НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

ПАЛЬЧИКОВ Василь Володимирович

УДК 538.9

ЕФЕКТИ БЕЗМАСШТАБНОСТІ ТА ТІСНОГО СВІТУ В СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ

01.04.02 – теоретична фізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 2010

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України (м. Львів).

Науковий керівник	доктор фізико-математичних наук, професор **Головач Юрій Васильович,** завідувач лабораторії статистичної фізики складних систем Інституту фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів).
Науковий консультант	габілітований доктор **Крістіан фон Фербер**, старший лектор Центру прикладних математичних досліджень Університету Ковентрі (м. Ковентрі, Велика Британія).
Офіційні опоненти	член-кореспондент Національної академії педагогічних наук України, заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор **Чалий Олександр Васильович**, завідувач кафедри медичної і біологічної фізики Національного медичного університету ім. О. О. Богомольця (м. Київ),
	доктор фізико-математичних наук **Держко Олег Володимирович**, завідувач відділу теорії модельних спінових систем Інституту фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів).

Захист відбудеться “12” січня 2011 року о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 при Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою: 79011, м. Львів, вул. Свєнціцького, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем НАН України за адресою: 79026, м. Львів, вул. Козельницька, 4.

Автореферат розіслано “___” грудня 2010 року.

Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 35.156.01, кандидат
фіз.-мат. наук

Т. Є. Крохмальський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню структурних властивостей складних мереж та впливу цих властивостей на перебіг процесів, що відбуваються на мережах. Складні мережі широко зустрічаються у природі – це мережі метаболізму в живих організмах, соціальні мережі знайомств між людьми, технологічні мережі високовольтних ліній електропередач, мережа www тощо. Структура мережі також притаманна наносистемам з нетривіальною архітектурою. Поняття мережі є аналогічним до поняття графа у математиці – це множина вузлів та зв'язків, що їх поєднують.

Як показали результати емпіричних досліджень, структура багатьох мереж реального світу суттєво відрізняється як від структури періодичних граток, так і від структури добре вивченого класичного випадкового графа. Виявилося, що реальні мережі є надзвичайно компактними – їх лінійний розмір зростає з ростом кількості вузлів повільніше за довільну степеневу функцію, що й отримало назву ефекту тісного світу. Хоча кількість сусідів (ступінь) вузла k не є фіксованою величиною як і у класичного випадкового графа, їх розподіл $P(k)$ для реальних мереж часто характеризується степеневим загасанням:

$$P(k) \propto k^{-\lambda}. \qquad (1)$$

Останнє свідчить про наявність габів – вузлів з дуже великими ступенями, що практично не спостерігається у класичному випадковому графі. Мережі зі степеневим розподілом ступенів вузлів (1) називають безмасштабними.

На сьогодні досліджено багато реальних мереж: соціальних мереж знайомств між людьми, інформаційних мереж цитування наукових праць, технологічних мереж ліній високовольтних електропередач та інтернету тощо. Ряд цікавих властивостей було виявлено при застосуванні концепції складних мереж до аналізу писаних текстів. Проте жодна з робіт не стосувалася текстів, написаних українською мовою. Для багатьох технологічних мереж досліджено структуру та сформульовано принципи їх будови. Проте у жодній з робіт не досліджували мережі громадського транспорту як цілісний об'єкт, що складається з різних типів маршрутів (автобусів, тролейбусів, метро тощо).

Наведені вище приклади стосуються дослідження структурних властивостей мереж. Іншим прикладом задач є аналіз процесів, що відбуваються на мережах. Добре дослідженою є поведінка спінових систем на безмасштабних мережах в околі критичної точки при нульовому зовнішньому полі [*див. огляд S. N. Dorogovtsev et al, Rev. Mod. Phys.* ***80*** *(2008), 1275*], проте польові залежності значною мірою залишилися поза увагою дослідників. Сформульовано феноменологічну теорію Ландау на безмасштабних мережах для скалярного параметра порядку [*A. V. Goltsev et al, Phys. Rev. E* ***67*** *(2003), 026123*]. Проте такий підхід не розглядався для систем зі складнішою симетрією. Природа виникнення логарифмічних поправок до скейлінгу у таких системах не аналізувалася, а для відповідних показників не перевірялася справедливість співвідношень скейлінгу. Більше того, концепція скейлінгових функцій не була застосована для спінових систем на безмасштабних мережах навіть для випадків найпростішої симетрії. На дослідженні згаданих вище задач зупинимося у цій роботі.

<u>Зв’язок роботи з науковими програмами, планами і темами</u>. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України згідно з планами робіт за темами № 0105U002081 “Особливості критичної поведінки конденсованих систем під впливом зовнішнього поля, структурного безладу, фрустрації та анізотропії” (2005-2007 рр.) та № 0108U001152, “Аналітичні та чисельні дослідження скейлінгових властивостей та фазових переходів у багаточастинкових системах” (2008-2012 рр.), за підтримки проекту 21299 “Критична поведінка фрустрованих систем” (2007-2009 рр.) в рамках договору про співпрацю між НАН України та CNRS (Франція), стипендії Австрійсько-Українського центру співпраці у галузях науки, освіти та культури (2009 р.), Фонду підтримки наукових досліджень Австрії (проект P19583 № 20, 2007-2009 рр.) та Програми прикладних досліджень університету Ковентрі (Велика Британія, 2010 р.).

<u>Мета і завдання дослідження.</u> *Мета дослідження* полягає в обчисленні кількісних характеристик реальних складних мереж (розподілу ступенів вузлів, коефіцієнту кластерності, довжин найкоротшого шляху та розподілів цих довжин) та в описі явища фазового переходу у спінових системах на безмасштабних мережах. У роботі для досягнення вказаної мети були передбачені такі *завдання*:

- дослідити залежність частоти слова від рангу та знайти характеристики мереж слів для текстів, написаних українською мовою;
- методами числових розрахунків дослідити типові кількісні характеристики та їх розподіли для мереж громадського транспорту;
- отримати вирази для вільної енергії системи зі взаємодіючими параметрами порядку та на їх основі визначити стійкі стани системи;
- розрахувати критичні показники для моделі зі взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі;
- отримати вирази для скейлінгових функцій для систем зі скалярним, векторним та взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі.

Об'єктом дослідження виступають складні мережі реального світу (мережі громадського транспорту, що є прикладом технологічних мереж та мережі мови – мережі слів у текстах), а також спінові моделі на безмасштабних мережах. *Предметом дослідження* даної роботи є вивчення впливу ефектів тісного світу та безмасштабності на властивості зазначених складних мереж та спінових систем на безмасштабних мережах. *Методами дослідження* є як аналітичні розрахунки на основі методів функціонального інтегрування, феноменологічного та термодинамічного підходів, так і методи комп’ютерного аналізу та моделювання.

<u>Наукова новизна одержаних результатів.</u> В дисертаційній роботі було вперше застосовано теорію складних мереж до аналізу україномовних текстів. Отримані результати є свідченням того, що мережа слів української мови є сильно скорельованим безмасштабним тісним світом, подібно до результатів для мереж інших мов. Використовуючи зображення мереж мови в різних просторах, вперше показано, що характеристики мережі мови в $\boldsymbol{P}$-просторі можна отримати як граничний випадок зображення в $\boldsymbol{L}$-просторі. Раніше такі зображення розглядались як незалежні.

Проведене дослідження мереж громадського транспорту є першим дослідженням цих мереж як цілісної структури, що складається з маршрутів різних типів. У рамках цього дослідження систематизовано різні представлення мереж громадського транспорту та проведено кількісний аналіз мереж у кожному з цих представлень. Показано, що мережі громадського транспорту є сильно скорельованими структурами тісного світу, а степеневий характер загасання розподілу ступенів вузлів (1), знайдений для мереж багатьох міст у ***L***- та деяких у ***P***-просторах є доказом наявності кореляцій у мережі. Запропоновано кількісну характеристику для опису явища накладання маршрутів, яка може бути використана при кількісному описі мереж подібного типу. Проаналізовано властивості моделі мережі громадського транспорту та показано, що досліджена модель здатна відтворити більшість характеристик реальних мереж.

Досліджено вплив анізотропії на властивості фазового переходу у магнітовпорядкований стан магнетика на безмасштабній мережі. Показано, що наявність складної симетрії не змінює критичних показників системи, які в загальному випадку є функціями параметра λ розподілу ступенів вузлів (1). Особлива увага приділялась появі логарифмічних поправок до скейлінгу, природа виникнення яких на безмасштабних мережах суттєво відрізняється від природи їх виникнення на періодичних структурах і пов’язана з флуктуаціями в топології мереж. Вперше отримано повний спектр критичних показників та показників для логарифмічних поправок, які характеризують як температурні, так і польові залежності. На основі отриманих значень підтверджено виконання співвідношень скейлінгу для критичних показників логарифмічних поправок на безмасштабних мережах.

Показано, що теплоємність системи при $3<\lambda<5$ є неперервною у критичній точці і має чітко виражений максимум, положення якого зміщується у бік низьких температур при зменшенні параметра λ. Знайдено універсальні співвідношення критичних амплітуд для ізотермічних сприйнятливостей та показано суттєвий вплив на них анізотропії системи. Для ізотропної системи отримано безмежно велике значення поперечної сприйнятливості нижче критичної температури, що пов'язано з виникненням голдстоунівських мод. На основі виразів для вільної енергії, сприйнятливостей та рівняння стану вперше отримано вирази для скейлінгових функцій спінових систем на безмасштабних мережах.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у даній роботі результати можуть мати такі застосування. Емпіричні результати, отримані нами при дослідженні мереж мови можуть бути корисними при теоретичному описі еволюції мови, наприклад на підставі еволюційної теорії ігор. Емпіричні результати та результати, отримані при моделюванні мереж громадського транспорту, можуть бути корисними і уже використовуються для задач оптимізації, а також при побудові нових мереж громадського транспорту. Дослідження фазових переходів на безмасштабних мережах може бути корисним як у задачах соціофізики, так і при дослідженні наносистем з нетривіальною архітектурою.

Особистий внесок здобувача. У роботах, виконаних із співавторами, автору належить:

- написання розділу VI про фазові переходи і критичні явища на складних мережах в оглядовій статті [2];

- дослідження залежності частоти слова від рангу та знаходження характеристик мереж слів для текстів, написаних українською мовою [3];
- проведення методами числових розрахунків емпіричного аналізу розподілів ступенів вузлів, коефіцієнтів кластерності, довжин найкоротшого шляху та їх розподілів, а також ефекту упряжки для мереж громадського транспорту [1, 4-6, 9];
- отримання виразів для вільної енергії системи зі взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі, визначення стійких станів системи [7];
- розрахунок критичних показників для моделі зі взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі [7, 8];
- розрахунок скейлінгових функцій для систем зі скалярним, векторним та двома взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі [8].

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових конференціях: “Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications” (Львів, 28–30 серпня 2005 р.), “COST ACTION P-10 Physics of Risk” (Вільнюс, Литва, 13–16 травня 2006 р.), “MECO34: 34th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics” (Ляйпціг, Німеччина, 30 березня – 1 квітня 2009 р.), “Statistical Physics: Modern Trends and Applications” (Львів, 23–25 червня 2009 р.), “MECO35: 35th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics” (Понт-а-Муссон, Франція, 15–19 березня 2010 р.), “International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems” (Київ, 21–24 травня 2010 р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 9 статей та 7 тез конференцій. Перелік статей та тез деяких доповідей наведено в кінці автореферату.

Структура та об’єм дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел (161 найменування). Загальний обсяг дисертації становить 137 сторінок, список використаних джерел займає 18 сторінок. Таблиці та рисунки, розміщені на окремих сторінках займають 5 сторінок. У роботі міститься 29 рисунків та 10 таблиць.

ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертаційної роботи, наведено актуальність теми, її зв’язок з науковими програмами та планами, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, а також зазначено особистий внесок здобувача.

Перший розділ “Статистична фізика складних мереж” вводить в проблематику, пов’язану з дисертаційною роботою. Розділ починається з короткого історичного вступу щодо народження науки про мережі, після чого подається огляд емпіричних досліджень реальних мереж та основних моделей, покликаних пояснити спостережені результати [2]. Подається огляд робіт, пов’язаних з дослідженням процесів, що відбуваються на мережах, а саме поведінки спінових моделей на мережах. Детально описано феноменологічний підхід до опису критичних явищ на мережах для систем зі скалярним параметром порядку.

У **другому розділі** “Кількісний аналіз структурних властивостей реальних мереж” наведено результати емпіричних досліджень двох типів реальних мереж, а саме мереж україномовних текстів та мереж громадського транспорту [1, 3-6, 9].

Для дослідження мереж мови [3] було використано два твори Івана Франка – "Лис Микита" та "Абу-Касимові капці". Ці твори були спершу проаналізовані на предмет виконання закону Зіпфа [*G. K. Zipf, The Psycho-Biology of Language, Houghton-Mifflin, Boston, 1935*]. Закон Зіпфа стверджує, що залежність частоти f появи слова у тексті від його рангу r (місця слова у списку, впорядкованому за спаданням частот всіх слів тексту) описується степеневою залежністю

$$f(r) \propto r^{-\alpha}. \qquad (2)$$

Результати емпіричних досліджень для твору "Лис Микита", зображені на Рис. 1, є свідченням виконання закону Зіпфа з показником $\alpha \approx 1$. Більше того, ці результати показали, що розміри обраних текстів є достатніми для прояву у них статистичних закономірностей, що спонукало подальший аналіз цих текстів методами складних мереж.

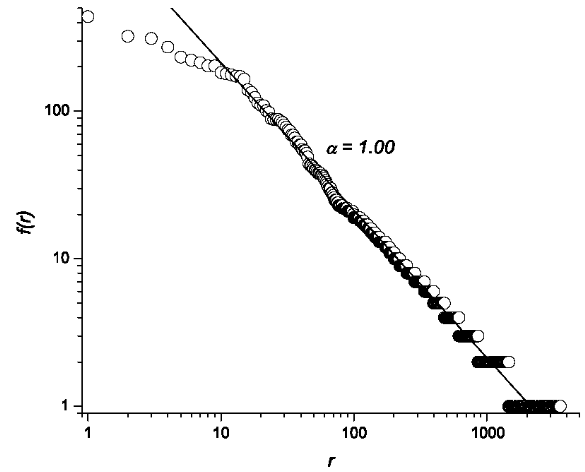
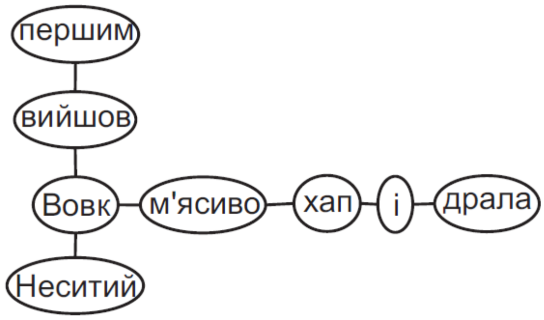


Рис. 1. Залежність частоти появи слова від його рангу для "Лиса Микити". Суцільна пряма – апроксимація степеневою функцією (2) з показником $\alpha = 1$.

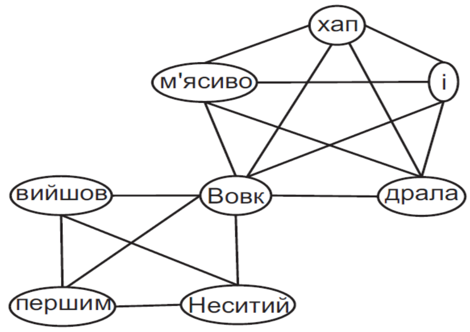
У рамках проведеного дослідження було проаналізовано справедливість моделі Саймона [*H. A. Simon, Biometrika* ***42*** *(1955), 425*] – однієї з перших моделей, здатних пояснити виникненя степеневих законів у природних процесах, зокрема закон Зіпфа. Дана модель розглядає процес генерації тексту і побудована на припущеннях щодо того, яким може бути $(n+1)$-ше слово при відомих попередніх n словах. Припускається, що ймовірність появи слова в тексті пропорційна до частоти його появи серед попередніх n слів. Також існує постійна ймовірність δ, що $(n+1)$-им словом буде слово, яке ще жодного разу не зустрілося у тексті. Дана модель строго прив'язується до частот появи слів у тексті, а не до конкретних слів. Тому вона здатна відтворити лише певні кількісні властивості текстів і не здатна відтворити його змісту.

Нами була запропонована схема перевірки справедливості припущень моделі Саймона. Дана схема стартує з генерації на основі певної частини ($n = 2000$ слів) реального тексту наступних n_{pr} слів згідно з моделлю Саймона. Порівняння частот появи слів серед n_{pr} слів реального тексту та згенерованого за моделлю Саймона є першим кроком для оцінки придатності моделі. Для коректнішої оцінки було використано ще дві опорні точки. Одна з них відповідає порівнянню частот появи слів серед n_{pr} слів, згенерованих згідно з моделлю Саймона та випадковим чином. Друга – порівнянню частот появи слів двох текстів, згенерованих згідно з моделлю Саймона. Врахувавши, що дані точки відповідають мінімально та максимально можливому співпадінню, було оцінено придатність моделі Саймона, яка виявилася величиною порядку 80%, незалежно від значення параметра n_{pr}.

Першим кроком при застосуванні теорії складних мереж до аналізу текстів є зображення цих текстів у вигляді мережі – множини вузлів та зв'язків. Є різні способи такого представлення, два з найчастіше вживаних наведені на Рис. 2. В обох представленнях вузлами мережі виступають слова, а зв'язки між словами означаються по-різному.



а.



б.

Рис. 2. Зображення двох речень: "Першим вийшов вовк неситий" та "Вовк м'ясиво хап – і драла!" у вигляді мережі. Вузлам мереж відповідають слова. Лівий рисунок відповідає ***L***-простору, у якому зв'язки існують між сусідніми словами у реченні. Правий – ***P***-простору, у якому зв'язки існують між усіма словами у межах речення.

У ***L***-представленні, зображеному на Рис. 2**а**, зв'язок між словами існує, якщо слова знаходяться поруч в межах одного речення. У ***P***-просторі (Рис. 2**б**) зв'язки існують між усіма словами в межах одного речення. У рамках проведеного дослідження було запропоновано представлення тексту у вигляді мережі, що базується на "радіусі взаємодії" слів у реченні. При такому представленні ***L***- та ***P***-простори можна розглядати як граничні випадки єдиного представлення.

На Рис. 3 зображено розподіл ступенів вузлів $P(k)$ для мережі твору "Лис Микита" у ***L***- та ***P***-зображеннях. З проведених емпіричних досліджень було показано, що характер розподілу ступенів вузлів є степеневим (1). Останнє є свідченням того, що мережі слів україномовних текстів є безмасштабними. Значення показника λ, що характеризує загасання розподілу ступенів вузлів коливається у межах $\lambda = 1.9 \div 2.0$. Досліджено середню довжину найкоротшого шляху $\langle l \rangle$, яка означається як $\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} l_{ij}$, де l_{ij} – довжина найкоротшого шляху між вузлами i та j. Для досліджених мереж $\langle l \rangle$ виявилася величиною порядку $\langle l \rangle \approx 11$ у ***L***- та $\langle l \rangle \approx 5$ у ***P***-просторах. Звідси було зроблено висновок про те, що мережам слів україномовних текстів притаманний ефект тісного світу. Також у роботі було досліджено ряд інших характеристик, а саме залежність середньої довжини найкоротшого шляху $l(k)$ від вузла зі ступенем k до довільно вибраного вузла мережі. Досліджено залежність коефіцієнта кластерності

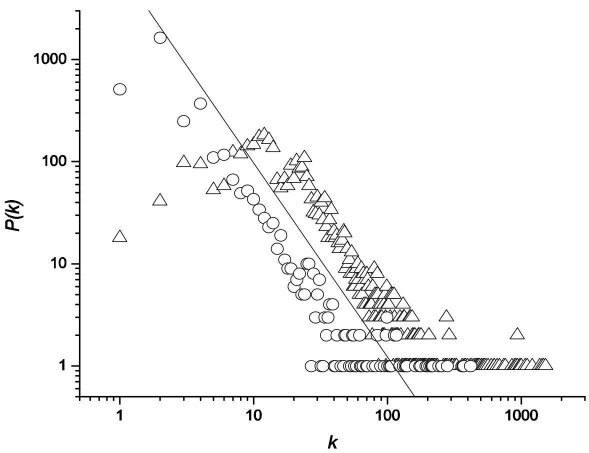


Рис. 3. Розподіл ступенів вузлів для мережі "Лиса Микити" у ***L***- (кружечки) та ***P***-просторах (трикутники).

вузла від його ступеня. Коефіцієнт кластерності C_i вузла i означається як відношення $C_i = \frac{2y_i}{k_i(k_i-1)}$ кількості зв'язків y_i між його найближчими сусідами до максимально можливої кількості таких зв'язків. Виходячи із середнього значення коефіцієнта кластерності мережі ($\langle C\rangle / \langle C\rangle^R \propto 10^2$ у порівнянні з коефіцієнтом кластерності $\langle C\rangle^R$ класичного випадкового графа відповідного розміру), було зроблено висновок про те, що мережі мови є локально сильно скорельованими структурами.

Друга частина даного розділу присвячена дослідженню мереж громадського транспорту [1, 4-6, 9]. Для аналізу було обрано мережі громадського транспорту 14 великих міст світу, список яких наведено у Табл. 1. Поряд з назвами міст у таблиці наведено загальну кількість зупинок N та кількість маршрутів R відповідної мережі. До баз даних було внесено усі типи маршрутів громадського транспорту, що функціонують у відповідній мережі.

Місто	N	R	Місто	N	R
Берлін	2992	211	Лос-Анджелес	44629	1881
Даллас	5366	117	Москва	3569	697
Дюссельдорф	1494	124	Париж	3728	251
Гамбург	8084	708	Рим	3961	681
Гонконг	2024	321	Сан-Паоло	7215	997
Стамбул	4043	414	Сідней	1978	596
Лондон	10937	922	Тайпей	5311	389

Табл. 1. Міста, мережі громадського транспорту яких будо досліджено. N – загальна кількість зупинок мережі, R – кількість маршрутів.

Першим кроком до дослідження мережі громадського транспорту є її представлення у вигляді гафа – множини вузлів та зв'язків. Як правило вузлами мережі виступають зупинки маршрутів, а зв'язки між парами вузлів означаються різними способами. Подібно до того, як було описано для мереж мови, у ***L***-просторі зв'язок існує між двома вузлами-зупинками, якщо вони є послідовними зупинками принаймі одного маршруту. У ***P***-просторі зв'язки існують між усіма зупинками в межах маршруту. У роботі було досліджено й інші зображення. Зокрема, у ***C***-просторі вузлами мережі є маршрути, а зв'язок між двома вузлами-маршрутами існує, якщо вони мають принаймі одну спільну зупинку.

На основі проведеного емпіричного аналізу було зроблено висновок про те, що у ***L***-просторі приблизно половина мереж громадського транспорту характеризується степеневим загасанням розподілу ступенів вузлів (1), а інша половина – експоненційним. Значення показника λ розподілу ступенів вузлів знаходиться у межах $\lambda = 2.6 \div 5.5$. У ***P***-просторі більшість мереж характеризуються експоненційним загасанням розподілу ступенів вузлів, хоча для ряду мереж було отримано степеневе загасання з показником $\lambda = 3.7 \div 4.4$. На підставі отриманих результатів було показано, що приблизно половині мереж у ***L***-просторі та певним мережам у ***P***-просторі притаманні ефекти безмасштабності.

Досліджувалися лінійні розміри мереж. Середня довжина найкоротшого шляху $\langle l \rangle$ у $\boldsymbol{L}$-просторі знаходиться у межах $\langle l \rangle = 6 \div 52$, а у P-просторі $\langle l \rangle = 2.2 \div 4.7$, що свідчить про наявність ефекту тісного світу. Досліджено розподіл довжин найкоротшого шляху між парами вузлів. Показано, що для досліджених мереж цей розподіл добре описується асиметричним унімодальним розподілом $P(l) = Al\exp\left(-Bl^2 + Cl\right)$, де A, B, C - параметри апроксимації. Проте для мережі громадського транспорту Лос-Анджелеса було спостережено певне відхилення. Поряд з наявністю основного максимуму у розподілі спостерігається чітко виражений другий максимум, як зображено на Рис. 4. Було зроблено твердження про те, що наявність другого максимуму у $\boldsymbol{L}$-просторі можна пояснити наявністю двох складових частин мережі, які розділені певною відстанню.

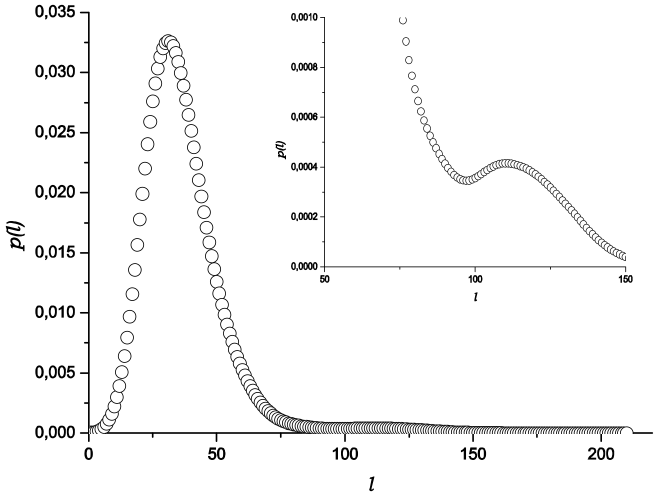


Рис. 4. Розподіл довжин найкоротшого шляху для мережі громадського транспорту Лос-Анджелеса у $\boldsymbol{L}$-просторі. Поряд з основним максимумом спостерігається наявність додаткового максимуму.

У роботі досліджено залежність середньої довжини найкоротшого шляху від вузла зі ступенем k до довільно обраного іншого вузла мережі як функцію k. Також досліджено залежність середньої довжини найкоротшого шляху між вузлами зі ступенями k та q як функцію добутку kq. Показано, що така залежність має чітко виражений логарифмічний характер загасання $l(k,q) = A - B\ln(kq)$.

Середнє значення коефіцієнта кластерності $\langle C \rangle$ мереж перевищує значення коефіцієнта кластерності $\langle C \rangle^R$ класичного випадкового графа відповідного розміру на 2-3 порядки, що є свідченням сильно скорельованої локальної структури мереж. Досліджено залежність коефіцієнта кластерності вузла від його ступеня. Приклад такої залежності для декількох мереж у $\boldsymbol{P}$-просторі зображено на Рис. 5. Дана залежність характеризується наявністю плато при малих ступенях та степеневим спаданням при великих.

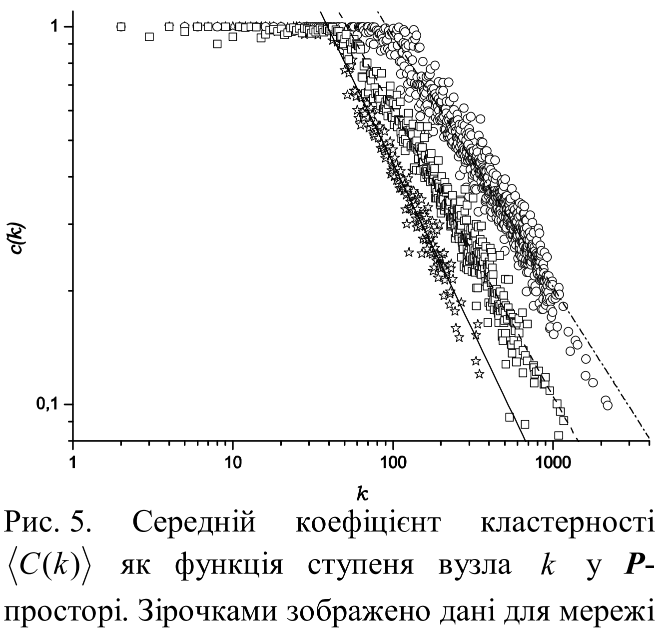
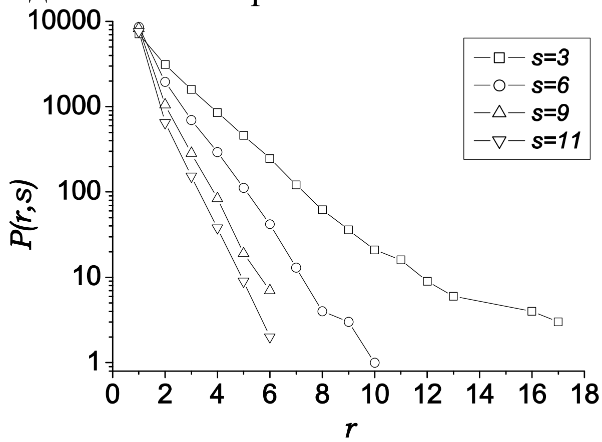


Рис. 5. Середній коефіцієнт кластерності $\langle C(k) \rangle$ як функція ступеня вузла k у $\boldsymbol{P}$-просторі. Зірочками зображено дані для мережі Берліна, квадратиками – Лондона, кружечками – Тайпею.

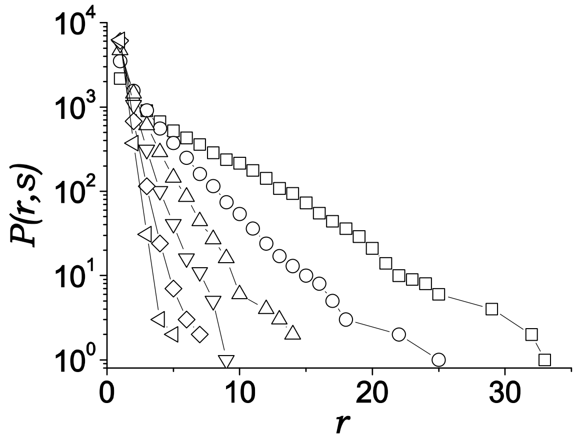
Досліджено модель мережі громадського транспорту, яка була покликана пояснити більшість емпірично спостережуваних характеристик. Дана модель будується шляхом блукання з самоуниканням на двовимірній квадратній гратці. На кожному кроці до мережі громадського транспорту додається новий маршрут. Параметри моделі a та b відповідають за положення початкової зупинки нового маршруту та за пролягання нового маршруту по уже існуючих лініях.

Показано, що дана модель здатна відтворити більшу частину спостережених результатів. А саме, степеневий та експоненційний характер розподілу ступенів вузлів у ***P***-просторі, мале значення середньої довжини найкоротшого шляху та велике значення коефіцієнта кластерності у ***P***-просторі, явище накладання маршрутів. Для опису останнього явища нами було запропоновано кількісну характеристику $P(r,s)$ – кількість відрізків з s послідовних зупинок, що обслуговуються тими самими r маршрутами.

Показано, що даний розподіл може описуватися як степеневим, так і експоненційним загасанням як для реальних, так і для змодельованих мереж громадського транспорту. Приклади такого розподілу при фіксованих значеннях s зображено на Рис. 6**а** для мережі громадського транспору Москви та на Рис. 6**б** для змодельованої мережі.



а



б

Рис. 6. Ефект упряжки. Розподіли $P(r,s)$ при фіксованих s для мережі громадського транспорту Москви (лівий рисунок) та змодельованої мережі (правий).

Третій розділ “Фазові переходи у спінових моделях на складних мережах” присвячений дослідженню системи з двома взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі [7, 8]. У рамках даного розділу було отримано вирази для енергії системи виходячи з феноменологічних припущень теорії Ландау, а також у наближенні середнього поля, стартуючи з мікроскопічного гамільтоніану. Досліджено статичну критичну поведінку системи та знайдено вирази для скейлінгових функцій магнетика на безмасштабній мережі.

Теорія Ландау з взаємодіючими параметрами порядку широко використовується при аналізі систем з декількома можливими типами впорядкування (наприклад, феромагнітним та антиферомагнітним, фероелектричним та феромагнітним, магнітним та структурним типами впорядкування) [*Y. Imry, J. Phys. C: Solid State Phys.* ***8*** *(1975), 567; S. Watanabe, T. Usui, Progr. Theor. Phys.* ***73*** *(1985), 1305*]. Такі системи можна описати за допомогою двох параметрів порядку x_1, x_2, що взаємодіють між собою з вільною енергією

$$F(\vec{x},T)=\frac{a}{2}(T-T_c)|\vec{x}|^2+\frac{b}{4}|\vec{x}|^4+\frac{c}{4}x_1{}^2x_2{}^2, \qquad (3)$$

де $\vec{x}=(x_1,x_2)$, a, b, c – параметри моделі, T та T_c – температура системи та її критична температура, відповідно.

Перший підрозділ даного розділу присвячений отриманню виразів для вільної енергії моделі із взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі. У першому пункті підрозділу узагальнено вільну енергію Ландау з симетрією, що описується рівнянням (3) на випадок безмасштабної мережі. Особливість теорії Ландау на складних мережах полягає у тому, що поряд зі стандартними припущеннями щодо аналітичності та симетрії вільної енергії робляться припущення, які стосуються лише мереж [*A. V. Goltsev et al, Phys. Rev. E* ***67*** *(2003), 026123*]. Ці припущення перелічені нижче.

Припущення, що енергія Ландау системи окрім поля, температури та параметрів порядку залежить також від розподілу ступенів вузлів $P(k)$:

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x})=\int_1^{k_{\max}} dkP(k)f(\vec{x},k\vec{x})-\vec{h}\vec{x}, \tag{4}$$

де $f(\vec{x},k\vec{x})$ – внесок у вільну енергію окремого вузла зі ступенем k, а $k_{\max}$ – максимальний ступінь вузла мережі ($k_{\max}\to\infty$ при $N\to\infty$). Залежність функції $f(\vec{x},k\vec{x})$ крім $\vec{x}$ також від $k\vec{x}$ відповідає тому, що вузол зі ступенем k у найпростішому наближенні перебуває у полі $k\vec{x}$ своїх сусідів.

Припущення, що $f(\vec{x},k\vec{x})$ є аналітичною функцією x_1, x_2, kx_1 та kx_2 і може бути представлена у вигляді ряду за їх степенями. Оскільки симетрія системи повинна відповідати симетрії енергії (3), то описаний розклад зручно представити у вигляді

$$f(\vec{x},k\vec{x})=f_0+\sum_{i=0}^{2}a_ik^i\,|\vec{x}|^2+\sum_{i=0}^{4}b_ik^i\,|\vec{x}|^4+\sum_{i=0}^{4}c_ik^i\sum_{\mu=1}^{2}x_\mu{}^4+\dots. \tag{5}$$

Наостанок слід врахувати *умову*, що вільна енергія (4) повинна бути скінченною, якщо параметри порядку є скінченними, що зокрема задовольняється, якщо поведінка $f(\vec{x},k\vec{x})$ при $k|\vec{x}|\to\infty$ обмежена лінійним зростанням

$$f(\vec{x},k\vec{x})\propto k\,|\vec{x}|\,. \tag{6}$$

Припущення (4) та (5), а також умова (6) служать основою для аналізу фазових переходів у системі взаємодіючих параметрів порядку в дусі стандартної теорії Ландау. Усі особливості у поведінці дослідженої системи на безмасштабній мережі пов'язані з розбіжністю моментів $\langle k^m\rangle$ розподілу ступенів вузлів, які виникають при підстановці розкладу (5) в (4). Коректне врахування умови (6) дозволяє уникнути розбіжностей у виразах для вільної енергії. На основі проведених розрахунків було отримано такі вирази для вільної енергії системи із взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі в залежності від значення параметра λ (1).

При $\lambda>5$ енергія системи набуває вигляду

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x})=\frac{a}{2}(T-T_c)\,|\vec{x}|^2+\frac{b}{4}|\vec{x}|^4+\frac{c}{4}x_1{}^2x_2{}^2-\vec{h}\vec{x}. \tag{7}$$

При $\lambda=5$ енергія характеризується логарифмічними поправками

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x})=\frac{a}{2}(T-T_c)\,|\vec{x}|^2+\frac{b}{4}|\vec{x}|^4\ln\frac{1}{|\vec{x}|}+\frac{c}{4}x_1{}^2x_2{}^2\ln\frac{1}{|\vec{x}|}-\vec{h}\vec{x}, \tag{8}$$

а при $3 < \lambda < 5$ – стає функціонально залежною від λ

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x}) = \frac{a}{2}(T-T_c)\,|\,\vec{x}\,|^2 + \frac{b}{4}|\,\vec{x}\,|^{\lambda-1} + \frac{c}{4}\frac{{x_1}^2{x_2}^2}{|\,\vec{x}\,|^4}|\,\vec{x}\,|^{\lambda-1} - \vec{h}\vec{x}. \tag{9}$$

В описаних вище випадках параметри b та c є функціями λ ($b = b(\lambda)$, $c = c(\lambda)$).
При $\lambda = 3$ вільна енергія

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x}) = C\,|\,\vec{x}\,|^2 - D\,|\,\vec{x}\,|^2 \ln\frac{1}{|\,\vec{x}\,|} + E\frac{{x_1}^2{x_2}^2}{|\,\vec{x}\,|^4}|\,\vec{x}\,|^2 - \vec{h}\vec{x}, \tag{10}$$

а при $2 < \lambda < 3$

$$\Phi(\vec{h},T,\vec{x}) = C'\,|\,\vec{x}\,|^2 + D'\,|\,\vec{x}\,|^{\lambda-1} + E'\frac{{x_1}^2{x_2}^2}{|\,\vec{x}\,|^4}|\,\vec{x}\,|^{\lambda-1} - \vec{h}\vec{x}. \tag{11}$$

В дисертаційній роботі показано, що у двох останніх випадках ($\lambda = 3$ та $2 < \lambda < 3$) критична температура T_c системи стає безмежно великою і система є впорядкованою при довільній скінченній температурі.

У другому пункті було отримано вільну енергію системи з взаємодіючими параметрами порядку у наближенні середнього поля виходячи з мікроскопічної енергії системи на безмасштабній мережі, що описується Гамільтоніаном [див. наприклад *A. Aharony. In Phase Transitions and Critical Phenomena* ***6*** *C. Domb, M. S. Green (Eds.), Academic Press, London, 1976; R. Folk et al, Phys. Rev. B* ***62*** *(2000), 12195*]

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\vec{s}_i\vec{s}_j + u\sum_{i=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{2}{s^4}_{\nu,i}, \tag{12}$$

де $\vec{s}_i = (s_{1,i}, s_{2,i})$ – двовимірний спін на вузлі i, J та u – константи взаємодії та анізотропії, позначення $\sum\limits_{\langle i,j\rangle}$ відображає підсумовування за всіма парами зв'язаних вузлів, індекс ν нумерує компоненти двовимірного вектора, $\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \sum\limits_{\nu=1}^{2} s_{\nu,i}s_{\nu,j}$ – скалярний добуток.

Увівши відхилення кожної компоненти $s_{\nu,i}$ від значення відповідної компоненти вектора $\vec{\sigma}$

$$\Delta s_{\nu,i} = s_{\nu,i} - \sigma_\nu \tag{13}$$

та знехтувавши квадратичним відхиленням, було отримано гамільтоніан системи у наближенні середнього поля

$$H_{MF} = \sum_{i=1}^{N}{H_{MF}}^i, \tag{14}$$

де одновузловий гамільтоніан

$${H_{MF}}^i = \frac{1}{2}J\langle k\rangle\sigma^2 - Jk_i\sum_{\nu=1}^{2}\sigma_\nu s_{\nu,i} + u\sum_{\nu=1}^{2}{s^4}_{\nu,i}. \tag{15}$$

Звідси бачимо фізичний зміст вектора $\vec{\sigma}^i$ – середній спін сусіда, що оточує вузол i (середній спін з розрахунку на одного сусіда), який не залежить від номера вузла i

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^i = \frac{1}{k_i}\sum_{\langle j\rangle}\vec{s}_j\ ,$$

де j пробігає k_i найближчих сусідів вузла i. Як наслідок, лише вузли з однаковими ступенями k перебувають в однакових умовах і характеризуються однаковими значеннями середнього спіна $\langle\vec{s}\rangle_k$. Середній спін на вузол $\langle\vec{s}\rangle$ виражається через $\langle\vec{s}\rangle_k$ таким чином

$$\langle\vec{s}\rangle = \sum_{k=1}^{k_{\max}} P(k)\langle\vec{s}\rangle_k .$$

Далі було знайдено статистичну суму та вільну енергію системи, яку зручно записати у вигляді

$$F(\vec{\sigma},T) = \sum_{k=1}^{k_{\max}} P(k)\hat{f}(\vec{\sigma},k\sigma), \tag{16}$$

де

$$\hat{f}(\vec{\sigma},k\sigma) = -T\ln(2\pi L) + \frac{1}{2}\frac{T^2}{JL^2}k_i\,|\vec{\xi}\,|^2$$
$$-T\ln\left(I_0(k_i\,|\vec{\xi}\,|) - \frac{uL^4}{T}\left[6\frac{I_2(k_i\,|\vec{\xi}\,|)}{(k_i\,|\vec{\xi}\,|)^2} + 6\frac{I_3(k_i\,|\vec{\xi}\,|)}{k_i\,|\vec{\xi}\,|} + \frac{\sum_{\nu=1}^{2}\xi_\nu^{\ 4}}{|\vec{\xi}\,|^4}I_4(k_i\,|\vec{\xi}\,|)\right]\right), \tag{17}$$

де $\vec{\xi} = JL\vec{\sigma}/T$, довжина вектора $|\vec{s}_i| = L$, а $I_\nu(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого роду. Наостанок з термодинамічного співвідношення $\langle\vec{s}\rangle = -\left(\frac{\partial\Phi(T,\vec{h})}{\partial\vec{h}}\right)_T$ було отримано зв'язок між $\langle\vec{s}\rangle$ та $\vec{\sigma}$, який у лінійному наближенні за $\vec{\sigma}$ та u запишеться

$$\langle\vec{s}\rangle = \frac{J\langle k\rangle L^4}{2T}\vec{\sigma}\,. \tag{18}$$

Рівняння (17) можна розглядати як підтвердження припущень (4) та (5). Більше того, використовуючи асимптотики функції Бесселя, було підтверджено справедливість виконання умови (6).

В підрозділі 3.2 досліджено властивості системи у рівноважному стані, який визначався з умови мінімізації вільної енергії. В пункті 3.2.1 здійснено загальний опис особливостей поведінки системи з двома параметрами порядку та показано шлях знаходження виразів для термодинамічних функцій системи.
В пункті 3.2.2 досліджено критичну поведінку системи при відсутності зовнішнього поля $\vec{h} = 0$. Показано, що низькотемпературний стан системи може характеризуватися одним з двох типів впорядкування. Або лише один параметр порядку відмінний від нуля, а інший рівний нулю, або обидва параметри порядку відмінні від нуля і рівні між собою. Відповідна фазова діаграма зображена на Рис. 7. Виявилося, що критичний показник β, що описує температурну залежність параметрів порядку

$$x_1, x_2 \propto \tau^{\beta}, \tag{19}$$

де $\tau = |T - T_c|/T_c$, суттєво залежить від показника λ розподілу ступенів вузлів. Значення β у різних діапазонах λ наведено у Табл. 2.

При граничному значенні $\lambda = 5$ поведінка параметрів порядку характеризується наявністю логарифмічних поправок до скейлінгу

$$x_1, x_2 \propto \tau^{\beta} \, |\ln \tau|^{\hat{\beta}} \qquad (20)$$

з показником $\hat{\beta} = -1/2$. При $\lambda \le 3$ критична температура стає безмежною. Отримано асимптотичну поведінку параметрів порядку:

$$x_1, x_2 \propto e^{-\eta T}, \qquad \text{при } \lambda = 3$$

$$x_1, x_2 \propto T^{-1/3-\lambda}, \qquad \text{при } 2 < \lambda < 3.$$

Реакція системи з двома параметрами порядку на прикладання зовнішнього поля описується двома величинами – повздовжньою $\chi_{\parallel}$ та поперечною $\chi_{\perp}$ сприйнятливостями. Температурні залежності сприйнятливостей

$$\chi_{\parallel}, \chi_{\perp} \propto \tau^{-\gamma} \qquad (21)$$

описуються стандартним показником середнього поля $\gamma = 1$. Значення поперечної сприйнятливості $\chi_{\perp}$ суттєво залежить від типу впорядкування системи, в той час як значення повздовжньої сприйнятливості співпадає для обох типів впорядкування. Іншою особливістю дослідженої системи є та, що поперечна сприйнятливість стає безмежною при довільній температурі $T < T_c$, якщо система стає ізотропною ($c = 0$). Така поведінка є цілком фізичною і пов'язана з можливістю переорієнтації параметра порядку під дією довільно малого зовнішнього поля, прикладеного перпендикулярно до напрямку параметра порядку. Такий тип поведінки пов'язаний з появою голдстоунівських мод. У роботі також було оцінено високотемпературні залежності сприйнятливостей при $2 < \lambda \le 3$.

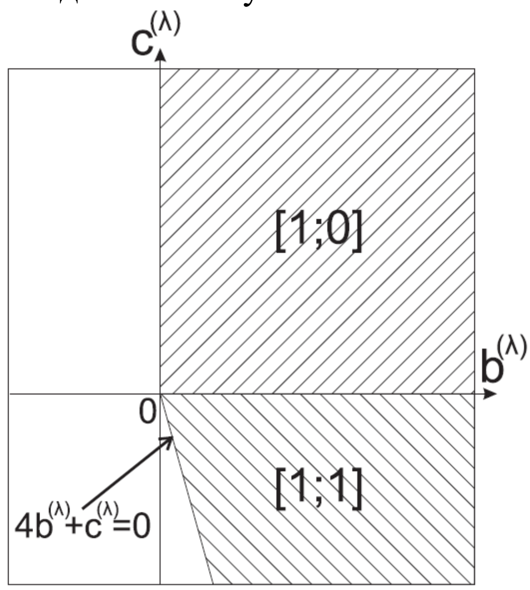


Рис. 7 Фазова діаграма системи з двома взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабній мережі. Тип впорядкування системи залежить від параметрів b та c моделі: або лише один параметр порядку відмінний від нуля ([1;0]), або обидва параметри порядку є рівними між собою і відмінними від нуля ([1;1]). При значеннях параметрів b і c, що відповідають незаштрихованим частинам фазової діаграми, умова стійкості термодинамічного потенціалу не виконується.

	α	β	γ	δ	α_c	γ_c
$\lambda \ge 5$	0	1/2	1	3	0	2/3
$3 < \lambda < 5$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-3}$	$\frac{1}{\lambda-3}$	1	$\lambda-2$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-2}$	$\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$

Табл. 2. Критичні показники, що характеризують температурну та польову поведінку спінової системи на безмасштабній мережі при різних значеннях параметра λ.

Теплоємність системи при $\lambda > 5$ зазнає стрибка у критичній точці аналогічно до стандартної теорії Ландау. При $3 < \lambda < 5$ теплоємність стає неперервною функцією у критичній точці з від'ємним значенням критичного показника α, наведеним у Табл. 2. При граничному значенні $\lambda = 5$ теплоємність характеризується наявністю логарифмічних поправок

$$c_h \propto \tau^{-\alpha} \, |\ln \tau|^{\hat{\alpha}}$$

з показником $\hat{\alpha} = -1$. Поряд з тим, залежність теплоємності від температури характеризується наявністю максимуму при температурі $T_0 = \frac{\lambda - 3}{2} T_c$. Графік температурної залежності теплоємності c_h зображено на Рис. 8 у змінних c_h / c_0 від T / T_c, де $c_0 = c_0(\lambda)$ не залежить від температури. Для випадку $2 < \lambda \le 3$ було оцінено асимптотичну залежність теплоємності від абсолютної температури:

$$c_h \propto T^2 e^{-\varsigma T}, \qquad \text{при } \lambda = 3$$

$$c_h \propto T^{-\lambda - 1 / 3 - \lambda}, \qquad \text{при } 2 < \lambda < 3.$$

Поряд з наведеними результатами, у роботі було знайдено універсальні співвідношення критичних амплітуд для ізотермічних сприйнятливостей. Показано, що при $3 < \lambda < 5$ співвідношення Γ_+ / Γ_- для повздовжніх сприйнятливостей

$$\Gamma_+ / \Gamma_- = 1 / \lambda - 3, \qquad (22)$$

залежить від λ, а для поперечних сприйнятливостей співвідношення Γ_+ / Γ_- залежить також від параметрів b та c моделі.

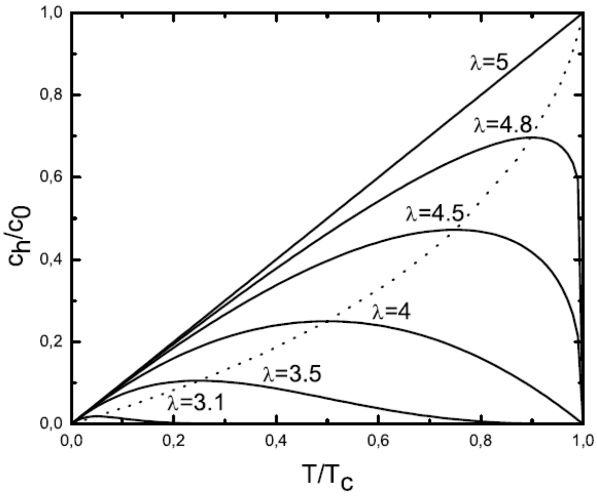


Рис. 8 Поведінка теплоємності при різних значеннях λ в області $3 < \lambda \le 5$. Пунктирна крива зображає положення максимуму при температурі $T_0 = (\lambda - 3) T_c / 2$.

В пункті 3.2.3 досліджено вплив зовнішнього поля, прикладеного вздовж одного з параметрів порядку на поведінку системи при критичній температурі $T = T_c$. Наявність зовнішнього поля залишає дві можливості впорядкування системи як описано вище, проте суттєво змінює властивості стану з двома відмінними від нуля параметрами порядку. У цьому стані параметри порядку перестають бути рівними між собою, а співвідношення між ними залежить лише від параметрів b та c моделі і не залежить від величини прикладеного зовнішнього поля. Значення критичного показника δ, що описує польову залежність параметрів порядку при $T = T_c$

$$x_1, x_2 \propto h^{1/\delta} \qquad (23)$$

наведено у Табл. 2. При $\lambda = 5$, подібно до температурних, польові залежності характеризуються наявністю логарифмічних поправок до скейлінгу

$$x_1, x_2 \propto h^{1/\delta} \, | \ln h |^{\hat{\delta}} \qquad (24)$$

з показником $\hat{\delta} = -1/3$. При наявності зовнішнього поля значення як поперечної $\chi_\perp$, так і повздовжньої $\chi_\parallel$ сприйнятливостей залежать від типу впорядкування. Значення критичного показника γ_c, який означається рівнянням

$$\chi_\parallel, \chi_\perp \propto h^{-\gamma_c} \qquad (25)$$

наведено у Табл. 2. При граничному значенні $\lambda = 5$ поведінка сприйнятливостей характеризується наявністю логарифмічних поправок

$$\chi_\parallel, \chi_\perp \propto h^{-\gamma_c} \, | \ln h |^{\hat{\gamma}_c} \qquad (26)$$

з показником $\hat{\gamma}_c = -1/3$. Для польових залежностей теплоємності системи

$$c_h \propto h^{-\hat{\alpha}_c}, \tag{27}$$

показник α_c наведено у Табл. 2. При граничному значенні $\lambda = 5$ виникають логарифмічні поправки

$$c_h \propto h^{-\hat{\alpha}_c} |\ln h|^{\hat{\alpha}_c} \tag{28}$$

з показником $\hat{\alpha}_c = -1$. Природа виникнення логарифмічних поправок у магнетиках на безмасштабних мережах суттєво відрізняється від природи їх виникнення на d-вимірних гратках. В останньому випадку логарифмічні поправки до скейлінгу виникають, коли поведінка середнього поля переходить при $d < d_c$ у поведінку з нетривіальними залежностями критичних показників від вимірності простору, що пов'язано з флуктуаціями параметра порядку, які стають сильно скорельованими в околі критичної точки. Для безмасштабних мереж при зменшенні параметра λ розподілу ступенів вузлів відносна кількість габів (вузлів з великими ступенями) зростає, що є причиною нетривіальної критичної поведінки.

В пункті 3.2.4 критична поведінка спінових систем на безмасштабних мережах вперше була проаналізована в термінах скейлінгових функцій. Згідно з гіпотезою скейлінгу [*H. E. Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford, 1971*], сингулярна частина термодинамічного потенціалу Гібса є узагальненою однорідною функцією своїх аргументів. Як наслідок, інші термодинамічні функції є також узагальненими однорідними функціями своїх аргументів і ціле сімейство кривих рівнянь стану можна зобразити за допомогою однієї чи декількох кривих у відповідних скейлінгових змінних. Більше того, усі системи в межах одного класу універсальності описуються тими самими скейлінговими функціями для рівнянь стану, ізотермічних сприйнятливостей тощо. Аналогічно як і критичні показники, скейлінгові функції залежать лише від кількох параметрів, таких як вимірність простору, параметра порядку та симетрія гамільтоніана.

У роботі було знайдено вигляд скейлінгових функцій $h_\pm$, $H_\pm$, $\mu_\pm$, $\chi_\pm$ для рівнянь стану, намагніченості та ізотермічних сприйнятливостей для систем зі скалярним, векторним та двома взаємодіючими параметрами порядку на безмасштабних мережах. Як показали результати досліджень, структура мережі має суттєвий вплив на вигляд скейлінгових функцій і вносить певні корективи у поняття універсальності. А саме, для систем на безмасштабних мережах клас універсальності поруч із наведеними вище параметрами визначається показником λ розподілу ступенів вузлів.

При $\lambda > 5$ отримано стандартні скейлінгові функції середнього поля. Зокрема для системи зі скалярним параметром порядку скейлінгова функція Вайдома-Гріффітса [*B. Widom, J. Chem. Phys.* ***43*** *(1965), 3898; R. B. Griffiths, Phys. Rev.* ***158*** *(1967), 176*], що означається рівністю

$$h = m^{\delta} h_\pm(\tau / m^{1/\beta}), \tag{29}$$

має такий вигляд

$$h_\pm(\zeta) = 1 \pm \zeta, \tag{30}$$

де m – намагніченість системи, а знак $\pm$ відповідає температурам вище та нижче критичної, відповідно. Скейлінгова функція $H_{\pm}$, що означається рівністю

$$h = \tau^{\beta\delta} H_{\pm}(m/\tau^{\beta}), \qquad (31)$$

має такий вигляд

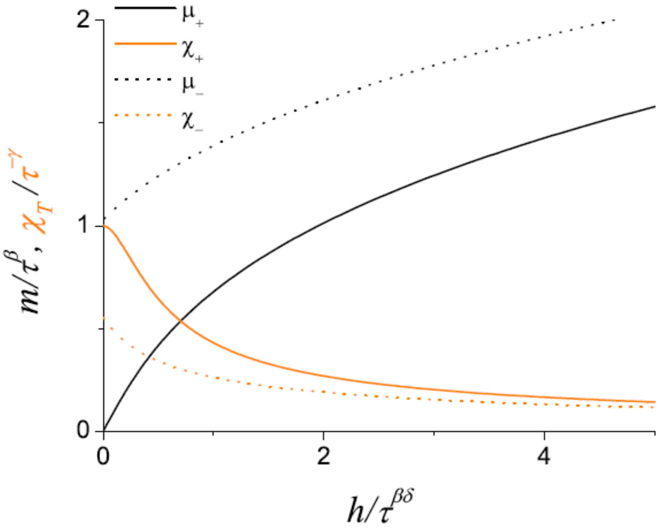
$$H_{\pm}(\zeta) = \zeta^3 \pm \zeta. \qquad (32)$$

При $3 < \lambda < 5$ обидві скейлінгові функції набувають залежності від λ, а саме

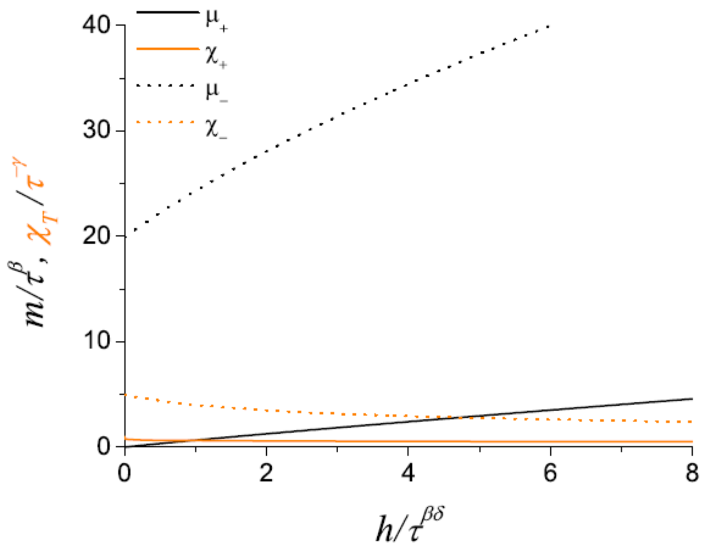
$$h_{\pm}(\zeta) = \frac{\lambda - 1}{4} \pm \zeta, \qquad (33)$$

$$H_{\pm}(\zeta) = \frac{\lambda - 1}{4}\zeta^{\lambda-2} \pm \zeta. \qquad (34)$$

При $\lambda = 5$ через наявність логарифмічних поправок гіпотеза скейлінгу не виконується і питання визначення скейлінгових функцій втрачає зміст. На Рис. 9 зображено скейлінгові функції для намагніченості та ізотермічної сприйнятливості вище $T > T_c$ та нижче $T < T_c$ критичної температури при різних значеннях показника λ. Як видно з рисунків, при $\lambda < 4$ абсолютне значення ізотермічної сприйнятливості χ_T при тих самих τ і h вище критичної температури $T > T_c$ стає меншим за це значення при $T < T_c$. Як наслідок, звичайна поведінка ізотермічної сприйнятливості при нульовому полі переходить при $\lambda < 4$ у дзеркально відбиту.



(а)



(б)

Рис. 9 Скейлінгові функції для намагніченості та ізотермічної сприйнятливості для системи зі скалярним параметром порядку на безмасштабній мережі з $\lambda = 4.8$ (**а**) та $\lambda = 3.1$ (**б**). Суцільними лініями позначено залежності вище критичної температури $T > T_c$, пунктирними – нижче $T < T_c$. Чорні криві відповідають скейлінговим функціям для намагніченості, сірі – для ізотермічної сприйнятливості.

Для системи із взаємодіючими параметрами порядку вигляд скейлінгових функцій залежить від типу впорядкування. А саме, якщо система знаходиться у впорядкованому стані з лише одним відмінним від нуля параметром порядку, то скейлінгові функції для рівняння стану співпадають з відповідними скейлінговими функціями для системи зі скалярним параметром порядку. Відповідно, для повздовжньої та поперечної ізотермічних сприйнятливостей було отримано дві скейлінгові функції. Для іншого типу впорядкування, де обидва параметри порядку відмінні від нуля, вигляд скейлінгових функцій суттєво залежить як від показника λ розподілу ступенів вузлів, так і від параметрів моделі b та c.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі було проведено аналіз впливу ефектів безмасштабності та тісного світу як на структурні властивості реальних складних мереж (на прикладі мереж слів в україномовних текстах та мереж громадського транспорту), так і на процеси, що відбуваються на складних мережах (фазові переходи у спінових моделях). На підставі проведеного дослідження було зроблено такі висновки.

1. На основі аналізу залежності частоти слова від рангу (закону Зіпфа) в україномовних текстах показано, що обраний розмір текстів ($N \propto 10^3$) є достатнім для прояву статистичних закономірностей. Вперше було застосовано апарат теорії складних мереж до аналізу україномовних текстів і показано, що мережа слів української мови є сильно скорельованим безмасштабним тісним світом. Запроваджена концепція простору мереж мови, що базується на розмірі вікна пов'язаності слів у реченні дозволяє поєднати різні представлення мереж мови.

2. Досліджено топологічні властивості мереж громадського транспорту 14 великих міст світу. Беручи до уваги отримані значення коефіцієнтів кластерності та середньої довжини найкоротшого шляху показано, що цим мережам притаманна сильно скорельована топологія тісного світу. На основі порівняння властивостей реальних та змодельованих мереж громадського транспорту підтверджено придатність досліджуваної моделі та принципів її будови до опису процесу формування реальних мереж громадського транспорту.

3. Досліджено критичну поведінку системи зі взаємодіючими скалярними параметрами порядку на безмасштабній мережі. Показано, що при $2 < \lambda \leq 3$ критична температура є безмежною і система є завжди впорядкованою. При $\lambda > 5$ фазовий перехід набуває стандартної поведінки середнього поля, а при $3 < \lambda < 5$ критичні показники набувають залежності від λ. Показано, що наявність взаємодії між параметрами порядку не впливає на значення критичних показників, які визначаються лише топологічними властивостями мережі.

4. Показано, що для системи з взаємодіючими скалярними параметрами порядку при граничному значенні $\lambda_c = 5$ порушується гіпотеза масштабної інваріантності і термодинамічні характеристики містять логарифмічні поправки до скейлінгу. Підтверджено виконання співвідношень скейлінгу для логарифмічних поправок та показано, що ці показники утворюють окремий набір, відмінний від інших відомих наборів критичних показників для логарифмічних поправок.

5. Для опису властивостей спінових моделей в околі критичної точки було використано концепцію скейлінгових функцій. Виявлена нетривіальна залежність цих функцій для спінових систем на безмасштабних мережах від показника λ розподілу ступенів вузлів. Показано, що при $\lambda < 4$ звичайний вигляд ізотермічної сприйнятливості $\chi(\tau)$ при нульовому полі переходить у дзеркально відбитий.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Von Ferber C. Scaling in public transport networks / C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Condens. Matter Phys. – 2005. – V. 8, – P. 225 – 234.
2. Головач Ю. Складні мережі / Ю. Головач, О. Олємской, К. фон Фербер, Т. Головач, О. Мриглод, І. Олємской, В. Пальчиков // Журн. Фіз. Досл. – 2006. – Т. 10, №4. – С. 247 – 289.

3. Головач Ю. Лис Микита і мережі мови / Ю. Головач, В. Пальчиков // Журн. Фіз. Досл. – 2007. – Т. 11, №1. – С. 22 – 33.
4. Von Ferber C. Network harness: Metropolis public transport / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Physica A – 2007. – V. 380, – P. 585 – 591.
5. Фон Фербер К. Статистичні властивості мереж громадського транспорту / К. фон Фербер, Т. Головач, В. Пальчиков // Фізичний збірник НТШ. – 2008. – Т. 7, – С. 199-209.
6. Von Ferber C. Public transport networks: empirical analysis and modelling / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Eur. Phys. J. B. – 2009. – V. 68, – P. 261 – 275.
7. Palchykov V. Coupled order-parameter system on a scale-free network / V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch // Phys. Rev. E – 2009. – V. 80, – 011108.
8. Palchykov V. Critical phenomena on scale-free networks: logarithmic corrections and scaling functions / V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch, R. Kenna // Phys. Rev. E – 2010. – V. 82, – 011145.
9. Von Ferber C. Modelling Metropolis Public Transport / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // In: Traffic and Granular Flow ' 07 Appert-Rolland C.; Chevoir F.; Gondret P.; Lassarre S.; Lebacque J.-P.; Schreckenberg M. (Eds.) (Springer, 2009), – P. 709 – 720.
10. Von Ferber C. Are public transport networks scale-free? / C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov // Statistical Physics 2005: Modern Problems and Applications: Abstracts. – Lviv, 2005. – P. 62.
11. Von Ferber C. Public transport networks: scaling and vulnerability / C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch, V. Palchykov // 3rd Annual Meeting COST Action P10 'Physics of Risk' & Workshop on Complex System Science MC: Abstracts. – Vilnius, 2006. – P. 57.
12. Palchykov V. Phase transitions in a coupled order parameter system on a scale-free network / V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch // MECO34: 34th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics: Abstracts. – Leipzig, 2009. – P. 80.
13. Von Ferber C. Critical phenomena on scale-free networks: scaling functions logarithmic corrections / C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch, R. Kenna, V. Palchykov // International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems: Abstracts. – Kyiv, 2010. – P. 169.

АНОТАЦІЇ

Пальчиков В. В. Ефекти безмасштабності та тісного світу в складних мережах.– Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 – теоретична фізика. – Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України, Львів, 2010.

Дисертаційна робота присвячена аналізу структурних властивостей складних мереж та дослідженню впливу цих властивостей на перебіг процесів на мережах.

Структура багатьох мереж характеризується надзвичайною компактністю (ефектом тісного світу) та степеневим загасанням розподілу ступенів вузлів з показником λ (ефектом безмасштабності), що має суттєвий вплив на перебіг процесів на мережах.

Аналіз структурних властивостей складних мереж проведено на прикладі мереж слів україномовних текстів та мереж громадського транспорту 14 міст. Показано, що мережі україномовних текстів є сильно скорельованими безмасштабними тісними світами, а мережам громадського транспорту часто притаманні ефекти безмасштабності та тісного світу. Кількісно описано явище накладання маршрутів – ефект упряжки.

Дослідження впливу структури складної мережі на особливості критичної поведінки проведено на прикладі системи із взаємодіючими параметрами порядку у рамках феноменологічного підходу Ландау та наближення середнього поля. Отримано повний спектр температурних і польових критичних показників. Показано, що при $\lambda > 5$ система характеризується стандартними показниками середнього поля, а при $3 < \lambda < 5$ критичні показники набувають залежності від λ. При $\lambda = 5$ виникають логарифмічні поправки до скейлінгу, зумовлені флуктуаціями в топології мереж. Вперше застосовано формалізм скейлінгових функцій для аналізу критичної поведінки на складних мережах та показано нетривіальну залежність скейлінгових функцій від показника λ.

<u>Ключові слова:</u> *складні мережі, скейлінг, фазові переходи.*

Пальчиков В. В. Эффекты безмасштабности и тесного мира в сложных сетях. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. Институт физики конденсированных систем Национальной академии наук Украины, Львов, 2010.

Диссертационная работа посвящена анализу структурных свойств сложных сетей и исследованию влияния этих свойств на протекание процессов на сетях. Структура многих сетей характеризуется чрезвычайной компактностью (эффектом тесного мира) и степенным затуханием распределения степеней узлов с показателем λ (эффектом безмасштабности), что оказывает существенное влияние на протекание процессов на сетях.

Анализ структурных свойств сложных сетей проведен на примере сетей слов украиноязычных текстов и сетей общественного транспорта 14 городов. Показано, что сети украиноязычных текстов являются сильно скоррелированными безмасштабными тесными мирами, а сетям общественного транспорта часто присущи эффекты безмасштабности и тесного мира. Количественно описано явление наложения маршрутов – эффект упряжки.

Исследование влияния структуры сложных сетей на особенности критического поведения проведено на примере системы с взаимодействующими параметрами порядка в рамках феноменологического подхода Ландау и приближения среднего поля. Получен полный спектр температурных и полевых критических показателей. Показано, что при $\lambda > 5$ система характеризуется стандартными показателями среднего поля, а при $3 < \lambda < 5$ критические показатели обретают зависимость от λ. При $\lambda = 5$ возникают логарифмические поправки к скейлингу,

обусловленные флуктуациями в топологии сетей. Впервые применен формализм скелинговых функций для анализа критического поведения на сложных сетях и показана нетривиальная зависимость скейлинговых функций от показателя λ.

Ключевые слова: *сложные сети, скейлинг, фазовые превращения.*

Palchykov V. Scale-free and small world effects in complex networks. – Manuscript.

Thesis for the defending of the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.04.02 – theoretical physics. Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2010

This thesis is devoted to the investigation of the structure of real-world complex networks as well as the influence of the network structure on the properties of cooperative phenomena on networks. Complex networks widely occur in real life: metabolic networks, telephone call graphs, power grids, social interaction networks, the World Wide Web etc. nano-systems with nontrivial architecture may also display a network type topology. The global structure of many real-world networks reveals a strong compactness. The diameter of these networks increases with the network size slower then any power law function: they are small worlds. Moreover, the distribution of the numbers of nearest neighbors (the node degree distribution) is described by a power law decay (scale-free effect). The latter serves as evidence of the strongly fluctuating structure and the presence of highly connected nodes: hubs. The above described properties of complex networks result in unusual behavior in cooperative phenomena on such networks.

In the part of the present work devoted to structural properties of real-world networks, an analysis was undertaken of both the language network of Ukrainian texts and of public transport networks of 14 major cities of the world. To achieve this the introduction of different representations for these networks has proven essential. It was shown that the Ukrainian language network is a highly clustered scale-free small world. The properties of public transport networks crucially depend on the network representation (space). While these networks are characterized by a highly clustered small-world topology independent of the representation, it was shown that the scale-free property strongly depends on the network representation. In some representations the majority of the networks are scale-free. While in other representations they may either show power law decay of the node degree distribution or an exponential decay. A model public transport network was analyzed and it was shown that choosing realistic parameters the model reproduces most of the properties of real networks. A specific feature of public transport networks, namely, the harness effect was studied and characteristics were introduced for quantitative classification.

In the part of this work devoted to cooperative phenomena on scale-free networks, a system of two coupled order parameters was investigated. The critical behavior was analyzed using both the phenomenological Landau approach and a mean-field approximation. The expressions for the free energy were obtained. The ordered state of the system was shown to be described by one of two possible types of ordering. In the absence of an external field $\vec{h}=0$ it was found that either only one order parameter has nonzero value or both order parameters have an equal nonzero value. The influence of the external field on the critical behavior was investigated.

The critical behavior was shown to depend crucially on the node degree distribution

exponent λ. Namely, for $2<\lambda\leq 3$ the critical temperature T_c becomes divergent and the system is always ordered. For $\lambda>5$ the system is characterized by the usual mean-field critical exponents, while for $3<\lambda<5$ the critical exponents become λ-dependent. It was shown that the presence of anisotropy does not affect the critical exponents, which are defined only by the structural properties of the network. The transverse susceptibility was shown to become infinitely large at any temperature below the critical one if the system becomes isotropic. This kind of behavior is closely related to the appearance of goldstone modes and shows the ability for the order parameter to make a redirection by the influence of arbitrary small external field. The full spectrum of the temperature and field critical exponents for the spin system on a scale-free network was obtained verifying the validity of the scaling relations.

For the first time the scaling function formalism was applied to describe critical phenomena on networks. Scaling functions for the single, vector and two coupled order parameters were obtained and the nontrivial dependence on λ was examined.

At the marginal value $\lambda_c=5$ the critical behavior is characterized by logarithmic corrections to scaling. The nature of the appearance of logarithmic corrections to scaling in spin systems on scale-free networks strongly differs from the nature of its appearance on regular d-dimensional lattices. In the latter case the logarithmic corrections to scaling appear, when usual mean-field behavior at $d<d_c$ turns to the behavior with nontrivial dependencies of the critical exponents on the spatial dimension. The latter is connected with the order parameter fluctuations, which become strongly correlated in the vicinity of the critical point. Logarithmic corrections to scaling for scale-free networks are related to the presence of hubs, the relative number of which increases with a decrease of the node degree distribution exponent λ.

Key words: complex networks, scaling, phase transitions.