узгоджуються чисельно. Понад те, методи, які використовуються для їх визначення, не забезпечують їх безпосередню оцінку, а скоріше спираються на співвідношення гіперскейлінгу. Отже, у наступному розділі ми будемо використовувати метод для аналізу нулів Фішера моделі з гамільтоніаном (2.1), описаний у розділі 1.3.1.

2.1.2. Густина нулів Фішера

Як вже було сказано в попередньому розділі, вхідними даними для нашого аналізу слугують координати нулів Фішера, які було розраховано в в [51] для різних δ і L. З них ми обчислюємо залежність кумулятивної функції густини $G(r)$ (1.10) для різних значень δ. Отримана таким чином типова залежність $G(r)$ показано на Рис. 2.1 для $\delta = 1$. Відповідні кумулятивні функції для інших значень δ показують подібну поведінку. Далі, для кожного значення δ, відповідні функцій $G(r)$ апроксимуються степеневим законом $G(r) = ar^{2-\alpha} + b$, що дає конкретне значення критичного показника питомої теплоємності α. Варто зауважити, що у кожному випадку отримані значення параметра b були дуже малі, що дозволило використовувати анзац (1.13). Отримані значення критичних показників наведено в останньому стовпчику таблиці 2.1, α_{zd}.

Є кілька висновків, які можна зробити порівнюючи дані для критичниї показників питомої теплоємності з таблиці 2.1. Перш за все варто відзначити, що результати, отримані трьома різними методами: (i) FSS нулів статистичної суми (третій стовпець таблиці, отриманий за допомогою співвідношення гіперскейлінгу даних [51]), (ii) FSS піку питомої теплоємності [51] (п'ята колонка таблиці) і (iii) аналіз густини нулів статистичної суми (остання колонка таблиці, наші дані) дають значення $\alpha < 1$ до $\delta < 1,3$. Враховуючи, що $\alpha = 1$ служить доказом фазового переходу першого роду (див. формули (1.11) і (1.13)) можна зробити висновок, що перехід від смугастої $h = 1$ до тетрагональної фази (див. фазову діаграму Рис. 1.1) відбувається за сценарієм фазового переходу другого роду. Для значень $\delta \geq 1.3$

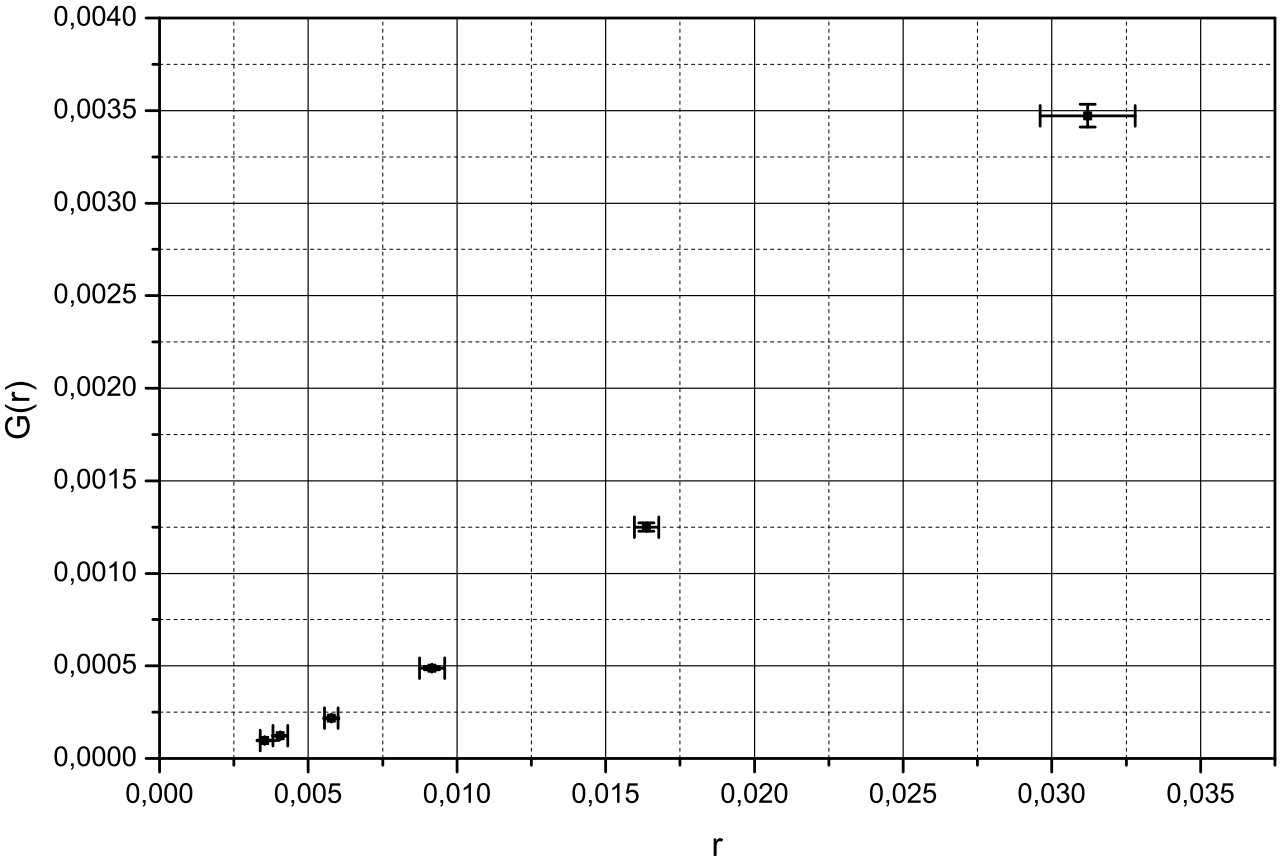


Рис. 2.1. Кумулятивна густина нулів статистичної суми $G(r)$ для $\delta = 1$.

всі три підходи передбачають фазовий перехід першого роду, що приводить до висновку, що трикритична точка знаходиться в області $1.2 < \delta < 1.3$.

Всі три підходи приводять до δ-залежних значень критичних показників. Це робить δ, поряд із вимірністю простору d, глобальною змінною, що визначає клас універсальності. Залежність критичного показника α, обчисленого в цьому дослідженні (α_{zd}) від параметру взаємодії δ, наведена на Рис. 2.2. Зазначимо, однак, що числові значення показників, отриманих за допомогою різних підходів, різняться. Зокрема, результати отримані за допомогою скінченно вимірного скейлінгу нулів статистичної суми (третій стовпець таблиці) добре узгоджуються з результатами аналізу густини нулів статистичної суми (шостий стовпець таблиці). Але вони істотно відрізняються від результатів, отриманих на основі аналізу FSS піку питомої теплоємності [51]. Крім того, зі скейлінгу максимумів магнітної

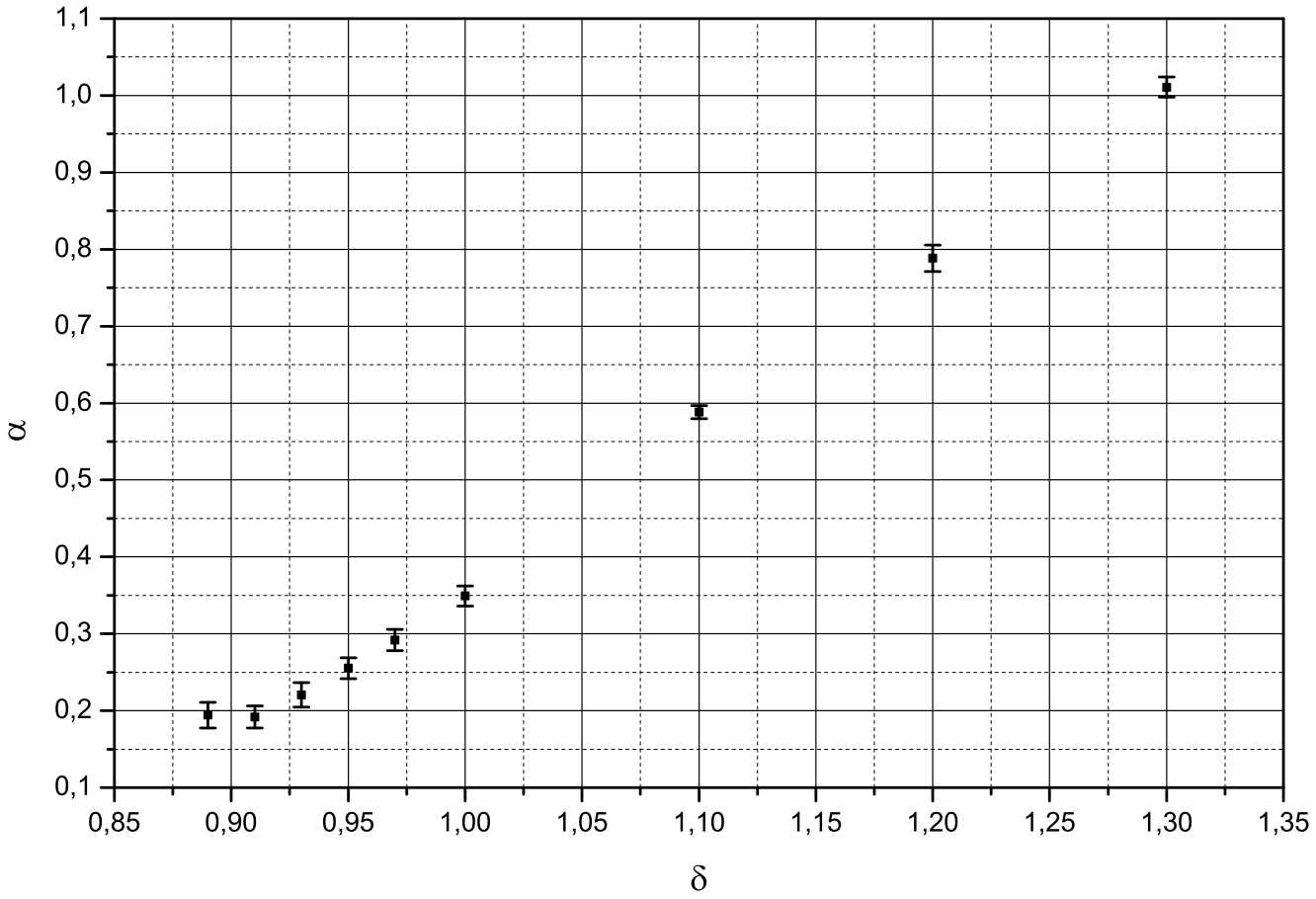


Рис. 2.2. Залежність критичного показника α, обчисленого із густини нулів статистичної суми (α_{zd}), від параметра взаємодії δ.

сприйнятливості автори отримали сумнівну величину $\gamma/\nu = 2.3193(82)$, тоді як для режиму першого роду очікується $\gamma/\nu = 2$ [114, 115]. Ці результати вимагають подальшого дослідження.

2.2. Одновимірна модель Поттса з невидимими станами

2.2.1. Фазовий перехід у класичних одновимірних системах

У своїй відомій роботі 1925 року [116], за пропозицією Вільгельма Ленца, Ернст Ізінг шукав фазовий перехід в одновимірній (1D) класичній рівноважній системі з короткостроковими взаємодіями за додатньої температури [117]. На превеликий жаль такого фазового переходу не вдалося знайти [118]. Це стало початком появи великої кількості літератури з статистичної механіки критичних явищ,

включаючи ряд досліджень щодо того, чому в таких системах неможливо мати фазовий перехід [119–122]. Нижня критична вимірність тепер означається як така, нижче якої не може відбутися фазовий перехід при позитивній температурі і щонайменше два фізичні виміри потрібні для багатьох класичних рівноважних моделей з короткосяжною взаємодією.

Ландау та Ліфшиць навели евристичні аргументи, на користь того, що надлишок ентропії перешкоджає фазовим переходам нижче верхньої критичної вимірності. Пізніше подібні міркування були строго довеені Саймоном і Сокалем [123]; підхід Ван Хове базувався на доведенні аналітичності власних значень матриці переносу та вільної енергії [120]; Рюель розширив ці аргументи даючи строгі теореми [121]. Нещодавно, Куеста і Санчез [122] представили більш загальні результати про відсутність фазових переходів у одновимірних системах із короткосяжною взаємодією. Для таких класичних, рівноважних моделей з короткосяжними взаємодіями в одному вимірі фазовий перехід другого роду може спостерігатися лише при нульовій температурі. Суть ранніх аргументів полягає в тому, що існує надлишок ентропії в одновимірних системах відносно енергії взаємодії, так що тонкий баланс, який дає фазовий перехід, не досягається. Роль доменних стінок в цьому процесі досліджувалася в [124].

Щоб уникнути обмежень описаних вище, можна розглядати взаємодії з достатньо великим радіусом [125–129]. Інший вихід полягає у розгляді нерівноважних систем [130], а інші винятки обговорюються в [122]. Зокрема, можна розглядати моделі з комплексними взаємодіями [131–133]. Ми показуємо, що моделі з негативним числом невидимих станів або комплексними полями, що діють на них, можуть мати фазовий перехід при додатніх температурах [20, 21].

Концепція універсальності означає, що критична поведінка визначається вимірністю, діапазоном взаємодії та симетрією системи. Хоча число невидимих станів r не змінює жодного з цих параметрів, було показано, що зі зміною r може змінюватися рід фазового переходу [22, 74, 76]. Наприклад, двовимірна $(2,0)-$станова модель Поттса (яка є звичайною моделлю Ізінга) є архетиповим прикладом неперервного фазового переходу, а $(2,30)-$станова модель володії фа-

зовим переходом першого роду.

Наш аналіз підтверджує, що модель Поттса з позитивним числом невидимих станів підлягає усім вищезгаданим теоремам, тому єдиним можливим є фазовий перехід при нульовій температурі. Однак, за умови, що зовнішні магнітні поля можуть бути комплексними, ми отримуємо фазовий перехід при додатніх температурах [131–133]. Таке ж явище можна досягти шляхом введення негативного числа невидимих станів. Хоча деякі з цих концепцій самі по собі є нефізичними, вони можуть бути пов'язані з реальними фізичними системами кількома цікавими способами.

Низькорозмірні моделі постійно привертають увагу як теоретиків, так і експериментаторів [122]. Новий комбінаторний підхід був недавно використаний для розв'язання одновимірної моделі Ізінга в [134], і було запропоновано застосувати цей метод для розв'язання двовимірної задачі. Перша експериментальна перевірка розв'язку Онзагера 1943 року для двовимірної моделі Ізінга [135] також з'явилася нещодавно [136].

З цих причин ми аналізуємо нулі Лі-Янга і Фішера одновимірної моделі Поттса з невидимими станами. Існують і інші способи отримати фазовий перехід в одновимірних системах. Виходячи з пропозицій Андерсона, [125–127], Дайсон [128] довів, що системи з великим діапазоном взаємодії можуть мати фазові переходи при додатній температурі, а Фроліх і Спенсер довели існування спонтанної намагніченості при малій додатній температурі для одновимірної моделі Ізінга з далекосяжними взаємодіями. Згодом, Асорі і співавтори показали, що в одновимірних моделях з короткосяжними взаємодіями з комплексними значеннями константи взаємодії можливі фазові переходи при позитивних температурах [131–133]. Куеста і Санчез [122] навели три додаткові приклади фазових переходів, як з чисто академічного інтересу так і через важливістю для таких явищ, як поверхневий ріст і денатурація ДНК. Для квантових фазових переходів критична розмірність також зменшується порівняно з класичним відповідником [137].

2.2.2. Модель Поттса з невидимими станами на одновимірному ланцюжку

Розглянемо модель Поттса з невидимими станами з взаємодією найближчих сусідів. На одновимірному ланцюжку із N спінів з періодичними граничними умовами статистична сума має вигляд

$$Z = \sum_{s} \exp\left(-\beta H_{(q,r)}\right), \tag{2.3}$$

де $\sum_{s}$ позначає суму по усіх можливих спінових конфігураціях. Беручи до уваги періодичні граничні умови, гамільтоніан можна переписати як суму, кожен доданок якої відповідає одному зв'язку

$$H_{(q,r)} = \sum_{i} H_i, \quad \text{де} \quad H_i = -\delta_{s_i,s_{i+1}} \sum_{\alpha=1}^{q} \delta_{s_i,\alpha} - h_1 \delta_{s_i,1} - h_2 \delta_{s_i,q+1}, \tag{2.4}$$

де сумування по i проходить по усіх N вузлах ланцюжка, $s_i = 1, \ldots, q, q+1, \ldots, q+r$ поттсівська змінна, а h_1 і h_2 позначають два зовнішні магнітні поля, що діють на перший видимий і перший невидимий стан відповідно. Таким чином

$$Z = \sum_{s} \prod_{i} \exp\left(-\beta H_i\right). \tag{2.5}$$

Останній доданок у (2.4) діє тільки на один з r невидимих станів через зовнішнє поле h_2. Таким чином, вклад до енергії є тільки якщо $h_2 \neq 0$. Решта $r-1$ однакових невидимих станів дають внесок тільки до ентропії. Це означає, що різні мікроскопічні конфігурації можна трактувати як одну і ту ж макроскопічну конфігурацію. У термінах статистичної суми ефект полягає в множенні деяких членів на $(r-1)$. Аналогічно, як це було зроблено в [74], ми можемо зібрати всі невидимі стани в єдиний з відповідною вагою і розглянути еквівалентний гамільтоніан моделі Поттса з домішкою:

$$H^{eq}_{(q,r)} = -\sum_{i} \delta_{\sigma_i,\sigma_{i+1}} \sum_{\alpha=1}^{q} \delta_{\sigma_i,\alpha} - h_1 \sum_{i} \delta_{\sigma_i,1} - h_2 \sum_{i} \delta_{\sigma_i,q+1} - T \ln(r-1) \sum_{i} \delta_{\sigma_i,q+2}, \tag{2.6}$$

де $\sigma_i = 1, \ldots, q, q+1, q+2$ нова поттсівська змінна, а всі (окрім одного вздовж поля h_2) невидимі стани зібрані в один із відповідною вагою. Гамільтоніан (2.6), очевидно, відрізняється від (2.4), але відповідні статистичні суми є однаковими.

Окрім згаданої вище моделі Поттса з домішкою, моделлю Поттса з невидимими станами описується декілька інших фізичних моделей. По-перше, $(1,r)$-станова модель еквівалентна моделі Ізінга із полем залежним від температури, яку можна пов'язати із моделлю Зімма-Брега для детанурації ДНК [138]. $(1,r)-$станова модель із далекосяжною взаємодією має фазовий перехід із розворотом, який добре узгоджується з експериментальними спостереженнями переходів в полімерах [15]. $(2,r)-$станова модель Поттса без зовнішнього поля еквівалентна моделі Блюме-Емері-Гріфітса [74, 80, 83].

2.2.3. Матриця переносу

Для того, щоб знайти точний розв'язок моделі (2.4) означимо матрицю переносу $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s_i, s_j)$ як і в [139–142]

$$\mathbf{T}(s_i, s_j) = \exp\left[\beta(\delta_{s_i,s_j}\sum_{\alpha=1}^{q}\delta_{s_i,\alpha} + h_1\delta_{s_i,1} + h_2\delta_{s_i,q+1})\right], \tag{2.7}$$

або у вигляді квадратної матриці розміру $(q+r)\times(q+r)$,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} yz_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & z_2 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & y & 1 & \cdots & 1 & z_2 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & 1 & y & \cdots & 1 & z_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & 1 & 1 & \cdots & y & z_2 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & z_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & z_2 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

де стовпчики відповідають змінній s_i, а рядки - s_{i+1}. Залежність від температури та полів тепер міститься у змінних

$$y = e^{\beta}, \quad z_1 = e^{\beta h_1}, \quad z_2 = e^{\beta h_2}. \tag{2.9}$$

Поряд із змінною y для температури ми будемо використовувати $t = y^{-1} = e^{-\beta}$. В такому представленні безмежна ділянка $0 \leq T < \infty$ перетворюється на відрізок $0 \leq t \leq 1$.

Тоді статистичну суму можна переписати у вигляді

$$Z = \prod_{i=1}^{i=N} \sum_{\{s_i\}} \mathbf{T}(s_i, s_{i+1}) = \mathrm{Sp}\, \mathbf{T}^N = \sum_i \lambda_i^N, \tag{2.10}$$

де λ_i позначають власні значення матриці переносу $\mathbf{T}$.

Деякі власні значення можна знайти із симетрії матриці переносу. Легко показати, що матриця (2.8) має п'ять різних власних значень. З одного боку, оскільки останні r стовпців матриці пропорційні, одне власне значення дорівнює нулю і має ступінь виродження $r - 1$. З іншого боку, оскільки $(q - 1)$ елементи основної діагоналі дорівнюють y, вибираючи $\lambda = y - 1$ можна знайти $q - 2$ лінійно незалежних власних векторів. Це залишає лише три невідомі власні значення. Їх можна знайти за допомогою інваріантних перестановок. Цей підхід призводить до рівняння для трьох невідомих власних значень:

$$(r-1-\lambda+z_2)(yz_1-\lambda-z_1)(y-\lambda-1)-\lambda z_1(y-\lambda-1)-(q-1)(yz_1-\lambda-z_1)\lambda = 0. \tag{2.11}$$

Це рівняння третього порядку а, отже, може бути розв'язано точно. Оскільки статистична сума (2.10) визначається власними значеннями, і всі λ були знайдені, то можна вважати, що задача була розв'язана точно [20].

2.2.4. Нулі статистичної суми і матриця переносу

Критична поведінка рівноважної системи повністю визначається статистичною сумою. У нашому випадку остання описується власними значеннями матриці переносу (2.10) і, оскільки ми показали, що їх можна знайти точно, критичні властивості моделі Поттса з невидимими станами можна, в принципі, також знайти точно. Це дозволяє нам розглянути нулі Лі-Янга [84, 85], і нулі Фішера [86] у розділах 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9.

Зазвичай власні значення матриці переносу нумерують в порядку спадання їх абсолютних величин $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots$. Нулі статистичної суми тоді знаходять з умови, що (хоча б) два найбільші власні значення рівні по модулю [143]

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| \,. \tag{2.12}$$

Оскільки ми переходимо до комплексних площин значень параметрів, то і власні значення в такому випадку будуть комплексними. Тому умову (2.12) можна переписати в наступній формі

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{i\phi} \,. \tag{2.13}$$

З рівняння (2.10) статистична сума є сумою власних значень в степені N. У нашому випадку власне значення $\lambda = 0$ не вносить жодного внеску, так що статистична сума набуває вигляду $Z = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \lambda_3^N + \lambda_4^N$. З цих чотирьох власних значень три є коренями многочлена (2.11), а четвертий дорівнює $y - 1$. З урахуванням нумерації власних значень, статистична сума може бути переписана таким чином, щоб виділити основні доданки:

$$Z = \lambda_1^N \left[1 + e^{iN\phi} + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^N + \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1} \right)^N \right] . \tag{2.14}$$

В границі великих значень N тільки два ведучі доданки в правій стороні рівняння (2.14) дають внесок. Це дає умову на фазу ϕ

$$1 + e^{iN\phi} = 0 \quad \text{або} \quad \phi = \frac{2k-1}{N}\pi, \quad k = 1 \ldots N \,. \tag{2.15}$$

В термодинамічній границі значення ϕ охоплюють відрізок $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Тому координати нулів статистичної суми можна знайти розв'язуючи рівняння (2.13) з фазою, заданою рівнянням (2.15). Цей метод є доречним, коли всі власні значення наведені явно. Проте, коли вони задані як корені многочлена, можна скористатися методом, запропонованим у [144] для моделей з трьома ненульовими власними значеннями або узагальненням цього підходу на випадок чотирьох ненульових власнх значень, роозробленим в [145].

У цьому методі чотири власні значення матриці переносу представлені як корені полінома четвертого порядку. У найбільш загальному випадку цей поліном має вигляд

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \tag{2.16}$$

Для моделі Поттса з невидимими станами рівняння (2.16) отримується множенням (2.11) на $[\lambda-(y-1)]$. Відповідні коефіцієнти в такому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned}
a_0 &= (y-1)^3 z_1(r+z_2-1)\,;\\
a_1 &= -(y-1)^2(z_1(q+y-1)+(2z_1+1)(r+z_2-1))\,;\\
a_2 &= (y-1)((z_1+1)(q+y-1)+(z_1+2)(r+z_2-1)+yz_1-1)\,;\\
a_3 &= -q-r-yz_1-2y-z_2+4\,.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Метою методу є отримання $\lambda-$ незалежного рівняння, що пов'язує температуру, поля та інші параметри моделі. Для виведення цього рівняння ми використовуємо чотири рівняння з теореми Вієти разом з умовою (2.13). Виключаючи всі власні значення з цих п'яти рівнянь, ми отримуємо

$$F(q,r,z_1,z_2,y) = F_1F_2(f_1+f_2+f_3+f_4), \tag{2.18}$$

де

$$F_1 = 8a_2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos(\phi) - a_3^2[2\cos(\phi)+1];$$

$$F_2 = 4a_1[2\cos(\phi)+1]\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right]^2 - 32a_2a_3\cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\phi + a_3^3[2\cos(\phi)+1]^2;$$

і

$$\begin{aligned}
f_1 &= 16a_0^3\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right]^4;\\
f_2 &= a_1^2\Big[a_2^2\left(a_3^2-2a_2(\cos(\phi)+1)\right)-a_1^2(1+2\cos(\phi))^3+\\
&\quad 2a_1a_3\Big(a_2(5\cos(\phi)+\cos(2\phi)+3)-a_3^2(1+\cos(\phi))\Big)\Big];\\
f_3 &= -2a_0\Big[a_2^3\Big(8a_2\cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right)-a_3^2(\cos(\phi)+1)\Big)+
\end{aligned}$$

$$a_1^2\left(4a_2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(7\cos(\phi)+5\cos(2\phi)+\cos(3\phi)+5)-a_3^2(2\cos(\phi)+\cos(2\phi))\right)+$$
$$a_1a_2a_3\left(-4a_2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)(6\cos(\phi)+\cos(2\phi)+3)+a_3^2(5\cos(\phi)+\cos(2\phi)+3)\right)\Bigg];$$

$$f_4 = a_0^2\Bigg[128a_2^2\cos^4\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos^2(\phi)+a_3^4(2\cos(\phi)+1)^3-$$
$$8a_2a_3^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(7\cos(\phi)+5\cos(2\phi)+\cos(3\phi)+5\right)+$$
$$8a_1a_3\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right)^2(2\cos(\phi)+\cos(2\phi)+3)\Bigg].$$

Для кожного значення ϕ задане рівнянням (2.15) всі корені рівняння (2.18) забезпечують значення параметрів, коли два власні значення рівні по модулю, але не всі з них є нулями статистичної суми. Справжні нулі отримуються тільки коли два найбільших власних значення рівні за модулем.

Ми аналізуємо нулі статистичної суми в площині комплексного магнітного поля і комплексної температури. Відповідно до теореми Лі-Янга, для феромагнітної моделі Ізінга на d вимірній регулярній решітці магнітні нулі є чисто уявними [84, 85]. Це твердження може бути узагальнене для багатьох інших моделей, наведених [94]. В комплексній площині $z = e^{-\beta h}$– нулі лежать на дузі одиничного кола. Часто нулі Лі-Янга називають “протокритичними точками” [143], оскільки вони можуть стати фактичними критичними точками. Протокритична точка на кінці дуги, що лежить ближче до додатньої дійсної осі, називається "краєм Янга-Лі"(надалі також називатимемо просто "край") [146]. Для температур вище критичної, дуга, на якій розміщені нулі, є відкритою, тобто не перетинає дійсну вісь в додатній півплощині. При зниженні температури дуга замикається в коло, а край дотикається до дійсної осі при досягненні критичної температури, що сигналізує про фазовий перехід. Для температур, менших критичного значення, нулі лежать на повному колі, що перетинає дійсну вісь z.

У рівнянні (2.18) ϕ пробігає дискретні значення для скінченних систем згідно формули (2.15). Маючи ці дані, ми можемо застосувати скінченнорозмірний скейлінг для визначення критичних показників (див. Розділ 2.2.9). Щоб встанови-

ти, чи відбувається фазовий перехід при позитивній або негативній температурі, ми визначаємо критичну температуру, дозволяючи нулям Лі-Янга дотикнутися до дійсної осі. Це спостерігається тільки для систем нескінченного розміру. В межах нашого підходу це досягається поклавши $\phi = 0$ у формулі (2.18). Іншим методом є застосування теореми Бераха-Кахане-Вайсса (БКВ) [147–149] для знаходження координат краю Янга-Лі в термодинамічній границі.

2.2.5. Показник розбіжності краю Янга-Лі

У цьому розділі ми покажемо, що показник розбіжності краю Янга-Лі не змінюється із кількістю невидимих станів. Для цього ми будемо слідувати методу, розробленому у роботах [144, 145].

При збільшенні розміру системи, нулі Лі-Янга $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ завершуються в комплексній площині на краю Янга-Лі $z_1^e = |z_1^e|e^{i\theta_e}$. Їх густина $g(z_1)$ в околі z_1^e описується степеневим законом із показником розбіжності краю Янга-Лі σ [150]:

$$g(\theta) \propto |\theta - \theta_e|^{\sigma} . \tag{2.19}$$

У випадках, коли для даного значення T нулі знаходяться на кривих (так звані лінії сингулярностей [90–93] на відміну від двовимірних областей [96]), функція g може бути записана для фіксованого $|z_1|$, зберігаючи тільки залежність від фази θ. Показник σ, як і інші критичні показники, характеризує клас універсальності. Для одновимірних моделей Ізінга і $q-$станової моделі Поттса його точне значення дорівнює $\sigma = -\frac{1}{2}$ [84, 85, 144, 150]. Відоме ще одне точне значення показника σ: для сферичної моделі $\sigma = \frac{1}{2}$ незалежно від типу взаємодії (коротко- або далекосяжна) і просторової вимірності [151].

Густина нулів статистичної суми в області $(\phi, \phi + \Delta\phi)$ є пропорційною до кількості нулів в цій області, поділених на довжину частини кривої, яку займають ці нулі. Оскільки для кожного ϕ існує деякий нуль, кількість нулів в області

$(\phi, \phi + \Delta\phi)$ пропорційна $\Delta\phi$. Тому густину можна записати у вигляді

$$\tilde{g}(\phi, \phi + \Delta\phi) \propto \frac{\Delta\phi}{\int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \sqrt{(\frac{\partial \mathrm{Re} z_1}{\partial\phi})^2 + (\frac{\partial \mathrm{Im} z_1}{\partial\phi})^2}\, d\phi}\,. \tag{2.20}$$

В термодинамічній границі нулі формують неперервну криву із густиною, як функцією ϕ

$$\tilde{g}(\phi, \phi + d\phi) = g(\phi) \propto \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial \mathrm{Re} z_1}{\partial\phi})^2 + (\frac{\partial \mathrm{Im} z_1}{\partial\phi})^2}}\,. \tag{2.21}$$

В околі краю θ_e (що відповідає $\phi = 0$) координати нулів можна розкласти в ряд Тейлора

$$z_1(\phi) \approx z_1^e + \frac{\partial^2 z_1(0)}{\partial\phi^2}\phi^2 + \dots \quad , \tag{2.22}$$

Лінійний доданок відсутній, бо рівняння (2.18) є парною функцією ϕ. Підставляючи розклад (2.22) у вираз для густини (2.21) ми отримуємо просту залежність між густиною нулів $g(\phi)$ і фазою ϕ:

$$g(\phi) \propto |\phi|^{-1}\,. \tag{2.23}$$

В термодинамічній границі та близько до краю фаза та координати нулів пов'язані співвідношенням

$$\theta - \theta_e \propto |z_1 - z_1^e|\,. \tag{2.24}$$

Використовуючи розклад (2.22) в правій стороні рівняння (2.24) ми отримуємо

$$\phi^2 \propto (\theta - \theta_e)\,. \tag{2.25}$$

Співвідношення (2.23) разом з (2.25) веде до степеневої залежності густини нулів статистичної суми, як функціїї їх фази в околі краю Янга-Лі

$$g(\theta) \propto |\theta - \theta_c|^{-1/2}\,. \tag{2.26}$$

Звідси випливає, що показник розбіжності краю Янга-Лі становить $\sigma = -\frac{1}{2}$. Це значення слідує з симетрії нулів при підстановці $\phi \to -\phi$, яка спостерігається для усіх моделей, що розглядалися в роботах [80, 144, 145, 152].

2.2.6. Співвідношення дуальності

Для полегшення аналізу нулів статистичної суми ми спочатку обговоримо деякі властивості власних значень, які будуть використані пізніше в тексті.

В рівнянні (2.11), величини r і z_2 входять тільки в один множник як $r + z_2$. Звідси можна зробити висновок, що магнітне поле, яке діє на невидимий стан, має такий же вплив, як і додаткові невидимі стани. Тому $r + z_2 - 1$ можна трактувати як кількість невидимих станів, що змінюється з температурою. З цих причин, в даному підрозділі z_2 завжди включене в r і ніколи не показано явно.

Дуальність означає, що при певному унітарному перетворенні $\mathbf{S}$, матриця переносу змінюється згідно із законом [153]

$$\mathbf{S}\mathbf{T}(y, z_1)\mathbf{S}^{-1} = \alpha\mathbf{T}^T(y^D, z_1^D), \tag{2.27}$$

де $y^D = y^D(y, z_1), z_1^D = z_1^D(y, z_1)$ позначають змінні дуальні до y, z_1 відповідно, і $\mathbf{T}^T$ є транспонованою матрицею переносу. Рівняння (2.27) можна переписати через власні значення

$$\lambda(y^D, z_1^D) = \frac{1}{\alpha(y, z_1)}\lambda(y, z_1). \tag{2.28}$$

Рівняння (2.28) зручно використовувати, якщо власні значення задані явно. Але в нашому випадку, коли власні значення задані як корені полінома третього порядку (2.11), результуючі вирази для них є надто громіздкими. Щоб позбутися цієї незручності, виведемо залежності для коефіцієнтів у поліномі (2.11). В найзагальнішому випадку рівняння має вигляд

$$\lambda^3 + A_1(y, z_1)\lambda^2 + A_2(y, z_1)\lambda + A_3(y, z_1) = 0. \tag{2.29}$$

Рівність у (2.29) повинна виконуватися як для прямих змінних, так і для дуальних. Підставляючи (2.28) в (2.29) ми отримаємо наступні закони перетворення для коефіцієнтів A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned} A_1(y^D, z_1^D) &= \frac{1}{\alpha}A_1(y, z_1), \\ A_2(y^D, z_1^D) &= \frac{1}{\alpha^2}A_2(y, z_1), \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$A_3(y^D, z_1^D) = \frac{1}{\alpha^3} A_3(y, z_1).$$

Використовуючи перші два рівняння з (2.30) і вихідне співвідношення (2.28) для власного значення $\lambda = y - 1$ можна отримати вирази для дуальних змінних:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(y-1)(q(z_1-1)+(r-1)z_1+1)}{q^2+q(2r-1)+(r-2)r}, \\ y^D &= \frac{(q+r-1)(q+r+z_1-1)}{q(z_1-1)+(r-1)z_1+1}, \\ z_1^D &= \frac{q^2+q(2r+y-2)+r^2-2r-y+1}{(y-1)(q+r-1)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Ці співвідношення дозволяють замінити поле на температуру і навпаки без зміни поведінки системи. В граничному випадку $r = 0$ перетворення (2.31) відтворюють відомий результат для одновимірної моделі Поттса [152].

2.2.7. Нулі Лі-Янга моделей з прямою фізичною реалізацією.

Нулі Лі-Янга звичайної моделі Поттса

Спочатку розглянемо звичайну $q-$станову модель Поттса. У цьому випадку кількість невидимих станів і, відповідно, друге магнітне поле рівне нулю ($r = 0$ і $h_2 = 0$). Цей випадок раніше вже детально вивчали, тому наші результати можна буде порівняти із висновками, зробленими в роботі [152]. Для цих значень параметрів, один із коренів рівняння (2.11) стає $\lambda = y - 1$, зменшуючи кількість різних власних значень зменшується до трьох. Інші два власні значення можна знайти як корені рівняння (2.11). Ці значення повністю відтворюють результати роботи [152]. Ці власні значення мають наступний вигляд

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(y(z_1+1)+q-2) \pm \sqrt{(y(1-z_1)+q-2)^2+(q-1)4z_1}\right], \ \lambda_3 = y-1. \tag{2.32}$$

У роботі [143] було показано, що координати краю можна отримати з умови, що найбільше власне значення матриці переносу вироджене. Два власні значення (2.32) є виродженими, коли вираз під коренем рівен нулю.

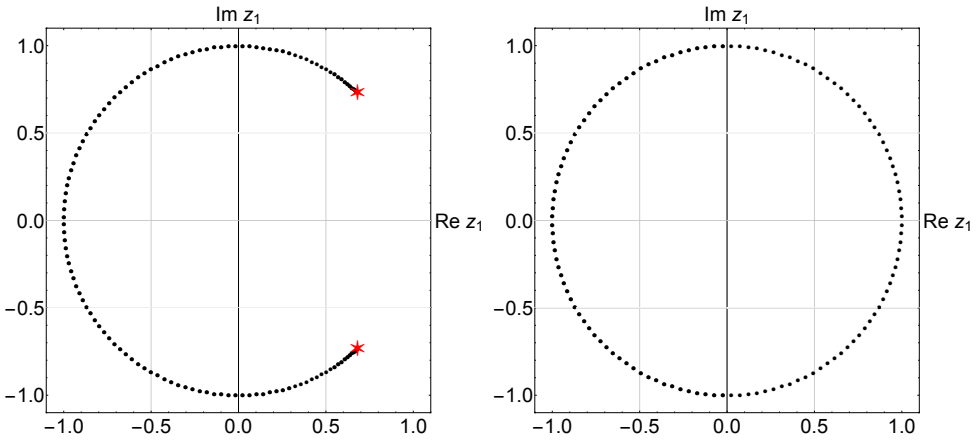


Рис. 2.3. Нулі Лі-Янга в комплексній $z_1 = e^{-\beta h_1}$—площині для одновимірної моделі Ізінга ($q = 2, r = 0$) для певних значень температури T. Графіки наведені для скінченного розміру системи N, але в термодинамічній границі нулі стають неперервними. Лівий графік показує нулі Лі-Янга при додатній температурі $T = 1.091$. Край Янга-Лі, відзначений червоними великими зірками, не дотикається до додатньої осі. Це означає відсутність фазового переходу. На правому графіку наведено нулі при нульовій температурі ($T = 0$). Наближення нулів до дійсної осі в точці $z_1 = 1$ при безмежному розмірі системи N сигналізує про спонтанний фазовий перехід ($h_1 = 0$).

На Рис. 2.3 ми наводимо положення нулів Лі-Янга одновимірної моделі Ізінга. Випадок $T > 0$ наведено на лівому графіку. Там координати краю є комплексними. Це означає відсутність переходу до симетричної фази. Зі зменшенням температури край наближається до дійсної осі. Граничний випадок $T = 0$ наведено на правому графіку для скінченної системи. Для системи безмежного розміру коло є суцільним, а не складається з окремих точок. В термодинамічній границі наближення краю до критичної точки ($h = 0$ or $z = 1$) призводить до спонтанного фазового переходу при нульовій температурі. На Рис. 2.3 зображено тільки випадок $q = 2$, для якого виконується теорема Лі-Янга про одиничне коло. Зміна кількості поттсівських станів призводить до зміни положення нулів (не показано на графіку); хоч їх розташування і залишаєься коловим, але радіус кола залежить від кількості станів при довільній додатній температурі. При $q < 2$ радіус кола є менший за 1, а при $q > 2$ - більший. Варто зазначити, що при $T = 0$ всі розташування нулів Лі-Янга формують кола одиничного радіусу, і, як наслідок,

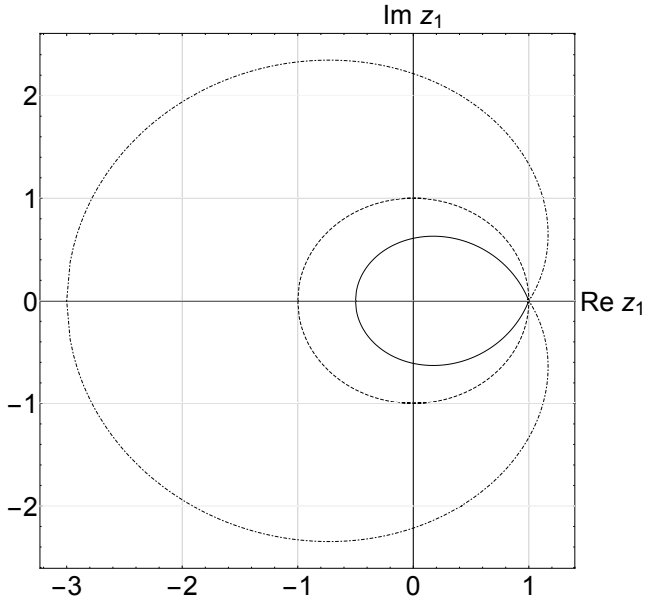


Рис. 2.4. Положення краю нулів Лі-Янга в комплексній z_1-площині для моделі Поттса з трьома різними кількостями видимих станів ($q = 1.5, q = 2, q = 4$, зсередини і назовні) і без невидимих станів ($r = 0$). Кожна траєкторія відображає увесь спектр температури ($0 \leq T \leq \infty$) і перетинає дійсну вісь $\mathrm{Re}\, z_1$ при $T = 0$.

перетинають дійсну вісь в точці $\mathrm{Re}\, z_1 = 1$.

Щоб більш компактно проілюструвати залежність координат нулів Лі-Янга від температури та кількості станів, замість того, що наводити повні графіки для кожного окремого значння, як це було зроблено на Рис. 2.3, наведемо координати краю Янга-Лі для різних значень T і q на Рис. 2.4. Будемо називати такі фігури "траєкторіями краю". Такі графіки дозволяють нам зобразити більші діапазони значень q і T при тому зберігаючи основну інформацію, бо саме точка перетину краю з дійсною віссю несе інформацію про фазовий перехід. Для різних значень q траєкторії краю формують різні замкнені криві. Але в кожному випадку дійсна вісь перетинається при $T = 0$, що в свою чергу доводить, що єдиним можливим є фазовий перехід при нульовій температурі, як і було знайдено близько ста років тому Ернстом Ізінгом (у випадку $q = 2$) [116].

Нулі Лі-Янга для моделі Поттса з невидимими станами

Відтворивши відомі результати для моделі Ізінга на Рис. 2.3 і звичайної моделі Поттса на Рис. 2.4, а також показавши як траєкторія змінюється із зміною q, перейдемо до аналізу моделі з невидимими станами. Як це випливає з рівняння (2.11), зовнішнє магнітне поле, що діє на невидимий стан, має таку саму дію як і додаткові невидимі стани. Використовуючи цю дуальність, не зменшуючи загальність, ми можемо покласти $h_2 = 0$ (чи $z_2 = e^{-\beta h_2} = 1$) в рівнянні (2.11) і отримуємо

$$(r-\lambda)(yz_1-\lambda-z_1)(y-\lambda-1)-\lambda z_1(y-\lambda-1)-(q-1)(yz_1-\lambda-z_1)\lambda = 0. \quad (2.33)$$

Підставляючи $z_2 = 1$ в рівняння (2.18), і використовуючи метод, описаний вище, можемо отримати координати нулів Лі-Янга в комплексній z_1-площині для довільного значення температури T і фіксованих q і r. На Рис. 2.5 ми наводимо відповідник Рис. 2.3, але вже для $(2,2)$-станової моделі Поттса при різних температурах.

Як видно із графіку, нулі лягають на дуги кола з радіусом, що не рівний одиниці і зростає із температурою (нижчі значення y) як система віддаляється від фазового переходу. Така ж поведінка спостерігалась навіть у звичайній моделі Поттса (Рис. 2.4). Відмінність полягає в тому, що навіть у випадку Ізинга ($q = 2$) наявність невидимих станів змінює радіус кола. Тільки при $T = 0$ нулі лежать на замкнутому колі одиничного радіусу.

Щоб знайти край Янга-Лі, необхідно визначити, коли двоє найбільших власних значень матриці переносу рівні. Це означає, що поліном (2.11) також має вироджені корені. Ця умова означає, що дискримінант $\mathbb{D}(y, z_1, z_2, q, r)$ рівняння (2.11) перетворюється в нуль [154]:

$$\mathbb{D}(y, z_1, z_2, q, r) = 0\,. \quad (2.34)$$

Дискримінант $\mathbb{D}$ є поліноміальною функцією від y, z_1, z_2, q і r. Підставляючи $z_2 = 1$ та фіксуючи кількість видимих і невидимих станів (q і r відповідно) ми можемо

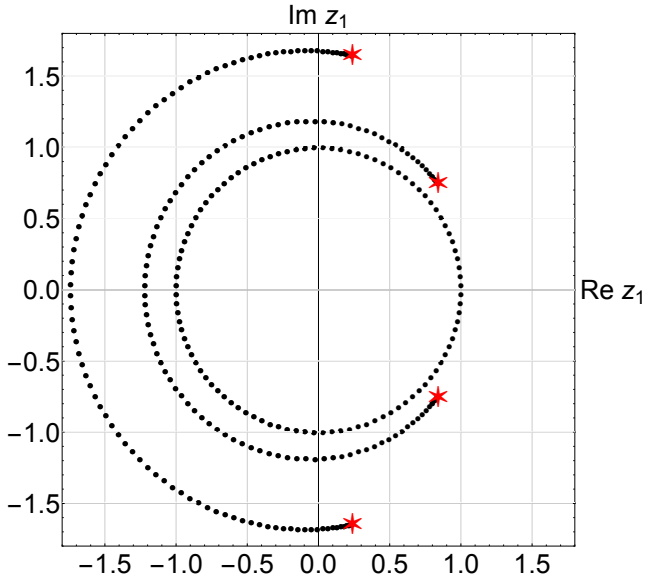


Рис. 2.5. Нулі Лі-Янга $(2,2)-$станової моделі Поттса в комплексній $z_1 = e^{-\beta h_1}-$площині для $y = e^{\beta} = 2$ (зовнішня траєкторія), $y = 4$ (середня траєкторія) і $y \to \infty$ (внутрішня, замкнуте коло, що відповідає $T = 0$) для системи розміру $N = 100$. Внутрішнє коло є ідентичним до правого графіку на Рис. 2.3 для моделі Ізінга. Як і для лівого графіка на Рис. 2.3, дві зовнішні траєкторії свідчать про відсутність фазового переходу при додатній температурі. Край Янга-Лі позначено червоними зірками.

пройти по діапазону значення температур $(y = e^{\beta})$ щоб знайти координати краю. Щоб відтворити край повністю, ми повинні знайти відповідні координати для усіх температур в діапазоні $0 \leq T < \infty$ (або $1 \leq y < \infty$). Отриманий графік зображено на Рис. 2.6. Цей графік є відповідником Рис. 2.4 (на ньому зображена модель Ізінга з невидимими станами). З порівняння двох графіків можна сказати, що додавання невидимих станів призводить до збільшення площі фігури, яку окреслюють описує край Янга-Лі. Але, описана вище поведінка нулів Лі-Янга, означає, що наявність невидимих станів не змінює того факту, що фазовий перехід відбувається тільки при нульовій температурі..

2.2.8. Фазові переходи при додатніх температурах

У цьому розділі ми запропонуємо нові способи отримати фазові переходи при додатній температурі в одновимірній класичній моделі з короткосяжними

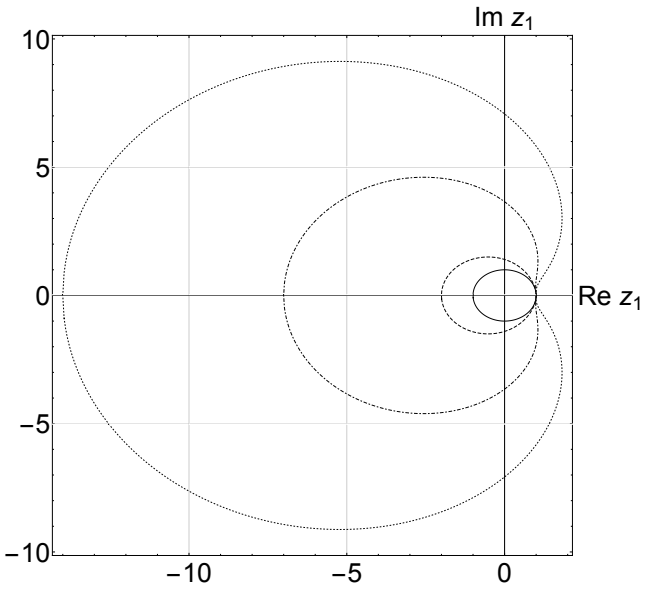


Рис. 2.6. Траєкторії країв Янга-Лі в комплексній z_1-площині для $q = 2$ і $r = 0$, 1, 6, 13 рухаючись зсередини і назовні. Усі графіки перетинають дійсну вісь в точці $z_1 = 1$, що свідчить про наявність фазового переходу тільки при нульовій температурі. Цей графік є відповідником Рис. 2.4, але при наявності невидимих станів.

взаємодіями.

Почнемо з аналізу нулів Лі-Янга у комплексній z_2-площині. Це дасть нам можливість зрозуміти, що необхідно для зсуву фазового переходу в область додатніх температур. Раніше ми вже згадували, що r і z_2 дають вклад лише як сума. Виявляється, наявність негативного значення цієї суми є ключовим для досягнення фазового переходу при додатній температурі в поточному контексті. Цей механізм можна фізично інтерпретувати двома різними способами. Негативні значення z_2 призводять до комплексних значень зовнішнього магнітного поля h_2. Вплив комплексних параметрів моделі на фазовий перехід в одному вимірі вже обговорювався в роботах [131–133]. У нашому випадку подібна поведінка досягається шляхом зміни h_2. З іншого боку, від'ємна кількість невидимих станів $r < 0$, виходячи зі співвідношення дуальності, описаного в підрозділі 2.2.6, має такий же ефект. Хоча обидві ці умови є екзотичними, вони або мають зв'язки з фізичними системами, або потенціально можуть проявлятися фізично в майбутньому [26, 87, 155].

Нулі в комплексній z_2-площині при $h_1 = 0$

На початку наших досліджень ми скористаємося ідеями, схожими до дослідження так званих нулів Поттса. У звичайній моделі Поттса вони вивчаються розширеним представленням Фортуїна-Кастелейна [156] шляхом аналітичного продовження поттсівської змінної q в комплексну площину. Нулі в комплексній $q-$площині використовуються для знаходження критичного числа станів для заданої температури [157–159]. Хоча значення q нижче 2 є нефізичними з точки зору спінових моделей, вони можуть мати фізичні прояви - наприклад, $q = 1$ описує перколяцію, $q = 0$ кістякові дерева і абелеву модель для самоорганізованої критичності [160–163].

Раніше ми бачили, що r діє подібно до зовнішнього магнітного поля h_2. Тому, нулі в комплексній $r-$площині можна інтерпретувати як нулі типу Лі-Янга у комплексній площині z_2. Щоб отримати нулі статистичної суми в комплексній площині z_2, підставимо значення q, r, h_1 в рівняння (2.18) аналогічно, як і в попередньому розділі. З іншого боку, ми можемо аналізувати поведінку координат краю безпосередньо, розв'язуючи рівняння (2.34). Відповідний графік наведений на Рис. 2.7 для окремого випадку $q = 2$.

Для позитивних значень r єдина точка перетину з дійсною віссю z_2 розташована на негативній частині. Це проілюстровано на Рис. 2.7. Траєкторія середнього краю Янга-Лі на Рис. 2.7 була отримана для $r = 1$. Збільшення r призводить до переміщення траєкторії вліво; але форма краю залишається незмінною. Це підтверджує нашу інтерпретацію Рис. 2.6 про те, що збільшення r зміщує траєкторії далі від фізичного фазового переходу. Можна зробити висновок, що зворотне також має місце; зменшення r до негативного числа невидимих станів може зсунути траєкторію краю Янга-Лі з негативної дійсної півосі до її додатньої частини. Це проілюстровано за допомогою правої траєкторії на Рис.2.7 де $r = -4$.

Звісно, графіки ілюструють поведінку в площині комплексного z_2, що відповідає лише тому полю, що діє на ентропійні (невидимі) стани. Щоб поєднати з попередніми дослідженнями нулів Лі-Янга, слід дослідити поведінку в площині

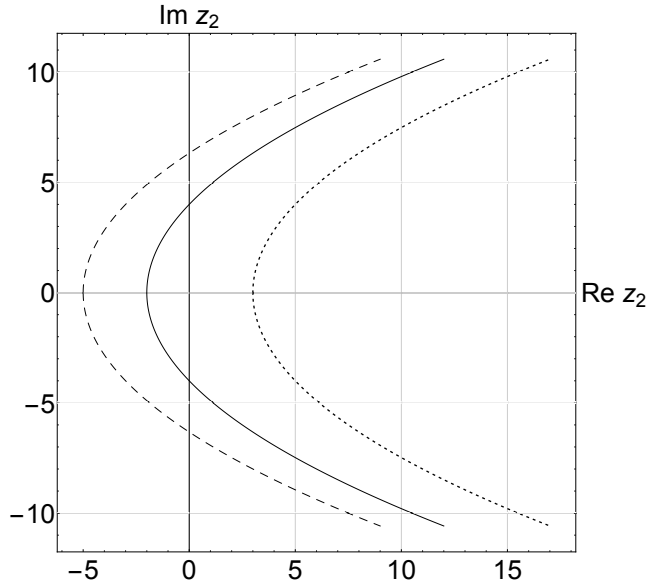


Рис. 2.7. Траєкторія краю Янга-Лі в комплексній z_2-площині для $q = 2$, $h_1 = 0$ і $r = 4$ (штрихова лінія), $r = 1$ (суцільна лінія) і $r = -4$ (пунктирна лінія). Кожна точка цих ліній відповідає певній температурі в діапазоні $0 \leq t \leq 1$.

комплексних h_1 або z_1.

Нулі Лі-Янга в комплексній z_1-площині з комплексним зовнішнім магнітним полем, що діє на невидимий стан: випадок $z_2 < 0$ ($h_2 \in \mathbb{C}$).

Виходячи з вищевикладених міркувань, ми продовжуємо пошук фазових переходів при додатній температурі в одному вимірі до аналізу ефектів від'ємних значень z_2 (що означає комплексне зовнішнє магнітне поле h_2) через нулі Лі-Янга в комплексній площині h_1. Використовуючи той самий метод, що і раніше, ми підставляємо у рівняння (2.18) негативне значення z_2 і отримуємо нулі Лі-Янга для різних значень q, r і температур t. Результати представлені на Рис. 2.8, який є аналогом Рис. 2.3 при додатніх r і від'ємних z_2. При малих температурах ці нулі лежать близько до кола одиничного радіусу, див. Рис. 2.3, але підвищення температури не залишає нулі Лі-Янга на одиничному колі. Натомість, вони набувають, скоріше, місяцеподібні форми. Більше того, хоча траєкторія нулів Лі-Янга "відкривається" з підвищенням температури, як на Рис. 2.3, але орієнтація дуг є протилежною. Варто відзначити, що для отримання графіків, показаних

на Рис. 2.8, ми фіксували z_2, а не h_2, що означає, що зі зміною температури t змінюється і зовнішнє магнітне поле.

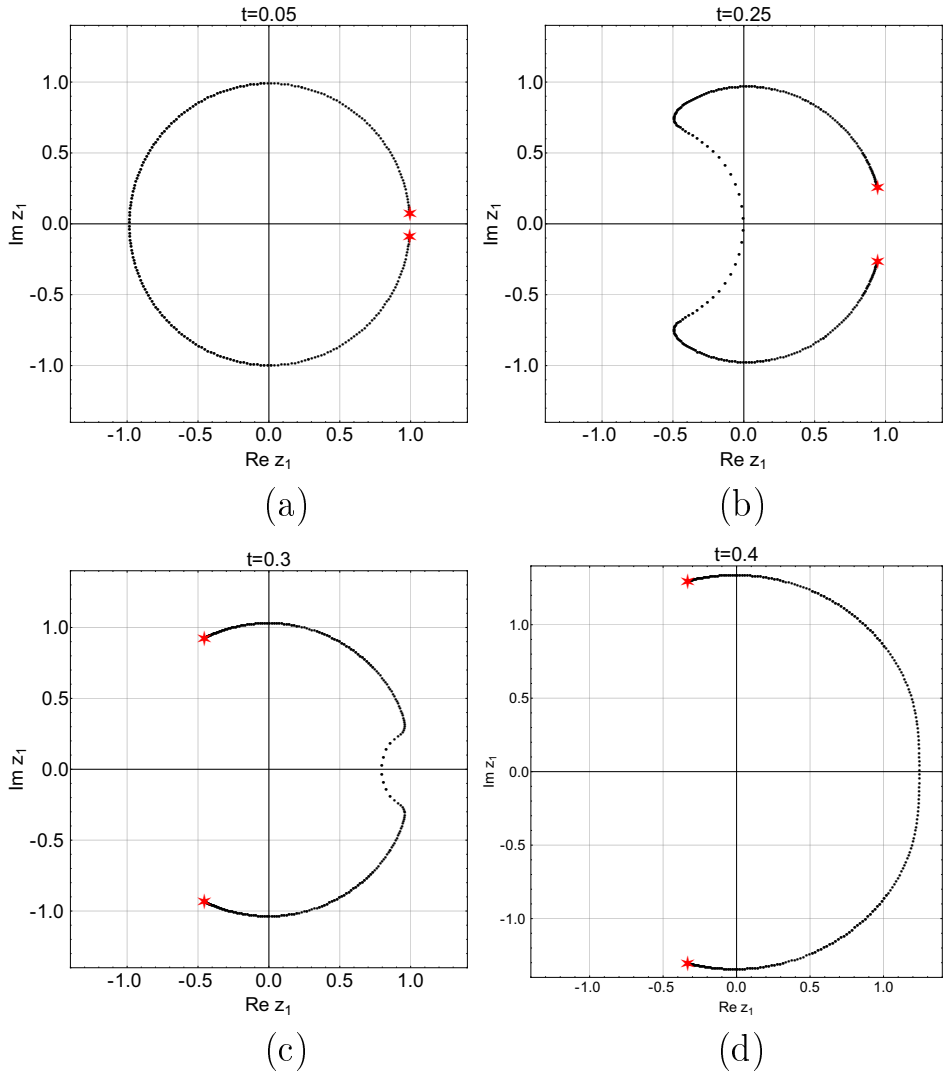


Рис. 2.8. Нулі Лі-Янга в комплексній z_1-площині для $(2,2)$-станової моделі Поттса із $z_2 = -5$ при різних значеннях температури (a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.25$, (c) $t = 0.3$ і (d) $t = 0.4$. Великі червоні зірки позначають край Янга-Лі. Загалом поведінка нулів схожа до тої, що була описана в попередньому підрозділі.

Для подальшого аналізу комплексних значень h_2, які зсувають фазовий перехід до позитивних температур, ми підставимо $h_1 = 0$ і використовуємо умову (2.34) для дискримінанта, щоб знайти два рівні і найбільші за модулем власні значення. Це призводить до співвідношення між критичною температурою і полем h_2

$$z_2 = y - q - r \pm 2i\sqrt{q(y-1)}\,. \tag{2.35}$$

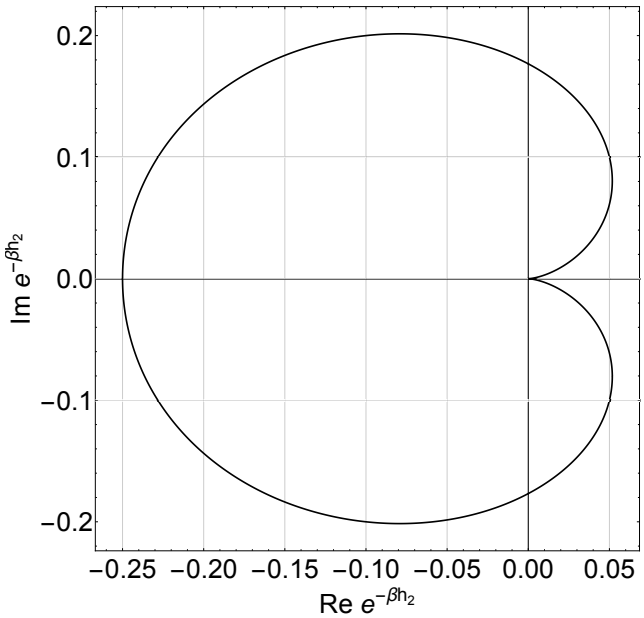


Рис. 2.9. Значення $e^{-\beta h_2}$, для яких фазовий перехід в $(2,3)-$становій моделі Поттса відбувається при додатній температурі. Кожна точка кривої відповідає певній фізично досяжній критичній температурі.

У цьому рівнянні як y, так і $z_2 = y^{h_2}$ залежать від температури. Для фіксованих q, r і усіх значень в діапазоні $1 \leq y < \infty$ (що означає діапазон температур $0 \leq t \leq 1$ ми чисельно розв'язуємо (2.35) і отримуємо комплексні значення для h_2. На Рис. 2.9 побудуємо ці значення для $(2,3)-$станової моделі Поттса у вигляді $e^{-\beta h_2}$. Крива формує дві лінії, кожна точка яких відповідає певній позитивній критичній температурі. Верхня і нижня гілки відповідають комплексно спряженим значенням поля.

Нулі в комплексній z_1-площині при $h_2 = 0$ і $r < 0$

Рис. 2.7 свідчить, що при зменшенні параметра r край в горизонтальній площині зміщується вправо. З урахуванням результатів попереднього підрозділу, де спостерігається перехід для негативних значень z_2 і співвідношення дуальності між r і z_2, ми очікуємо отримати фазовий перехід для $r < 0$. Використовуючи розширене представлення Фортуіна-Кастелейна, ми знімаємо умову позитивності на число невидимих станів r. На Рис. 2.10 наведені нулі Лі-Янга в площині комплексного z_1 для $(2,-5)-$станової моделі Потта для різних значень температури.

Рис. 2.10 є аналогом Рис. 2.3 і 2.5 але для від'ємного r. Наш головний результат у цьому підрозділі полягає в тому, що траєкторії нулів перетинають дійсну вісь при позитивних температурах для негативних значень r. Зокрема, лівий графік у другому рядку показує, що за відсутності поля h_1 (тобто при $z_1 = 1$) нулі перетинають дійсну ось при позитивному значенні t (а саме $t = 0.25$). Це і є шуканим спонтанним, за відсутності поля, фазовим переходом при позитивній температури в одному вимірі. Кореляційна довжина нескінченна при критичній температурі, але ентропія має розрив. Тому фазовий перехід є переходом першого роду. Однак невелика частина залежності ентропії від температури має нефізичну область. Це може бути наслідком нефізичних значень параметрів моделі. Аналогічна поведінка раніше встановлювалася в моделях з комплексними взаємодіями [131–133]. Цей зв'язок очевидний, оскільки ми раніше показали, що негативні значення r так само впливають на систему як комплексне зовнішнє магнітне поле.

Кожна з траєкторій на Рис. 2.10 перетинає дійсну вісь, у критичній точці. Негативні значення z_1 являють собою комплексні значення фізичного поля h_1. Значення $z_1 > 1$ являють собою $h_1 > 0$ – позитивне поле, що діє на перший стан $s = 1$. Позитивні значення в діапазоні $0 < z_1 < 1$ відповідають негативним значенням h_1. Такі негативні значення зовнішнього магнітного поля фактично збігаються з позитивними зовнішніми полями, що діють на інші ($s \neq 1$) стани. Для звичайного випадку Ізінга ($q = 2, r = 0$) негативні значення зовнішнього магнітного поля, що діють, наприклад, на перший стан ($s = 1$) ефективно представляють ту ж фізику, що і позитивне зовнішнє поле, що діє на інший ($s = 2$) стан. Для звичайної моделі Потта з $q > 2, r = 0$ негативні зовнішні поля позбавляють одного з станів, що зменшують симетрію від Z_q до Z_{q-1}. У тривимірній тристановій моделі Поттса це впливає на фазову діаграму: слабкі магнітні поля не змінюють порядок фазового переходу, в той час як сильне негативне магнітне поле змінює його на клас універсальності тривимірної моделі Ізінга [164].

На рисунку також показано, що, як і для звичайної моделі Поттса, теорема Лі-Янга про коло одиничного радіусу порушується для моделі Ізінга з негативним числом невидимих станів - траєкторії нулів не є круговими.

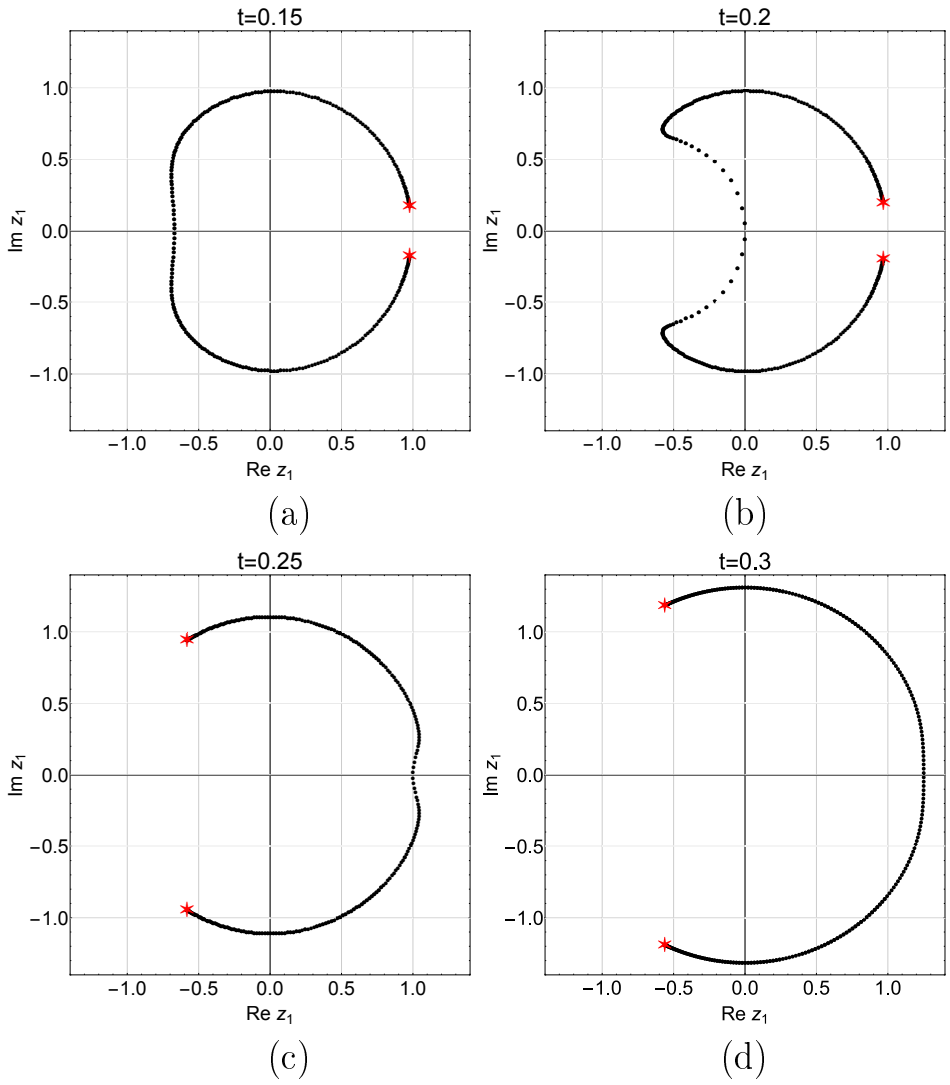


Рис. 2.10. Нулі Лі-Янга $(2,-5)$-станової моделі Поттса для різних значень температури (a) $t=0.15$, (b) $t=0.2$, (c) $t=0.25$, (d) $t=0.3$ в комплексній z_1-площині для системи розміру $N=256$. Графіки (a) і (b) показують нулі нижче температури спонтанного фазового переходу $t_c=0.25$, графіки (c) і (d) показують нулі вище критичної температури t_c. Великі червоні зірки позначають краї а малі чорні нулі Лі-Янга. Для малих температур краї розташовані в позитивній півплощині $\mathrm{Re}\, z_1 > 0$, тоді як для високих температур край переміщається у від'ємну півплощину $\mathrm{Re}\, z_1 < 0$. Це перескакування стається при температурі нижчій за критичну t_c.

Сукупність точок перетину для різних температур в діапазоні $0 \leq t \leq 1$ можна інтерпретувати як фазову діаграму. На Рис. 2.11 чорною суцільною лінією показана така фазова діаграма для $(2,-5)$ - станової моделі Поттса. Спонтанний перехід відбувається при $t=0.25$, $z_1=1$. Аналог звичайної моделі Ізінга знахо-

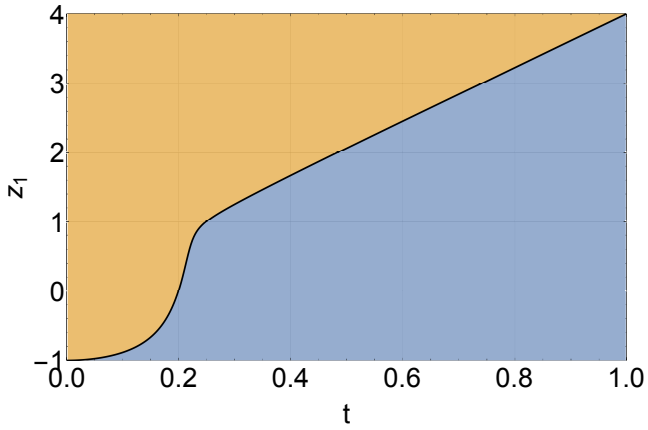


Рис. 2.11. Фазова діаграма $(2,-5)$-станової моделі Поттса. Площина (t, z_1) ділиться на області за максимальним власним значенням. Значення $z_1 < 0$ відповідають комплексним значенням магнітного поля h_1, тоді як $0 < z_1 < 1$ відповідає негативним значенням фізичного поля h_1.

диться при $t = 0$, $z_1 = 1$ – тобто при нульовій температурі, а не додатній. Щоб проілюструвати це представлення, на Рис. 2.11 ми ділимо площину $(t, z_1)-$ на області. Різні кольори відображають області, де різні власні значення є найбільшими за абсолютними значеннями. Там, де вони збігаються, відбувається фазовий перехід

Цікавим явищем на Рис. 2.10 є перескакування краю Янга-Лі зі збільшенням T (великі червоні зірки) від позитивної до негативної половини площин. Це відбувається не при критичній температурі спонтанного переходу, а при меншому значенні T. Причина цього полягає в тому, що краї на Рис. 2.10 знаходяться на відстані від дійсної осі і є псевдокритичними точками з $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. Фазова діаграма на Рис. 2.11 має нульове уявне поле $\operatorname{Im} z_1 = 0$. Щоб дослідити перескакування краю Янга-Лі слід розглянути ненульові значення $\operatorname{Im} z_1$. Три приклади цього зображені на Рис. 2.12. Різні кольори на графіку представляють різні власні значення. Це три зрізи тривимірної фазової діаграми з осями t (температура), $\operatorname{Re} z_1$ and $\operatorname{Im} z_1$. Ці зрізи наведені для фіксованої температури, коли відбувається перескакування, і координатами краю. Три власні значення рівні по модулю точно в точці, де відбувається перескакування. Така поведінка свідчить про існування точки з незвичайним показником розбіжності краю Янга-Лі [165].

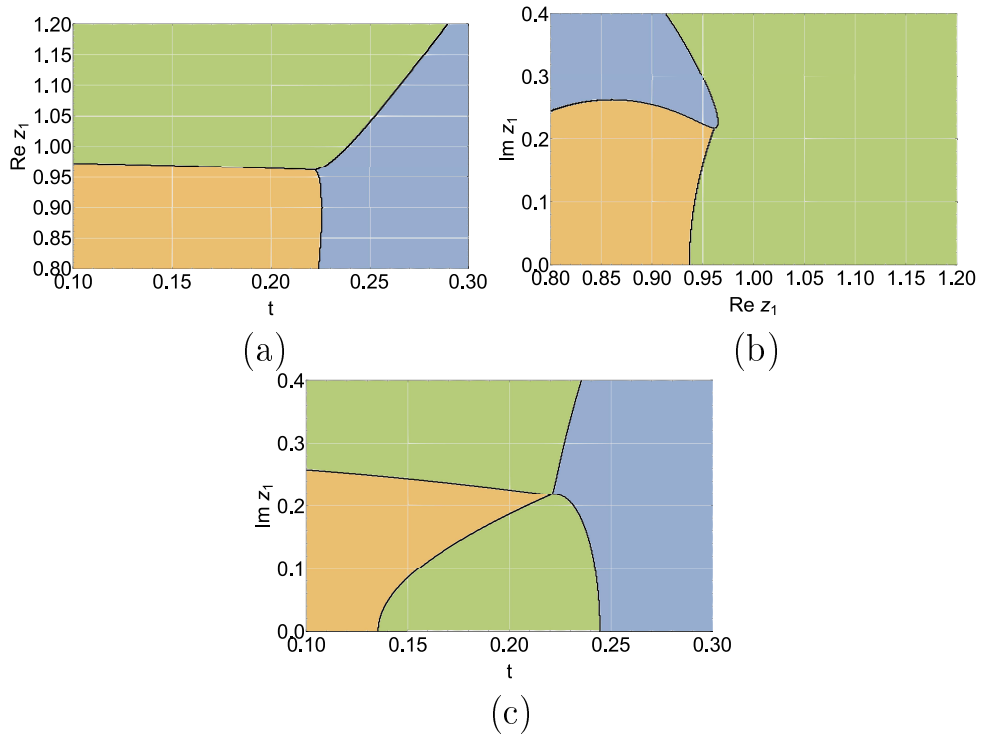


Рис. 2.12. Три зрізи тривимірної фазової діаграми. Кожен зріз задається при фіксованих значеннях параметрів, коли відбувається перескакування краю: (a) - фіксований $\mathrm{Im}\, z_1$, (b) - фіксована температура t, (c) - фіксований $\mathrm{Re}\, z_1$. Колір області представляє власне значення, яке є найбільшим за модулем всередині цієї області. Коли зустрічаються три кольори - це точка, де відбувається перескакуваня краю.

2.2.9. Нулі Фішера

Нулі Фішера зазвичай розглядаються при критичному значенні зовнішнього поля. Для спонтанного фазового переходу критичне значення поля становить $h_1 = 0$, що відповідає $z_1 = 1$. У цьому випадку один з коренів полінома (2.11) набуває значення $\lambda = y - 1$, так що поліном (2.11) має лише три різних власних значення. Нулі Фішера можуть бути отримані з умови, що (принаймні) два власні значення матриці переносу є найбільшими за модулем [143]. Такий підхід дозволяє отримати нулі системи скінченних розмірів і таким чином використовувати техніку скінченно розмірного скейлінгу для координат нулів Фішера. У термодинамічній границі лінія нулів перетинає дійсну вісь в точці переходу.

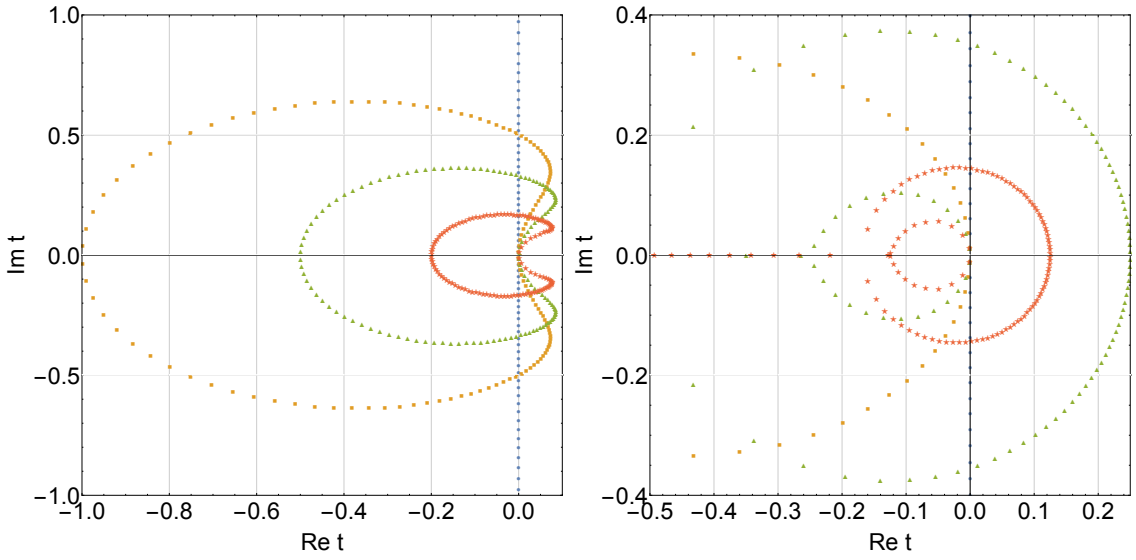


Рис. 2.13. Нулі Фішера $(2, r)-$станової моделі Поттса в комплексній площині $t = y^{-1} = e^{-\beta}$ для системи розміру $N = 128$ частинок з a) $r = 0$ (сині кружечки), 1 (жовті квадратики), 2 (зелені трикутники), 5 (червоні зірочки) і b) $r = 0$ (сині кружечки), -2 (жовті квадратики), -5 (зелені трикутники) , -7 (червоні зірочки).

Критична температура

Підставляючи $z_1 = z_2 = 1$ в рівнянні (2.18), прийдемо до рівняння для координат нулів статистичної суми в комплексній площині y при заданій парі (q, r). Найбільш зручно відображати нулі Фішера в комплексній $t = y^{-1}-$площині. У цьому випадку вони утворюють замкнуті криві навколо початку координат $t = 0$ (а не розбіжні, як у випадку $y \to \infty$) Безмежна область $0 \leq T < \infty$ відповідає ділянці $0 \leq t \leq 1$. На Рис. 2.13 (a) показано координати нулів Фішера для $q = 2$ і $r = 0, 1, 2, 5$ при фіксованому розмірі системи $N = 128$. Випадок $r = 0$ відтворює результати для одновимірної моделі Ізінга. Для $q = 2, r = 0$ нулі лежать на уявній осі. При збільшенні N, найближчий до дійсної осі нуль рухається до осі і при $N \to \infty$ перетинає дійсну вісь при $t = 0$ $(T = 0)$, що знову означає, що є тільки фазовий перехід для одновимірних систем при нульовій температурі [119, 121].

Як видно з Рис. 2.13(a), присутність невидимих станів змінює траєкторію нулів Фішера. Тепер нулі мають як дійснуу, так і уявну частини, і, крім того,

з'являється ще одна точка перетину дійсної осі t. Однак ця точка перетину розташована в нефізичній області $t < 0$ (комплексні значення T). $t = 0$ залишається точкою, де нулі Фішера наближаються до дійсної осі, і це підтверджує, що фазовий перехід у одновимірній моделі Поттса не змінюється із присутністю невидимих станів. Критичні показники цього переходу обговорюються пізніше.

Розвиваючи ці міркування, на Рис. 2.13 (b) покажемо траєкторію нулів для $(2, r)-$станової моделі Поттса з негативними значеннями r. Ми не показуємо на графіку деяких точок в області $t > 1$, які відповідають негативним температурам.

Як бачимо на малюнку, траєкторія нулів Фішера у випадку $r = -5, -7$ перетинає дійсну вісь при значенні $t_c = -\frac{1}{q+r-1}$. Це означає, що крім звичайного фазового переходу при нульовій температурі спостерігається перехід при додатній температурі в одновимірній моделі. Еквівалентне представлення моделі Поттса з невидимими станами через рівняння (2.6) вказує на те, що хімічний потенціал дорівнює $\mu = -T \log r$. Тому негативне число невидимих станів еквівалентне моделі з комплексним хімічним потенціалом. Знову ж таки, через вищезгадане співвідношення між комплексним зовнішнім полем і часом декогеренції [87], така поведінка дає зв'язок з поведінкою квантових систем.

Критичні показники

З допомогою координат нулів Фішера можна отримати значення критичних показників. Ми будемо використовувати методи, описані в підрозділі 1.3.1. Перший метод - це скінченно розмірний скейлінг нуля, найближчого до критичної точки. Цей метод дасть нам критичний показник кореляційної довжини ν. Інший підхід до аналізу нулів статистичної суми полягає в тому, щоб використовувати густину нулів [95]. Цей метод дозволяє використовувати не тільки координати найближчого нуля, але й розглянути функцію густини нулів. Скейлінг функції густини визначається критичним показником питомої теплоємності α.

Щоб отримати критичні показники з координат нулів ми використовували обидві методики. Використовуючи системи розміром від $N = 500$ до $N = 1000$ з приростом $\Delta N = 20$ $q = 2$ і $r = 6$, отримали значення параметрів $\nu = 0.9998(2)$,

$\Lambda = 1.9997(2)$ і $\alpha = 1.002(2)$, які добре узгоджуються зі співвідношенням гуперскейлінгу $\alpha = 2 - d\nu$. Крім того, при зміні q і r ці значення залишаються майже незмінними $\nu = 1, \alpha = 1, \Lambda = 2$.

Варто зазначити, що за відсутності магнітного поля можна отримати точний розв'язок і критичні показники такі ж, як і в одновимірній моделі Ізінга ($\nu = 1$, $\alpha = 1$, $\eta = 1$, $\gamma = 1$, $\mu = 0$, $\beta = 0$, $\delta = \infty$).

2.3. Висновки

У цьому розділі ми використовували аналіз нулів статистичної суми для аналізу універсальних властивостей двох різних класичних спінових систем. Для моделі Ізінга з дипольними взаємодіями ми показали, що сама природа критичної поведінки залежить від сили дипольної взаємодії. Остання контролюється параметром δ - відношенням сили феромагнітної взаємодії найближчих сусідів до постійної дипольної антиферомагнітної взаємодії. Фазову діаграму моделі характеризують низькотемпературні антиферомагнітні (як Неелівські, так і смугасті шириною h фази) і високотемпературна тетрагональна (парамагнітна) фази. Був проведений аналіз густини нулів Фішера для отримання критичного показника питомої теплоємності α. Ми показали, що в діапазоні $0.89 \leq \delta \leq 1.2$ фазовий перехід між $h = 1$ смугастим антиферомагнітним основним станом і тетрагональною фазою є переходом другого роду з δ-залежними критичними показниками. Хоча зміна δ не впливає ні на просторову вимірність, ні на симетрію, вона визначає клас універсальності. Для великих значень δ фазовий перехід стає переходом першого роду. Як було показано для $\delta = 1.3$, перехід між $h = 2$ смугастою фазою і тетрагональною є переходом першого роду. Це говорить про те, що існує трикритична точка для граничного значення δ, що розділяє $h = 1$ і $h = 2$ смугасті антиферомагнітні основні стани. Детальніше про граничні значення параметрів моделі ми розповімо в наступному Розділі.

Для одновимірної моделі Поттса з невидимими станами ми отримали точний розв'язок. Це також дозволило провести аналітичну обробку нулів статистичної

суми. Ми проаналізували нулі Фішера і Лі-Янга та показали, що існує два можливих шляхи зсуву фазового переходу в область додатніх температур, всупереч відомим теоремам. Від'ємне число невидимих станів r або комплексне зовнішнє поле h_2, що діє на невидиму підсистему, призводять до подібного ефекту. Це твердження додатково підтверджується співвідношенням дуальності, яке показує, що обидва ці механізми мають однаковий математичний прояв. З іншого боку, ми також показуємо, що для будь-яких позитивних r і дійсних магнітних полів фазовий перехід належить до класу універсальності одновимірної моделі Ізінга. Знову ж таки, зміна r дозволяє зсунути фазовий перехід в одному вимірі до фізично доступних температур. Більше про універсальні властивості моделі Поттса з невидимими станами ми поговоримо у наступному Розділі.

РОЗДІЛ 3

УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ КРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СПІНОВИХ СИСТЕМ НА МЕРЕЖАХ РІЗНОЇ ТОПОЛОГІЇ

У попередньому розділі ми показали, що тип впорядкування, а отже і клас універсальності, моделі Ізінга з дипольною взаємодією залежить від значення відношення параметрів взаємодії δ. Існують такі граничні значення δ, які розділяють різні ділянки фазової діаграми. У цьому розділі нас будуть цікавити граничні значення параметрів моделі Поттса з невидимими станами. Зокрема ми будемо розглядати дану модель на мережах різної топології. Нас цікавитимуть повний граф і безмасштабна мережа. Евклідова вимірність не означається для графу, тому принцип універсальності у цих двох випадках потрібує узагальнення. Для обох цих типів мереж буде проаналізований вплив невидимих станів на критичну поведінку і показане існування двох граничних значень кількості невидимих станів r_{c1} і r_{c2}, які розділяють ділянки з різною критичністю. Основні результати цього розділу викладені у публікаціях [22, 23].

3.1. Модель Поттса з невидимими станами на графі. Наближення середнього поля.

Питання про граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами є одним з центральних питань, що обговорюються в контексті цієї моделі. У цьому розділі ми розглянемо це питання для моделі на графі, що описується матрицею суміжності $\mathbf{A}$: з матричними елементами $A_{ij} = 1$, якщо між вузлами i та j є ребро, і $A_{ij} = 0$ якщо такого ребра немає. A_{ij} є симетричною матрицею розміру

$\beta \to \infty$	$\mu_i = 1$	$\nu_{1i} = 0$	$\nu_{2i} = 0$	$m_1 = 1$	$m_2 = 1$
$\beta \to 0$	$\mu_i = \frac{1}{q+r}$	$\nu_{1i} = \frac{1}{q+r}$	$\nu_{2i} = \frac{1}{q+r}$	$m_1 = 0$	$m_2 = 0$

Табл. 3.1. Низько- і високотемпературні асимптотики термодинамічних середніх (3.2) і параметрів порядку (3.5).

$N \times N$, де N - кількість вузлів у мережі.

Гамільтоніан $(q + r)$-станової моделі Поттса має вигляд [74] (див. також рівняння (2.4))

$$\mathcal{H} = -\sum_{<i,j>} J_{ij} \sum_{\alpha=1}^{q} \delta_{S_i,\alpha}\delta_{\alpha,S_j} - h \sum_i \delta_{S_i,1}, \tag{3.1}$$

де, $J_{ij} = JA_{ij}$ матриця констант зв'язку зі сталою $J > 0$, $S_i = 1, \ldots, q, (q + 1), \ldots, (q + r)$ поттсівська змінна на вузлі $i = 1, \ldots, N$, $\delta_{a,b}$ - символ Кронекера а h - магнітне поле, що діє на перший видимий стан. Перша сума в першому члені охоплює всі різні пари спінів. Тільки стани з $S_i = 1, \ldots, q$ вносять свій внесок у член взаємодії в гамільтоніані. Решта r станів не змінюють енергію, але вони збільшують кількість наявних конфігурацій і, отже, вони впливають на ентропію (а також вільну енергію).

Щоб продовжити аналіз в набдиженні неоднорідного середнього поля, введемо локальні термодинамічні середні значення на заданому вузлі i:

$$\langle \delta_{S_i,\alpha} \rangle = \begin{cases} \mu_i\,, & \alpha = 1, \\ \nu_{1i}\,, & \alpha = 2, \ldots, q, \\ \nu_{2i}\,, & \alpha = q+1, \ldots, r\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут усереднення виконується згідно гамільтоніана (3.1)

$$\langle \ldots \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathrm{Tr}\,(\ldots) e^{-\beta\mathcal{H}}, \qquad \text{з} \qquad \mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\mathcal{H}}, \tag{3.3}$$

де β позначає обернену температуру а слід рахується по усіх можливих спінових конфігураціях.

Зауважимо, що три різні термодинамічні середні μ_i, ν_{1i} і ν_{2i} є необхідними для врахування трьох типів станів: вздовж магнітного поля, і для розрізнення видимих і невидимих станів. Їх високо- і низькотемпературні асимптотики наведені

в Табл. 3.1. При високих температурах всі стани однаково вірогідні, тоді як при низьких температурах напрямок спонтанного порушення симетрії визначається напрямком магнітного поля.

Така асимптотика разом із умовою нормування:

$$\mu_i + (q-1)\nu_{1i} + r\nu_{2i} = 1, \tag{3.4}$$

дозволяє ввести два локальні параметри порядку:

$$m_{1i} = \mu_i - \nu_{1i}, \quad m_{2i} = \mu_i - \nu_{2i}.$$

Обидва m_{1i} і m_{2i} володіють стандартною температурною асимптотикою: вони перетворюються в 0 коли $\beta \to 0$ і рівні одиниці при $\beta \to \infty$, див. Табл. 3.1.

Легко показати, що виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{m_{2i}r + m_{1i}q + 1 - m_{1i}}{q+r}, \\ \nu_{1i} &= \frac{(m_{2i} - m_{1i})r + 1 - m_{1i}}{q+r}, \\ \nu_{2i} &= \frac{(m_{1i} - m_{2i})q + 1 - m_{1i}}{q+r}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для отримання гамільтоніана в наближенні середнього поля кожен символ Кронекера представимо як суму його середнього значення та малого відхилення від цього середнього і нехтуємо доданками, пропорційними до квадрату малого відхилення

$$\mathcal{H} = -\sum_{<i,j>} J_{ij}[\mu_i(2\delta_{1,S_j} - \mu_j) + \sum_{\alpha=2}^{q}(2\delta_{\alpha,S_i} - \nu_{1i})\nu_{1j}] - h\sum_i \delta_{S_i,1}. \tag{3.6}$$

Тоді статистична сума (3.3) матиме вигляд

$$\mathcal{Z} = \prod_{i=1}^{N} e^{\beta\sum_j J_{ij}(\mu_i\mu_j + (q-1)\nu_{1i}\nu_{1j})}\left(e^{\beta(h+2\sum_j J_{ij}\mu_j)} + (q-1)e^{2\beta\sum_j J_{ij}\nu_{1j})} + r\right). \tag{3.7}$$

Звідси отримуємо вільну енергію

$$F = \sum_{<i,j>} J_{ij}(\mu_i\mu_j + (q-1)\nu_{1i}\nu_{1j}) - \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\beta}\sum_i \ln\left(e^{\beta(h+2\sum_j J_{ij}\mu_j)} + (q-1)e^{2\beta\sum_j J_{ij}\nu_{1j}} + r\right).$$

В парадигмі наближення середнього поля будемо вважати, що матриця зв'язків пропорційна ймовірності того, що два вузли з'єднані між собою

$$J_{ij} = \frac{Jk_ik_j}{N\bar{k}}, \tag{3.9}$$

де k_i і k_j позначають ступені вузлів i і j відповідно, а $\bar{k} = \dfrac{\sum_i k_i}{N}$ - середній ступінь вузла в мережі.

Наступним кроком ми вводимо глобальні зважені параметри порядку m_1 і m_2 згідно з правилами

$$m_1 = \frac{\sum_i k_i m_{1i}}{\sum_i k_i}, \quad m_2 = \frac{\sum_i k_i m_{2i}}{\sum_i k_i}. \tag{3.10}$$

Через глобальні параметри порядку вільна енергія виражається як

$$\begin{aligned} F(m_1,m_2) = {} & \frac{JN\bar{k}}{(q+r)^2}\Big((rm_2+1+(q-1)m_1)^2 + (q-1)(rm_2+1-(r+1)m_1)^2\Big) \\ & - \frac{1}{\beta}\sum_i \ln\left(e^{\beta(h+\frac{k_iJ}{q+r}(m_1(q-1)+1+rm_2))} + (q-1)e^{\frac{\beta Jk_i}{q+r}(m_2r+1-(r+1)m_1)} + r\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

В термодинамічній границі, коли розмір мережі прямує до безмежності $N \to \infty$, сумування по ступеню вузлів перетворюється в інтеграл

$$\begin{aligned} \frac{F(m_1,m_2)}{N} = {} & \frac{J\bar{k}}{(q+r)^2}\Big((rm_2+1+(q-1)m_1)^2 + (q-1)(rm_2+1-(r+1)m_1)^2\Big) \\ & - \frac{1}{\beta}\int_2^\infty dk P(k) \ln\Big(e^{\beta(h+\frac{kJ}{q+r}(m_1(q-1)+1+rm_2))} \\ & + (q-1)e^{\frac{\beta Jk}{q+r}(m_2r+1-(r+1)m_1)} + r\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

У формулі (3.12) ми ввели функцію розподілу ступенів вузлів $P(k)$. Ми також встановили нижню межу інтегрування $k_{min} = 2$. Це є необхідною і достатньою умовою для того, щоб мережа мала гігантську зв'язну компоненту [166]. У наступних двох розділах цей загальний результат застосуємо до двох випадків: повного

графа, для якого розподіл вузлів описується $\delta-$функцією, і безмасштабної мережі зі степеневим розподілом ступенів вузлів.

3.2. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами на повному графі

В цьому розділі розглянемо модель Поттса з невидимими станами на повному графі. Для цього в рівнянні (3.12) підставимо функцію розподілу ступенів вузлів у вигляді $P(k) = \delta(k - (N-1))$, а також константу взаємодії $J = \frac{z}{N-1}$, де z певна константа (аналог кількості найближчих сусідів для регулярних граток) і $\delta(x)$ позначає $\delta-$функцію Дірака. З усіма цими підстановками вільна енергія на одну частину запишеться

$$\begin{aligned}\frac{F(m_1,m_2)}{N} &= \frac{z}{2}\left(\frac{(m_1q - m_1 + m_2r + 1)^2}{(q+r)^2} + \right.\\ &\left.\frac{(q-1)(-m_1r - m_1 + m_2r + 1)^2}{(q+r)^2}\right) - \\ &\frac{1}{\beta}\log\left\{(\exp\left[\beta\left(h + \frac{z(m_1q - m_1 + m_2r + 1)}{q+r}\right)\right] + \right.\\ &\left.(q-1)\exp\left[\frac{\beta z(-m_1r - m_1 + m_2r + 1)}{q+r}\right] + r\right\}. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Для $r = 0$ дана формула повністю відтворює вільну енергію звичайної моделі Поттса як функцію одного параметра порядку m_1 в наближенні середнього поля. Очевидно, що другого параметра порядку m_2 немає в стандартній моделі Поттса. Для неї фазовий перехід другого роду спостерігається тільки при $q \leq 2$. Надалі нас буде цікавити, як наявність невидимих станів впливає на тип цього переходу.

Наступним кроком є мінімізація вільної енергії (3.13) відносно двох параметрів m_1 і m_2. Зокрема, система рівнянь, що визначає екстремуми вільної енергії,

$\partial f/\partial m_1 = \partial f/\partial m_2 = 0$, має вигляд

$$\frac{(q+r)\left[e^{\beta(h+m_1 z)} - r - 1\right]}{e^{\beta(h+m_1 z)} + re^{\frac{\beta z(m_1 r + m_1 - m_2 r - 1)}{q+r}} + q - 1} = m_1[q + r(r+2)] - r(m_2 r + 1)\,, \tag{3.14}$$

$$\frac{(q+r)\left[e^{\beta(h+m_1 z)} + q - 1\right]}{e^{\beta(h+m_1 z)} + re^{\frac{\beta z(m_1 r + m_1 - m_2 r - 1)}{q+r}} + q - 1} = -m_1 r(q-1) + m_2 qr + q\,. \tag{3.15}$$

Розв'язки цих рівнянь, $m_1(T,h)$, $m_2(T,h)$ далі аналізуються для забезпечення їх відповідності умові стійкості, тобто, що вони відповідають мінімуму вільної енергії, або локальним мінімумам у випадку переходу першого роду. З цих міркувань, і розв'язуючи систему нелінійних рівнянь (3.14), (3.15) чисельно знаходимо два типи розв'язків при нульовому зовнішньому магнітному полі та скінченній температурі, а саме (i) $m_1(T,0) = 0$, $m_2(T,0) \neq 0$ і (ii) $m_1(T,0) \neq 0, m_2(T,0) \neq 0$. Зауважимо, що $m_2(T,0)$ ніколи не зникає при скінченній температурі. Тому тільки $m_1(T,0)$ є належним параметром порядку, що відображає спонтанну намагніченість, яка сигналізує про появу фазового переходу. Для фіксованих q перехід від розв'язку (i) до (ii) відбувається при скінченній температурі, що залежить від r – $T_c(r)$.

3.2.1. Випадок $q = 2$

Спочатку, розглянемо розширення моделі Ізінга з невидимими станами. В роботах [74, 77, 79] було знайдено, що $3 < r_c < 4$ для середньо-польової версії моделі. Нашою метою тут є надання більш точної оцінки для r_c у цьому випадку. На Рис. 3.1 наведена температура переходу для $q = 2$ як функція r для $z = 4$. Критична температура є гладкою функцією r і прямує до нуля при $r \to \infty$. У цій межі система стає системою невзаємодіючих частинок. Зауважимо, що для двовимірної моделі Поттса з невидимими станами на квадратній гратці T_c спадає для великих $(q+r)$ як $T_c \simeq 2/\ln(q+r)$ [81].

Як було показано в [74], $r = 4$ невидимих станів є достатніми для зміни фазового переходу моделі Поттса з $q = 2$ з другого на перший рід. Це задає верхню межу для граничного вимірності $r_c(q=2) < 4$. На Рис. 3.2 показано температурну

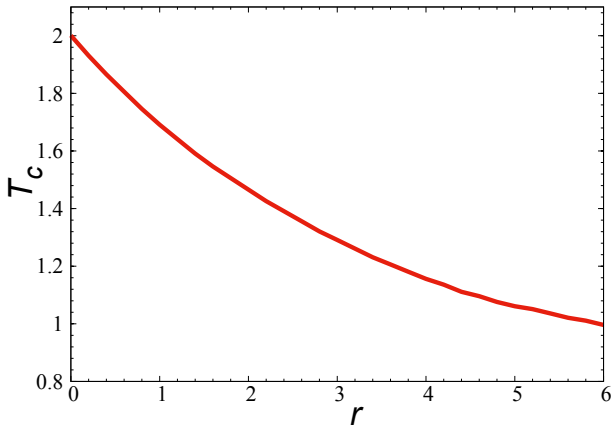


Рис. 3.1. Критична температура моделі Поттса з $q = 2$, $z = 4$ як функція кількості невидимих станів r. Критична температура є гладкою функцією r і прямую до нуля при $r \to \infty$.

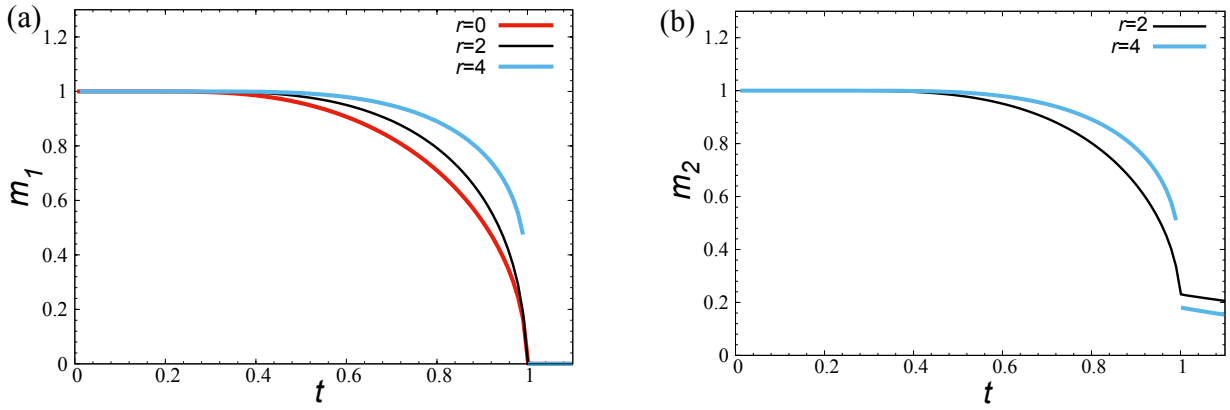


Рис. 3.2. Залежність параметрів порядку m_1 [Рис. (a)] і m_2 [Рис. (b)] від обезрозміреної температури $t = T/T_c$ для $r = 0, 2, 4$. Для $r = 0$, маємо тільки один параметр порядку, а саме m_1. Дійсно, $m_1(t)$ є фізичним параметром порядку, оскільки він занулюється при критичній температурі. Навпаки, $m_2(t)$ ніколи не перетворюється в нуль при скінченній температурі. Однак, як m_1, так і m_2 можна використовувати для розрізнення режимів першого та другого роду, як це демонструють графіки.

залежність параметрів порядку для $r = 0, 2, 4$. Оскільки T_c залежить від r, ми використовуємо обезрозмірену температуру $t = T/T_c$. Як ми вже відзначали раніше, для $r = 0$ маємо лише $m_1(T)$. Залежно від значення r, температурна залежність обох параметрів порядку m_1, m_2 характеризується двома різними режимами. Для $r = 0, 2$ графіки є безперервними, що свідчить, що фазові переходи є переходами другого роду. Однак при $r = 4$ спостерігається стрибок при критичній температурі. Зауважимо, що для визначення режимів першого і другого роду можна

використовувати як m_1, так і m_2. Проте варто підкреслити, що вище критичної температури $m_1(t) = 0$, а $m_2(t)$ зникає лише для нескінченної температури.

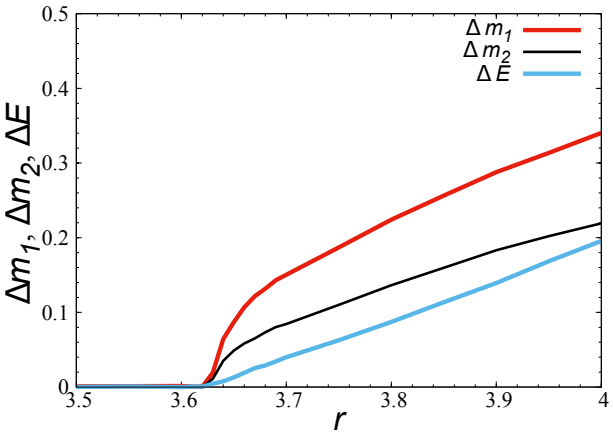


Рис. 3.3. Стрибки в параметрах порядку Δm_1 (червона крива), Δm_2 (чорна крива) і прихованої теплоти ΔE (синя крива) моделі Поттса при $q = 2$ як функції кількості невидимих станів r.

Щоб визначити граничне значення r_c, ми означимо стрибки параметрів порядку як

$$\Delta m_j = \lim_{t\to 1^-} m_j(t) - \lim_{t\to 1^+} m_j(t), \qquad j = 1, 2, \tag{3.16}$$

і проаналізуємо поведінку Δm_j як функцію r. Перша поява ненульового значення Δm_j відповідає появі фазового переходу першого роду. На Рис. 3.3 ми наводимо Δm_1 і Δm_2 як функції кількості невидмих станів r. Подібна поведінка також спостерігається і для прихованої теплоти фазового переходу $\Delta E = -\Delta S\, T_c$, де ΔS позначає стрибок ентропії в точці фазового переходу:

$$\Delta S = \lim_{t\to 1^-} S(t) - \lim_{t\to 1^+} S(t). \tag{3.17}$$

Ця величина також зображена на Рис. 3.3. Апроксимуючи криві ми знайшли наступні значення граничної вимірності r_c: $r_c = 3.629(1)$ з Δm_1, $r_c = 3.627(2)$ з Δm_2, і $r_c = 3.617(3)$ з ΔE. Усереднюючи ці три значення отримаємо $r_c = 3.622(8)$. Цей результат добре узгоджується із границею $z \to \infty$ для моделі Поттса з $q = 2$ видимими станами і r невидимими станами на гратці Бете із параметром галуження z [80]: $r_c = \lim_{z\to\infty} \frac{4z}{3(z-1)} \left(\frac{z-1}{z-2}\right)^2 \simeq 3.62$.

В околоі r_c стрибки параметрів порядку можна апроксимувати степеневим законом:

$$\Delta m_1 \sim (r - r_c)^{a_1}, \qquad \Delta m_2 \sim (r - r_c)^{a_2}. \tag{3.18}$$

Чисельні апроксимації в діапазоні від $r = 3.625$ до 4.0 дають оцінки показників: $a_1 = 0.477(10)$ і $a_2 = 0.566(15)$.

3.2.2. Випадок $1 \leq q < 2$

У роботі [167] автори дали параметри трикритичних і критичних фіксованих точок розведеної моделі Поттса в двох вимірах для діапазону значень q. Наша мета полягає в тому, щоб зробити так само в наближенні середнього поля в діапазоні $1 \leq q < 2$.

Типова поведінка параметрів порядку $m_1(t)$ і $m_2(t)$ для фіксованих значень q показана на Рис. 3.4. На рисунку ми наводимо ці функції для $q = 1.2$ і $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Для малих значень r, $m_1(t)$ і $m_2(t)$ є гладкими функціями t, а перехід - другого роду. Зауважимо, що $m_1(t)$ зникає лінійно коли температура t наближається до $t_c = 1$ знизу. Це відповідає знайомому результату середнього поля для критичного показника перколяції $\beta = 1$.

Для більших значень r і, починаючи з певного значення $r = r_{c1}$, стрибки в $m_1(t)$ і $m_2(t)$ з'являються при $\tilde{t} < t_c$. Гранична вимірність r_{c1}, отримана з стрибків цих функцій, є $r_{c1} \simeq 6.834(11)$. Наявність цього стрибка вказує на новий фазовий перехід першого роду, однак він не впливає на рід фазового переходу, що відбувається при $t_c = 1$, який для цих значень r залишається другого роду, оскільки параметри порядку залишаються там неперервними. Розрив у $\tilde{t}$ зростає з подальшим збільшенням r і, нарешті, при $r = r_{c_2}$, $\tilde{t}$ і t_c співпадають. Саме в цей момент перехід при $t_c = 1$ стає першого роду. Значення r_{c_2} є, отже, граничною вимірністю (тобто це значення r, при якому фазовий перехід змінює свій рід). Вона визначається умовою

$$\Delta m_1 > 0 \quad \text{at} \quad m_1(t \to t_c^+) = 0\,. \tag{3.19}$$

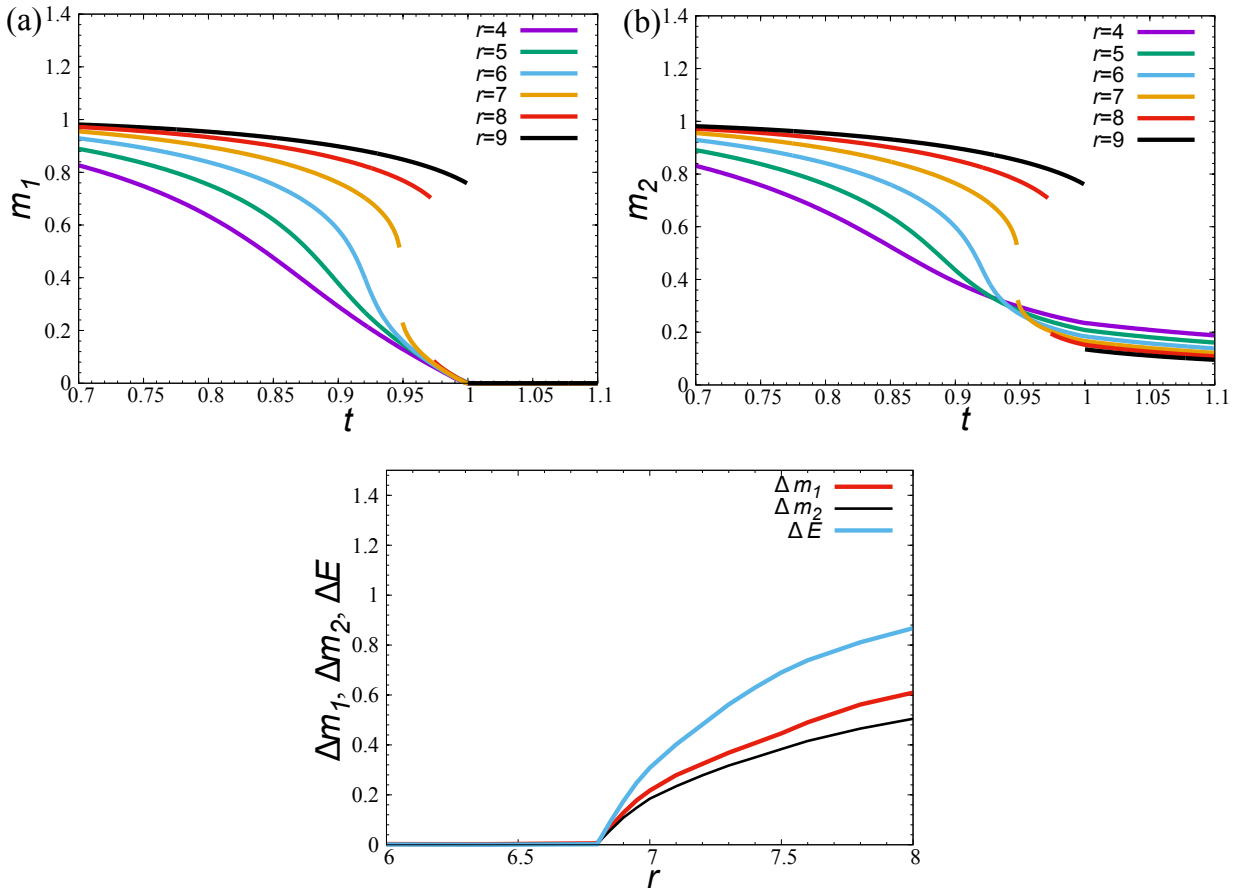


Рис. 3.4. Залежність першого (a) і другого (b) параметрів порядку від обезрозміреної температури t для $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ при $q = 1.2$. Фазовий перехід другого роду змінюється фазовим переходом першого роду при значенні r, визначеному рівнянням (3.19). Чисельно розв'язуючи це рівняння при $q = 1.2$, отримаємо $r_{c_2} \simeq 8.495(5)$. Рисунок (c): стрибки параметрів порядку Δm_1 (червона крива), Δm_2 (чорна крива) і прихована теплота ΔE (синя крива) як функції r для $q = 1.2$ при $t = \tilde{t}$.

Наявність розриву в параметрі порядку при температурі $\tilde{t} < t_c$ є, наскільки нам відомо, новим явищем в теорії фазових переходів.

Для $r_{c1} < r < r_{c2}$, параметр порядку $m_1 \neq 0$ в температурному інтервалі $\tilde{t} < t < t_c$. При $t = \tilde{t}$ немає нового спонтанного порушення симетрії по відношенню до m_1. Однак його стрибок при $t = \tilde{t}$ подібний до того, що відбувається в звичайному фазовому переході першого роду. Аналогічна поведінка спостерігається при $t = \tilde{t}$ для питомої теплоти переходу ΔE і для Δm_2. Ці функції показані на Рис. 3.4 (c) також.

Поведінка вільної енергії Гіббса $G(t, h)$ моделі Поттса з невидимими станами

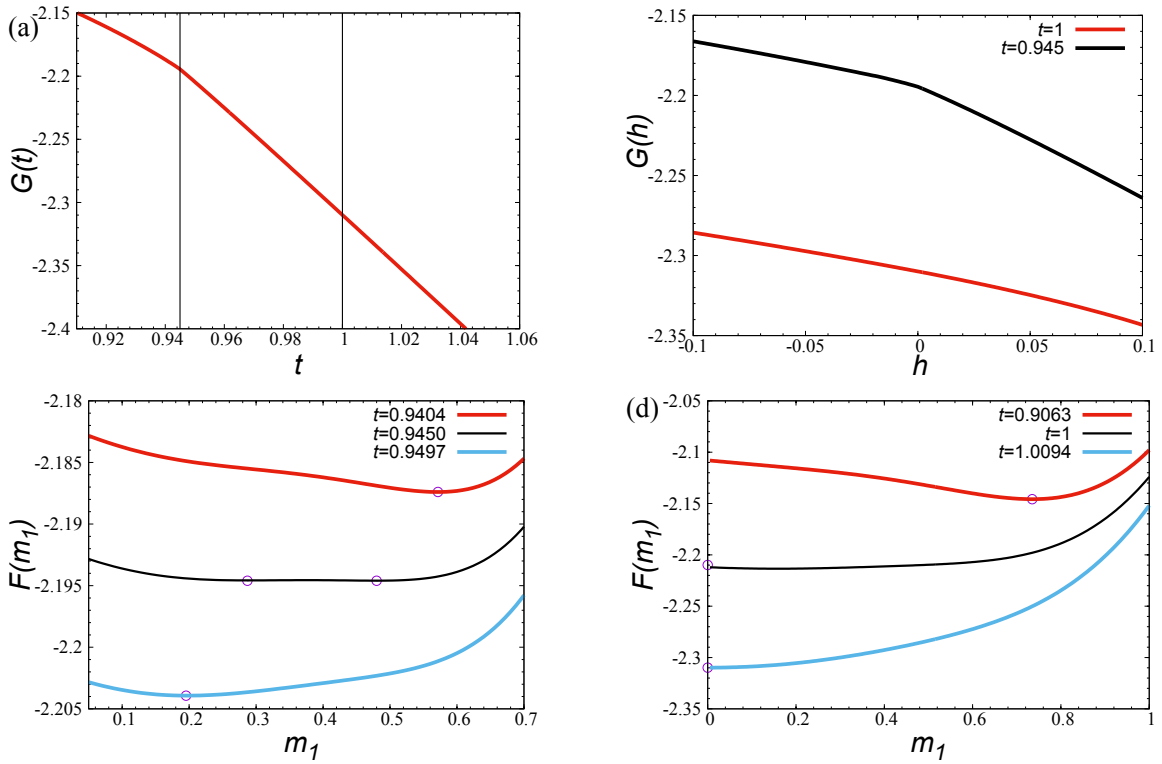


Рис. 3.5. Типова поведінка вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами для $1 \leq q < 2$ і $r_{c1} < r < r_{c2}$ ($q = 1.2$ і $r = 6.96$ для цього рисунка); (a): вільна енергія Гіббса $G(t)$ при $h = 0$. Температури $\tilde{t}$ і t_c показано вертикальними лініями. При $\tilde{t}$ вільна енергія має злам, він сигналізує про наявність прихованої теплоти (стрибок ентропії при $\tilde{t}$); (b): вільна енергія Гіббса $G(h)$ при $t = \tilde{t}$ (верхня крива) і при $t = t_c$ (нижня крива). Злам у верхніх кривих свідчать про стрибок параметра порядку в $\tilde{t}$. Зауважимо, що у нижній кривій злам відсутній: параметр порядку є безперервним у t_c; (c): Середньопольова вільна енергія $F(m_1)$ при $h = 0$ і $t < \tilde{t}$, $t \approx \tilde{t} = 0.945$, $t > \tilde{t}$ (відповідно, верхня, середня і нижня криві); (d): Середньопольова вільна енергія $F(m_1)$ при $h = 0$ і $t < t_c$, $t = t_c = 1$, $t > t_c$. Кола на Рис. (c) і (d) показують глобальні мінімуми вільної енергії.

в області $1 \leq q < 2$ і $r_{c1} < r < r_{c2}$ висвітлено на Рис. 3.5 (a), (b). Для цього ми використали умови (3.14), (3.14) щоб позбутися залежності середньопольової вільної енергії від параметрів порядку (3.13) на користь зовнішнього поля:

$$G(t, h) = f(m_1, m_2)|_{m_1^*, m_2^*}, \tag{3.20}$$

де m_1^*, m_2^* позначають координати мінімуму функії $f(m_1, m_2)$. На Рис. 3.5 (a) показана вільна енергія Гіббса при нульовому магнітному полі $G(t, h = 0)$ як функція

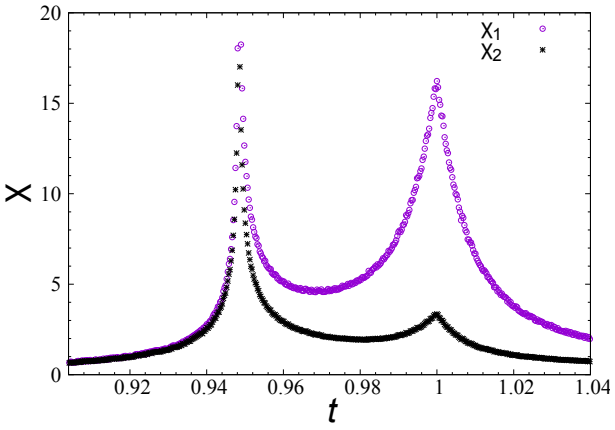


Рис. 3.6. Типові поведінки ізотермічних сприйнятливостей χ_1 і χ_2 як функції обезрозміреної температури для $1 < q < 2$, $r_{c1} < r < r_{c2}$ ($q = 1.2$ і $r = 6.96$ на цьому малюнку). Окремі піки спостерігаються при $\tilde{t}$ і t_c.

обезрозміреної температури t. Злам при $t = \tilde{t}$ свідчить про стрибок ентропії, отже, перехід першого роду. Рис. 3.5 (b) показує вільну енергію Гіббса $G(h)$ при $t = \tilde{t}$ (верхня крива) і при $t = t_c$ (нижня крива). Знову ж таки, верхня крива сигналізує про стрибок параметра порядку при $\tilde{t}$. Проте в нижній кривій відсутній стрибок: параметр порядку є безперервним при t_c. Середньопольова вільна енергія $f(m_1, m_2)$ далі аналізується на Рис. 3.5 (c), (d). Там ми показуємо типову поведінку вільної енергії як функції першого параметра порядку m_1 при $h = 0$ в області температур в околі $t = \tilde{t}$ (c), де параметр порядку стрибає між двома ненульовими значеннями (що характеризують впорядковані фази), і $t = t_c$(d). Щоб отримати двовимірні графіки, параметр $m_2 = m_2(m_1)$ був виключений з умов мінімізації (3.14), (3.15), а потім підставлений в $f(m_1, m_2)$:

$$F(m_1) = f(m_1, m_2(m_1)). \tag{3.21}$$

Рис. 3.5 (c) демонструє поведінку, характерну для фазового переходу першого роду: два мінімуми існують при $t = \tilde{t} = 0.945$, див. середню криву. Інакша ситуація спостерігається на Рис. 3.5 (d), тут є єдине значення $m_1 = 0$, що відповідає мінімуму вільної енергії при $t = t_c = 1$.

Для кращого розуміння температурної поведінки параметрів порядку в околицях $\tilde{t}$, на Рис. 3.6 показано типові графіки ізотермічної сприйнятливості $\chi_1 = \partial m_1/\partial h$ і $\chi_2 = \partial m_2/\partial h$ для $1 < q < 2$ і $r_{c1} < r < r_{c2}$ (зокрема, $q = 1.2$ і

$r = 6.96$ на цьому малюнку). Спостерігається два різних піки, розташованих при $\tilde{t}$ і t_c. Значення сприйнятливості були отримані шляхом чисельної оцінки похідних в межах $h \to 0$.

Табл. 3.2. Граничні вимірності r_{c1}, r_{c2} для різних значень в діапазоні $1 \leq q \leq 2$.

q	r_{c1}	r_{c2}
1	7.334(49)	9.55(35)
1.1	7.132(7)	8.995(5)
1.2	6.834(11)	8.495(5)
1.3	6.577(5)	8.025(5)
1.4	6.268(9)	7.535(5)
1.5	5.980(6)	7.025(5)
1.6	5.658(7)	6.525(5)
1.7	5.315(5)	6.025(5)
1.8	4.914(8)	5.505(5)
1.9	4.447(9)	4.825(5)
2	3.622(8)	3.65(5)

Значення граничних розмірів r_{c1} та r_{c2} для різних q зібрані в таблиці 3.2. Ми наводимо середнє значення r_{c1}, отримане чисельно з поведінки функцій Δm_1, Δm_2, і ΔE. Оцінка для r_{c2} отримана з поведінки m_1 як мінімальне значення r, для якого виконується умова (3.19). Рис. 3.7 показує залежність від q для r_{c1} і r_{c2}. Для випадку $q = 2$, де обидві граничні вимірності r_{c1} і r_{c2} повинні збігатися, ми використовуємо оцінку $r_c = 3.65(5)$, оскільки вона включає в себе обидва значення, наведені в таблиці. Варто зауважити, що в області $1 \leq q \leq 2$ різниця в граничних розмірах добре апроксимується лінійною функцією: $r_{c2} - r_{c1} \simeq 2(2-q)$, хоча ми не маємо простого пояснення для цього спостереження.

В граничному випадку $q \to 1$, рівняння (3.13) відображає вільну енергію, що залежить тільки від другого параметра порядку m_2 тільки:

$$\lim_{q\to 1} f(m_1, m_2) = \frac{z\left(m_2 r + 1\right)^2}{2(r+1)^2} - T \log\left(e^{\frac{h + \frac{z(m_2 r+1)}{r+1}}{T}} + r\right). \qquad (3.22)$$

Чисельно знаходячи мінімум вільної енергії відносно m_2 дозволяє отримати температурну поведінку $m_2(T)$. У свою чергу, виникнення стрибка в цій залежності

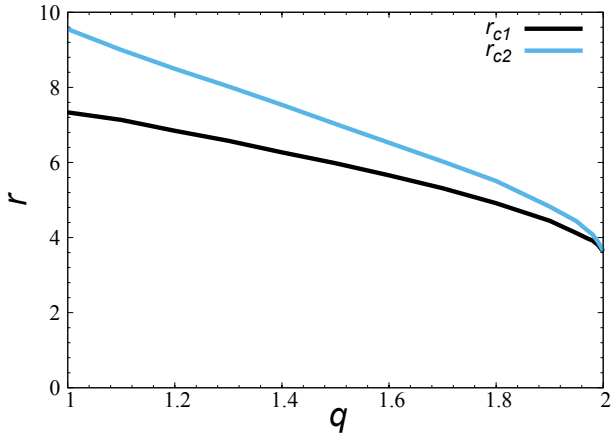


Рис. 3.7. Граничні вимірності r_{c1} (нижня крива) і r_{c_2} (верхня крива) для моделі Поттса при $1 \leq q \leq 2$. При $q = 2$ обидві r_{c1} і r_{c_2} співпадають в межах похибки: $r_{c1} = r_{c2} \simeq 3.65(5)$.

можна використовувати як умову для визначення граничної вимірності $r = r_{c1}$. Граничну вимірність r_{c2} оцінюємо чисельно з границі $\lim_{q\to 1^+} r_{c2}(q)$.

3.3. Модель Ізінга з невидимими станами на безмасштаній мережі.

У цьому підрозділі ми розглядаємо модель Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі. Ця задача представляє особливий інтерес з двох точок зору. З одного боку, безмасштабні мережі, як середовище, дають можливість встановити, як топологія впливає на фазовий перехід. З іншого боку, невидимі стани впливають на критичність через зміну ентропії системи. Таким чином, поєднання цих двох механізмів дозволяє в рамках єдиного підходу вивчати взаємодію різних форм безладу: один, що виникає з числа конфігурацій внутрішніх ступенів свободи (число невидимих станів r) та інший, що виникає із структурних неоднорідностей хаби (вузли із високим ступенем, розподіл ступенів вузлів описується показником λ).

Щоб продовжити далі, підставимо у формулу (3.12) функцію розподілу ступеня вузлів, що описується степеневим законом $P(k) = \dfrac{C}{k^\lambda}$, де $C = 2^{\lambda-1}(\lambda - 1))$

константа нормування і $q = 2$. Це призводить до виразу для вільної енергії:

$$f(m_1, m_2) = \frac{J\bar{k}}{(2+r)^2}\Big((rm_2 + 1 + m_1)^2 + (rm_2 + 1 - (r+1)m_1)^2\Big) \\ - \frac{2^{\lambda-1}}{\beta}\int_2^\infty \frac{dk}{k^\lambda} \ln\left(e^{\beta(h+\frac{kJ}{2+r}(m_1+1+rm_2))} + e^{\frac{\beta Jk}{2+r}(m_2 r+1-(r+1)m_1)} + r\right), \tag{3.23}$$

з середнім ступенем вузла $\bar{k} = \dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda-2}$.

Рівняння (3.23) дає вільну енергію як функцію двох параметрів порядку m_1 і m_2 з набором параметрів q, r, β, λ. Зазвичай в такому випадку наступним кроком є представлення вільної енергії у вигляді степеневого ряду за параметрами порядку (вільна енергія Ландау). У нашому випадку два параметри порядку роблять це розвинення занадто громіздким для прямого аналітичного використання, таким чином ми переходимо до чисельного аналізу вільної енергії. Для цього застосовується метод симплексу [168]. Перевага цього методу полягає в тому, що він не вимагає знати значення похідних функції, а потребує лише способу її розрахунку. З цією чисельною методикою в наступному розділі ми діємо за планом: для фіксованих значень q, r і λ ми проходимо через певну область температур і розраховуємо значення m_1 і m_2, які мінімізують вільну енергію; на основі температурної поведінки параметрів порядку можна зробити висновки про рід фазового переходу, критичну температури та критичні показників.

Будемо досліджувати модель Ізінга $q = 2$ з довільним числом невидимих станів r поблизу точки спонтанного фазового переходу ($h = 0$) на безмасштабній мережі. Усі наші результати порівняємо з аналітичними результатами, відомими в границі $r = 0$ [110–112]. Цей конкретний випадок моделі Ізінга на безмасштабній мережі надалі будемо називати простою моделлю Ізінга. Найбільше нас цікавить область $3 \leq \lambda \leq 5$, де спостерігалися λ залежні критичні показники.

Для моделі Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі можна очікувати, що показник розподілу ступеня вузла має подібний ефект, як і для простої моделі Ізінга. Дійсно, наш аналіз підтримує цю гіпотезу. Зокрема, для низьких значень $\lambda \leq 3$ система залишається впорядкованою при будь-якій скін-

ченній температурі. Однак область $\lambda \geq 3$ виявляє деякі нетривіальні особливості, про які ми детальніше розповімо нижче.

Почнемо з аналізу критичної температури T_c. В якості критичної будемо вважати температуру, при якій перший параметр порядку m_1 занулюється. Раніше було показано, що на повному графі m_2 зникає лише при нескінченній температурі, тому для визначення роду фазового переходу і критичної температури можна використовувати лише перший параметр порядку.

На Рис. 3.8 критична температура моделі Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі показана як функція λ для різної кількості невидимих станів r від 0 до 60. Наші чисельні результати добре узгоджуються з аналітичними результатами для простої моделі Ізінга (див. верхню суцільну і пунктирну лінії на Рис. 3.8).

Інший висновок, який можна зробити на основі графіку, полягає в тому, що критична температура зменшується зі збільшенням λ. Коли λ зменшується нижче граничного значення $\lambda = 3$, то жодна скінченна температура не може порушити спонтанне упорядкування: система залишається впорядкованою при будь-якому T. Це відображає той факт, що для малих λ існує багато вузлів з високим ступенем (хаби), що робить мережу міцно зв'язаною. З цього випливає, що в границі $\lambda \to 3 + 0$ критична температура зростає $T_c \to \infty$.

З іншого боку, з Рис. 3.8 можна також сказати, що критична температура зменшується зі збільшенням числа невидимих станів. Це пояснюється тим, що r регулює ентропію системи, тобто більші r означають більшу ентропію, що призводить до більш легкого порушення впорядкування. Границя $r \to \infty$ буде відтворювати результати для невзаємодіючої системи, тобто $T_c = 0$ [22].

Наступним кроком є аналіз поведінки параметрів порядку. Неперервні фазові переходи описуються неперервними залежностями параметрів порядку від температури. З іншого боку, якщо функція $m_1(T)$ має розрив, це означає, що існує стрибок між двома різними станами системи, який ми будемо асоціювати з фазовим переходом першого роду. Як приклад на Рис. 3.9 наведено залежності параметрів порядку від обезрозміреної температури $t = T/T_c$ для фіксованого

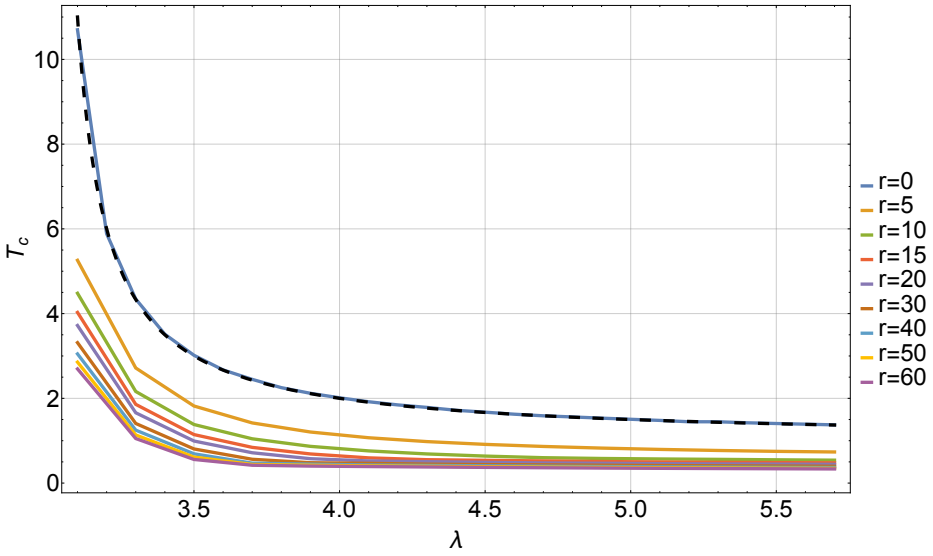


Рис. 3.8. Критична температура моделі Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі як функція показника розподілу ступенів вузлів λ для різних значень r: $r = 0, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60$ (зверху вниз). Пунктирна лінія відображає аналітичні результати для простої моделі Ізінга [110–112].

значення $\lambda = 3.8$ і різних значень r. Далі ми будемо використовувати значення $\lambda = 3.8$ для ілюстрації типових властивостей системи, які якісно залишаються однаковими у всьому регіону $3 < \lambda < 5$. Варто зазначити, що у випадку $r = 0$ існує лише один параметр порядку, як у простій моделі Ізінга. Як видно з цих графіків, m_2 не зникає при критичній температурі та повільно спадає, коли температура зростає. Таку ж поведінку спостерігали на повному графі у попередньому підрозділі.

Система характеризується фазовим переходом другого роду для невеликих кількостей невидимих станів. Навпаки, велика кількість невидимих станів робить фазовий перехід розривним. Однак існує область, де два переходи відбуваються при різних температурах: при нижчій температурі T^* відбувається стрибок параметра порядку (який ми асоціюємо з фазовим переходом першого роду), а пізніше, при вищій температурі, залишковий порядок повністю зникає. Подібну поведінку ми вже спостерігали раніше в дисертаційній роботі для повного графа, але в області $1 \leq q < 2$, тоді як граничний випадок $q = 2$ показав різке розрізнення між цими режимами поведінки. При наявності топологічного безладу, як у без-

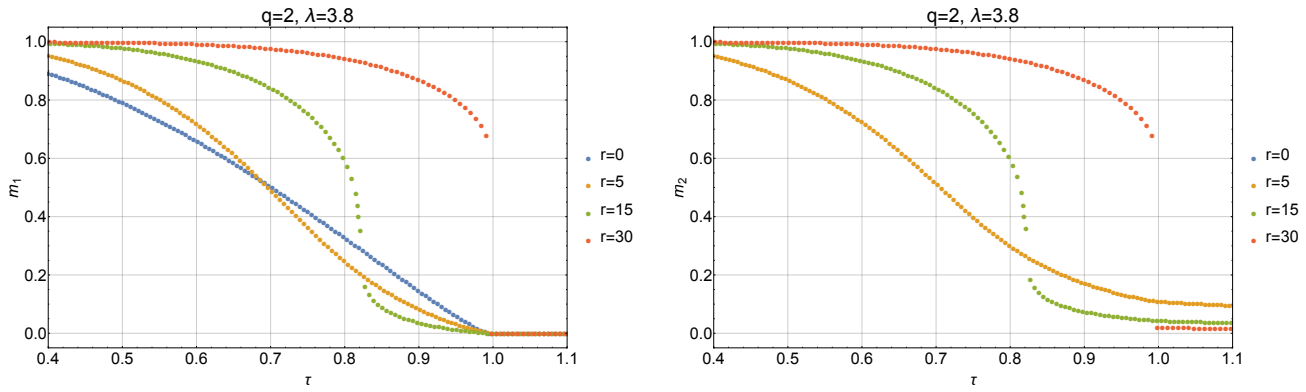


Рис. 3.9. Параметри порядку як функції обезрозміреної температури $\tau = T/T_c$ для різних значень r і фіксованого $\lambda = 3.8$. Різні значення r ведуть до різних критичних поведінок.

масштабній мережі, змінюється критична поведінка. Навіть у випадку Ізінга вона характеризується двома граничними значеннями r_{c1} і r_{c2}. На Рис. 3.10 ми показуємо фазову діаграму в $(T, r)-$ площині для фіксованого значення $\lambda = 3.8$. Нижня (синя) і верхня (жовта) лінії являють собою фазові переходи першого і другого роду відповідно.

Лінія фазового переходу другого роду з лінією фазового переходу першого роду ділять площину $(T, r)-$ на три області. Під нижньою (синьою) лінією система перебуває у впорядкованому стані, а над верхньою (жовтою) лінією - стан повністю невпорядкований. В області між лініями система характеризується залишковим упорядкуванням. Тому, при r_{c2} і T_c ці три фази збігаються, роблячи цю точку трикритичною. Дві вертикальні лінії позначають граничні значення r_{c1} і r_{c2}, або еквівалентно області, де співіснують два фазові переходи. Для кожного значення λ існують два граничні значення $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$. Ці два значення поділяють площину $(r, \lambda)-$ на три області з різною критичною поведінкою.

Наступним кроком є аналіз властивостей фазового переходу другого роду. З параметрами порядку як функціями температури легко знайти критичний показник β, який визначається із співвідношення:

$$m_1 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right)^{\beta}. \tag{3.24}$$

Оскільки ми знаходимо мінімум вільної енергії чисельно, єдиним способом для нас

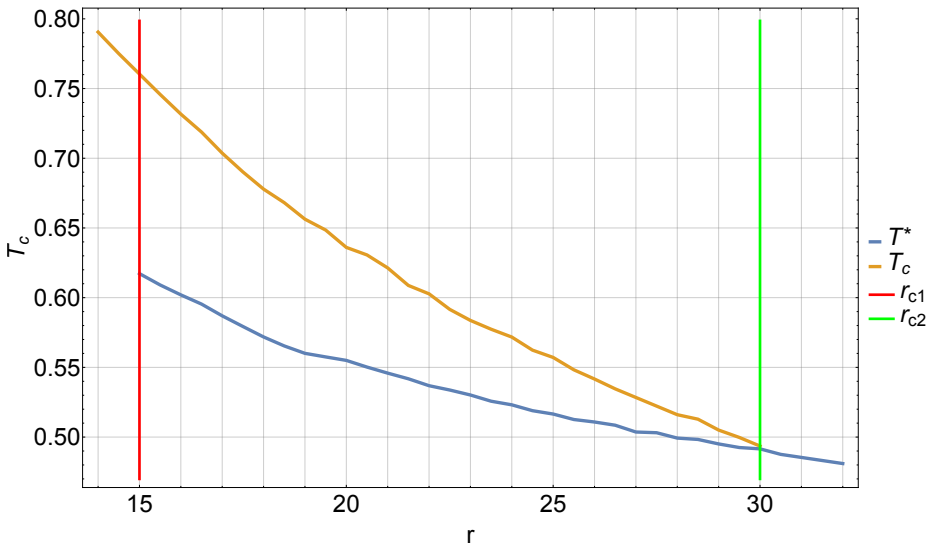


Рис. 3.10. Температура фазових переходів T^* і T_c як функція r для фіксованого $\lambda = 3.8$. Дві суцільні лінії представляють температури фазових переходів першого і другого роду. Дві штрихові вертикальні лінії показують граничні значення r і обмежують область співіснування двох фазових переходів.

продовжити із визначенням (3.24) буде апроксимація отриманих значень $m_1(T)$. Оскільки критичні показники визначаються тільки при критичній температурі, з апроксимації будемо отримувати тільки ефективне значення β_{eff}. На Рис. 3.11 ми показуємо критичний показник β_{eff} для різних значень r. Для простої моделі Ізінга в області, що нас цікавить, критичні показники є $\lambda-$залежними. Аналітичні результати наведені в [110–112] дають:

$$\beta(\lambda) = 1/(\lambda - 3)\,. \tag{3.25}$$

На графіку розглянемо $\lambda = 3.8$, для якого теоретичне передбачення становить $\beta(3.8) = 1.25$. Це значення показано суцільною горизонтальною лінією. Можна бачити, що незалежно від r, фазовий перехід другого роду характеризується тим же критичним показником. Незначну тенденцію до збільшення можна пояснити тим, що ефективне значення критичного показника сильно залежить від ділянки, у якій ми апроксимуємо: чим менший діапазон тим кращі результати. Проте, зі збільшенням r, область повинна стати ще меншою, що ускладнює виконання чисельних розрахунків, близьких до критичної температури.

На Рис. 3.12 показана фазова діаграма в площині (r, λ). Вона характеризу-

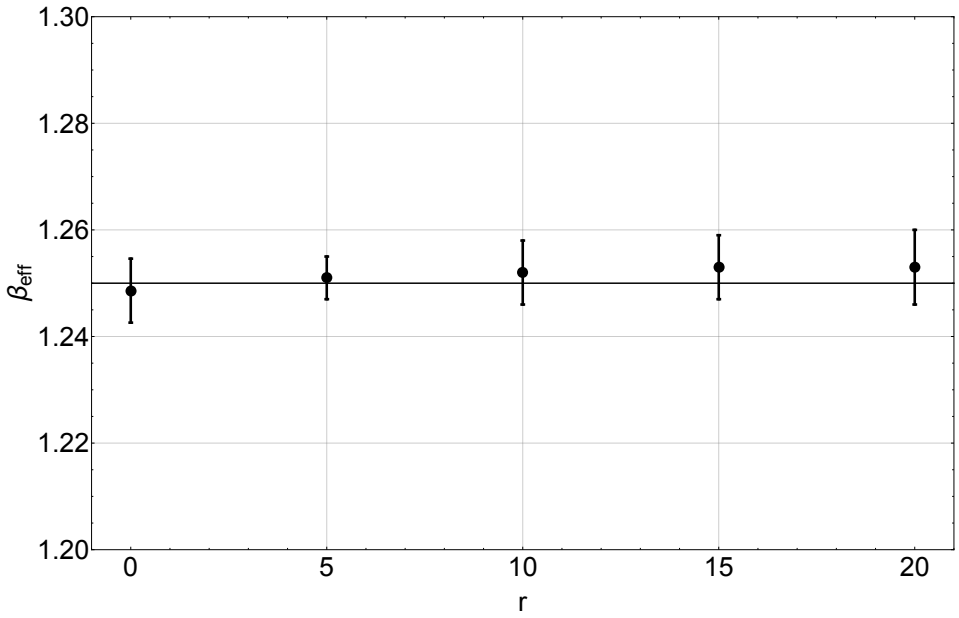


Рис. 3.11. Критичний показник β як функція кількості невидимих станів r для фіксованого $\lambda = 3.8$. Суцільна лінія показує точний результат для простої моделі Ізінга $\beta(\lambda = 3.8) = 1.25$, див. рівняння (3.25).

ється двома лініями $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$. Нижче першого граничного значення, з підвищенням температури, параметр порядку змінюється неперервно. Над лінією $r_{c2}(\lambda)$ відбувається тільки фазовий перехід першого роду, що означає, що при збільшенні температури параметр порядку зменшується, а при T_c він різко падає до нуля (див. Рис. 3.9 для $r = 30$). Система проходить через два фазові переходи в області між лініями. При $T^* < T_c$ відбувається фазовий перехід першого роду, і відбувається стрибок між двома ненульовими значеннями m_1. Тоді при температурі фазового переходу другого роду перший параметр порядку зникає.

Для фіксованого значення λ, коли r зростає, m_1 залежить від температури неперервно до досягнення $r_{c1}(\lambda)$. Потім з'являється стрибок параметра порядку. У області $r_{c1}(\lambda) < r \leq r_{c2}(\lambda)$ розрив зростає з r, а фазовий перехід першого роду наближається до фазового переходу другого роду T^*. Коли лінія $r_{c2}(\lambda)$ перетинається, дві критичні температури збігаються і залишається тільки фазовий перехід першого роду, а залишкове значення параметра порядку дорівнює нулю. Зауважимо, що в області $\lambda > 4$ в околі температури фазового переходу другого роду, поведінка параметра порядку є суперлінійною ($1/\beta = (\lambda - 3)$ більше одиниці),

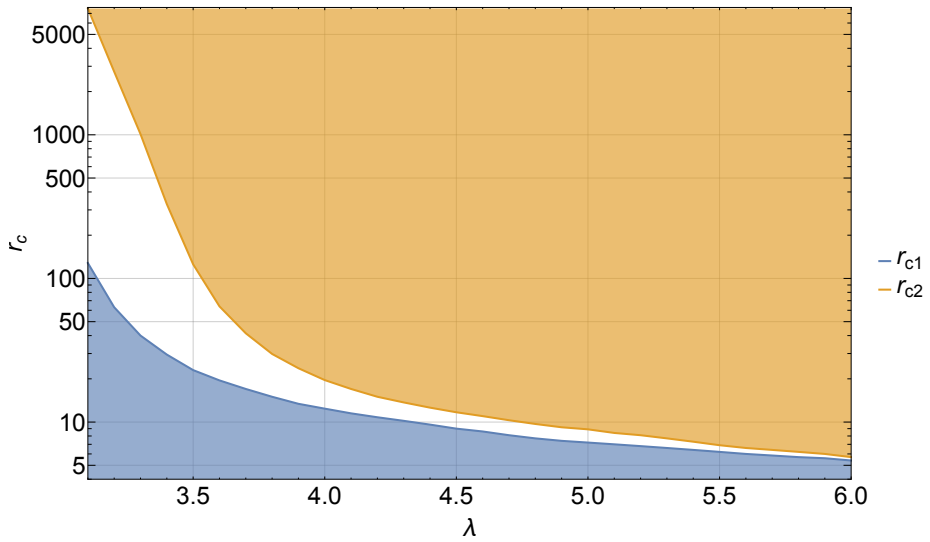


Рис. 3.12. Фазова діаграма моделі Ізінга з невидимими станами. Три регіони, представлені тут, відрізняються критичною поведінкою. У нижній (синій) області система має тільки фазовий перехід другого роду; в області між лініями відбуваються як фазові переходи першого, так і другого роду при різних температурах; у верхній області (жовтий) відбувається тільки фазовий перехід першого роду.

що робить розрізнення між першим і другим родом фазового переходів ще складнішим. Оскільки $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$ були знайдені чисельно, вони не перетинаються в $r \approx 3.62$ і $\lambda = 5$, як це було передбачено для простої моделі Ізінга на повному графі в попередньому підрозділі.

3.4. Висновки

Основною метою аналізу, представленого в цьому розділі, було розширити попередні дослідження моделі Поттса з невидимими станами на ґратках розглядаючи його на різних графах (мережах). Існує декілька причин для такого розгляду. По-перше, для графа евклідова вимірність не визначена. Це робить звичайне формулювання принципу універсальності незастосовним в цьому випадку. Було показано, що для мереж розподіл ступенів вузлів є вирішальним для визначення класу універсальності. Наприклад, модель Ізінга на безмасштабній мережі, де розподіл ступенів вузлів визначається степеневим законом $P(k) \propto k^{-\lambda}$, описується λ—залежними критичними показниками [110–112]. По-друге, деякі об'єкти

краще описуються топологією мережі, ніж гратки. Приклади варіюються від нано кластерів [100] до соціальних мереж [7]. Більш того, в наступному розділі ми аналізуємо одну з соціальних мереж.

Було знайдено точний розв'язок моделі Поттса з невидимими станами на графі в рамках підходу неоднорідного середнього поля. Ця модель характеризується двома параметрами порядку. Тільки один з них зникає при критичній температурі. Ми застосували загальну формулу для двох випадків - повний граф і безмасштабна мережа.

На повному графі показали, що в області $1 \leq q < 2$ фазова діаграма характеризується двома граничними вимірностями, r_{c1} і r_{c2}. Нижче r_{c1} система проходить лише фазовий перехід другого роду. Вище r_{c2} є лише фазовий перехід першого роду. А в області $r_{c1} < r < r_{c2}$ є два фазових переходу: першого роду при нижчій температурі і другого роду при вищій температурі. Для значень параметрів, де існує фазовий перехід другого роду, спостерігаємо критичні показники традиційні для теорій середнього поля, а саме $\beta = 1/2$. Для випадку Ізінга $q = 2$ на повному графі два граничні значення збігаються при $r_c \approx 3.62$.

На безмасштабній мережі ми розглянули лише випадок $q = 2$. На противагу випадку повного графа, де існує лише одне граничне значення, було отримано $\lambda-$ залежні значення граничних $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$. Ці величини мають те ж саме значення, що і у попередньому випадку повного графа. Ми також показали, що скрізь, де існує фазовий перехід другого роду, критичні показники залишаються λ-залежними, а кількість невидимих станів r не впливає на критичні показники.

Враховуючи всі ці результати, можна стверджувати, що додавання невидимих станів змінює ентропію системи, роблячи фазовий перехід більш гострим. Проте, поки фазовий перехід другого роду існує, його універсальні властивості залишаються незмінними. Крім того, механізм, який ми описуємо в цьому розділі, досить унікальний, досі його не спостерігали.

РОЗДІЛ 4

УНІВЕРСАЛЬНІ ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СКЛАДНИХ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ НАРАТИВІВ

В попередньому розділі ми розглядали поведінку спінових систем на мережах. Такі моделі часто розглядають як моделі формування суспільної думки (opinion formation) [7]. У цьому розділі нас цікавитимуть універсальні характеристики таких мереж, але не у сенсі універсальності критичної поведінки, а в сенсі того, що їхні властивості не залежать від деталей будови. Згідно з недавніми роботами [16, 17], ми використаємо підхід складних мереж до аналізу зв'язків між персонажами давніх наративів. Предметом для дослідження ми вибрали давньоруські билини – єдиний достатньо об'ємний епос на теренах східно слов'янських земель. Ми покажемо, що соціальна мережа зв'язків між персонажами билин, як і аналогічні мережі творів багатьох європейських культур [169], володіє низкою характерних особливостей. Також, в межах нашого методу, спробуємо навести аргументи стосовно кількох актуальних питань, що стосуються зв'язку билин із історичною реальністю. Основні результати цього розділу опубліковані в роботах [24, 25].

4.1. Билини

Билини (або, як їх інколи називають, старини) є творами героїчного епосу східних слов'ян. Це невеликі речитативно-мелодійні епічні пісні. Дослідники поділяють билини на соціально-побутові та власне героїчні. Також билини можна поділити за місцем дії: на київські, новгородські й московські. Билини москов-

ського та новгородського циклів мають радше соціально-побутовий характер, ніж героїчний. Зокрема, московські билини описують поведінку вищих верств населення і належать до періоду другої половини XIII – XVI ст., коли, після зруйнування Києва монголо-татарами в 1240 році, Київська Русь фактично припинила своє існування. Новгородський цикл билин, хронологічно близький до київського, в центрі уваги має простий народ - купців, гуслярів чи лихварів. Новгород був великим торгівельним вузлом, який ніколи не знав татарської навали. Це відобразилося і на тематиці народного епосу. Билини новгородського та московського циклу є віддалені від билин київського циклу за місцем чи за часом подій. Тому немає сенсу проводити аналіз усієї сукупності билин, а можна обмежитися аналізом соціальної структури кожного циклу окремо. Надалі нас будуть цікавити билини київського циклу, що охоплюють доволі нетривалий період розквіту Київської Русі (кінець X - середина XII ст.). Тексти для аналізу було взято з [170]. Крім билин про героїв, до київського циклу також відносять скомороші пісні та билини про сватання. Оскільки вони не є творами героїчного характеру, їх не включено у подальший аналіз. Загалом, предметом нашого дослідження стали 39 билин із цієї збірки.

Билини переходили з покоління в покоління в усній формі. Перші відомі нам записи билин сягають 1619 року і були зроблені англійцем Річардом Джеймсом [171]. Це були твори з московського циклу. Вважається, що першим упорядником збірки билин на початку XVIII століття став Кірша Данилов. Але його збірка побачила світ аж у 1804 році [172]. Основна частина билини була зібрана і записана в північних областях Росії у XVIII–XIX століттях. Дослідник билин Василь Авенаріус [173] пояснює це тим, що більшість населення України в той час була грамотною, на відміну від жителів віддалених сіл Російської імперії, і знання від покоління до покоління переходили вже в письмовій формі, а не усній. Другою причиною могло слугувати те, що український народ в цей час оспівував період козаччини, і це витіснило з народної пам'яті тексти сивої давнини. Цієї думки притримувалися Михайло Максимович і Микола Костомаров[174]. Зазначимо також, що в Україні билинні сюжети збереглися в інших фольклорних жанрах. Зокрема,

відомі українські народні казки про Іллю Муромця, думи про Олексія Поповича, пісні про Джурила.

Незважаючи на те, що билини були зібрані на дуже великих територіях, в них є багато спільного. Зокрема билини, які об'єднані місцем дії, також мають і багатьох спільних персонажів. Саме ця властивість і дозволяє нам розглядати персонажів билин як певну структуру - соціальну мережу. Так до билин київського циклу відносяться твори про найвідоміших богатирів: Іллю Муромця, Добриню і Олексія Поповича.

4.2. Соціальна мережа персонажів билин

Під мережею персонажів билин (надалі - *соціальна мережа билин* [175]) будемо розуміти граф [99], вершини якого відповідають окремим персонажам, а ребра означають зв'язки між окремими персонажами. Позначимо множину вершин V, їх кількість – N, а множину і кількість ребер – E і L відповідно. Кожен зв'язок можна задати парою вершин, які він з'єднує. Графи можуть бути орієнтовані і неорієнтовані. В орієнтованих графах кожне ребро має свій напрям, тобто при його означенні пара вершин має свій порядок. У нашому аналізі зображатимемо соціальну мережу персонажів билин у вигляді неорієнтованого графу. Його можна задати у вигляді матриці суміжності A_{ij}. Це матриця розміру $N \times N$, елемент A_{ij} якої рівний одиниці, якщо між вузлами i та j є зв'язок, і нулю - якщо такого зв'язку немає. Для неорієнтованого графу матриця суміжності є симетричною відносно головної діагоналі.

Також існують зважені графи - графи, в яких кожне ребро має свою вагу. Для них матриця суміжності не буде просто складатися з нулів і одиничок, а матиме елементами вагу кожного з ребер [99]. Оскільки проблема визначення ваги соціального зв'язку між окремими індивідами не є однозначною [175] (тим більше, якщо мова йде про зв'язки, означені лише в межах певних наративів), надалі ми будуватимемо соціальну мережу як неорієнтований незважений граф, кожен зі зв'язків якого відображає факт знайомства між персонажами-вершинами, які

він з'єднує. Згідно методики, запропонованої в роботах [16, 17, 169], вважатимемо, що два персонажі билини знайомі між собою якщо вони дружать (якщо вони розмовляють один з одним; коли з тексту відомо, що вони зустрічалися раніше; коли персонажі разом присутні в невеликій групі осіб) або якщо вони ворогують (безпосередньо б'ються чи є в стані війни). Зауважимо, що така методика ускладнює можливість автоматизації опрацювання текстів і створення бази даних.

Аналіз згаданого вище корпусу билин, дозволив створити базу даних, що складається із 153 окремих персонажів, поєднаних зв'язками двох типів – дружніми або ворожими. Результуючу соціальну мережу наведено на рис. 4.1. Кожен із персонажів має свій кодовий номер. Список найважливіших персонажів билин подано в Табл. 4.2. Дружні зв'язки показані синьою суцільною лінією, а ворожі – червоною пунктирною. Усього мережа налічує 320 зв'язків. із них 223 зв'язки дружні і 105 – ворожі. Сума дружніх і ворожих зв'язків більша за загальну кількість ребер. Це пояснюється тим, що кожна билина сама по собі є короткою історією із кількома персонажами. У різних билинах ті самі персонажі можуть бути як друзями, так і ворогами, а деколи тип зв'язку змінюється навіть в межах одного твору [17].

Характерною рисою зображеної на Рис. 4.1 мережі є те, що вона складається із декількох відокремлених фрагментів, один із яких (у лівому верхньому кутку рисунка) суттєво більший від інших. Це так звана найбільша зв'язна компонента (частина графу, в якій існує шлях між будь-якими двома вершинами). Існування найбільшої зв'язної компоненти свідчить про те, що персонажі різних билин пов'язані між собою, а вибрані твори утворюють, в сукупності, цілісну картину. Це можна пояснити тим, що билини київського циклу об'єднує місце події, наявність богатиря-протагоніста і князя Володимира. Поряд із найбільшою зв'язною компонентою в мережі присутні окремі, суттєво менші, не зв'язані один з одним фрагменти. Вони відповідають окремим билинам чи їх невеликим групам, що, хоч і належать до київського циклу, проте в них не діють персонажі, спільні із персонажами найбільшої компоненти. Наприклад, один із відокремлених фрагментів (зіркоподібний у другому рядку знизу) відповідає билині про Вавила (вузол но-

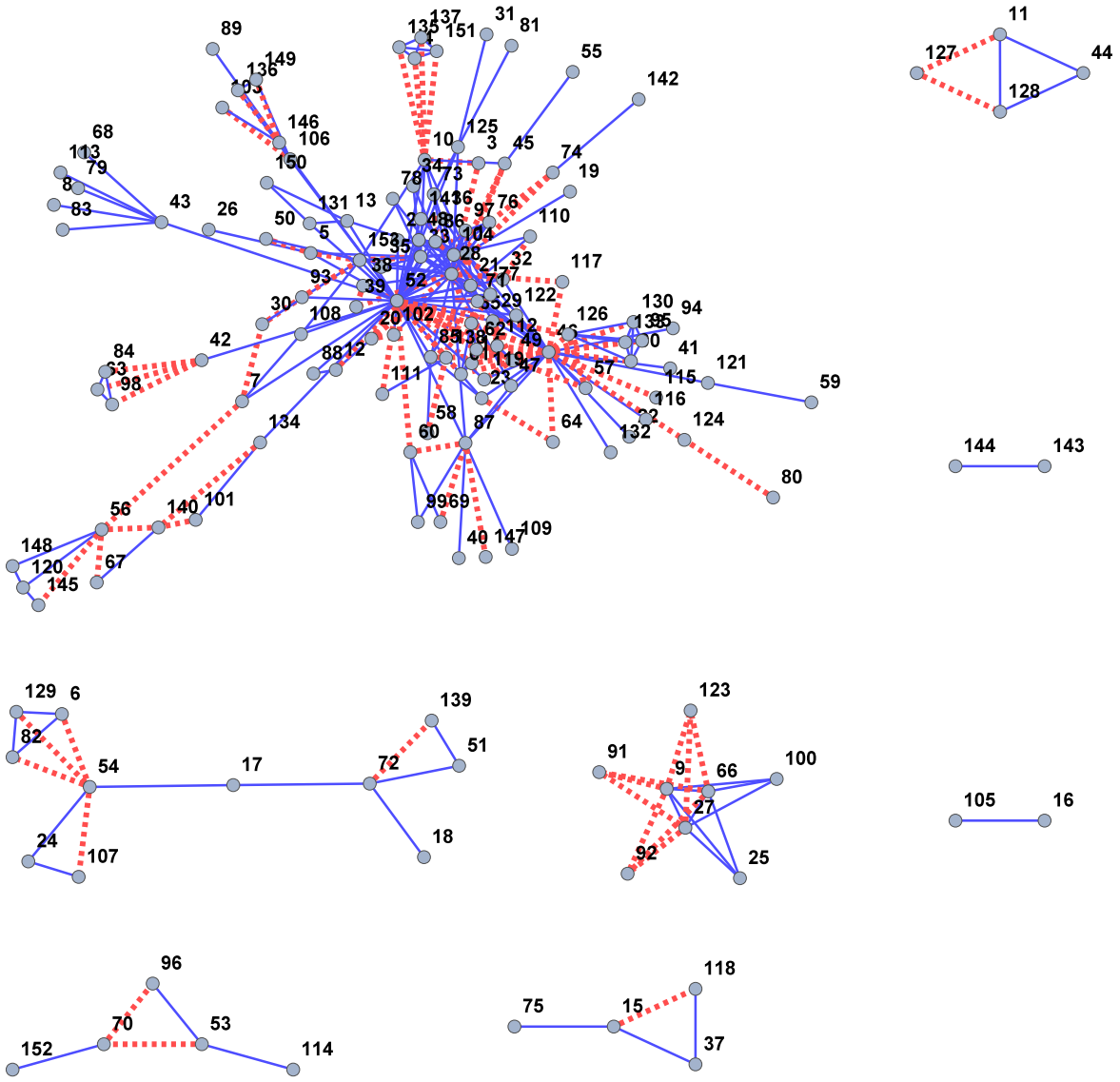


Рис. 4.1. Соціальна мережа билин київського циклу. Червоними пунктирними лініями позначені ворожі зв'язки, а синіми суцільними - дружні. Кожен з вузлів має свій кодовий номер. Список найважливіших персонажів із відповідними їм номерами поданий в Додатку (Табл. 4.2). Найбільша зв'язна компонента зображена у лівому верхньому кутку рисунку. Менші графи відповідають за персонажів окремих билин. Так, граф утворений вузлами 143 і 144 позначає турицю із туреням, які обговорюють рух війська, але не взаємодіють із жодним із персонажів. Зіркоподібний граф у другому рядку знизу відповідає билині про Вавила (вузол номер 9). Персонажі цієї билини не повторюються у жодній з інших билин.

мер 9). У ній розповідається, як Вавило перемагає антагоніста-царя і займає його місце. Персонажі цієї билини не повторюються у жодній з інших билин. А тому їм відповідає відокремлений фрагмент загальної соціальної мережі билин.

Мережа	N	L	$\langle k\rangle$	$k_{\max}$	ℓ	ℓ_{rand}	$\ell_{\max}$	C	C_{rand}	S	G_C	r_k	r_C
Билини *(усі)*	153	320	4.18	52	2.9	3.61	6	0.57	0.03	23.7	76.5 %	-0.15	0.04
Билини *(ворожі)*	98	102	2.14	17	3.63	5.76	8	0.06	0.022	4.3	51%	-0.11	0.012
Билини *(дружні)*	142	223	3.16	41	2.76	4.33	6	0.42	0.022	27.4	57%	-0.115	-0.08
Беовульф *(усі)* [16]	72	167	4.45	27	2.4	2.9	6	0.7	0.06	14.1	67.5%	-0.10	-0.05
Беовульф *(ворожі)* [16]	31	26	1.67	-	2.08	3.25	4	0	0.05	0	32.2%	-0.20	-
Беовульф *(дружні)* [16]	68	140	4.12	-	2.45	2.98	6	0.69	0.06	14.0	66.1%	-0.03	-
Викрадення бика *(усі)* [16]	422	1266	6.10	168	2.8	3.3	7	0.8	0.02	47.1	98.5%	-0.33	-0.30
Викрадення бика *(ворожі)* [16]	144	168	2.33	-	2.93	5.88	7	0.17	0.02	17.1	90.9%	-0.36	-
Викрадення бика *(дружні)* [16]	385	1091	5.67	-	2.84	3.43	7	0.84	0.01	101	90.9%	-0.32	-
Іліада *(усі)* [16]	716	2684	7.40	106	3.5	3.3	11	0.6	0.01	56.6	98.7%	-0.08	0.53
Іліада *(ворожі)* [16]	321	361	2.25	-	4.10	7.12	9	0	0.01	0	89.4%	-0.39	-
Іліада *(дружні)* [16]	664	2317	6.98	-	3.83	3.34	12	0.62	0.01	54.1	82.3%	0.10	-
Сага про Гіслі [17]	103	254	4.9	44	3.4	2.9	11	0.6	0.05	10.8	98%	-0.15(5)	0.01(7)
Сага 1 [17]	132	290	4.4	31	3.9	3.3	10	0.5	0.03	12.7	97%	0.00(6)	0.08(6)
Сага про Егіля [17]	293	769	5.3	59	4.2	3.4	12	0.6	0.02	25.5	97%	-0.07(3)	0.28(4)
Сага 2 [17]	332	894	5.4	45	5.0	3.5	16	0.5	0.02	19.0	99%	0.19(4)	0.25(4)
Сага про Ньяла [17]	575	1612	5.6	83	5.1	3.7	24	0.4	0.01	31.0	100%	0.01(2)	0.12(3)
Да Дерга [169]	126	410	6.51	71	2.76	2.77	7	0.64	0.05	12.8	98.4 %	-0.18	0.31
Оддісея [169]	301	1019	6.77	112	3.29	3.18	8	0.45	0.02	21.7	98.3 %	-0.08	0.38
Пісня про Нібелунгів [169]	66	313	9.48	43	2.14	2.11	5	0.69	0.14	4.9	97 %	-0.28	0.22
Мабіногіон [169]	666	2427	7.29	135	3.83	3.48	11	0.48	0.01	43.6	76 %	0.19	0.37
Епос про Гільгамеша [169]	46	81	3.52	19	2.54	3.08	5	0.46	0.08	7.0	93.5 %	-0.34	0.10
Пополь-Вух [169]	98	409	8.35	27	2.80	2.39	6	0.55	0.09	5.2	94.9 %	-0.32	-0.05
Міфи індіанців Навахо [169]	140	283	4.04	32	3.81	3.62	9	0.44	0.03	14.0	92.1 %	-0.18	0.31

Табл. 4.1. Характеристики соціальної мережі билин (наші результати) у порівнянні із характеристиками соціальних мереж інших епосів, отриманими в роботах [16, 17, 169]. Тут N і L позначають кількість вузлів і кількість зв'язків відповідно; $\langle k\rangle$ і $k_{\max}$ – середній (4.2) і максимальний (4.3) ступінь вузла; ℓ, ℓ_{rand} – середні довжини найкоротшого шляху (4.6) складної мережі і випадкового графу (4.8) такого ж розміру і середнього ступеня; $\ell_{\max}$ – діаметр мережі (4.7); C, C_{rand} – середній коефіцієнт кластерності складної мережі (4.12) і його відповідник для випадкового графу (4.13); S – тісносвітність (4.17); G_C – розмір найбільшої компоненти; r_k, r_C – асортативності за ступенем вузла (4.23) і за коефіцієнтом кластерності (4.24), відповідно. Примітки в дужках *(усі, ворожі, дружні)* означають, що мережі складаються із обох типів зв'язків, чи лише з ворожих (дружніх), відповідно.

Розмір (кількість вершин N і ребер L) соціальної мережі билин представлений в першому рядку Табл. 4.1 разом із іншими характеристиками, які будуть описані нижче. У таблиці окремо подано характеристики як мережі, утвореної всіма зв'язками, так і мереж утворених лише ворожими чи лише дружніми зв'язками (надалі – ворожа і дружня мережі). Також варто зазначити, що при утворенні дружньої чи ворожої мереж можуть виникати вузли, у яких немає жодного зв'язку (ізольовані вузли). Природно, що їх не береться до розгляду, і, таким чином, розміри мереж різних типів зв'язків будуть різними. Наприклад, ворожа мережа билин містить всього 98 вузлів (вилучено 55 ізольованих вузлів), а у найбільшій зв'язній компоненті знаходиться 50 із них, що становить 51 %. А для соціальної мережі билин усіх зв'язків розмір найбільшої зв'язної компоненти складає 76.5%. Порівняно із епосами інших народів билини мають найбільшу зв'язну компоненту меншого розміру. Це можна пояснити тим, що билини не є історіями одного суцільного героїчного епосу, а окремими розповідями про героїв. Різні регіони Київської Русі оспівували своїх героїв і складали про них пісні-билини, які могли і не бути пов'язаними із найпопулярнішими богатирями. Прикладом може слугувати Василь Окулович (персонаж номер 11), зв'язна компонента якого знаходиться в правому верхньому кутку рис. 4.1.

Надалі в Табл. 4.1 ми порівнюватимемо отримані характеристики соціальної мережі билин із аналогічними характеристиками інших творів. Крім згаданих вище творів *Беовульф*, *Іліада*, *Викрадення бика з Куалнге* (надалі називатимемо цю мережу *Викрадення бика*) та ісландських саг *про Гіслі, про людей з Озерної долини* (надалі *сага 1)*, *про Егіля, про Ньяла, про людей з Лаксдаля* (надалі *сага 2)*, у таблиці зібрана інформація про характеристики соціальних мереж ірландської саги (скели) уладського циклу *Руйнування дому Да Дерга* (надалі *Да Дерга)*, античної грецької епічної поеми *Одіссея*, німецького середньовічнього героїчного епосу *Пісня про Нібелунгів*, циклу валійських середньовічних повістей *Мабіногіон*, шумерського *Епосу про Гільгамеша*, священної книги народу майя *Пополь-Вух*, міфів одного з найбільших індіанських племен Навахо. У тих випадках, коли відповідна інформація доступна, ми наводимо дані окремо для мереж, утворених

дружніми зв'язками, ворожими зв'язками і для загальної мережі. Кількісні дані про ці епоси взято з роботи [169].

Порівняння характеристик соціальної мережі билин із переліченими вище репрезентативними епосами різних народів світу слугуватиме задля пошуку універсальних характеристик епічних наративів. З цією метою в наступному розділі ми знайдемо такі характеристики соціальної мережі билин, як середній ступінь вузла, коефіцієнт кластерності, відстань між персонажами, тісносвітність, кореляції між характеристиками вузлів, посередництво вузлів, стійкість мережі до атак і її розподіл на спільноти. Кожну з цих характеристик ми детальніше опишемо нижче. У Табл. 4.1 зібрані всі перелічені вище характеристики для мереж різних типів зв'язків у билинах в порівнянні з низкою інших епосів.

4.3. Мережеві характеристики

4.3.1. Ступінь вузла

Ступінь k_i вузла i – це кількість зв'язків які має даний вузол. Це локальна характеристика вузла, іншими словами – це число вершин, з якою з'єднана дана, і очевидно, що така міра може вказати на важливість кожної вершини. Ступінь вузла i визначають за наступною формулою

$$k_i = \sum_j A_{ij} \tag{4.1}$$

де A_{ij} - елементи матриці суміжності. Мережу загалом можна охарактеризувати середнім ступенем вузла

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i k_i \,, \tag{4.2}$$

і максимальним ступенем вузла

$$k_{\max} = \max_i k_i \,. \tag{4.3}$$

Тут і нижче, якщо не зазначено інакше, підсумовування ведеться за всіма вузлами мережі. $\max_i$ в (4.3) означає максимальне значення серед усіх вузлів. Для

ненапрямлених графів

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N} \,. \tag{4.4}$$

Для подальшого аналізу властивостей, пов'язаних зі ступенем вузлів, мережу зручно зобразити, промасштабувавши розмір кружечка, що відповідає кожній з вершин на її ступінь. Таким чином, вузли із більшим ступенем будуть зображатися кружечками більшого діаметра. Найбільша зв'язна компонента такої мережі зображена на Рис. 4.2 (а). Як бачимо з рисунку, деякі вузли значно вирізняються за розміром. Максимальний ступінь вузла у цій мережі $k_{\max} = 52$ набагато вищий від середнього ступеня $\langle k \rangle = 4.18$, див. Табл. 4.1. Хоч билини і містять багато персонажів, але все ж вони є історіями про героїв, а отже самі розповіді орієнтовані на лідерів. Зокрема, у мережі виділяються декілька головних героїв: князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій Попович (персонаж 1) – для яких ступінь вузла сильно виділяється на фоні цілої мережі. Зображений на Рис. 4.2 (а) граф має структуру, схожу до зіркового, точніше до кількох зіркових, що зрослися разом: лідери приєднують до себе багато вузлів із малим ступенем, а також пов'язані між собою напряму. Персонаж із максимальним значенням ступеня вузла $k_{\max} = 52$ знає майже половину всіх інших. Це князь Володимир (персонаж 52), який згадується майже в кожній билині. Цікаво, що, за припущеннями деяких дослідників, князь Володимир є збірним персонажем [174]. Ми ще повернемося до цього питання пізніше, обговорюючи в підрозділі 4.3.6 асортативність мережі.

Розглянемо тепер імовірність того, що довільно обраний вузол мережі має заданий ступінь k. Така ймовірність задається функцією розподілу ступенів вузлів $p(k)$ і є однією з центральних характеристик мережі. Відомо, що реальні соціальні мережі (див., наприклад, [176, 177]) описуються степенево-спадною функцією $p(k) \simeq k^{-\lambda}$, $k >> 1$. Такі мережі називаються безмасштабними [8, 175, 178–184]. Безмасштабні мережі володіють низкою унікальних властивостей, пов'язаних зі швидкістю загасання функції $p(k)$. Дуже часто важливі мережеві структури є безмасштабними. Крім згаданих соціальних мереж, безмасштабними є мережі ін-

ім'я персонажа	No	R_k	R_c	R_b
Князь Володимир	52	1	1	1
Ілля Муромець	46	2	2	2
Добриня	28	3	3	3
Олексій Попович	1	5	4	10
Михайло Потик	87	9	7	5
Опраксія	104	4	5	13
Дюк	33	7	6	15
Василь	10	8	13	7
Чурило	153	6	12	16
Соловій-розбійник	126	11	15	23
татарин	138	15	14	24
Кудреванко	65	10	8	37
Дунай	32	18	11	31
іван Гостиний син	43	19	37	4
Михайло	85	16	25	28
Калин	49	17	16	36
Матфей	77	12	9	49
Лука	71	13	10	50
Хотен	146	24	40	11
Соловій	125	25	42	14

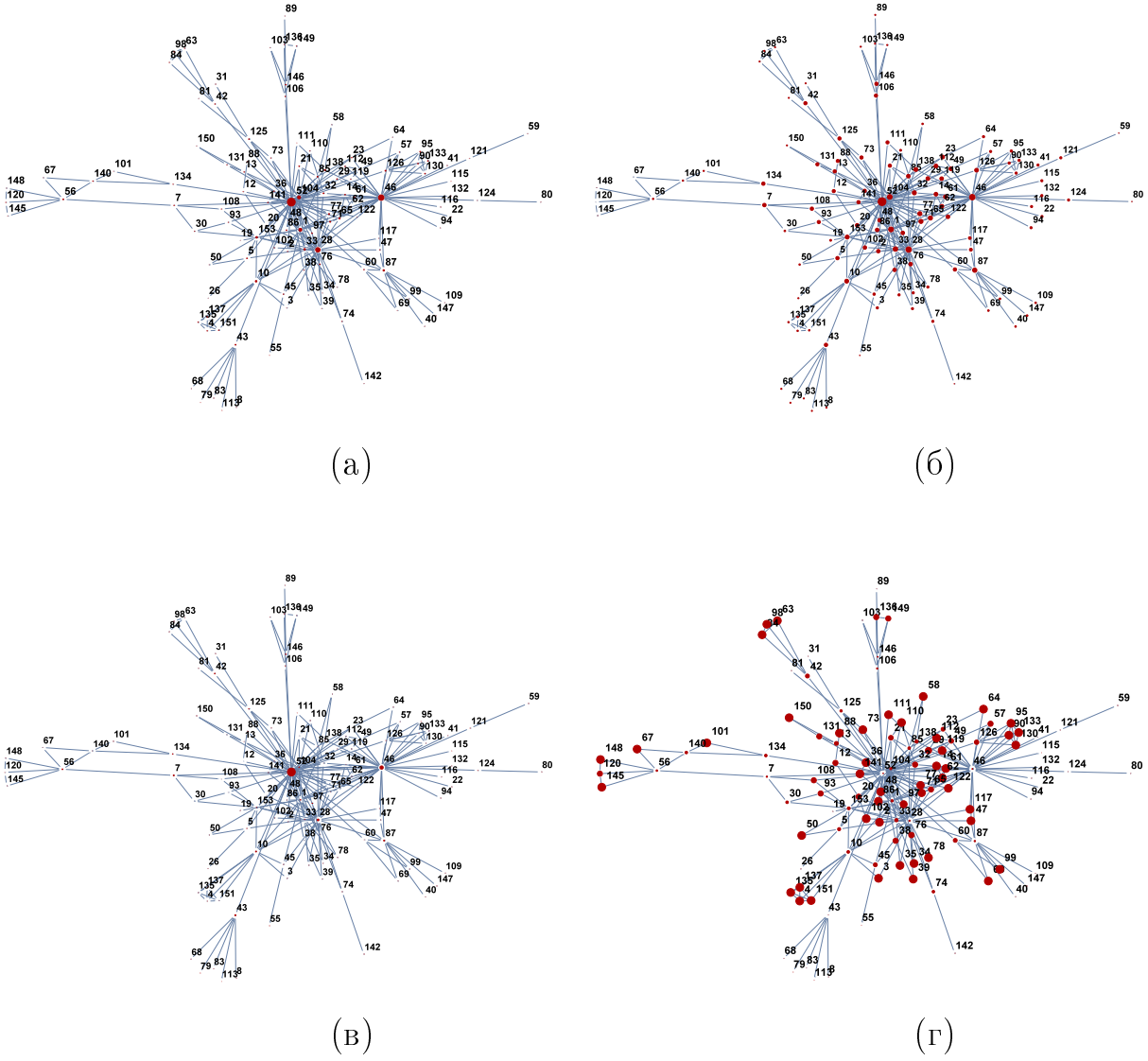
Табл. 4.2. Двадцять найважливіших персонажів соціальної мережі билин. У таблиці вказані No - номер персонажа, яким його позначено на рисунках, та ранги: R_k (за ступенем вузла k), R_c (за центральністю близькості $\mathcal{C}^c$), R_b (за центральністю посередництва $\mathcal{C}^b$).

тернету, www, метаболізму, багато розподільчих, транспортних та семантичних мереж [175, 180–184]. На практиці зручно користуватися кумулятивною функцією розподілу ступенів вузлів $P(k)$, пов'язаною із $p(k)$ співвідношенням:

$$P(k) = \sum_{q=k}^{k_{\max}} p(q)\,, \tag{4.5}$$

де $k_{\max}$ – максимальне значення ступеня вузла. Як інтегральна характеристика, така функція є гладшою, ніж $p(k)$, і зручнішою для апроксимації. Для степеневоспадної функції розподілу $p(k) \sim k^{-\lambda}$ показник загасання кумулятивної функції $P(k)$ на великих k становить $1 - \lambda$.

На рис. 4.3 зображено кумулятивну функцію розподілу ступенів вузлів



(а) (б)

(в) (г)

Рис. 4.2. Найбільша зв'язна компонента соціальної мережі билин (до розгляду взято всі зв'язки – дружні та ворожі). Розмір кожного з вузлів пропорційний до: (а) ступеня вузла k; (б) центральності близькості $\mathcal{C}^c$ (4.9); (в) центральності посередництва C_B (4.10); (г) коефіцієнта кластерності C (4.11). Як видно із порівняння рисунків (а) – (г), ранг (важливість) вузла у різних класифікаціях різний. Наприклад, князь Володимир (персонаж 52) та Ілля Муромець (персонаж 46) мають найвищі значення ступеня вузла, центральності близькості і центральності посередництва, а от їхній коефіцієнт кластерності є малим. Чи Іван Гостиний син (персонаж 43) має порівняно високі значення центральностей, але низькі значення ступеня вузла і коефіцієнта кластерності. Значення рангів найважливіших персонажів наведено у Таблиці 4.2.

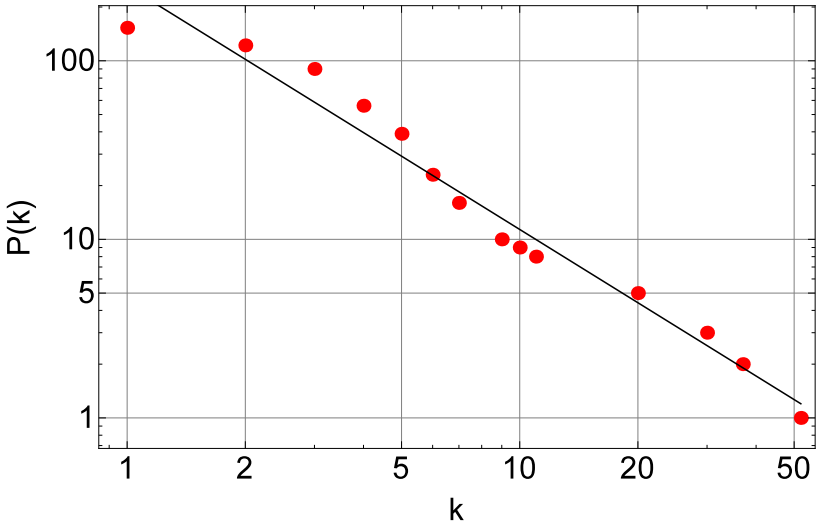


Рис. 4.3. Кумулятивна функція розподілу ступенів вузлів $P(k)$ і її апроксимація степеневим законом $P(k) \simeq k^{1-\lambda}$ із показником $\lambda \simeq 2.36(7)$ (суцільна лінія).

та її апроксимацію степеневим законом. Ця апроксимація відповідає показнику $\lambda \simeq 2.36(7)$ при статистичному критерії $\chi^2/N_{dof} = 0.041$, що означає хороше узгодження між даними і гіпотезою. Тому можна сказати, що в межах зміни значення ступеня вузла k соціальна мережа билин є безмасштабною, як і реальні соціальні мережі.

У [16, 17, 169] було показано, що мережі епосів *Беовульф, Викрадення бика* та ісландських саг також є базмасштабними зі значеннями $\lambda = 2.2 \div 2.9$. Зокрема, мережа *Беовульф* має $\lambda = 2.4(1)$, що є дуже близьким до нашого значення. Характерно, що для ісландських саг показник λ є вищим. Зазначимо також, що для соціальних мереж художніх творів степеневий розподіл ступенів вузлів спостерігається дуже рідко [16].

4.3.2. Відстані між персонажами

Реальні соціальні мережі, навіть ті, що мають велику кількість вузлів, характеризуються малими середніми відстанями між вузлами. Це так звані *тісні світи* [185] (див. детальніше в підрозділі 4.3.6). Зокрема, для них відомий ефект

шести ступенів розділення чи шести рукостискань [186]: середня відстань між двома довільно обраними членами суспільства (на рівні безпосереднього знайомства) становить шість. Перевіримо, якими є типові відстані (шляхи) між вузлами соціальної мережі билин. У графі шляхом називають сукупність ребер, по яких необхідно пройти, щоб потрапити із одного вузла на інший. Довжина шляху визначається кількістю пройдених ребер. Найкоротший шлях з одного вузла до іншого в межах зв'язної частини графу називається геодезичною.

Позначимо ℓ_{ij} довжину геодезичної між вузлами i та j. Тоді можна означити середній найкоротший шлях

$$\ell = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \ell_{ij}, \tag{4.6}$$

і максимальний найкоротший шлях (діаметр мережі)

$$\ell_{\max} = \max_{ij} \ell_{ij}. \tag{4.7}$$

Для знаходження відстаней у (4.6), (4.7) до розгляду беруться усі геодезичні у всіх зв'язних компонентах мережі. Отримані таким чином значення ℓ і $\ell_{\max}$ соціальної мережі билин наведені в Табл. 4.1. Як видно із таблиці, значення середнього найкоротшого шляху соціальної мережі билин близьке до свого відповідника для соціальних мереж епосів інших народів. Те саме можна сказати і про діаметр мережі. Також з наведеної таблиці видно, що ці значення є низькими. Зокрема, максимальне значення найкоротшого шляху між персонажами становить лише 6 (для всіх і для дружніх зв'язків). У соціальній мережі реального світу, де кількість людей-персонажів на порядки вища, ця цифра залишається незмінною, тому реальний світ є ще більш пов'язаним. Значення $\ell_{\max} = 8$ мережі ворожих зв'язків соціальної мережі билин вище: ця мережа більш "розтягнута". Подібна риса спостерігається і для інших епосів, див. Табл. 4.1.

Середнє значення найкоротшого шляху ℓ можна порівняти із відповідним значенням ℓ_{rand} обчисленим для класичного випадкового графу Ердоша-Рені [187] такого ж розміру. Граф Ердоша-Рені є прикладом мережі тісного світу: із ростом кількості вершин середній найкоротший шлях у ньому зростає логарифмічно

[188]. Цей факт, а також відсутність будь-яких кореляцій у розташуванні вузлів приводить до низьких значень середньої довжини найкоротшого шляху. Останню можна оцінити за заданою кількістю вузлів та їх середнім ступенем [189]

$$\ell_{\text{rand}} = \frac{\log N - \gamma}{\log\langle k\rangle} + \frac{1}{2} = 3.23 \quad , \tag{4.8}$$

де $\gamma \simeq 0.5772$ - стала Ойлера-Маскероні. Отримані за цією формулою значення ℓ_{rand} для трьох різних мереж билин також наведені в Табл. 4.1. Як видно із таблиці, подібно як і для мереж інших епосів, середня найкоротша відстань аналізованих мереж є меншою, ніж у випадкових графів з відповідними кількостями ребер і вузлів.

4.3.3. Центральність близькості

Використовуючи поняття відстані між персонажами, можна знайти характеристику, яка називається центральність близькості (англ. *closeness centrality*) [190, 191]. Для кожного окремого вузла у графі вона є оберненою до суми відстаней від цього вузла до всіх решти вузлів зв'язної компоненти, до якої належить цей вузол

$$\mathcal{C}^c(v) = \frac{1}{\sum_{t\in V} d_G(v,t)}, \tag{4.9}$$

де $d_G(v,t)$ позначає відстань між вершинами v і t. Таким чином, чим вище значення центральності близькості вузла $\mathcal{C}^c(v)$, тим ближче знаходиться вузол v до решти вузлів мережі. Для того, щоб порівняння мало сенс, обрахунки потрібно робити тільки в межах зв'язної компоненти мережі, де існує шлях між будь-якими двома персонажами.

На Рис. 4.2 (б) зображена найбільша зв'язна компонента соціальної мережі билин, розмір кожної вершини v якої промасштабований за значенням центральності близькості $\mathcal{C}^c(v)$ так, що вершини-кружечки більшого діаметру відповідають персонажам із більшим значенням $\mathcal{C}^c(v)$. Список найважливіших персонажів билин із вказаним номером у списку, впорядкованому за значенням центральності близькості (рангом R_c), наведений у Таблиці 4.2. Найбільшим значенням цен-

тральності близькості володіють князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій (персонаж 1) і княгиня (персонаж 104). Відразу за ними йдуть Дюк (персонаж 33) і Михайло Потик (персонаж 87). Михайло Грушевський відносить двох останніх до галицько-волинської групи [192]. Дюк, за текстом билини, є галицьким князем. А образ Михайла Потика також вважається запозиченим із території західної України, куди він, натомість, потрапив із Болгарії, із історії про святого Михайла Змієборця із Потуки [192]. У текстах, які ми брали до розгляду, він є богатирем, що виступає на боці князя Володимира проти короля Ляхетського (персонаж 60). За іншою версією, прізвище Потик походить від назви західноукраїнської річки Поток, від якої, зокрема, пішло прізвище князів Потоцьких [193]. Тому цікавим є той факт, що кількісний аналіз показав важливість персонажів із Галицько-Волинської держави, яка свого часу була правонаступницею Київської Русі.

З іншого боку, цікавим є те, що в мережі, з якої вилучено вузли, що відповідають князю і княгині найбільше значення центральності близькості має Добриня, а ранг Іллі Муромця знижується. Це може слугувати відображенням того факту, що Ілля в кількох текстах виступає опонентом князя, тоді як Добриня завжди на боці правителя, а отже, і перебуває ближче до нього.

4.3.4. Центральність посередництва

Крім зазначених вище ступеня k_i та центральності близькості $\mathcal{C}^c(i)$, ще однією локальною характеристикою, за якою можна судити про важливість вузла i, є центральність посередництва (англ. *betweenness centrality*). Ця величина показує, наскільки важливим є даний вузол для підтримання зв'язків між іншими вузлами мережі. Нехай $\sigma(j,l)$ – кількість геодезичних між вузлами j та l, і нехай $\sigma_i(j,l)$ – кількість тих із них, що проходять через вузол i. Тоді центральність посередництва вузла означається так [191]:

$$\mathcal{C}^b(i) = \frac{2}{(N-1)(N-2)} \sum_{j \neq l} \frac{\sigma_i(j,l)}{\sigma(j,l)} \quad . \tag{4.10}$$

Подібно до центральності близькості, центральність посередництва означається на зв'язній компоненті мережі. Тому N в формулі (4.10) – це кількість вузлів у зв'язній компоненті, а нормування проводиться на кількість всеможливих спарень між цими вузлами. Відтак, значення $\mathcal{C}^b(i) = 1$ відповідає випадку, коли всі геодезичні проходять через вузол i.

На рис. 4.2 (в) зображено найбільшу зв'язну компоненту соціальної мережі билин, у якій розмір вузла залежить від його центральності посередництва. Список найважливіших персонажів билин із указаним рангом R_b за значенням центральності посередництва наведений у Табл. 4.2. Найважливішими персонажами залишаються князь Володимир (персонаж 52), Ілля Муромець (персонаж 46) і Добриня (персонаж 28), а ранг Олексія Поповича (персонаж 1) суттєво нижчий, $R_b = 10$ (у порівнянні з його рангом за ступенем вузла чи центральністю близькості: $R_k = 5, R_c = 4$). Четвертим за значенням центральності є Іван Гостиний син (персонаж 43). Він з'являється тільки в одній билині, в якій є п'ять унікальних персонажів. і, оскільки Іван має безпосередній зв'язок із князем, через нього проходять усі геодезичні, що йдуть до або від згаданих п'яти вузлів. Це і спричиняє його високе посередництво.

Вузли з високим значенням центральності посередництва важливі для підтримання цілісності мережі. Наприклад, якщо з соціальної мережі билин вилучити лише трьох персонажів із найвищим значенням $\mathcal{C}^b$, то мережа розпадається на 24 фрагменти, найбільший з яких містить 72 вузли. Детальніше стійкість мережі до вилучення її окремих складових буде проаналізована в підрозділі 4.3.10.

4.3.5. Коефіцієнт кластерності

Коефіцієнт кластерності є специфічною мірою скорельованості мережі [183]. Він визначає імовірність того, що сусіди певного вузла також з'єднані між собою. Коефіцієнт кластерності вузла i зі ступенем k_i задається виразом

$$C_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)} \quad , \tag{4.11}$$

де n_i – кількість сусідів i—го вузла, що є також сусідами і між собою. Очевидно, що $k_i(k_i-1)/2$ – максимальна кількість зв'язків між k_i вузлами, а тому коефіцієнт кластерності будь-якого вузла у повному графі (в якому кожен вузол з'єднаний зі всіма іншими) рівний 1. Відповідно, коефіцієнт кластерності будь-якого вузла у дереві (графі без петель) рівний 0.

На рис. 4.2 (г) зображено найбільшу зв'язну компоненту соціальної мережі билин, у якій розмір вузла промасштабований відповідно до його коефіцієнта кластерності. Як бачимо, важливість вузлів за їх коефіцієнтом кластерності суттєво відрізняється від їх важливості за ступенем вузла (пор. Рис. 4.2 (а) і Рис. 4.2 (г)). Вузли, які мали високий ступінь, мають не такий уже й високий коефіцієнт кластерності: чим більший ступінь вузла, тим менша імовірність, що його сусіди з'єднані один із одним. Наприклад, кожен із богатирів (Ілля (персонаж 46), Добриня (персонаж 28), Олексій (персонаж 1)) мали багато різних незалежних один від одного ворогів, що і призвело до малого коефіцієнта кластерності.

Як слідує з означення (4.11), коефіцієнт кластерності – локальна характеристика вузла. Мережу ж загалом можна характеризувати середнім значенням коефіцієнта кластерності вузлів, що її утворюють:

$$C = \frac{1}{N}\sum_i C_i \quad . \tag{4.12}$$

Часто для з'ясування міри кореляції реальної мережі порівнюють середнє значення коефіцієнта кластерності з коефіцієнтом кластерності для випадкового графу такого ж розміру C_{rand}. Для заданої кількості й середнього ступеня вузлів його можна знайти зі співвідношення

$$C_{rand} = \frac{\langle k \rangle}{N-1}. \tag{4.13}$$

Порівнюючи наведені у Табл. 4.1 результати, отримані для середнього значення коефіцієнта кластерності соціальної мережі билин із значеннями коефіцієнта кластерності випадкового графу, маємо можливість кількісно характеризувати міру кореляції мережі билин. Мережі утворені всіма зв'язками, так само як і мережі дружніх зв'язків, – це сильно скорельовані структури. Подібно до мереж

інших епосів, їх коефіцієнт кластерності більш ніж на порядок перевищує значення коефіцієнта кластерності випадкового графу такого ж розміру. Цього не можна сказати про коефіцієнт кластерності мереж ворожих зв'язків. Як видно з таблиці, для соціальної мережі билин його значення на порядок менше, ніж для мережі дружніх зв'язків, і за порядком величини порівнянне зі значенням для випадкового графу. Це спостереження ілюструє виконання гіпотези структурного балансу для соціальних мереж епосів: якщо два вузли-персонажі поєднані ворожими зв'язками з третім, то малоймовірно, що вони також поєднані між собою ворожим зв'язком.

Альтернативною величиною, яка подібно до середнього значення коефіцієнта кластерності характеризує наявність кореляцій у мережі, є транзитивність. Вона означається так [11]

$$C^T = \frac{3N_\Delta}{N_t} \quad , \tag{4.14}$$

де N_Δ - кількість замкнених трикутників у мережі (конфігурацій із трьох попарно з'єднаних вузлів), а N_t - кількість з'єднаних триплетів (конфігурацій з трьох вузлів, у яких з'єднаними є лише дві пари). Транзитивність випадкового графу з N вузлів можна виразити через моменти розподілу, використовуючи наближену формулу [194]

$$C^T_{rand} \approx \frac{1}{N}\frac{(\langle k^2\rangle - \langle k\rangle)^2}{\langle k\rangle^3} \quad . \tag{4.15}$$

У Табл. 4.3 наведено значення транзитивності соціальної мережі билин для різних типів зв'язків і порівняно її значення з транзитивністю випадкового графу.

Як зазначалося вище, транзитивність є аналогом коефіцієнта кластерності, але це не завжди так. Прикладом може служити колесоподібний граф (англ. *wheel graph*). Для цього графу в границі безмежного розміру транзитивність прямує до 0, а середній коефіцієнт кластерності – до 1 [195]. З іншого боку, для випадкового графу Ердоша - Рені значення транзитивності й середнього коефіцієнта кластерності є дуже близькими [196].

З результатів, наведених у Табл. 4.3, можна зробити ті ж висновки, що і зі значень коефіцієнта кластерності. Різниця полягає у сферах застосування. Тран-

	дружні	ворожі	усі
C^T	0.25	0.08	0.23
C^T_{rand}	0.021	0.021	0.027
r_P	0.018	-0.038	0.02

Табл. 4.3. Значення транзитивності C^T (4.14), її оцінка для випадкового графу C^T_{rand} і подібність вузлів за Пірсоном r_P для соціальних мереж билин з урахуванням різних типів зв'язків. Негативне значення коефіцієнта подібності вузлів за Пірсоном свідчить про виконання гіпотези структурного балансу.

зитивність часто використовують для соціальних мереж [194], де вона є наочним представленням гіпотези про структурний баланс.

4.3.6. Тісносвітність

Як було показано вище, для соціальних мереж билин характерними є низьке значення середнього найкоротшого шляху ℓ та високе значення коефіцієнту кластерності C. Перше спостереження робить їх подібними до класичного випадкового графу, а друге свідчить про суттєву роль кореляцій у формуванні цих мереж і цим уподібнює їх до регулярних структур. Реальні соціальні мережі надзвичайно компактні: з одного вузла на інший можна перейти через малу кількість ребер. Ми вже раніше згадували про гіпотезу шести рукостискань [185]. Вона є яскравим вираженням того, що наш світ є тісним. Мережа тісного світу (англ. *small-world network*) [197] якраз і поєднує риси випадкового графу і регулярної структури: їй притаманні невеликий характерний розмір (низьке значення середнього найкоротшого шляху ℓ) та високий ступінь кореляції (високе значення коефіцієнту кластерності C):

$$\ell \approx \ell_{rand}\,, \qquad C \gg C_{rand}\,. \tag{4.16}$$

Для чисельної характеристики ефекту тісного світу використовують так звану тісносвітність (англ. *small-worldness*) [198]. Її означення враховує обидва зазначені у (4.16) ефекти:

$$S = \frac{C/C_{rand}}{\ell/\ell_{rand}} \quad . \tag{4.17}$$

Мережа є тісним світом, якщо $S > 1$. Значення тісносвітності соціальної мережі билин наведені в Табл. 4.1. Числові дані, наведені в таблиці, свідчать про виконання умов (4.16) для мереж всіх зв'язків і мереж дружніх зв'язків. Таким чином, соціальні мережі билин, подібно до соціальних мереж інших епосів є тісними світами. Як уже зазначалось у підрозділі 4.3.5, коефіцієнт кластерності мережі ворожих зв'язків за порядком величини не відрізняється від коефіцієнту кластерності відповідного випадкового графу: друга з умов (4.16) для цієї мережі не виконується, що спричиняє порівняно нижче значення тісносвітності. Схожі властивості проявляють і мережі інших епосів, представлених у Табл. 4.1.

Попри те, що означена в (4.17) тісносвітність дозволяє отримати чисельну оцінку для заданої мережі, її використання для порівняльного аналізу має свої недоліки. Основним є те, що для випадкового графу коефіцієнт кластерності C_{rand} змінюється із розміром системи як $1/N$, в той час, як для складних мереж значення C є порівняно високим. Беручи до уваги те, що і для випадкових графів, і для складних мереж середня найкоротша відстань зростає логарифмічно із розміром системи, отримаємо, що складні мережі великих розмірів завжди матимуть велике значення тісносвітності. Тому значення цієї величини не завжди дає точну відповідь, чи дійсно мережа є тісним світом, чи ні.

4.3.7. Ступенева асортативність

Відомо, що в реальних соціальних мережах переважно з'єднуються між собою подібні за ступенем вузли [194]. і навпаки, у соціальних мережах створених на підставі вигаданих творів (таких, наприклад, як вигаданий всесвіт Марвел [199]), вузли низького ступеня мають тенденцію приєднуватися до вузлів високого ступеня – габів. Як ми побачимо нижче, соціальні мережі епічних наративів займають проміжне положення. Кількісною мірою кореляції між ступенями сусідніх вузлів є ступенева асортативність [194]. Імовірність того, що випадково вибране ребро

з'єднує вузли зі ступенями k і q, можна записати так

$$\Phi(k,q) = \frac{1}{2L}\sum_{i,j} A_{ij}\delta(k_i - k)\delta(k_j - q), \tag{4.18}$$

де δ – символ Кронекера а коефіцієнт $\frac{1}{2}$ з'являється для симетризації запису суми. Тоді ймовірність того, що на кінці випадкового ребра буде вузол зі ступенем k можна знайти підсумовуванням за ступенями вузлів, що знаходяться на іншому краю ребра

$$\phi(k) = \sum_q \Phi(k,q) \quad . \tag{4.19}$$

Позначимо математичне сподівання знайти вузол зі ступенем k на краю випадково вибраного ребра $E(k)$ (зауважимо, що ця величина відрізняється від $\langle k \rangle$, оскільки остання знаходиться підсумовуванням за вузлами). Його можна знайти з формули

$$E(k) = \sum_k k\phi(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}, \tag{4.20}$$

тобто маємо зв'язок між середнім ступенем вузла за вершинами і за ребрами. Аналогічно можна записати математичне сподівання випадково отримати ребро з вузлами зі ступенями k і q на кінцях

$$E(kq) = \sum_{k,q} kq\Phi(k,q) \quad . \tag{4.21}$$

Для нескорельованої мережі має виконуватися $E(kq) = E(k)E(q)$. Для визначення рівня скорельованості скористаємося коефіцієнтом кореляції Пірсона, який має вигляд

$$r_k = \frac{E(kq) - E(k)E(q)}{\sigma_k^2}, \tag{4.22}$$

де $\sigma_k^2 = E(k^2) - E(k)^2$. Таким чином, асортативність за ступенем вузла можна записати

$$r_k = \frac{\sum_{i,j} A_{ij}(k_i - E(k))(k_j - E(k))}{E(k^2) - E(k)^2} \quad . \tag{4.23}$$

Ступенева асортативність має вигляд коефіцієнта кореляції Пірсона і може приймати значення $-1 < r_k < 1$. Від'ємне значення $r_k < 0$ свідчить про те, що

мережа є дисортативною, тобто габи приєднуються до вузлів із низьким ступенем. Значення $r_k > 0$ характеризує асортативна мережа, у якій габи переважно приєднуються до габів, а вузли з низьким ступенем пов'язані між собою.

Значення асортативності соціальної мережі билин наведене в Табл. 4.1. Знайдені значення $r_k < 0$ для всіх типів зв'язків свідчать про те, що мережа є дисортативною. Цей результат також добре узгоджується з тим, що билини є розповідями про героїв: фрагменти мережі мають зіркоподібну структуру (див. Рис. 4.1), у якій габи-герої пов'язані з багатьма менш значними персонажами. Контрприкладами є деякі з ісланських саг – розповідей про суспільне життя загалом. Коефіцієнт асортативності у них додатній, що відповідає асортативному типу зв'язків між вузлами подібного ступеня.

Результати, наведені у Табл. 4.1, свідчать про те, що більшість соціальних мереж епічних наративів є дисортативними. Зазначимо, однак, що часом дисортативність мережі зумовлена самою специфікою розповіді – жанром чи особливістю сюжету. Наприклад, події, описані в епосі *Беовульф*, відбуваються у двох різних місцях і розділені також і часовим інтервалом. Їх об'єднує лише наявність спільного протагоніста. Як показано в роботі [16], вилучення протагоніста з мережі змінює характер з'єднань із дисортативного на (слабо) асортативний. Подібний ефект спостерігаємо і в соціальній мережі билин: ступенева асортативність мережі, з якої вилучено вузол, що відповідає князеві Володимиру, становить $r_k \approx 0.01$, що є хоч і дуже малим, але додатнім значенням. Таким чином, мережа стає подібнішою до реальної соціальної мережі. Цікаво, що багато дослідників вважають образ князя Володимира збірним, який об'єднує історичні постаті Володимира Великого (960 – 1015), Володимира Мономаха (1053 – 1125) і, можливо, Ярослава Мудрого (983 – 1054) [174, 200]. Тому зміна характеру з'єднання вузлів мережі при вилученні цього персонажа може бути ще одним підтвердженням такої гіпотези.

До подібного ефекту – зміни знаку асортативності – приводить і заміна вузла, що відповідає князеві Володимиру, на декілька окремих вузлів із одночасним випадковим перерозподілом зв'язків, що з них виходять. Так, поділ на три вузли збільшує значення асортативності до $r_k \approx 0.004$, а поділ на чотири – $r_k \approx 0.03$.

Таким чином, мережа стає більш схожою до реальної соціальної мережі.

4.3.8. Кластерна асортативність

Крім асортативності за ступенем вузла, виділяють кластерну асортативність. Вона є мірою кореляції між значеннями коефіцієнтів кластерності сусідніх вузлів. Велике значення кластерної асортативності є характерним для соціальних мереж реального світу, а також означає існування спільнот у графі [201]. Оскільки коефіцієнт кластерності є локальною величиною, означеною на вузлі, то можна аналогічно до (4.23) ввести формулу в якій всі характеристики ступеня вузла замінити на відповідні характеристики кластерності

$$r_{cl} = \frac{\sum_{i,j} A_{ij}(C_i - E(C))(C_j - E(C))}{E(C^2) - E(C)^2} \quad . \tag{4.24}$$

Значення кластерної асортативності соціальної мережі билин наведено в Табл. 4.1. Для всіх типів зв'язків значення є близькими до 0. Цей результат свідчить про те, що персонажі в мережі билин приєднуються і до тісно зв'язаних груп, і до окремих персонажів. У випадку мережі всіх зв'язків отримане значення r_{cl} є близьким до відповідного значення для *Саги про Гіслі* і *Саги про людей з Озерної долини*. Загалом, із даних, наведених у таблиці, не можна зробити висновку про наявність певної тенденції для кластерної асортативності соціальних мереж епосів.

4.3.9. Подібність вузлів за Пірсоном

У попередніх підрозділах ми обговорювали кореляції між властивостями вузлів у мережі – асортативностей за ступенем вузла і за коефіцієнтом кластерності. У цьому підрозділі розглянемо ще одну величину, що характеризує кореляції у властивостях різних вузлів – подібність вузлів за Пірсоном. Ця характеристика мережі дає відповідь на запитання, скільки є спільних сусідів у вершин i та j [11] у порівнянні з випадковим вибором сусідів. Вона є важливою характеристикою для

соціальних мереж. Наприклад, аналізуючи структуру мережі, популярний сервіс *Facebook* пропонує список людей, яких може знати кожен із користувачів. Подібно деякі сучасні пошукові сервіси інтернету пропонують список сторінок, схожих на вибрану.

Подібність вузлів за Пірсоном є нормалізованою коваріацією між векторами A_i і A_j, які є відповідно i-м і j-м стовпчиками в матриці суміжності. Вона обчислюється за формулою

$$r_{ij} = \frac{\sum_v (A_{iv} - N^{-1}k_i)(A_{jv} - N^{-1}k_j)}{\sqrt{\sum_v (A_{iv} - N^{-1}k_i)^2}\sqrt{\sum_v (A_{jv} - N^{-1}k_j)^2}} \quad . \tag{4.25}$$

Величина $r_{ij} < 0$ означає, що два вузли мають менше спільних сусідів, ніж ми б очікували від випадкової структури, і тому можна казати про несхожість вузлів, натомість $r_{ij} > 0$ свідчить, що спільних вузлів є більше, ніж при випадковому з'єднанні. Середнє значення коефіцієнта подібності за Пірсоном для всіх пар вершин дає середній коефіцієнт для всієї мережі r_P.

Значення середнього коефіцієнта подібності вузлів за Пірсоном наведені в четвертому рядку Табл. 4.3. Незначна позитивна величина, може свідчити, що переважно два персонажі, між якими є зв'язок, мають ще спільного знайомого, але до повного графу нашій мережі ще далеко (для повного графу $r_P = 1$). Для мережі ворожих зв'язків значення подібності за Пірсоном є негативним, що узгоджується з гіпотезою структурного балансу.

4.3.10. Стійкість

Додаткову інформацію про структуру складної мережі можна отримати, аналізуючи стійкість мережі до вилучення її окремих складових (так званих атак). Така задача має багато спільного із задачею про перколяцію граткових структур [202, 203]. Аналогом перколяційного кластера у задачі про перколяцію на мережі виступає так звана гігантська зв'язна компонента (див., наприклад, [8, 180–182] для детальнішого порівняння). Для мережі скінченного розміру аналізуються зміни у найбільшій зв'язній компоненті. Неоднорідність мережі при-

водить до того, що зміни найбільшої зв'язної компоненти суттєво залежать від того, які саме вузли вилучаються – за яким сценарієм проводиться атака. Наприклад, присутність ієрархічних структур у безмасштабних мережах робить їх дуже вразливими до спрямованих атак, коли вузли вилучаються за їх важливістю – рангом за якоюсь певною ознакою. З іншого боку, ці мережі надзвичайно стійкі до випадкового вилучення їх складових [102, 103, 204, 205].

На Рис. 4.4 порівняно результати поведінки найбільшої зв'язної компоненти соціальної мережі билин при атаках, проведених за трьома різними сценаріями: випадковому (коли вузли мережі вилучались випадковим чином) і двома спрямованими (коли вузли вилучались у порядку зменшення їхнього ступеня чи центральності посередництва на кожному кроці). Результати, представлені на Рис. 4.4, отримано для мережі, утвореної всіма зв'язками: мережі з тільки дружніми або тільки ворожими зв'язками ми не розглядаємо через невелику кількість вузлів. Як видно з рисунку, випадкові атаки є малоефективними. А атаки, націлені на ступінь вузла чи на його посередництво, мають майже однакову ефективність – мережа набагато до них вразливіша. До прикладу, достатньо викинути близько 10 вузлів-персонажів, щоб найбільша зв'язна область складала близько 10% свого початкового розміру. Схожі висновки були зроблені і в [16, 17] для інших епічних наративів. Усі вони є стійкими до випадкових атак, але легко руйнуються при спрямованому вилученні вузлів.

4.3.11. Спільноти

Часом у складній мережі присутні ділянки, вузли у яких більше пов'язані між собою, ніж з рештою графу. Такі ділянки прийнято називати спільнотами (англ. *communities*). Для виділення спільнот можна використовувати алгоритм, розроблений Гірван і Ньюменом [206]. За цим алгоритмом, з графу вилучається ребро з найбільшим значенням центральності посередництва, а всі вузли залишаються на місці. Після цього значення центральності посередництва усіх ребер

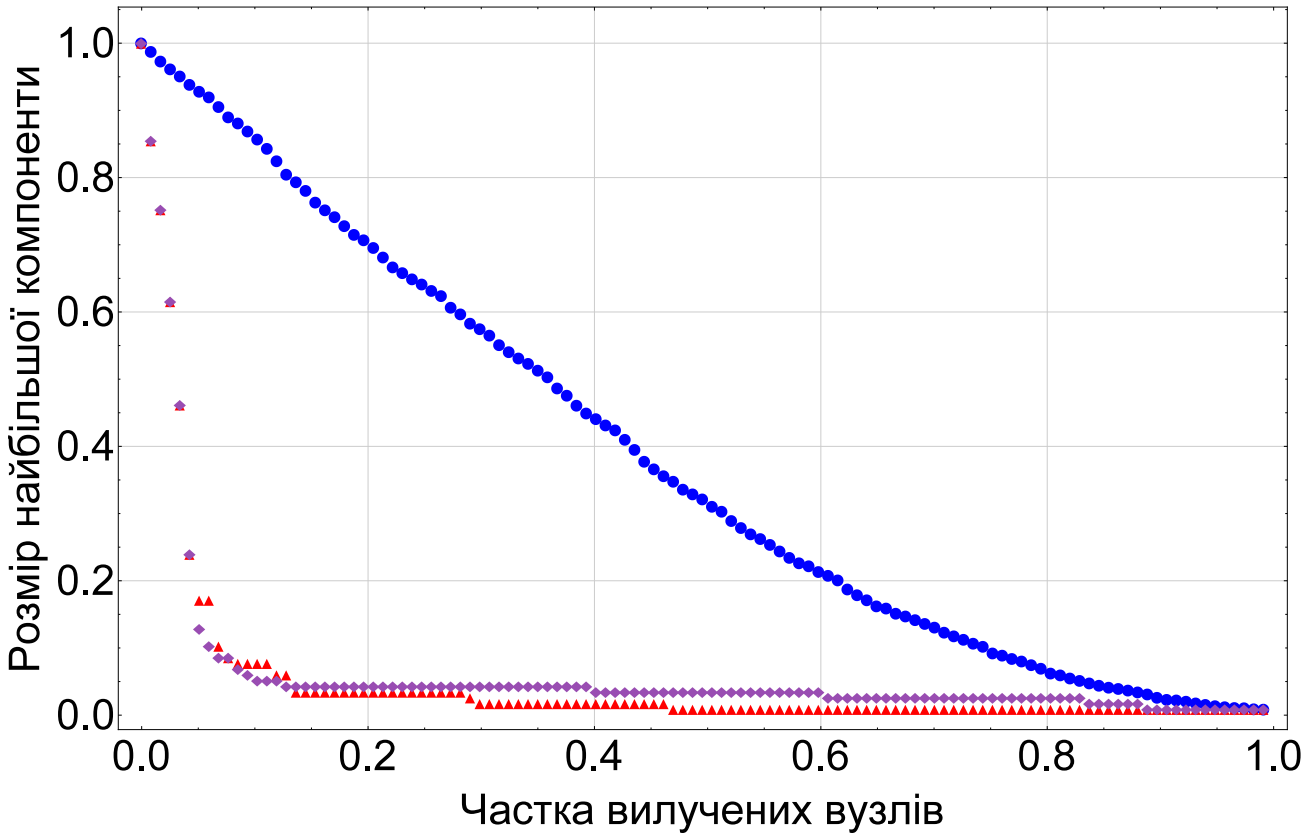


Рис. 4.4. Нормований розмір найбільшої зв'язної компоненти соціальної мережі билин (всі зв'язки), як функція від частки вилучених вузлів для трьох типів атак: випадкова (сині кружечки), в порядку зменшення ступеня вузлів (червоні трикутники) і в порядку зменшення центральності посередництва вузлів (фіолетові ромби). Випадкові атаки є малоефективними, тоді як після спрямованого вилучення лише 10% вузлів розмір найбільшої зв'язної компоненти зменшується майже в 10 разів.

перераховується і знову вилучається ребро із найбільшим посередництвом. Групи вузлів, які в результаті такого процесу від'єднуються від загального графу, називаються спільнотами.

Залишається питання, доки потрібно продовжувати вилучати зв'язки. Щоб відповісти на нього, необхідно порахувати модулярність. Для цього спочатку будується матриця $\hat{E}$ розміру $n \times n$, де n – кількість спільнот на даному кроці. Елемент e_{st} цієї матриці є відношенням кількості зв'язків між спільнотами s і t до кількості зв'язків у всьому графі. Слід зазначити, що елементи цієї матриці обчислюються на основі вихідного графу, а не того, з якого вже вилучено одне чи

кілька ребер. Тоді модулярність можна знайти за наступною формулою

$$Q = \mathrm{Sp}\,\hat{E} - ||\hat{E}^2|| \quad , \tag{4.26}$$

де $||\ldots||$ означає суму всіх елементів відповідної матриці. Оптимальною кількістю спільнот є така, яка забезпечує максимальне значення модулярності.

Застосування цього алгоритму до соціальної мережі билин (у якій враховано усі типи зв'язків) дає цікавий результат: найбільша зв'язна компонента розпадається на 15 спільнот, а значення модулярності при такому розподілі становить $Q = 0.5$. Як зазначається в [206], для реальних соціальних мереж $0.3 < Q < 0.7$, а значення $Q < 0.3$ свідчать, що спільноти в мережі виділяються погано. Таким чином, отримане нами значення модулярності соціальної мережі билин свідчить про присутність у цій мережі добре означених спільнот, типових для реальних соціальних мереж. Найбільша зі спільнот у мережі персонажів билин налічує 36 вузлів (червоні вузли в центрі рис. 4.5), серед яких є князь Володимир (вузол 52) з дружиною (вузол 104), Олексій Попович (вузол 1) і Добриня (вузол 28). Друга за розміром спільнота налічує 22 персонажі – більша група жовтих вузлів у правій частині рис. 4.5, сконцентрованих навколо Іллі Муромця (вузол 46). Цей факт може служити демонстрацією того, що Ілля Муромець і Добриня з Олексієм є представниками різних генерацій богатирів [170, 173]. Ілля є представником старших богатирів, а Олексій і Добриня - молодших.

Цікавим є також те, що проведений аналіз виділив окремі спільноти, сконцентровані навколо Чурила (вузол 153) і Михайла Потика (вузол 87). Обидва ці персонажі разом із Дюком (вузол 33) формують групу галицько-волинських персонажів [192]. Появу цих персонажів в епосі, що описує Київську Русь, можна пояснити тим, що після зруйнування Києва монголо-татарами, руська культурна спадщина перейшла на західні землі в Галицько-Волинську державу. і вже тут билини увібрали в себе частину місцевих персонажів. Як бачимо, кількісний аналіз соціальної мережі билин також виділяє окремі спільноти, зосереджені навколо

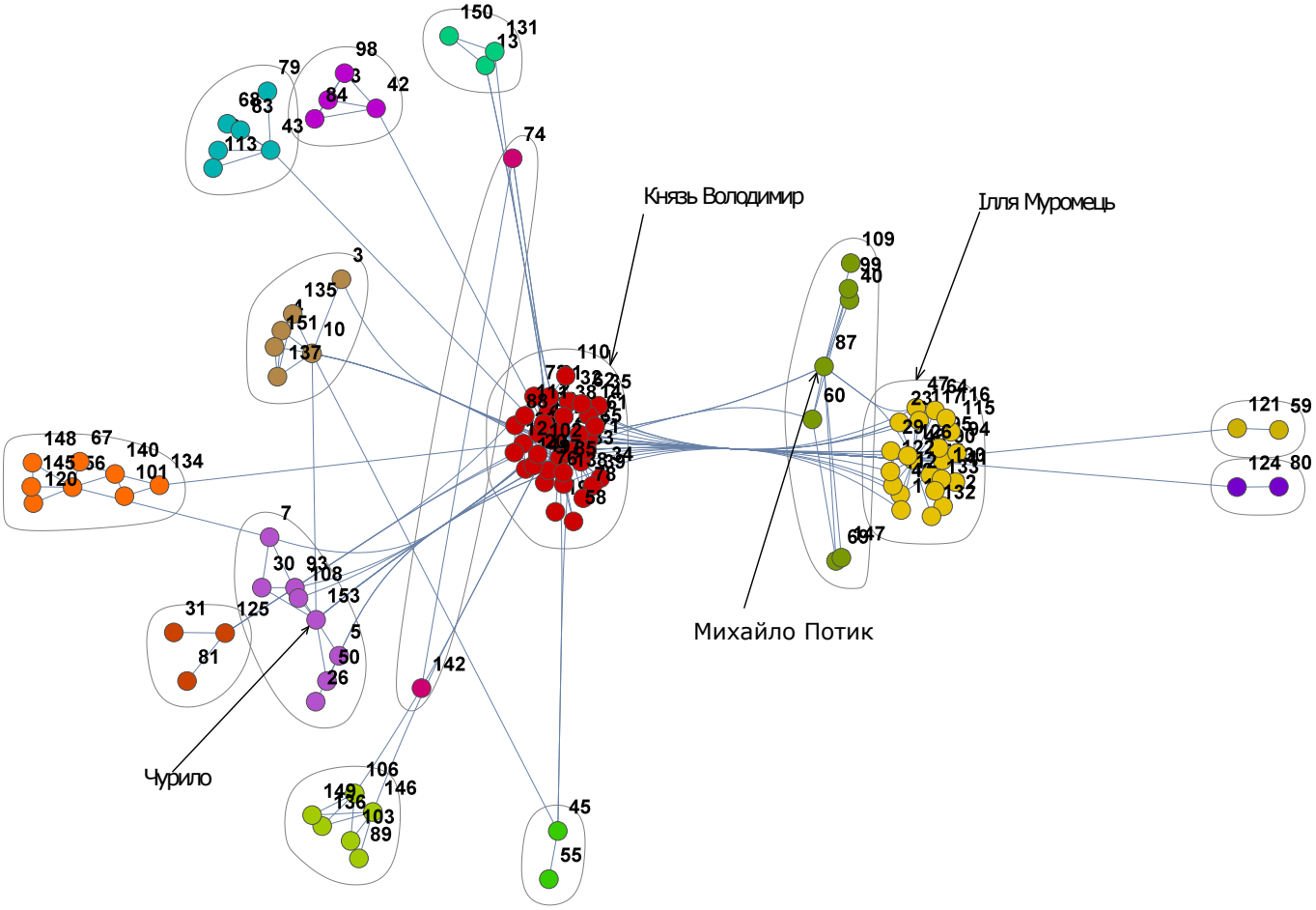


Рис. 4.5. Поділ персонажів давньоруських билин на спільноти (до уваги беруться зв'язки усіх типів). Алгоритм Ньюмена-Гірван виявляє 15 спільнот. Найбільші з них зосереджені навколо князя Володимира (вузол 52 в центральній частині рисунка) та Іллі Муромця (вузол 46 у правій частині рисунка), у наступні за розміром спільноти виділяються персонажі, зосереджені навколо Чурила (вузол 153) і Михайла Потика (вузол 87).

цих персонажів (див. Рис. 4.5).

4.4. Висновки

Як виявилося в результаті аналізу, соціальна мережа билин (див. Рис. 4.1) володіє низкою властивостей, спільних із властивостями соціальних мереж інших епосів. Ці властивості залишаються незмінними для мереж, що характеризують епічні наративи різних культур і були створені в різний час. Таким чином, епоси володіють універсальними властивостями, що дозволяє додаткову класифікацію, яка базується на їх кількісному аналізі. Зокрема, подібно до соціальних мереж

інших епосів, соціальні мережі билин виявилися сильно скорельованими тісними світами зі значенням середнього коефіцієнту кластерності, що значно перевищує відповідне значення для класичного випадкового графу Ердоша-Рені (числові значення цієї та інших характеристик підсумовані в Табл. 4.1). Однак тісними світами є мережі, в яких беруться до уваги всі або лише дружні зв'язки. Мережа ворожих зв'язків має значення коефіцієнта кластерності й середньої відстані порівнянні із відповідними значеннями для графу Ердоша-Рені, що є кількісним проявом гіпотези соціального балансу (ворог мого ворога – мій друг) [105, 207]. Тому ефекти тісного світу в ній не проявляються. У цьому сенсі виправданим є те, що ми назвали досліджувані мережі соціальними мережами билин: подібні ефекти є характерними і для соціальних мереж реального світу [16].

Ще однією характеристикою, яка об'єднує мережі епічних наративів, є їх ієрархічність [16]. Одним із проявів цієї властивості є поділ мережі на спільноти – групи тісно пов'язаних кластерів. Отримане значення модулярності $Q = 0.5$ свідчить про наявність у мережі билин чітко окреслених спільнот. Подібна властивість об'єднує більшість епосів, згаданих у Табл. 4.1. Ієрархічність мережі виявляється і в тому, що значення середнього коефіцієнта кластерності вузлів із певним ступенем k обернено пропорційне до цього ступеня $\bar{C}(k) \propto 1/k$. Недостатня вибірка для соціальних мереж билин не дозволяє перевірити таку залежність.

Як правило, мережі епосів, як і реальні соціальні мережі, є безмасштабними. Це твердження, однак, справедливе з певними винятками, такими як, наприклад, *Іліада* чи *Сага про людей з Лаксдаля* [16, 17]). Для билин безмасштабність проявляється дуже добре, на відміну від мереж деяких художніх творів [16]. Соціальні мережі епосів схожі до реальних соціальних мереж ще й тим, що випадкове усунення їх складових (випадкові атаки) не завдає їм значної шкоди, а спрямовані атаки швидко кластеризують мережу. На відміну від цього, мережі вигаданих художніх творів стійкі як до випадкових, так і до спрямованих атак [16].

Соціальні мережі билин дисортативні за ступенем вузлів. Ця властивість об'єднує більшість епосів, наведених у Табл. 4.1. Дисортативність не є характерною для реальних соціальних мереж [194]. Цікаво зазначити, що мережа дружніх

зв'язків, із якої вилучено вузол, що відповідає князю Володимиру, стає слабо асортативною. Таким чином, вилучення із мережі князя, який, за припущенням деяких дослідників, є збірним персонажем [174] робить її подібнішою до соціальних мереж реального світу.

Крім перелічених вище універсальних характеристик, наш аналіз навів нові аргументи щодо тих чи інших гіпотез про структуру билин. Ми вже згадали про припущення, що князь Володимир є збірним образом київського князя, і про кількісне підтвердження цього припущення. Зазначимо також, що у мережі без князя Володимира і княгині найбільшим значенням центральності близькості володіє Добриня – його відстань від решти персонажів порівняна з княжою. Це може слугувати підтвердженням того, що прообразом билинного Добрині вважають дядька князя Володимира [208]. Іншим цікавим результатом є те, що аналіз соціальної мережі билин виділяє за рангом персонажів Чурила, Дюка і Михайла Потика. А саме цих персонажів Михайло Грушевський відносить до персонажів галицько-волинської групи [192].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі ми розглянули кілька характерних прикладів поведінки складних систем: утворення періодично повторюваних структур (паттернів) в моделі Ізінга з дипольною взаємодією, взаємовплив енергії і ентропії та універсальних характеристик впорядкування у моделі Поттса з невидимими станами, універсальність соціальних мереж наративів.

Нижче ми іще раз коротко перечислимо основні результати, які були отримані в трьох оригінальних розділах:

1. для моделі Ізінга з дипольною взаємодією, було підтверджено, що клас універсальності залежить від відношення констант взаємодії δ;
2. фазовий перехід у моделі Ізінга з дипольною взаємодією відбувається за сценарієм другого роду при переході від $h = 1$ смужкової фази до тетрагональної, а перехід від $h = 2$ фази до тетрагональної - за сценарієм першого роду;
3. було отримано точний розв'язок моделі Поттса з невидимими станами на ланцюжку і показано, що для зовнішніх комплексних полів $h_2 \in \mathbb{C}$ чи від'ємної кількості невидимих станів $r < 0$, перехід може відбуватися при додатній температурі;
4. модель Поттса з невидимими станами на повному графі характеризується двома граничними вимірностями, що розділяють ділянки із різною критичністю (див. Рис. 3.7);
5. модель Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі має критичні показники залежні від показника загасання функції розподілу ступеня вузлів λ;

6. соціальна мережа персонажів давньоруських билин володіє низкою спільних характеристик і мережами персонажів інших творів європейської спадщини, що демонструє їхню універсальність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Anderson P. W.* More is different // *Science*. 1972. Vol. 177, no. 4047. P. 393–396.
2. *Parisi G.* Complex systems: a physicist's viewpoint // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1999. Vol. 263, no. 1-4. P. 557–564.
3. *Newman M.* Resource letter cs–1: Complex systems // *American Journal of Physics*. 2011. Vol. 79, no. 8. P. 800–810.
4. *Holovatch Y., Kenna R., Thurner S.* Complex systems: physics beyond physics // *European Journal of Physics*. 2017. Vol. 38, no. 2. P. 023002.
5. *Thurner S.* 43 Visions for Complexity. World Scientific, 2017. Vol. 3.
6. *Holovatch Y.* Order, disorder and criticality: advanced problems of phase transition theory. World Scientific, 2004-2018. Vol. 1-5.
7. *Galam S.* Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena. Springer, 2012.
8. Complex networks / Yu Holovatch, O Olemskoi, C Von Ferber, T Holovatch, O Mryglod, I Olemskoi, V Palchykov // *Journal of Physical Studies*. 2006. Vol. 10. P. 247–289.
9. *Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A.* Dynamical processes on complex networks. Cambridge university press, 2008.
10. *Dorogovtsev S. N., Goltsev A. V., Mendes J. F.* Critical phenomena in complex networks // *Reviews of Modern Physics*. 2008. Vol. 80, no. 4. P. 1275.
11. *Newman M.* Networks: an introduction. Oxford university press, 2010.
12. *Pescia D., Pokrovsky V.* Perpendicular versus in-plane magnetization in a 2d heisenberg monolayer at finite temperatures // *Physical review letters*. 1990. Vol. 65, no. 20. P. 2599.

13. *Tamura R., Kawashima N.* First-order transition to incommensurate phase with broken lattice rotation symmetry in frustrated heisenberg model // *Journal of the Physical Society of Japan.* 2008. Vol. 77, no. 10. P. 103002.
14. *Stoudenmire E., Trebst S., Balents L.* Quadrupolar correlations and spin freezing in s= 1 triangular lattice antiferromagnets // *Physical Review B.* 2009. Vol. 79, no. 21. P. 214436.
15. Competition for hydrogen-bond formation in the helix-coil transition and protein folding / Artem V Badasyan, Sh A Tonoyan, Y Sh Mamasakhlisov, Achille Giacometti, Albert S Benight, Vladimir F Morozov // *Physical Review E.* 2011. Vol. 83, no. 5. P. 051903.
16. *Mac Carron P., Kenna R.* Universal properties of mythological networks // *EPL (Europhysics Letters).* 2012. Vol. 99, no. 2. P. 28002.
17. *Mac Carron P., Kenna R.* Network analysis of the íslendinga sögur–the sagas of icelanders // *The European Physical Journal B.* 2013. Vol. 86, no. 10. P. 407.
18. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* On the phase diagram of the 2d ising model with frustrating dipole interaction // *Ukrainian Journal of Physics.* 2014. Vol. 60, no. 4. P. 334.
19. Phase transitions and critical phenomena in the two-dimensional ising model with dipole interactions: A short-time dynamics study / CM Horowitz, Marisa Alejandra Bab, Marcos Mazzini, ML Rubio Puzzo, Gustavo Pablo Saracco // *Physical Review E.* 2015. Vol. 92, no. 4. P. 042127.
20. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* Exact solution of a classical short-range spin model with a phase transition in one dimension: The potts model with invisible states // *Physics Letters A.* 2017. Vol. 381, no. 41. P. 3589–3593.
21. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* Classical phase transitions in a one-dimensional short-range spin model // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2018. Vol. 51, no. 50. P. 505001.
22. Marginal dimensions of the potts model with invisible states / M Krasnytska, P Sarkanych, B Berche, Yu Holovatch, R Kenna // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2016. Vol. 49, no. 25. P. 255001.

23. *Sarkanych P., Krasnytska M.* Ising model with invisible states on scale-free networks // *arXiv preprint (accepted to Physics Letters A)*. 2019. P. 1904.06563.
24. Універсальність і мережевий аналіз билин / . Сарканич П, . Головач Ю, . Кенна Р, . Мак Керрон П // *Журнал фізичних досліджень*. 2016. Т. 20, № 4.
25. Математика і міфи - кількісний підхід до порівняльної міфології / . Головач Ю, . Кенна Р, . Мак Керрон П, . Сарканич П, . Федорак Н, . Хосе Дж.
26. Experimental observation of lee-yang zeros / Xinhua Peng, Hui Zhou, Bo-Bo Wei, Jiangyu Cui, Jiangfeng Du, Ren-Bao Liu // *Physical review letters*. 2015. Vol. 114, no. 1. P. 010601.
27. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* Partition function zeros as a measure of phase transition strength // V young scientist conference Problems of theoretical physics. Program and Proceedings. P. 101.
28. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* 1d potts model with invisible states // The 41st conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 72.
29. *Сарканич П ., Головач Ю ., Кенна Р* . Одновимірна модель Поттса з невидимими станами // 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. Збірка тез. С. 43.
30. *Sarkanych P., Holovatch Y., Kenna R.* 1d potts model with invisible states // Workshop on current problems in physics. Book of abstracts. P. 7.
31. Marginal dimensions of the potts model with invisible states / . Krasnytska M, . Sarkanych P, . Berche B, . Holovatch Yu, . Kenna R // Різдвяні дискусії – 2017. Програма і тези доповідей. С. 9.
32. Marginal dimensions of the potts model with invisible states / . Krasnytska M, . Sarkanych P, . Berche B, . Holovatch Yu, . Kenna R // The 42-nd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of abstracts. P. 119.
33. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами / . Сарканич П,

. Красницька М, . Берш Б, . Головач Ю, . Кенна Р // 17 Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. Збірка тез. С. 24.

34. *Сарканич П ., Головач Ю ., Кенна Р .* Точний розв'язок 1d моделі поттса з невидимими станами: Аналіз нулів статистичної суми. // Різдвяні дискусії – 2018. Програма і тези доповідей. С. 9.
35. *Kenna R., Sarkanych P., Holovatch Y.* A classical short-range spin model with phase transitions in one dimension: the potts model with a negative number of invisible states // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 64.
36. Network analysis of bylyny — traditional east slavic epic narratives / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna, P Mac Carron // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 95.
37. *Головач Ю .* Від моделі Ізінґа до статистичної фізики складних систем // *Праці наукового товариства ім. Шевченка.* 2011.
38. *Sornette D.* Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools. Springer Science & Business Media, 2006.
39. *Thurner S., Hanel R., Klimek P.* Introduction to the theory of complex systems. Oxford University Press, 2018.
40. *Zapolsky H.* Kinetics of pattern formation: mesoscopic and atomistic modelling // Order, Disorder and Criticality: Advanced Problems of Phase Transition Theory. World Scientific, 2015. P. 153–192.
41. *Kashuba A., Pokrovsky V. L.* Stripe domain structures in a thin ferromagnetic film // *Physical Review B.* 1993. Vol. 48, no. 14. P. 10335.
42. *Giuliani A., Lebowitz J. L., Lieb E. H.* Ising models with long-range antiferromagnetic and short-range ferromagnetic interactions // *Physical Review B.* 2006. Vol. 74, no. 6. P. 064420.
43. Striped phases in two-dimensional dipolar ferromagnets / AB MacIsaac,

JP Whitehead, MC Robinson, K De'Bell // *Physical Review B*. 1995. Vol. 51, no. 22. P. 16033.

44. Phase diagram of ultrathin ferromagnetic films with perpendicular anisotropy / Ar Abanov, V Kalatsky, Valery L Pokrovsky, WM Saslow // *Physical Review B*. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 1023.
45. Domain structures in ultrathin magnetic films / I Booth, AB MacIsaac, JP Whitehead, K De'Bell // *Physical review letters*. 1995. Vol. 75, no. 5. P. 950.
46. Two-step disordering of perpendicularly magnetized ultrathin films / A Vaterlaus, C Stamm, U Maier, MG Pini, P Politi, D Pescia // *Physical review letters*. 2000. Vol. 84, no. 10. P. 2247.
47. *Cannas S. A., Stariolo D. A., Tamarit F. A.* Stripe-tetragonal first-order phase transition in ultrathin magnetic films // *Physical review B*. 2004. Vol. 69, no. 9. P. 092409.
48. *Gleiser P. M., Tamarit F. A., Cannas S. A.* Metastable states in a two-dimensional ising model with dipolar interactions // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 168. P. 73–79.
49. *Rastelli E., Regina S., Tassi A.* Phase transitions in a square ising model with exchange and dipole interactions // *Physical Review B*. 2006. Vol. 73, no. 14. P. 144418.
50. *Rastelli E., Regina S., Tassi A.* Phase diagram of a square ising model with exchange and dipole interactions: Monte carlo simulations // *Physical Review B*. 2007. Vol. 76, no. 5. P. 054438.
51. *Fonseca J. S., Rizzi L. G., Alves N. A.* Stripe-tetragonal phase transition in the two-dimensional ising model with dipole interactions: Partition function zeros approach // *Physical Review E*. 2012. Vol. 86, no. 1. P. 011103.
52. *Stanley H. E.* Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford University Press, 1987. P. 336.
53. *Domb C.* The critical point: a historical introduction to the modern theory of critical phenomena. CRC Press, 1996.

54. *Stanley H.* Exact solution for a linear chain of isotropically interacting classical spins of arbitrary dimensionality // *Physical Review.* 1969. Vol. 179, no. 2. P. 570.

55. *Mermin N. D., Wagner H.* Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models // *Physical Review Letters.* 1966. Vol. 17, no. 22. P. 1133.

56. *Hohenberg P. C.* Existence of long-range order in one and two dimensions // *Physical Review.* 1967. Vol. 158, no. 2. P. 383.

57. *Privman V., Hoheberg P., Aharony A.* Dependence of universal critical behaviour on symmetry and range of interaction // Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. by C Domb, M. S. Green. London : Academic Press. Vol. 6. P. 358.

58. *Sznajd J.* Tricritical points in ferromagnets with cubic single-ion anisotropy // *Journal of magnetism and magnetic materials.* 1984. Vol. 42, no. 3. P. 269–278.

59. *Domański Z., Sznajd J.* Phase diagrams of ferromagnets with cubic single-ion anisotropy // *physica status solidi (b).* 1985. Vol. 129, no. 1. P. 135–142.

60. *Folk R., Holovatch Y., Yavors'kii T.* Pseudo-ϵ expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // *Physical Review B.* 2000. Vol. 62, no. 18. P. 12195.

61. *Dudka M., Holovatch Y., Yavors'kii T.* Universality classes of the three-dimensional mn-vector model // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2004. Vol. 37, no. 45. P. 10727.

62. *Potts R. B.* Some generalized order-disorder transformations // Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society / Cambridge University Press. Vol. 48. 1952. P. 106–109.

63. *Wu F.-Y.* The potts model // *Reviews of modern physics.* 1982. Vol. 54, no. 1. P. 235.

64. *Gobron T., Merola I.* First-order phase transition in potts models with finite-range interactions // *Journal of Statistical Physics.* 2007. Vol. 126, no. 3.

P. 507–583.

65. *Holovatch Y., Ivaneyko D., Delamotte B.* On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37, no. 11. P. 3569.
66. *Delamotte B., Mouhanna D., Tissier M.* Nonperturbative renormalization-group approach to frustrated magnets // *Physical Review B*. 2004. Vol. 69, no. 13. P. 134413.
67. *Calabrese P., Parruccini P.* Five-loop ϵ expansion for o (n)$\times$ o (m) spin models // *Nuclear Physics B*. 2004. Vol. 679, no. 3. P. 568–596.
68. *Pelissetto A., Vicari E.* Critical phenomena and renormalization-group theory // *Physics Reports*. 2002. Vol. 368, no. 6. P. 549–727.
69. *Folk R., Holovatch Y., Yavorskii T.* Critical exponents of a three-dimensional weakly diluted quenched ising model // *Physics-Uspekhi*. 2003. Vol. 46, no. 2. P. 169.
70. *Halperin B., Lubensky T., Ma S.-k.* First-order phase transitions in superconductors and smectic-a liquid crystals // *Physical Review Letters*. 1974. Vol. 32, no. 6. P. 292.
71. *Folk R., Holovatch Y.* On the critical fluctuations in superconductors // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1996. Vol. 29, no. 13. P. 3409.
72. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M Dudka, R Folk, Yu Holovatch, G Moser // *Condensed Matter Physics*. 2012. Vol. 15, no. 4. P. 43001.
73. *van Enter A. C., Shlosman S. B.* First-order transitions for n-vector models in two and more dimensions: Rigorous proof // *Physical review letters*. 2002. Vol. 89, no. 28. P. 285702.
74. *Tamura R., Tanaka S., Kawashima N.* Phase transition in potts model with invisible states // *Progress of theoretical physics*. 2010. Vol. 124, no. 2. P. 381–388.
75. Novel spin-liquid states in the frustrated heisenberg antiferromagnet on the honeycomb lattice / Soichiro Okumura, Hikaru Kawamura, Tsuyoshi Okubo,

Yukitoshi Motome // *Journal of the Physical Society of Japan.* 2010. Vol. 79, no. 11. P. 114705.

76. *Tanaka S., Tamura R., Kawashima N.* Phase transition of generalized ferromagnetic potts model-effect of invisible states // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. Vol. 297. 2011. P. 012022.
77. *Tanaka S., Tamura R.* Dynamical properties of potts model with invisible states // Journal of Physics: Conference Series / IOP Publishing. Vol. 320. 2011. P. 012025.
78. *Mori T.* Microcanonical analysis of exactness of the mean-field theory in long-range interacting systems // *Journal of Statistical Physics.* 2012. Vol. 147, no. 5. P. 1020–1040.
79. *Tamura R., Tanaka S., Kawashima N.* A method to control order of phase transition: Invisible states in discrete spin models // Interface Between Quantum Information and Statistical Physics. World Scientific, 2013. P. 215–238.
80. Potts models with invisible states on general bethe lattices / N Ananikian, N Sh Izmailyan, DA Johnston, R Kenna, RPKCM Ranasinghe // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2013. Vol. 46, no. 38. P. 385002.
81. *van Enter A. C., Iacobelli G., Taati S.* First-order transition in potts models with "invisible" states: Rigorous proofs // *Progress of theoretical physics.* 2011. Vol. 126, no. 5. P. 983–991.
82. *van Enter A. C., Iacobelli G., Taati S.* Potts model with invisible colors: random-cluster representation and pirogov–sinai analysis // *Reviews in Mathematical Physics.* 2012. Vol. 24, no. 02. P. 1250004.
83. *Johnston D., Ranasinghe R.* Potts models with (17) invisible states on thin graphs // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2013. Vol. 46, no. 22. P. 225001.
84. *Lee T.-D., Yang C.-N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model // *Physical Review.* 1952. Vol. 87, no. 3. P. 410.
85. *Yang C.-N., Lee T.-D.* Statistical theory of equations of state and phase tran-

sitions. i. theory of condensation // *Physical Review.* 1952. Vol. 87, no. 3. P. 404.

86. *Fisher M. E.* The nature of critical points // Lectures in Theoretical Physics: Volume VII C. 1965.
87. *Wei B.-B., Liu R.-B.* Lee-yang zeros and critical times in decoherence of a probe spin coupled to a bath // *Physical review letters.* 2012. Vol. 109, no. 18. P. 185701.
88. *Timonin P., Chitov G. Y.* Infinite cascades of phase transitions in the classical ising chain // *Physical Review E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062123.
89. *Itzykson C., Pearson R., Zuber J.* Distribution of zeros in ising and gauge models // *Nuclear Physics B.* 1983. Vol. 220, no. 4. P. 415–433.
90. *Abe R.* Logarithmic singularity of specific heat near the transition point in the ising model // *Progress of Theoretical Physics.* 1967. Vol. 37, no. 6. P. 1070–1079.
91. *Abe R.* Note on the critical behavior of ising ferromagnets // *Progress of Theoretical Physics.* 1967. Vol. 38, no. 1. P. 72–80.
92. *Abe R.* Singularity of specific heat in the second order phase transition // *Progress of Theoretical Physics.* 1967. Vol. 38, no. 2. P. 322–331.
93. *Abe R.* Critical behavior of pair correlation function in ising ferromagnets // *Progress of Theoretical Physics.* 1967. Vol. 38, no. 3. P. 568–575.
94. *Bena I., Droz M., Lipowski A.* Statistical mechanics of equilibrium and nonequilibrium phase transitions: the yang–lee formalism // *International Journal of Modern Physics B.* 2005. Vol. 19, no. 29. P. 4269–4329.
95. *Janke W., Kenna R.* The strength of first and second order phase transitions from partition function zeroes // *Journal of Statistical Physics.* 2001. Vol. 102, no. 5-6. P. 1211–1227.
96. *Janke W., Johnston D., Kenna R.* Phase transition strength through densities of general distributions of zeroes // *Nuclear Physics B.* 2004. Vol. 682, no. 3. P. 618–634.
97. *Suzuki M.* A theory on the critical behaviour of ferromagnets // *Progress of*

Theoretical Physics. 1967. Vol. 38, no. 1. P. 289–290.

98. *Suzuki M.* A theory of the second order phase transitions in spin systems. ii: complex magnetic field // *Progress of Theoretical Physics*. 1967. Vol. 38, no. 6. P. 1225–1242.
99. *Bornholdt S., Schuster H. G.* Handbook of graphs and networks: from the genome to the internet. John Wiley & Sons, 2006.
100. *Tadić B., Malarz K., Kułakowski K.* Magnetization reversal in spin patterns with complex geometry // *Physical review letters*. 2005. Vol. 94, no. 13. P. 137204.
101. Network analysis of the cosmos galaxy field / R de Regt, S Apunevych, C von Ferber, Yu Holovatch, B Novosyadlyj // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. Vol. 477, no. 4. P. 4738–4748.
102. Public transport networks: empirical analysis and modeling / Christian von Ferber, Taras Holovatch, Yu Holovatch, V Palchykov // *The European Physical Journal B*. 2009. Vol. 68, no. 2. P. 261–275.
103. A tale of two cities / Christian von Ferber, Bertrand Berche, Taras Holovatch, Yurij Holovatch // *Journal of Transportation Security*. 2012. Vol. 5, no. 3. P. 199–216.
104. *Newman M. E., Park J.* Why social networks are different from other types of networks // *Physical review E*. 2003. Vol. 68, no. 3. P. 036122.
105. *Szell M., Thurner S.* Measuring social dynamics in a massive multiplayer online game // *Social networks*. 2010. Vol. 32, no. 4. P. 313–329.
106. *Müller-Hartmann E., Zittartz J.* New type of phase transition // *Physical Review Letters*. 1974. Vol. 33, no. 15. P. 893.
107. *Krasnytska M., Berche B., Holovatch Y.* Phase transitions in the potts model on complex networks // *Condensed Matter Physics*. 2013. Vol. 16, no. 2. P. 23602.
108. Partition function zeros for the ising model on complete graphs and on annealed scale-free networks / Mariana Krasnytska, Bertrand Berche, Yu Holovatch, R Kenna // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016. Vol. 49,

no. 13. P. 135001.

109. *Bianconi G.* Superconductor-insulator transition on annealed complex networks // *Physical Review E.* 2012. Vol. 85, no. 6. P. 061113.
110. *Dorogovtsev S. N., Goltsev A. V., Mendes J. F. F.* Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections // *Physical Review E.* 2002. Vol. 66, no. 1. P. 016104.
111. Ferromagnetic ordering in graphs with arbitrary degree distribution / M Leone, A Vázquez, A Vespignani, Riccardo Zecchina // *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems.* 2002. Vol. 28, no. 2. P. 191–197.
112. Critical phenomena on scale-free networks: Logarithmic corrections and scaling functions / V Palchykov, C Von Ferber, R Folk, Yu Holovatch, R Kenna // *Physical Review E.* 2010. Vol. 82, no. 1. P. 011145.
113. Monte carlo study of two-dimensional ising dipolar antiferromagnets as a model for rare-earth ordering in the r-ba-cu-o compounds (r= rare earth) / AB MacIsaac, JP Whitehead, K De'Bell, K Sowmya Narayanan // *Physical Review B.* 1992. Vol. 46, no. 10. P. 6387.
114. Resolving the order of phase transitions in monte carlo simulations / M Fukugita, H Mino, M Okawa, A Ukawa // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1990. Vol. 23, no. 11. P. L561.
115. *Landau D. P., Binder K.* A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. Cambridge university press, 2014.
116. *Ising E.* Beitrag zur theorie des ferromagnetismus // *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei.* 1925. Vol. 31, no. 1. P. 253–258.
117. The fate of ernst ising and the fate of his model / Tomas Ising, Reinhard Folk, Ralph Kenna, B. Berche, Yu Holovatch // *Journal of Physical Studies.* 2017. 1. Vol. 21, no. 3.
118. *Kipnis A. I., Yavelov B. E., Rowlinson J. S.* Van der Waals and molecular science. Oxford University Press, 1996.
119. *Landau L., Lifshitz E.* Statistical physics, part 1: Volume 5 (course of theoretical physics, volume 5) // *Publisher: Butterworth-Heinemann.* 1980. Vol. 3.

120. *van Hove L.* Sur l'intégrale de configuration pour les systèmes de particules à une dimension // *Physica*. 1950. Vol. 16, no. 2. P. 137–143.

121. *Ruelle D.* Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas // *Communications in Mathematical Physics*. 1968. Vol. 9, no. 4. P. 267–278.

122. *Cuesta J. A., Sánchez A.* General non-existence theorem for phase transitions in one-dimensional systems with short range interactions, and physical examples of such transitions // *Journal of statistical physics*. 2004. Vol. 115, no. 3-4. P. 869–893.

123. *Simon B., Sokal A. D.* Rigorous entropy-energy arguments // *Journal of Statistical Physics*. 1981. Vol. 25, no. 4. P. 679–694.

124. *Theodorakopoulos N.* Phase transitions in one dimension: Are they all driven by domain walls? // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2006. Vol. 216, no. 1. P. 185–190.

125. *Anderson P., Yuval G.* Exact results in the kondo problem: equivalence to a classical one-dimensional coulomb gas // *Physical Review Letters*. 1969. Vol. 23, no. 2. P. 89.

126. *Yuval G., Anderson P.* Exact results for the kondo problem: One-body theory and extension to finite temperature // *Physical Review B*. 1970. Vol. 1, no. 4. P. 1522.

127. *Anderson P. W., Yuval G., Hamann D.* Exact results in the kondo problem. ii. scaling theory, qualitatively correct solution, and some new results on one-dimensional classical statistical models // *Physical Review B*. 1970. Vol. 1, no. 11. P. 4464.

128. *Dyson F. J.* An ising ferromagnet with discontinuous long-range order // *Communications in Mathematical Physics*. 1971. Vol. 21, no. 4. P. 269–283.

129. *Fröhlich J., Spencer T.* The phase transition in the one-dimensional ising model with 1/r 2 interaction energy // *Communications in Mathematical Physics*. 1982. Vol. 84, no. 1. P. 87–101.

130. *Evans M. R.* Phase transitions in one-dimensional nonequilibrium systems // *Brazilian Journal of Physics*. 2000. Vol. 30, no. 1. P. 42–57.

131. *Asorey M., Esteve J.* First-order transitions in one-dimensional systems with local couplings // *Journal of statistical physics.* 1991. Vol. 65, no. 3-4. P. 483–494.

132. Rigorous analysis of renormalization-group pathologies in the 4-state clock model / M Asorey, JG Esteve, R Fernández, J Salas // *Nuclear Physics B.* 1993. Vol. 392, no. 3. P. 593–618.

133. *Asorey M., Esteve J., Salas J.* Exact renormalization-group analysis of first-order phase transitions in clock models // *Physical Review B.* 1993. Vol. 48, no. 6. P. 3626.

134. *Seth S.* Combinatorial approach to exactly solve the 1d ising model // *European Journal of Physics.* 2016. Vol. 38, no. 1. P. 015104.

135. *Onsager L.* Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition // *Physical Review.* 1944. Vol. 65, no. 3-4. P. 117.

136. Ising-type magnetic ordering in atomically thin feps3 / Jae-Ung Lee, Sungmin Lee, Ji Hoon Ryoo, Soonmin Kang, Tae Yun Kim, Pilkwang Kim, Cheol-Hwan Park, Je-Geun Park, Hyeonsik Cheong // *Nano letters.* 2016. Vol. 16, no. 12. P. 7433–7438.

137. *Suzuki M.* Relationship between d-dimensional quantal spin systems and (d+ 1)-dimensional ising systems: Equivalence, critical exponents and systematic approximants of the partition function and spin correlations // *Progress of theoretical physics.* 1976. Vol. 56, no. 5. P. 1454–1469.

138. Microscopic formulation of the zimm-bragg model for the helix-coil transition / AV Badasyan, A Giacometti, Y Sh Mamasakhlisov, VF Morozov, Albert S Benight // *Physical Review E.* 2010. Vol. 81, no. 2. P. 021921.

139. *Baxter R. J.* Exactly solved models in statistical mechanics. Elsevier, 2016.

140. *Katsura S., Ohminami M.* Distribution of zeros of the partition function for the one dimensional ising models // *Journal of Physics A: General Physics.* 1972. Vol. 5, no. 1. P. 95.

141. *Kim S.-Y., Creswick R. J.* Exact results for the zeros of the partition function of the potts model on finite lattices // *Physica A: Statistical Mechanics and*

its Applications. 2000. Vol. 281, no. 1-4. P. 252–261.

142. *Shrock R., Tsai S.-H.* Complex-temperature phase diagrams of one-dimensional spin models with next-nearest-neighbor couplings // *Physical Review E*. 1997. Vol. 55, no. 5. P. 5184.
143. *Fisher M. E.* Yang-lee edge behavior in one-dimensional systems // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. 1980. Vol. 69. P. 14–29.
144. *Ghulghazaryan R., Sargsyan K., Ananikian N.* Partition function zeros of the one-dimensional blume-capel model in transfer matrix formalism // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76, no. 2. P. 021104.
145. *Hovhannisyan V., Ghulghazaryan R., Ananikian N.* The partition function zeros of the anisotropic ising model with multisite interactions on a zigzag ladder // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2009. Vol. 388, no. 8. P. 1479–1490.
146. *Fisher M. E.* Yang-lee edge singularity and ϕ 3 field theory // *Physical Review Letters*. 1978. Vol. 40, no. 25. P. 1610.
147. *Beraha S., Kahane J., Weiss N.* Limits of zeroes of recursively defined polynomials // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1975. Vol. 72, no. 11. P. 4209–4209.
148. *Beraha S., Kahane J., Weiss N.* Limits of zeros of recursively defined families of polynomials // *Studies in foundations and combinatorics*. 1978. Vol. 1. P. 213–232.
149. *Beraha S., Kahane J., Weiss N.* Limits of chromatic zeros of some families of maps // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. 1980. Vol. 28, no. 1. P. 52–65.
150. *Kortman P. J., Griffiths R. B.* Density of zeros on the lee-yang circle for two ising ferromagnets // *Physical Review Letters*. 1971. Vol. 27, no. 21. P. 1439.
151. *Kurtze D. A., Fisher M. E.* The yang-lee edge singularity in spherical models // *Journal of Statistical Physics*. 1978. Vol. 19, no. 3. P. 205–218.
152. *Glumac Z., Uzelac K.* The partition function zeros in the one-dimensional q-state potts model // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1994.

Vol. 27, no. 23. P. 7709.

153. *Kramers H. A., Wannier G. H.* Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part i // *Physical Review.* 1941. Vol. 60, no. 3. P. 252.

154. *Salas J., Sokal A. D.* Transfer matrices and partition-function zeros for antiferromagnetic potts models. i. general theory and square-lattice chromatic polynomial // *Journal of Statistical Physics.* 2001. Vol. 104, no. 3-4. P. 609–699.

155. Physical examples of phase transition inone-dimensional systems with short rangeinteraction. Access mode: http://guava.physics.uiuc.edu/~nigel/courses/563/Essays_2012/PDF/wang.pdf.

156. *Fortuin C. M., Kasteleyn P. W.* On the random-cluster model: I. introduction and relation to other models // *Physica.* 1972. Vol. 57, no. 4. P. 536–564.

157. *Kim S.-Y., Creswick R. J.* Density of states, potts zeros, and fisher zeros of the q-state potts model for continuous q // *Physical Review E.* 2001. Vol. 63, no. 6. P. 066107.

158. *Ghulghazaryan R., Ananikian N.* Partition function zeros of the one-dimensional potts model: the recursive method // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 2003. Vol. 36, no. 23. P. 6297.

159. *Glumac Z., Uzelac K.* Complex-q zeros of the partition function of the potts model with long-range interactions // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2002. Vol. 310, no. 1-2. P. 91–108.

160. *Kasteleyn P., Fortuin C.* Phase transitions in lattice systems with random local properties // *Journal of the Physical Society of Japan Supplement.* 1969. Vol. 26. P. 11.

161. *Jacobsen J. L., Salas J., Sokal A. D.* Spanning forests and the q-state potts model in the limit q-¿ 0 // *Journal of statistical physics.* 2005. Vol. 119, no. 5-6. P. 1153–1281.

162. *Majumdar S. N., Dhar D.* Equivalence between the abelian sandpile model and the q-¿ 0 limit of the potts model // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 1992. Vol. 185, no. 1-4. P. 129–145.

163. *Harris A. B., Lubensky T. C.* Potts-model formulation of the random resistor network // *Physical Review B*. 1987. Vol. 35, no. 13. P. 6987.

164. *Bonati C., D'Elia M.* Three-dimensional, three-state potts model in a negative external field // *Physical Review D*. 2010. Vol. 82, no. 11. P. 114515.

165. *Dalmazi D., Sá F.* The yang–lee edge singularity in spin models on connected and non-connected rings // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, no. 50. P. 505002.

166. *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for massive graphs // STOC / Citeseer. Vol. 2000. 2000. P. 1–10.

167. *Qian X., Deng Y., Blöte H. W.* Dilute potts model in two dimensions // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72, no. 5. P. 056132.

168. *Nelder J. A., Mead R.* A simplex method for function minimization // *The computer journal*. 1965. Vol. 7, no. 4. P. 308–313.

169. *Mac Carron P.* A network theoretic approach to comparative mythology : Ph. D. thesis / Pádraig Mac Carron ; PhD thesis, Coventry University, UK. 2014.

170. *Путилов Б. Н* . Былины: Сборник // *Л.: Сов. писатель*. 1986.

171. *Ларин Б. А* . Русско-английский словарь-дневник Ричарда Джемса (1618-1619 гг.). Изд-во Ленинградского университета, 1959.

172. *Данилов К* . Древние российские стихотворения, собранные Киршею Даниловым. Рипол Классик, 1977.

173. *Авенариус В* . Книга былин. Свод избранных образцов русской народной эпической поэзии. Типо-лит. Т-ва И.Н. Кушнерев и Ко, 1902.

174. *Шевчук В* . Українсьмкі билини: Історико-літературне видання східнослов'янського епосу. Київ, Веселка, 2003.

175. *Newman M., Barabasi A.-L., Watts D. J.* The structure and dynamics of networks. Princeton University Press, 2011. Vol. 12.

176. Classes of small-world networks / Luis A Nunes Amaral, Antonio Scala, Marc Barthelemy, H Eugene Stanley // *Proceedings of the national academy of sciences*. 2000. Vol. 97, no. 21. P. 11149–11152.

177. *Newman M. E.* The structure of scientific collaboration networks // *Proceedings of the national academy of sciences.* 2001. Vol. 98, no. 2. P. 404–409.

178. *Dorogovstev S., Mendes J.* Evolution of networks. 2003.

179. *Albert R., Barabási A.-L.* Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of modern physics.* 2002. Vol. 74, no. 1. P. 47.

180. *Dorogovtsev S. N., Mendes J. F.* Evolution of networks // *Advances in physics.* 2002. Vol. 51, no. 4. P. 1079–1187.

181. Complex networks: Structure and dynamics / Stefano Boccaletti, Vito Latora, Yamir Moreno, Martin Chavez, D-U Hwang // *Physics reports.* 2006. Vol. 424, no. 4-5. P. 175–308.

182. *Lesne A.* Complex networks: from graph theory to biology // *Letters in Mathematical Physics.* 2006. Vol. 78, no. 3. P. 235–262.

183. *Watts D.* Small worlds princeton university press // *Princeton, NJ.* 1999.

184. *Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Evolution and structure of the Internet: A statistical physics approach. Cambridge University Press, 2007.

185. *Milgram S.* The small world problem // *Psychology today.* 1967. Vol. 2, no. 1. P. 60–67.

186. *Gurevitch M.* The social structure of acquaintanceship networks : Ph. D. thesis / Michael Gurevitch ; Massachusetts Institute of Technology. 1961.

187. *Erdös P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 1960. Vol. 5, no. 1. P. 17–60.

188. *Bollobás B.* The diameter of random graphs // *Transactions of the American Mathematical Society.* 1981. Vol. 267, no. 1. P. 41–52.

189. *Fronczak A., Fronczak P., Hołyst J. A.* Average path length in random networks // *Physical Review E.* 2004. Vol. 70, no. 5. P. 056110.

190. *Sabidussi G.* The centrality index of a graph // *Psychometrika.* 1966. Vol. 31, no. 4. P. 581–603.

191. *Brandes U.* A faster algorithm for betweenness centrality // *Journal of mathematical sociology.* 2001. Vol. 25, no. 2. P. 163–177.

192. *Грушевський М .* Історія української літератури. Т. 4. Кн. 1. Київ, Либідь,

1994.

193. Михайло Потык, Материал из Википедии — свободной энциклопедии. Режим доступу https://ru.wikipedia.org/wiki/Михайло_Потык.
194. *Newman M. E.* Assortative mixing in networks // *Physical review letters*. 2002. Vol. 89, no. 20. P. 208701.
195. *Rohe K.* The difference between the transitivity ratio and the clustering coefficient, unpublished. Access mode: http://pages.stat.wisc.edu/~karlrohe/netsci/MeasuringTrianglesInGraphs.pdf.
196. A networks-science investigation into the epic poems of ossian / Joseph Yose, Ralph Kenna, Pádraig MacCarron, Thierry Platini, Justin Tonra // *Advances in Complex Systems*. 2016. Vol. 19, no. 04n05. P. 1650008.
197. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of 'small-world' networks // *nature*. 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440.
198. *Humphries M. D., Gurney K.* Network 'small-world-ness': a quantitative method for determining canonical network equivalence // *PloS one*. 2008. Vol. 3, no. 4. P. e0002051.
199. *Gleiser P. M.* How to become a superhero // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2007. Vol. 2007, no. 09. P. P09020.
200. *Chyzhevsky D. Epic Poetry* in: Internet encyclopedia of ukraine. Access mode: http://www.encyclopediaofukraine.com.
201. *Šubelj L., Bajec M.* Clustering assortativity, communities and functional modules in real-world networks // *arXiv preprint arXiv:1202.3188*. 2012.
202. *Essam J. W.* Percolation theory // *Reports on progress in physics*. 1980. Vol. 43, no. 7. P. 833.
203. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to percolation theory. Taylor & Francis, 2018.
204. Resilience of the internet to random breakdowns / Reuven Cohen, Keren Erez, Daniel Ben-Avraham, Shlomo Havlin // *Physical review letters*. 2000. Vol. 85, no. 21. P. 4626.
205. Breakdown of the internet under intentional attack / Reuven Cohen,

Keren Erez, Daniel Ben-Avraham, Shlomo Havlin // *Physical review letters*. 2001. Vol. 86, no. 16. P. 3682.

206. *Newman M. E., Girvan M.* Finding and evaluating community structure in networks // *Physical review E*. 2004. Vol. 69, no. 2. P. 026113.
207. *Harary F. et al.* On the notion of balance of a signed graph. // *The Michigan Mathematical Journal*. 1953. Vol. 2, no. 2. P. 143–146.
208. Добриня, матеріал із Вікіпедії - вільної енциклопедії. Режим доступу https://uk.wikipedia.org/wiki/Добриня.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Sarkanych, P. On the phase diagram of the 2d Ising model with frustrating dipole interaction / P. Sarkanych, Yu. Holovatch and R. Kenna// Український фізичний журнал – 2014. – Т. 60, № 4. – с. 337-342.

2. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states / M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical – 2016. – Vol. 49, no. 25. – P. 255001-1-15.

3. Сарканич, П. Універсальність і мережевий аналіз билин / П. Сарканич, Ю. Головач, Р. Кенна і П. Мак Керрон // Журнал Фізичних Досліджень. – 2016. – Т. 20, №4. – с.4801-1-17.

4. Sarkanych, P. Exact solution of a classical shortrange spin model with a phase transition in one dimension: the Potts model with invisible states / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Physics Letters A. – 2017. – Vol. 381, no. 41. – P. 3589-3593.

5. Sarkanych, P. Classical phase transitions in a one dimensional short-range spin model / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Vol. 51, no. 50. – P. 505001-1-26.

6. Sarkanych, P. Ising model with invisible states on scale-free networks/ P. Sarkanych, M. Krasnytska // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, no. 27. – P.125844.

7. Головач, Ю. Математика і міфи – кількісний підхід до порівняльної міфоло-

гії / Ю. Головач, Р. Кенна, П. Мак Керрон, П. Саркanич, Н. Федорак, Дж. Хосе// прийнято о друку в Україна Модерна. – (Препринт / Національна академія наук України, Інститут фізики конденсованих систем; ICMP-18-01U).

8. Sarkanych, P. Partition function zeros as a measure of phase transition strength // V young scientist conference Problems of theoretical physics, Kyiv, Ukraine, December 24 – 27, 2013, Program and Proceedings. – Kyiv:2013. – P. 101.

9. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // The 41st conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Vienna, Austria, February 14 – 17, 2016, Book of Abstracts. – Vienna:2016. – p. 72

10. Саркanич, П. Одновимірна модель Поттса з невидимими станами // 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, Україна, 9 – 10 червня, 2016, Збірка тез. – Львів:2016 – с. 43.

11. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // Workshop on current problems in physics, Lviv, Ukraine, 5 – 7 July, 2016, Book of abstracts. – Lviv:2016 – p. 7.

12. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states // Різдвяні дискусії – 2017, Львів, Україна, 11-12 січня, 2017, Програма і тези доповідей. – Львів:2017 – с. 9.

13. Саркanич, П. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовиниб Львів, Україна, 8 – 9 червня 2017, Збірка тез – Львів:2017 – с. 24.

14. Саркanич, П. Точний розв'язок 1D моделі поттса з невидимими станами: Аналіз нулів статистичної суми // Різдвяні дискусії – 2018, Львів, Україна, 11-12 січня, 2018, Програма і тези доповідей – Львів: 2018 – с. 9.

15. Sarkanych, P., Network analysis of Bylyny — Traditional East Slavic epic narrati-

ves // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Krakow, Poland, May 1-4, 2018, Book of Abstracts – Krakow:2018 – p. 95

ДОДАТОК Б

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Sarkanych P., Holovatch Yu., Kenna R.* Partition function zeros as a measure of phase transition strength // V young scientist conference Problems of theoretical physics. Program and Proceedings. P. 101.
2. *Sarkanych P., Holovatch Yu., Kenna R.* 1d potts model with invisible states // The 41st conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 72.
3. *Сарканич П., Головач Ю., Кенна Р.* Одновимірна модель Поттса з невидимими станами // 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. Збірка тез. С. 43.
4. *Sarkanych P., Holovatch Yu., Kenna R.* 1d Potts model with invisible states // Workshop on current problems in physics. Book of abstracts. P. 7.
5. Marginal dimensions of the potts model with invisible states / M Krasnytska, P Sarkanych, B Berche та ін. // Різдвяні дискусії – 2017. Програма і тези доповідей. С. 9.
6. Marginal dimensions of the potts model with invisible states / M Krasnytska, P Sarkanych, B Berche et al. // The 42-nd Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of abstracts. P. 119.
7. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами / П Сарканич, М Красницька, Б Берш та ін. // 17 Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини.

Збірка тез. С. 24.

8. *Сарканич П., Головач Ю., Кенна Р.* Точний розв'язок 1d моделі поттса з невидимими станами: Аналіз нулів статистичної суми. // Різдвяні дискусії – 2018. Програма і тези доповідей. С. 9.

9. *Kenna R., Sarkanych P., Holovatch Yu.* A classical short-range spin model with phase transitions in one dimension: the potts model with a negative number of invisible states // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 64.

10. Network analysis of bylyny — traditional east slavic epic narratives / Sarkanych P., Holovatch Yu., Kenna R., Mac Carron P.// The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. Book of Abstracts. P. 95.