

ICMP-99-28U

Шовгенюк М.В., Крохмальський Т.Є., Козловський М.П.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ БІНАРНИХ ФАЗОВИХ
ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ГОЛОГРАФІЧНИХ СИСТЕМ
РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

ЛЬВІВ

УДК: 519.224:535.4

PACS: 42.30.-d; 42.30.Va; 42.30.Sy

Дослідження властивостей бінарних фазових елементів для
голографічних систем розпізнавання образів

Шовгенюк М.В., Крохмальський Т.Є., Козловський М.П.

Анотація. На основі методу координатно-частотного розподілу сигналів описано оптичні властивості різних типів бінарних фазових елементів (БФЕ). Отримано аналітичні вирази для автокореляційної функції та вінерівського спектру просторових частот БФЕ, на основі яких розраховано узагальнений оптичний параметр $|\varphi(k, l)|^2$ для кількісної оцінки рівня оптичного шуму і показано, що такий параметр характеризує усереднену величину флюктуацій інтенсивності інтерференційної картини вінерівського спектру. Запропоновано параметр неортогональності d_A для класифікації БФЕ, починаючи від ортогональних БФЕ ($d_A = 0$) і завершуючи колінеарними БФЕ ($d_A = N^2$).

Investigation of binary phase masks properties for image recognition holographic systems

M.V.Shovgenyuk, T.Ye.Krokhmalskii, M.P.Kozlovskii

Abstract. On the base of a method of the coordinate-phase distribution of signals, the optical properties of binary phase elements (BPE) are described. Expressions for the autocorrelation functions and for the Wiener spectrum of spatial frequencies of a BPE are obtained. This allowed to compute a generalized optical parameter $|\varphi(k, l)|^2$, which is then used for quantitative estimating optical noise level. It is also shown that this parameter characterizes the average value of fluctuations of the interference intensity of Wiener spectra. A nonorthogonality parameter d_A is proposed for classifying BPE, it varies from $d_A = 0$, for orthogonal BPE, up to the value $d_A = N^2$, for collinear BPEs.

Подається в Optics & Laser Technology
Submitted to Optics & Laser Technology

© Інститут фізики конденсованих систем 1999
Institute for Condensed Matter Physics 1999

1. ВСТУП

Використання бінарних фазових елементів дозволяє суттєво підвищити ефективність голографічних систем розпізнавання образів [1–4,6–8]. Найбільшого поширення для таких систем набули бінарні оптичні елементи з випадковим розподілом фази, названі в [1] випадковими фазовими масками.

Вперше в роботі Джавіді і Горнера [2] був обґрутований і реалізований метод фазового кодування оптичної інформації т.з. техніка "security verification technique", яка базується на використанні випадкових фазових масок як вхідних зображень в оптичній схемі корелятора сумісного фур'є-перетворення [5]. Одночасно і незалежно цей метод був теоретично і експериментально підтверджений в роботі [3]. Дослідження структури випадкової фазової маски на формування вінерівського спектру просторових частот та поведінки автокореляційної функції показали, що випадкові бінарні фазові маски мають ряд переваг перед амплітудними масками, зокрема, володіють низьким рівнем шумів.

Процеси голографічного розпізнавання образів на основі випадкових фазових масок досліджувалися в роботі [4]. Крім бінарних досліджувалися випадкові фазові маски з багаторівневим зсувом фази окремих елементів [6–8]. Однак, систематичного підходу до вивчення властивостей різних типів бінарних фазових масок не було проведено.

Хоча основна увага приділялась фазовим елементам з випадковим розподілом фази, проте для задач розпізнавання образів може бути використаний більш широкий клас фазових елементів, які володіють певними симетрійними чи структурними характеристиками, зокрема побудованих на основі ортогональних матриц Адамара [9–11]. В попередній роботі авторів [12] запропонованій статистичний підхід до опису широкого класу квазіортогональних фазових елементів, який об'єднує як цілком впорядковані (за критерієм ортогональності), так і випадкові бінарні фазові елементи.

В даній роботі розвинутий метод координатно-частотного розподілу сигналів (КЧРС) [15,18] для опису бінарних фазових елементів з довільним розподілом фази. Суть цього методу полягає в побудові функціоналу КЧРС, який дозволяє самоузгоджено описати властивості оптичного елемента як в координатній, так і в частотній площині. За КЧРС (розподілом) цілком і однозначно відновлюється кореляційне поле, яке формується в координатній площині, і,

відповідно, вінерівський спектр просторових частот, що формується в частотній площині. Нами отримані аналітичні вирази для автокореляційної функції та вінерівського спектру і проведені чисельні розрахунки властивостей різних класів фазових масок.

Запропоновано систематичний статистичний підхід до вивчення широкого класу бінарних фазових елементів, включаючи випадкові фазові маски. Теоретично обґрутовано, що введений в роботі [12] параметр неортогональності дозволяє в рамках єдиного підходу описати властивості як класів квазіортогональних, так і квазіколінеарних бінарних фазових масок. Показано, що кожен клас адекватно характеризується статистичним розподілом недіагональних елементів матриці S , побудованої із скалярних добутків рядків (стовпців) вихідної матриці фазових елементів. Встановлено, що ортогональні і колінеарні матриці описуються різними розподілами цих елементів. Для ортогональних матриць він має вигляд одного дельта-піку, локалізованого в нулі, який при хаотизації трансформується в гаусів розподіл, що далі еволюціонує в гаусів розподіл випадкових матриць. Розподіл елементів матриці S для колінеарних матриць складається з двох дельта-піків, локалізованих в крайніх точках N і $-N$. В процесі хаотизації ці піки перетворюються в гаусові криві, які розширяються і зближаються, а нарешті зливаються і переходять в гаусів розподіл випадкових масок, як і у випадку хаотизації ортогональних масок.

2. ОПИС ФАЗОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ МЕТОДУ РОЗПОДІЛУ СИГНАЛІВ

2.1. Означення бінарного фазового елемента

Розглянемо плоский прямокутний фазовий елемент, що складається з $N \times M$ одинакових елементарних комірок розмірів $T_x \times T_y$. Функція пропускання окремої комірки з координатами n, m має вигляд

$$t_{n,m}(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{T_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{T_y}\right) \exp(i\pi\phi(n, m)), \quad (1)$$

де

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Надалі будемо вважати, що $T_x = \text{const}$, $T_y = \text{const}$, а величина ϕ характеризує зміну фази світлової хвилі, причому в межах комірки $\phi = \text{const}$.

Розподіл комплексної амплітуди світлової хвилі на виході такого фазового елемента описується функцією

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \operatorname{rect}\left(x - \left[n - \frac{N+1}{2}\right] T_x\right) \\ & \times \operatorname{rect}\left(y - \left[m - \frac{M+1}{2}\right] T_y\right) \exp(i\pi\Delta\phi(n, m)), \quad (2) \end{aligned}$$

яка в загальному випадку не розділяється за змінними x і y . Кожна елементарна комірка змінює фазу падаючої плоскої хвилі на величину $\Delta\phi(n, m) = \phi(n, m) - \phi_0$, де ϕ_0 -постійна величина.

В роботі будемо розглядати фазові елементи, елементарні комірки яких змінюють фазу плоскої хвилі на величину: $\Delta\phi(n, m) = 0; 1$. Тоді розподіл фази елемента цілком описується матрицею

$$\mathbf{A} = [A_{nm}], \text{ де коефіцієнти } A_{nm} = \exp[i\pi\Delta\phi(n, m)], \quad (3)$$

приймають значення: +1; -1. Фазові елементи, комплексна амплітуда хвилі на виході якого описується формулами (2), (3), де $A_{nm} = +1; -1$, будемо називати *бінарними фазовими елементами*. Їхні розподіли (2) описуються дійсними функціями: $f^*(x, y) \equiv f(x, y)$. Зauważимо, що за означенням (2) нумерація елементарних комірок здійснюється від 1 до N та M , що зручно для представлення бінарного розподілу фази матрицею (3). Матричний опис бінарних фазових елементів дається далі в розділі 5

Виходячи із означень бінарного фазового елемента (1)-(3), його фур'є-спектр представляється у вигляді добутку

$$F(\omega_x, \omega_y) = F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)\Phi(\omega_x, \omega_y) \quad (4)$$

$$\text{Тут } F_0(\omega_x)F_0(\omega_y) = \operatorname{sinc}\left(\frac{T_x\omega_x}{2\pi}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{T_y\omega_y}{2\pi}\right) - \quad (5)$$

фур'є-спектр елементарної комірки (1). Функція

$$\begin{aligned} \Phi(\omega_x, \omega_y) = & C_{NM}(\omega_x, \omega_y) \\ & \times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{nm} \exp[-i(nT_x\omega_x + mT_y\omega_y)] \quad (6) \end{aligned}$$

описує фур'є-спектр бінарного розподілу фази. Наявність фазового множника

$$C_{NM}(\omega_x, \omega_y) = \exp\left[i\left(\frac{N+1}{2}T_x\omega_x + \frac{M+1}{2}T_y\omega_y\right)\right] \quad (7)$$

пов'язана вибором системи координат в центрі фазового елемента довільної розмірності (див.(2)).

Введемо означення інверсного $f^{\text{inv}}(x, y) = f(-x, -y)$ фазового елемента. При даній заміні відповідно до означення (2), бінарний фазовий елемент описується матрицею

$$\mathbf{A}^{\text{inv}} = [A_{N+1-n M+1-m}]. \quad (8)$$

Легко показати, що фур'є-спектр (4) інверсного фазового елемента описується комплексно-спряженою функцією $F^*(\omega_x, \omega_y)$.

2.2. Базовий функціонал координатно-частотного розподілу.

Для фазового елемента (2) побудуємо його координатно-частотний розподіл (КЧР). За означення такого розподілу виберемо базові функціонали в формі функції невизначеності Вудворда [15]:

координатне представлення:

$$\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(r + \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) f^*\left(r - \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) \exp(-i\omega_0 r) dr, \quad (9)$$

просторово-частотне представлення:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{FF^*}(\omega_0; \mathbf{r}_0) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\boldsymbol{\Omega} + \frac{\omega_0}{2}\right) F^*\left(\boldsymbol{\Omega} + \frac{\omega_0}{2}\right) \\ & \times \exp(ir_0\boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}, \quad (10) \end{aligned}$$

де $F(\boldsymbol{\omega})$ - фур'є-образ функції $f(\mathbf{r})$.

Для функціоналів (9)-(10) виконується теорема тотожності [15]

$$\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) \equiv \mathcal{W}_{FF^*}(\omega_0; \mathbf{r}_0). \quad (11)$$

Ми використовуємо індекси функцій розподілу для позначення форми представлення функціоналу, та послідовність спряжених координат \mathbf{r}_0 та ω_0 , де спочатку є власна координата розподілу.

Покажемо, що використання методу розподілу сигналів дозволяє описати оптичні властивості елементів оптичних схем як в координатній так і в частотній площинах.

За розподілом (9) при умові $\mathbf{r}_0 = 0$ оператором зворотнього фур'є-перетворення $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ однозначно і повністю відновлюється інтенсивність дифрагованого світла

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} \{W_{ff^*}(0; \omega_0)\} = |f(\mathbf{r})|^2. \quad (12)$$

Дану формулу будемо використовувати для опису властивостей елементів оптичних схем в координатній площині і тому назовемо її *прямою схемою відновлення* інтенсивності оптичного сигналу за його координатно-частотним розподілом.

Навпаки, при умові $\omega_0 = 0$ оператором прямого фур'є-перетворення $\hat{\mathcal{F}}$ відновлюється вінерівський (енергетичний) спектр просторових частот

$$\hat{\mathcal{F}} \{W_{FF^*}(0; \mathbf{r}_0)\} = |F(\omega)|^2. \quad (13)$$

Як буде показано далі, дана схема відновлення реалізується через пряму схему (12) і тому будемо її називати *зворотньою схемою відновлення* вінерівського спектру просторових частот оптичного сигналу за його координатно-частотним розподілом.

2.3. Координатно-частотний розподіл бінарного фазового елемента.

Для побудови координатно-частотного розподілу бінарного фазового елемента використаємо просторово-частотне представлення (10). Виходячи із формули (4), такий розподіл можна записати у вигляді функціоналу

$$\begin{aligned} W_{FF^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; x_0, y_0) &= C_{NM} \sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N A_{n_1 m_1} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M A_{n_2 m_2} \\ &\times \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; x_0 - [n_1 - n_2]T_x, y_0 - [m_1 - m_2]T_y) \\ &\times \exp \left\{ -i \left[\frac{(n_1 + n_2)}{2} T_x \omega_{0x} + \frac{(m_1 + m_2)}{2} T_y \omega_{0y} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для цього функціоналу виконується співвідношення

$$\mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; x_0, y_0) = \mathcal{W}'_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}; x_0) \mathcal{W}'_{F_0 F_0^*}(\omega_{0y}; y_0) \quad (15)$$

де $\mathcal{W}'_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}; x_0)$ одновимірний КЧР елементарної комірки (1). Множник $C_{NM} = C_{NM}(\omega_{0x}, \omega_{0y})$ задається формулою (7).

В загальному виразі (14) одновимірні розподіли $W_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}; x_0)$ та $W_{F_0 F_0^*}(\omega_{0y}; y_0)$ не розділяються за подвійними сумами, індекси яких відповідають індексам матричних коефіцієнтів $A_{n_1 m_1} A_{n_2 m_2}$. Враховуючи, що розподіли (9, 10) задаються в різницевих спряжених координатах $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$ і відповідно $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, то доцільно ввести нові індекси сумування

$$n_1 = n; \quad n_1 - n_2 = k; \quad m_1 = m; \quad m_1 - m_2 = l. \quad (16)$$

Тоді чотирикратні суми в формулі (14) можна записати

$$\sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^N \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M (\dots) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} \left[\sum_n \sum_m \right] (\dots) \quad (17)$$

В результаті, розподіл $\mathcal{W}_{FF^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; x_0, y_0)$ набуває форми розкладу за КЧР елементарної комірки. Для виводу формули такого розподілу необхідно окремо дослідити внутрішні суми по n і m , які мають свої особливості.

Із врахуванням введеної заміни (16) нові індекси сумування можуть приймати від'ємні значення, оскільки вони задають вектор зміщення двох фазових елементів з матричними коефіцієнтами $A_{n_1 m_1}$ та $A_{n_2 m_2}$ на площині. Запишемо зовнішню суму, наприклад по k у вигляді: $\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (\dots) = \sum_{k=-(N-1)}^{-1} (\dots) + \sum_{k=0}^0 (\dots) + \sum_{k=1}^{N-1} (\dots)$. Тоді при $k < 0, l < 0$ і $k > 0, l < 0$ внутрішні суми в (17) записуються по-різному. Розглянемо два характерні випадки.

Випадок 1. При $k > 0$ і $l > 0$ внутрішні суми можна записати:

$$\begin{aligned} Q_{k l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) &= \sum_{n=1}^{N-k} \sum_{m=1}^{M-l} A_{n+k m+l} A_{n m} \\ &\times \exp \left\{ -i \left[\left(n + \frac{k}{2} \right) T_x \omega_{0x} + \left(m + \frac{l}{2} \right) T_y \omega_{0y} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

Як видно, верхня границя внутрішніх сум залежить від k і l .

Покажемо, що у випадку $k < 0$ і $l < 0$ формула (18) не змінюється. Дійсно, в цьому випадку $A_{n+k m+l} A_{n m} \rightarrow A_{n-k m-l} A_{n m}$. Враховуючи, що індекси матричних коефіцієнтів додатні, доцільно зробити заміну: $n' = n - k$, $m' = m - l$. В результаті $A_{n-k m-l} A_{n m} \rightarrow$

$A_{n' m'} A_{n'+k m'+l}$. Добуток матричних коефіцієнтів комутативний і, відповідно, внутрішні суми за новими індексами n' і m' не змінюються, а також не змінюється і показник експоненти. Тоді виконується співідношення:

$$Q_{-k-l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) = Q_{k l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}); \quad (19)$$

Випадок 2. При умові, коли $k < 0$, а $l > 0$ внутрішні суми записуються, як

$$\begin{aligned} Q_{k l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) &= \sum_{n=1}^{N-k} \sum_{m=1}^{M-l} A_{n+k m} A_{n m+l} \\ &\times \exp \left\{ -i \left[\left(n + \frac{k}{2} \right) T_x \omega_{0x} + \left(m + \frac{l}{2} \right) T_y \omega_{0y} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

За аналогічною схемою легко показати що для випадку $k > 0$ і $l < 0$ добуток коефіцієнтів $A_{n+k m} A_{n m+l} \rightarrow A_{n' m'+l} A_{n'+k m}$. Отже теж виконується співідношення:

$$Q_{-k-l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) = Q_{k l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}); \quad (21)$$

Приймаючи до уваги отримані вище формули (18) і (20), можна зробити принципово важливий висновок, що частотні функції $Q_{k l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y})$, $Q_{k l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y})$ (які задаються виключно бінарним розподілом фази) за формулою співпадають з означенням (9) базового функціоналу розподілу. Головна відмінність функціоналу розподілу фази від координатно-частотного розподілу елементарної комірки полягає в тому, що такий розподіл дискретно-неперервний: дискретний за індексами k і l , тобто по координаті, і неперервний за просторовою частотою $\omega_0(\omega_{0x}, \omega_{0y})$. Однак, він не зводиться до симетричної форми (9) в силу того, що індекси сумування є цілими числами.

Таким чином, на основі формули (14) отримуємо загальний вираз для координатно-частотного розподілу бінарного фазового елемента:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{FF^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; x_0, y_0) &= C_{NM} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} Q_{k l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) \\ &\times \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}; x_0 - kT_x) \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0y}; y_0 - lT_y), \end{aligned} \quad (22)$$

де для $k < 0, l < 0$ функціонали розподілу фази (18), (20) зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} Q_{-k-l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) &= Q_{k l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}); \\ Q_{k-l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) &= Q_{k l}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}); \end{aligned} \quad (23)$$

В розгорнутому вигляді формула (22) приводиться в роботі авторів [12].

В результаті проведених вище розрахунків приходимо до висновку, що координатно-частотний розподіл фазового елемента однозначно визначається через функції $Q_{k l}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y})$, які задаються розподілом фази, та координатно-частотним розподілом елементарної комірки.

В роботі [15] для координатно-частотного розподілу прямокутного імпульсу виведена формула

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{f_0 f_0^*}(x_0; \omega_0) &= \frac{\sin \left(\frac{\omega_0}{2} [T_x + x_0] \right)}{\frac{\omega_0 T_x}{2}} \text{rect} \left(\frac{T_x + 2x_0}{2T_x} \right) \\ &+ \frac{\sin \left(\frac{\omega_0}{2} [T_x - x_0] \right)}{\frac{\omega_0 T_x}{2}} \text{rect} \left(\frac{T_x - 2x_0}{2T_x} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

З використанням (1) дана формула дозволяє записати координатно-частотний розподіл елементарної комірки у вигляді:

$$\mathcal{W}_{f_0 f_0^*}(x_0, y_0; \omega_{0x}, \omega_{0y}) = \mathcal{W}_{f_0 f_0^*}(x_0; \omega_{0x}) \mathcal{W}_{f_0 f_0^*}(y_0; \omega_{0y}). \quad (25)$$

Проаналізуємо часткові випадки координатно-частотного розподілу (22).

Випадок $\omega_0 = 0$. В загальному випадку, виходячи із означення (9) та тотожності (11), в координатній площині за розподілом визначається автокореляційна функція оптичних сигналів:

$$\mathcal{W}_{FF^*}(0, 0; x_0, y_0) \equiv \mathcal{W}_{ff^*}(x_0, y_0; 0, 0) = \varphi(x_0, y_0). \quad (26)$$

Автокореляційна функція елементарної комірки відповідно до формули (15) має вигляд

$$\mathcal{W}_{f_0 f_0^*}(x_0, y_0; 0, 0) = \varphi(x_0, y_0) = \text{tri} \left(\frac{x_0}{T_x} \right) \text{tri} \left(\frac{y_0}{T_y} \right), \quad (27)$$

і еквівалентна добутку трикутних імпульсів [13]. В частотному представленні формула (27) згідно тотожності (11) має вигляд:

$$\begin{aligned} W_{F_0 F_0^*}(0, 0; x_0, y_0) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{T_x u_x}{2\pi}\right) \right|^2 \\ &\times \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{T_y v_y}{2\pi}\right) \right|^2 \exp[i(x_0 u_x + y_0 v_y)] du_x dv_y. \end{aligned} \quad (28)$$

Відповідно до формули (22) зміщені розподіли в еквідистантних точках (x_k, y_l) , кратних розміру елементарної комірки, можна записати:

$$\mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(0; x_k - kT_x) = \begin{cases} 1; & \text{для } x_k - kT_x = 0 \\ 0; & \text{для } x_k - kT_x \neq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Аналогічний вираз маємо для $\mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(0; y_l - lT_y)$.

В результаті, на основі формули (22) отримуємо автокореляційну функцію бінарного фазового елементу у формі розкладу за координатно-частотними розподілами елементарних комірок:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0) &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} Q_{k l}^{(1)} \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(0; x_0 - kT_x) \\ &\times \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(0; y_0 - lT_y), \end{aligned} \quad (30)$$

де коефіцієнтами розкладу виведених вище формул (18), (20) є величини

$$Q_{k l}^{(1)} = Q_{k l}^{(1)}(0, 0) = \sum_{n=1}^{N-k} \sum_{m=1}^{M-l} A_{n+k m+l} A_{n m}, \quad (31)$$

$$Q_{k l}^{(2)} = Q_{k l}^{(2)}(0, 0) = \sum_{n=1}^{N-k} \sum_{m=1}^{M-l} A_{n+k m} A_{n m+l} \quad (32)$$

які набувають змісту дискретних кореляційних функцій бінарного розподілу фази. Для даних функцій виконуються співвідношення (23). Наявність двох видів кореляційних функцій пояснюється тим, що коефіцієнтами $Q_{k l}^{(1)}$ описується кореляція двох фазових елементів на площині в напрямі I-III квадрантів, а коефіцієнтами $Q_{k l}^{(2)}$ - в напрямі II-IV квадрантів.

Випадок $r_0 = 0$. В даному випадку за означення (10) в частотній площині координатно-частотний розподіл задає автокореляційну функцію двох сигналів.

На основі формули (15), (22) з врахуванням формули (15) отримуємо

$$\mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}; kT_x) = \begin{cases} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{0x} T_x}{2\pi}\right) & \text{для } k = 0; \\ 0; & \text{для } k \neq 0. \end{cases} \quad (33)$$

Аналогічний вираз має місце і для розподілу $\mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0y}; lT_y)$. Отже, зовнішні суми по k і l зводяться до одного виразу

$$\begin{aligned} Q_{00}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) &\equiv Q_{00}^{(2)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n m} A_{n m} \\ &\times \exp\{-i[nT_x \omega_x + mT_y \omega_y]\}, \end{aligned} \quad (34)$$

Суми по n і m вказують на те, що відбувається по-елементне множення кожної елементарної комірки, тобто реалізується операція *множення Адамара-Шура* [24] бінарного фазового елемента самого на себе

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A} = [A_{n m} A_{n m}] = \mathbf{O}, \quad (35)$$

де всі елементи матриці \mathbf{O} рівні +1. В наступному розділі 3.2 буде показано, що операція (35) реалізується в оптичній схемі.

В загальному випадку, для координатно-частотного розподілу бінарного фазового елемента справедливий вираз

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{FF^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; 0, 0) &= C_{NM}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) Q_{00}^{(1)}(\omega_{0x}, \omega_{0y}) \\ &\times \mathcal{W}_{F_0 F_0^*}(\omega_{0x}, \omega_{0y}; 0, 0), \end{aligned} \quad (36)$$

який в даному випадку зводиться до фур'є-спектра фазового елемента (4) з постійним розподілом фази.

3. ТИПОВІ ОПТИЧНІ СХЕМИ

На основі методу розподілу сигналів опишемо типові оптичні схеми використання бінарних фазових елементів і покажемо, що часткові випадки функціоналів (30) та (36) реалізуються оптичним шляхом.

3.1. Схема корелятора сумісного фур'є-перетворення.

Опишему схему (рис. 1) корелятора сумісного фур'є-перетворення (JTC) [5], на вході якого встановлений бінарний фазовий елемент (розглядається спрощений варіант корелятора JTC без зміщення вхідних зображень). На виході першого каскаду розподіл дифрагованої амплітуди $g_1(\mathbf{r})$ описується

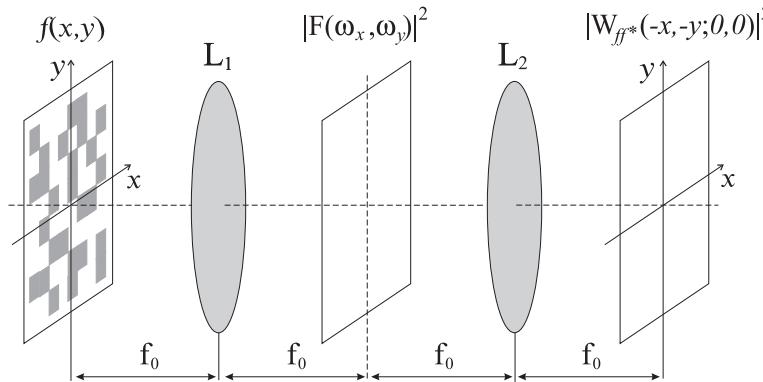


Рис. 1. Схема корелятора сумісного фур'є-перетворення

$$\mathcal{W}_{g_1 g_1^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{ff^*}(a_{11}\mathbf{r}_0 + a_{12}\omega_0; a_{21}\mathbf{r}_0 + a_{22}\omega_0). \quad (37)$$

Отже за розподілом фазового елемента $\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0)$ в результаті лінійного перетворення його спряжених координат легко розраховується розподіл дифрагованої амплітуди, який формується даним елементом.

В схемі корелятора JTC реалізується умова точного фур'є-перетворення. Відповідно перетворення спряжених координат $(\mathbf{r}_0; \omega_0)$ розподілу вхідного сигналу описується матрицею:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{f_0}{\kappa} \\ \frac{\kappa}{f_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

де $\kappa = 2\pi/\lambda$ - хвильове число, λ - довжина хвилі світла, f_0 - фокусна віддаль лінзи. Звідси в частотній площині формується розподіл

$$\mathcal{W}_{g_1 g_1^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{ff^*}\left(-\frac{f_0}{\kappa}\omega_0; \frac{\kappa}{f_0}\mathbf{r}_0\right). \quad (39)$$

Покладаючи в цьому розподілі $\mathbf{r}_0 = 0$ за формулою відновлення (12) отримуємо вінерівський спектр просторових частот фазового елемента

$$|g_1(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{(\lambda f_0)^2} \left| F\left(\frac{\kappa}{f_0}\mathbf{r}\right) \right|^2. \quad (40)$$

Зауважимо, що це еквівалентно застосуванню зворотньої схеми відновлення (13) до координатно-частотного розподілу вхідного сигналу.

Розподіл дифрагованого світла (40), що формується на виході першого каскаду, приймається вхідним сигналом для другого каскаду корелятора JTC. Тоді, виходячи із формул (9)-(11), в частотному представленні координатно-частотний розподіл вхідного сигналу (40) можна записати:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{|g_1|^2 |g_1|^2}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{ff^*} \left(-\frac{f_0}{\kappa} \left[\Omega + \frac{\omega_0}{2} \right]; 0 \right) \\ & \times \mathcal{W}_{ff^*} \left(-\frac{f_0}{\kappa} \left[\Omega - \frac{\omega_0}{2} \right]; 0 \right) \\ & \times \exp(i\mathbf{r}_0 \Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (41)$$

За аналогічною схемою в другому каскаді виконується точне фур'є-перетворення, яке описується матрицею (38) (приймається, що фокусні віддалі лінз обох каскадів рівні). Тоді, розподіл дифрагованої амплітуди на виході другого каскаду теж виражається через розподіл вхідного сигналу

$$\mathcal{W}_{g_2 g_2^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{|g_1|^2 |g_1|^2} \left(-\frac{f_0}{\kappa} \omega_0; \frac{\kappa}{f_0} \mathbf{r}_0 \right). \quad (42)$$

За загальною схемою відновлення (12) на виході другого каскаду формується розподіл інтенсивності кореляційного поля

$$|g(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\kappa}{f_0} \right)^2 |\mathcal{W}_{ff^*}(-\mathbf{r}; 0)|^2, \quad (43)$$

який описується координатно-частотним розподілом вхідного сигналу на нульовій просторовій частоті.

3.2. Множення Адамара-Шура в схемі $4f_0$.

Опишемо схему $4f_0$, на вході якої встановлений бінарний фазовий елемент $f_A(x, y)$, який описується матрицею $\mathbf{A} = [A_{nm}]$ а на виході - фазовий елемент $f_B(x, y)$ з матрицею $\mathbf{B} = [B_{nm}]$ (Рис. 2). Приймаємо, що для даних елементів побудовані координатно-частотні розподіли: $\mathcal{W}_{f_A f_A^*}(r_0; \omega_0)$, $\mathcal{W}_{f_B f_B^*}(r_0; \omega_0)$

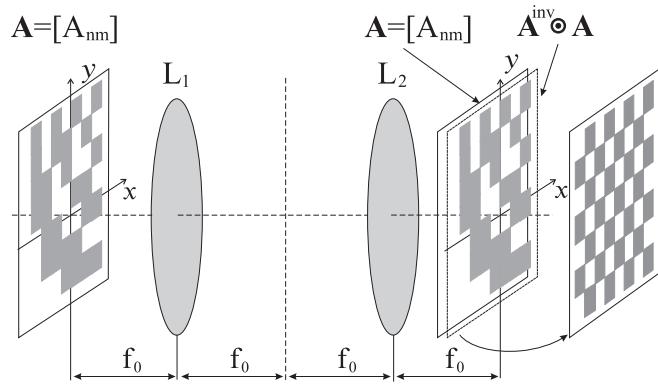


Рис. 2. Оптична схема, в якій реалізується множення Адамара-Шура $\mathbf{A}^{\text{inv}} \odot \mathbf{B}$ двох фазових елементів.

В результаті першого та другого фур'є-перетворення перетворення спряжених координат розподілу першого елемента описується добутком матриць типу (38)

$$\mathbf{M}_{4f_0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Тоді дифрагована амплітуда $g_1(x, y)$, яка формується першим фазовим елементом на виході схеми $4f_0$, на вході другого фазового елемента описується координатно-частотним розподілом

$$\mathcal{W}_{g_1 g_1^*}(r_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{f_A f_A^*}(-r_0; -\omega_0). \quad (45)$$

Наявність другого фазового елемента на виході схеми $4F$ відповідає оптичній реалізації *множення Адамара-Шура* [24] інверсного першого фазового елемента на другий фазовий елемент:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\text{inv}} \odot \mathbf{B} = [A_{N+1-n} M+1-m B_{n,m}]. \quad (46)$$

Таке множення описується згорткою по просторовій частоті ω_0 розподілів двох бінарних фазових елементів

$$\mathcal{W}_{f_C f_C^*}(r_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{f_A f_A^*}(-r_0; -\omega_0) \otimes_{\omega_0} \mathcal{W}_{f_B f_B^*}(r_0; \omega_0). \quad (47)$$

Доповнимо схему $4F$ каскадом $2F$, в якому виконується точне фур'є-перетворення елемента адамарового множення. Такий каскад описується матрицею (38) і, відповідно до формули (39), розподіл дифрагованої амплітуди

$$\mathcal{W}_{gg^*}(r_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{f_C f_C^*} \left(-\frac{f_0}{\kappa} \omega_0; \frac{\kappa}{f_0} r_0 \right), \quad (48)$$

записується через координатно-частотний розподіл елемента, що є результатом адамарового множення.

На основі формули (47) інтенсивність дифрагованого світла в площині на виході каскаду $2F$ записується

$$\begin{aligned} |g(r)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{f_A f_A^*} \left(\frac{f_0}{\kappa} \omega_0; -\Omega \right) \\ &\quad \times \mathcal{W}_{f_B f_B^*} \left(-\frac{f_0}{\kappa} \omega_0; -\Omega \right) \exp(i\omega_0 r) d\Omega d\omega_0 \end{aligned} \quad (49)$$

Якщо підінтеральні розподіли бінарних фазових елементів записати в частотному представленні (10), то подвійний інтеграл має розв'язок

$$|g(r)|^2 = \left| \mathcal{W}_{F_A F_B} \left(\frac{\kappa}{f_0} r; 0 \right) \right|^2. \quad (50)$$

Таким чином, приходимо до висновку, що вінерівський спектр просторових частот елемента адамарового множення описується взаємним координатно-частотним розподілом двох фазових елементів на нульовій координаті. Зауважимо, що у випадку одного фазового елемента (див. формулу (40)) його вінерівський спектр просторових частот відновлюється за схемою (12), тобто в результаті зворотнього фур'є-перетворення координатно-частотного розподілу. Як буде показано далі, ці відмінності вказують на різні механізми формування вінерівського спектру різних класів фазових елементів.

Порівнюючи формули (50) і (43) бачимо, що часткові випадки координатно-частотного розподілу реалізуються в описаних вище оптичних схемах.

4. ВІНЕРІВСЬКІ СПЕКТРИ БІНАРНИХ ФАЗОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для розрахунку вінерівського спектру просторових частот використаємо зворотню схему відновлення (13). Скористаємося частотним представленням (28) КЧР елементарної комірки і підставимо в формулу (22). Тоді фур'є-перетворення (4) виразиться через δ -функцію і в результаті для вінерівського спектра просторових частот фазового елемента отримаємо формулу:

$$|F(\omega_x, \omega_y)|^2 = |F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)|^2 \mathcal{M}(\omega_x, \omega_y), \quad (51)$$

де модулююча функція $\mathcal{M}(\omega_x, \omega_y)$, яка визначається виключно бінарним розподілом фази, має вигляд

$$\mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \sum_{l=-(M-1)}^{M-1} Q_{k,l}^{(1)} \exp[-i(\omega_x k T_x + \omega_y l T_y)], \quad (52)$$

або в розгорнотому вигляді [12]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) = & Q_{0,0}^{(1)} + 2 \left[\sum_{k=1}^{N-1} Q_{k,0}^{(1)} \cos \omega_x k T_x \right. \\ & + \sum_{l=1}^{M-1} Q_{0,l}^{(1)} \cos \omega_y l T_y + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} \left[Q_{k,l}^{(1)} \cos(\omega_x k T_x + \omega_y l T_y) \right. \\ & \left. \left. + Q_{k,l}^{(2)} \cos(\omega_x k T_x - \omega_y l T_y) \right] \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Модулююча функція характеризується рядом особливостей. Для довільного розподілу фази коефіцієнти Фур'є $Q_{k,l}^{(1)}$ і $Q_{k,l}^{(2)}$ завжди рівні цілому числу, причому завжди $\mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) \geq 0$. ІІ спектр дискретний з набором частот $\Omega_n = 2\pi n/T_x$, $n = 0 \div (N-1)$ і відповідно $\Omega_m = 2\pi m/T_y$, $m = 0 \div (M-1)$. Наявність граничних максимальних просторових частот Ω_{N-1} і Ω_{M-1} вказує на те, що модулююча функція характеризується мінімальним періодом, який задається розмірністю N і M фазового елемента.

Дослідимо властивості вінерівського спектру бінарних фазових елементів. Оскільки кожен з фазових елементів записується матрицею коефіцієнтів (3) розмірності NM , то можна виділити два характерні класи матриць, які представляють інтерес в оптиці.

4.1. Клас ортогональних фазових елементів.

Означення. Клас ортогональних фазових елементів описується квадратною матрицею \mathbf{A} , для якої виконується умова ортогональності [14]

$$\mathbf{A} \mathbf{A}' = N \mathbf{I}, \quad (54)$$

де \mathbf{I} – одинична матриця, N -розмірність матриці, \mathbf{A}' - транспонована матриця. Оскільки елементи матриці $A_{mm} = +1; -1$, то даний клас фазових елементів представлений ортогональними матрицями Адамара \mathbf{H}_N розмірності $N = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$. Відомі [20] різні способи побудови матриць Адамара довільної розмірності N , кратної числу 4. В залежності від способу побудови матриці Адамара характеризуються певними властивостями симетрії.

На рис. 3 приведені дві типові ортогональні матриці Адамара, фундаментальною властивістю яких є виконання умови ортогональності (54) для всіх рядків та сповідців

$$\sum_{m=1}^M H_{n+k,m} H_{n,m} = 0 \quad (k \neq 0), \quad \sum_{n=1}^N H_{n,m+l} H_{n,m} = 0 \quad (l \neq 0). \quad (55)$$

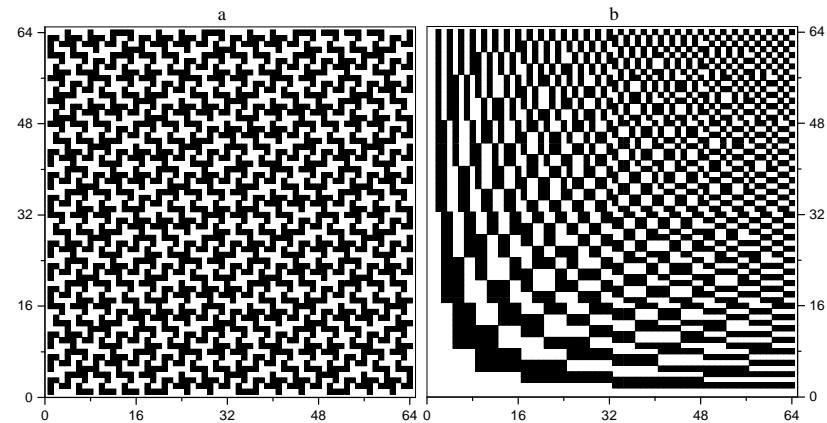


Рис. 3. Ортогональні бінарні фазові елементи. а) - елемент S -подібного типу; б) - елемент нормалізованого типу.

Для класу ортогональних фазових елементів внаслідок властивостей (55) кореляційні коефіцієнти рівні нулю

$$Q_{k,0}^{(1)} = Q_{0,l}^{(1)} \equiv 0. \quad (56)$$

За даної умови формула (53) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) &= Q_{00}^{(1)} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)}] \cos \omega_x k T_x \cos \omega_y l T_y \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)} - Q_{kl}^{(2)}] \sin \omega_x k T_x \sin \omega_y l T_y. \end{aligned} \quad (57)$$

Таким чином, модуляційна функція і відповідно вінерівський спектр класу ортогональних фазових елементів цілком описується кореляційними коефіцієнтами $Q_{kl}^{(1)}$ і $Q_{kl}^{(2)}$.

В напрямі ортогональності (для прикладу вздовж осі ω_x) модулююча функція (57) описується формулою

$$\mathcal{M}(\omega_x, 0) = NM + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[\sum_{l=1}^{M-1} Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)} \right] \cos \omega_x k T_x. \quad (58)$$

Із даної формули видно, що для різних типів ортогональних фазових елементів в силу того, що для різних k і l коефіцієнти $Q_{kl}^{(1)}$ і $Q_{kl}^{(2)}$ відмінні від нуля, вінерівський спектр фазового елемента (51) формується в результаті модуляції вінерівського спектру елементарної комірки $|F_0(\omega_x)|^2$ періодичною парною модуляційною функцією (58).

Для класу нормалізованих ортогональних фазових елементів функція (58) має свої особливості. При довільно вибраній послідовності розміщення рядків (стовпців) елементарних комірок фазового елемента для кореляційних коефіцієнтів справедливі співвідношення:

$$A(l) = \sum_{k=1}^{N-1} [Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)}] \equiv 0; \quad A(k) = \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)}] \equiv 0. \quad (59)$$

Звідси слідує, що в напрямі ортогональності $\mathcal{M}(\omega_x, 0) \equiv NM$, $\mathcal{M}(0, \omega_y) \equiv NM$ внаслідок чого вінерівський спектр класу ортогональних фазових елементів вироджується в спектр елементарної комірки.

На рис. 4 приведені одновимірні (вздовж осі x) модуляційні функції (58) вінерівського спектру і відповідні їм кореляційні коефіцієнти (59) ортогональних фазових елементів, показаних на рис. 3.

Характерно, що для фазового елемента, який описується канонічною матрицею Адамара, $\mathcal{M}(\omega_x, 0) = \text{const}$. Чисельні розрахунки

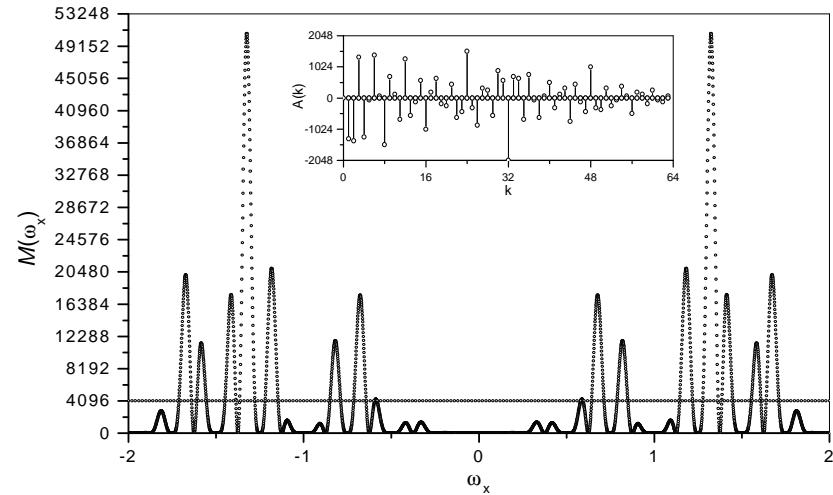


Рис. 4. Вінерівські спектри ортогональних фазових елементів: 1) - канонічна матриця Адамара; 2) - випадок S -подібної (ненормалізованої) матриці Адамара.

показують, що для всіх k і l $Q_{kl}^{(1)} = -Q_{kl}^{(2)}$. Звідси співвідношення (59) виконується автоматично. Це загальна закономірність для всіх нормалізованих матриць Адамара.

Як видно із рис. 4 для загального випадку ненормалізованих матриць Адамара кореляційні конфіцієнти $A(k) \neq 0$ і, відповідно, співвідношення (59) не виконується.

4.2. Клас колінеарних фазових елементів.

Означення. Клас колінеарних фазових елементів описується матрицею \mathbf{C} , яка побудована за правилом прямого (кронекерівського) добутку [14] (\otimes -символ прямого добутку) матриці-рядка $\mathbf{X} = [X_{n1}]$ та матриці-стовпця $\mathbf{Y} = [Y_{1m}]$

$$\mathbf{C} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} = [X_{n1} \mathbf{Y}]. \quad (60)$$

Всі рядки (стовпці) колінеарної матриці з точністю до знаку рівні між собою

$$\sum_{l=1}^M C_{nl} C_{ml} = X_n X_m \sum_{l=1}^M Y_l Y_l = \pm 1 M;$$

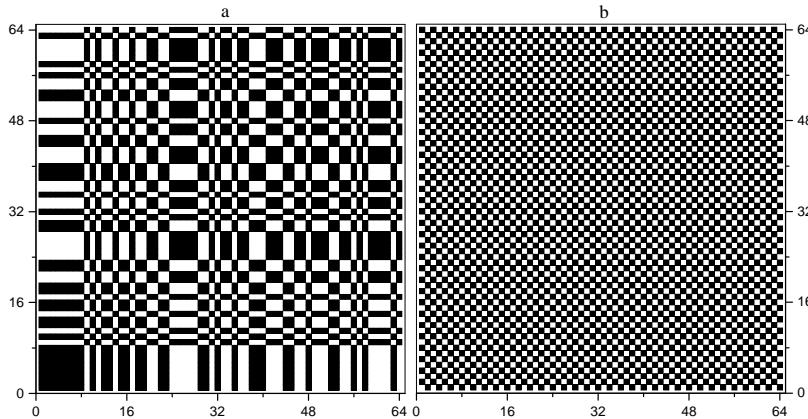


Рис. 5. Колінеарні бінарні фазові елементи. Випадок а) - елемент типу; б) - елемент типу "шахової структури".

$$\sum_{k=1}^N C_k n C_k m = Y_n Y_m \sum_{k=1}^N X_k X_k = \pm 1 N. \quad (61)$$

Колінеарними матрицями описується клас періодичних бінарних фазових елементів, до якого, зокрема, належить матриця, що описує фазовий елемент типу "шахової структури" (Рис. 5 (b)).

Для класу колінеарних елементів кореляційні коефіцієнти (31), (32) спрощуються до вигляду

$$Q_{k0}^{(1)} = M Q_k^{(x)}; \quad Q_{0l}^{(1)} = N Q_l^{(y)}; \quad (62)$$

$$Q_{kl}^{(1)} = Q_{kl}^{(2)} = Q_k^{(x)} Q_l^{(y)}, \quad (63)$$

де дискретні кореляційні функції базисного рядка та стовпця записуються

$$Q_k^{(x)} = \sum_{n=1}^{N-k} X_{n+k} X_n; \quad Q_l^{(y)} = \sum_{m=1}^{M-l} Y_{m+l} Y_m. \quad (64)$$

Відповідно, модуляційна функція записується у вигляді добутку

$$\mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{M}(\omega_x) \mathcal{M}(\omega_y). \quad (65)$$

де одновимірні періодичні функції у вигляді ряду Фур'є з кореляційними коефіцієнтами (64) мають вигляд

$$\mathcal{M}(\omega_x) = N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} Q_k^{(x)} \cos \omega_x k T_x; \quad (66)$$

$$\mathcal{M}(\omega_y) = M + 2 \sum_{l=1}^{M-1} Q_l^{(y)} \cos \omega_y l T_y \quad (67)$$

Ці функції мають особливість в точці $\omega_x = \omega_y = 0$. При умові, що базисний рядок X_n та базисний сповідь Y_m мають $N/2$ і відповідно $M/2$ елементів з -1, то для кореляційних коефіцієнтів (64) справедливе співвідношення

$$N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} Q_k^{(x)} = 0; \quad M + 2 \sum_{l=1}^{M-1} Q_l^{(y)} = 0. \quad (68)$$

Чисельними розрахунками встановлено, що кількість змін знаку кореляційних коефіцієнтів $Q_k^{(x)}$ і $Q_l^{(y)}$ рівна кількості змін знаку базисних векторів X_n, Y_m .

5. СТАТИСТИЧНИЙ ОПИС ФАЗОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Даний розділ присвячений систематизації різних типів бінарних фазових елементів з використанням статистичних методів. Раніше були означені два класи БФЕ: ортогональні (Рис. 3), які побудовані на матрицях Адамара H_N (54) і колінеарні (Рис. 5). В цьому розділі введено клас випадкових та нові класи квазіортогональних та квазіколінеарних фазових елементів і запропоновано їх опис на основі статистичного підходу.

5.1. Клас випадкових фазових елементів

Випадкова матриця (Рис. 6) визначається імовірністю $q_{nm}(\xi)$ того, що її елемент A_{nm} приймає значення $\xi = \pm 1$ (далі будемо розглядати тільки однорідні матриці, для яких $q_{nm}(\xi) = q(\xi) = \{q_+, q_-\}$).

Для випадкових матриць скінченої розмірності за такі імовірності можна прийняти частоти випадання елементів рівних ± 1 .

Для характеристики матриці доцільно ввести параметр

$$r = \frac{\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-}{\sqrt{NM}}, \quad (69)$$

де \mathcal{N}_+ (\mathcal{N}_-) – число елементів рівних +1 (-1). Тоді "імовірності" q_+ і q_- можна виразити через параметр (69)

$$q_+ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{NM}} \right), \quad q_- = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{NM}} \right). \quad (70)$$

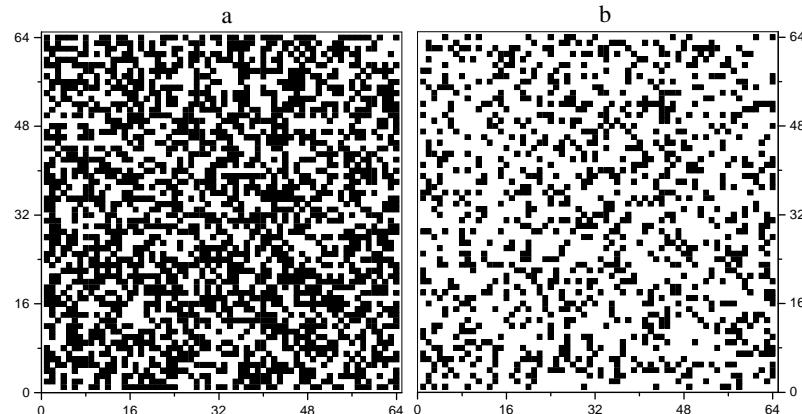


Рис. 6. Випадкові бінарні фазові елементи: а) - $r = 0$; б) - $r = 64$.

В даній роботі (в підрозділі 5.4) запропонованій алгоритм, який дозволяє зортогональних чи колінеарних матриць будувати як випадкові матриці, так і матриці, що займають проміжне становище і творять нові класи *квазіортогональних* та *квазіколінеарних* матриць.

Відомо, що ортогональність матриці \mathbf{A} не змінюється як при довільних перестановках рядків чи стовпців між собою, так і при зміні їх знаку. В зв'язку з цим зручно ввести допоміжні матриці \mathbf{S}^r і \mathbf{S}^c для опису міри ортогональності вихідних матриць \mathbf{A} .

Введемо матриці \mathbf{S} з допомогою наступних співвідношень

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^r &= \mathbf{A}\mathbf{A}' \iff S_{n,m}^r = \sum_{l=1}^N A_{n,l} A_{m,l}, \\ \mathbf{S}^c &= \mathbf{A}'\mathbf{A} \iff S_{n,m}^c = \sum_{k=1}^N A_{k,n} A_{k,m},\end{aligned}\quad (71)$$

де \mathbf{A}' транспонована матриця \mathbf{A} . Для ортогональних матриць $\mathbf{A} = \mathbf{H}$ обидві ці матриці діагональні і рівні між собою $\mathbf{S}^r = \mathbf{S}^c = N\mathbf{I}$, \mathbf{I} – одинична матриця. Для колінеарних матриць $A_{n,m} = X_n Y_m$ матриці (71) загалом суттєво різняться між собою (див. (61)), але для симетричних матриць \mathbf{A} , коли $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, вони також рівні.

Для випадкових матриць \mathbf{A} матриці \mathbf{S}^r і \mathbf{S}^c завжди відмінні між собою, однак статистичний розподіл недіагональних елементів обидвох цих матриць, як показано в наступному підрозділі, є той самий.

5.2. Розподіл недіагональних елементів матриць \mathbf{S}

Введемо розподіл недіагональних елементів матриці \mathbf{S} з допомогою співвідношення

$$p(s) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \delta_{s-S_{i,j},0}, \quad (72)$$

де $\delta_{a,b}$ – символ Кронекера. Для ортогональних матриць він має вигляд одиничного піка локалізованого в нулі (Рис. 7 а)

$$p(s) = \delta_{s,0}, \quad (73)$$

а для колінеарних матриць – двох піків локалізованих в точках $s = -N$ і $s = N$ (Рис. 7 б)

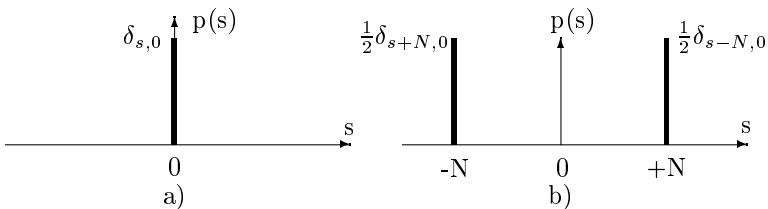


Рис. 7. Розподіли недіагональних елементів матриці \mathbf{S} двох класів БФЕ: а) - ортогональні; б) - колінеарні.

$$\begin{aligned}p(s) &= P^- \delta_{s+N,0} + P^+ \delta_{s-N,0}, \\ P^- &= 2 \frac{n_+^Z n_-^Z}{N(N-1)}, \quad P^+ = 1 - P^-,\end{aligned}\quad (74)$$

де n_+^Z – число додатних одиниць вектора \mathbf{Z} , $n_-^Z = 1 - n_+^Z$ – число від’ємних одиниць вектора \mathbf{Z} , а вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ для матриць \mathbf{S}^r збудованих з рядків, і $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}$ для матриць \mathbf{S}^c збудованих із стовпців. Отже розподіл (74) для матриць \mathbf{S}^r і \mathbf{S}^c в загальному випадку відмінні, якщо співвідношення додатних і від’ємних одиниць в базових векторах \mathbf{X} і \mathbf{Y} різні, але співпадають коли $n_+^{\mathbf{X}} = n_+^{\mathbf{Y}}$ або $n_+^{\mathbf{X}} = n_-^{\mathbf{Y}}$.

Нижче буде показано, що для випадкових матриць розподіл недіагональних елементів у матриць \mathbf{S}^r і \mathbf{S}^c є тим самим і залежить тільки від розмірності матриць N і від параметра r . Тому, для опису статистичних властивостей ортогональних та випадкових і, як далі

буде показано, квазіортогональних та квазіколінеарних матриць достатньо обмежитися розглядом однієї з матриць \mathbf{S} . Це відноситься також до класу колінеарних матриць з однаковим співвідношенням додатних і від'ємних елементів

Знайдемо вигляд функції, що описує розподіл (72) для випадкової матриці. Густину розподілу значень елементів випадкової матриці можна записати у такому вигляді

$$q(l) = q_+ \delta_{l-1,0} + q_- \delta_{l+1,0}. \quad (75)$$

Оскільки в означення елементів матриці \mathbf{S} входять добутки елементів матриці \mathbf{A} , то спочатку знайдемо розподіл добутку двох елементів, розподілених за (75). Як відомо [22], такий розподіл для дискретних величин визначається за правилом

$$\begin{aligned} g(j) &= \sum_{l_1, l_2 : l_1, l_2 \leq j} q(l_1)q(l_2) \\ &= \sum_{l_1, l_2 : l_1, l_2 \leq j} \{q_+ \delta_{l_1-1,0} + q_- \delta_{l_1+1,0}\} \\ &\quad \times \{q_+ \delta_{l_2-1,0} + q_- \delta_{l_2+1,0}\} \\ &= (q_+^2 + q_-^2) \delta_{j-1,0} + 2q_+ q_- \delta_{j+1,0}. \end{aligned} \quad (76)$$

або, ввівши тут нові позначення $p_+ = q_+^2 + q_-^2 = \frac{1}{2}(1 + r^2/N^2)$, $p_- = 2q_+ q_- = \frac{1}{2}(1 - r^2/N^2)$, отримуємо

$$g(j) = p_+ \delta_{j-1,0} + p_- \delta_{j+1,0}. \quad (77)$$

Згідно означення (72) необхідно знайти розподіл суми N випадкових величин розподілених за (77). На першому кроці знайдемо розподіл суми двох величин

$$\begin{aligned} g_2(l) &= \sum_j g(l-j)g(j) \\ &= \sum_j \{p_+ \delta_{l-j-1,0} + p_- \delta_{l-j+1,0}\} \{p_+ \delta_{j-1,0} + p_- \delta_{j+1,0}\} \\ &= p_+^2 \delta_{l-2,0} + 2p_+ p_- \delta_{l,0} + p_-^2 \delta_{l+2,0}, \end{aligned} \quad (78)$$

далі — розподіл суми трьох випадкових величин

$$\begin{aligned} g_3(l) &= \sum_j g_2(l-j)g(j) \\ &= p_+^3 \delta_{l-3,0} + 3p_+^2 p_- \delta_{l-1,0} + 3p_+ p_-^2 \delta_{l+1,0} + p_-^3 \delta_{l+3,0}. \end{aligned} \quad (79)$$

В загальному випадку для суми N випадкових величин

$$p(s) \approx g_N(s) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p_+^{N-k} p_-^k \delta_{s-(N-2k),0}. \quad (80)$$

При умові, що N — велике число відповідно до граничної теореми Муавра-Лапласа [23] для розподілу (72) отримуємо гаусову форму

$$\begin{aligned} p(s) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_+ p_-}} \sum_{k=0}^N \exp\left(-\frac{(N-k-Np_+)^2}{2Np_+ p_-}\right) \delta_{s-(N-2k),0} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} \exp\left(-\frac{(s-\langle s \rangle)^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (81)$$

де введено позначення

$$\sigma^2 = 4Np_+ p_-, \quad \langle s \rangle = N(2p_+ - 1) = \frac{r^2}{N}. \quad (82)$$

Величина $\langle s \rangle$ визначає зміщення положення максимуму розподілу. Якщо $\langle s \rangle = 0$, як це має місце для квазіортогональних (Рис. 10) та випадкових матриць (Рис. 8), то максимум розподілу досягається в початку координат. Для квазіколінеарних матриць $\langle s \rangle \neq 0$ має місце зміщення максимуму з початку координат (див. наприклад Рис. 13). Параметр σ описує дисперсію розподілу (81) і, як буде видно далі, збільшується при наближенні до області хаотичності. Саме величина подібна до параметра σ використовується в роботі [3] для оцінки граничного співвідношення сигнал/шум випадкових фазових масок. Явні залежності величин σ і $\langle s \rangle$ від параметрів задачі будуть приведені нижче.

Зауважимо, що розподіл $p(s)$ визначений на множині цілих парних чисел і умова його нормування $\sum_{n=-N}^N p(n) = 1$, в той час коли інтеграл від $p(s)$ за неперервною змінною s дає в два рази більший результат.

В оптических кореляторах найчастіше використовуються фазові елементи, що описуються матрицями з малими значеннями параметра r . В цьому випадку $\sigma^2 \approx N$ і $\langle s \rangle \ll 1$. Оскільки розподіл $p(s)$ приймає відмінні від нуля значення тільки для цілих парних значень аргумента s , то зрозуміло, що його максимум буде при $s = 0$, і тільки коли $r = \sqrt{N}$ то $p(0) = p(2)$, тобто число ортогональних рядків (стовпців) рівне числу рядків (стовпців) із скалярним добутком рівним 2.

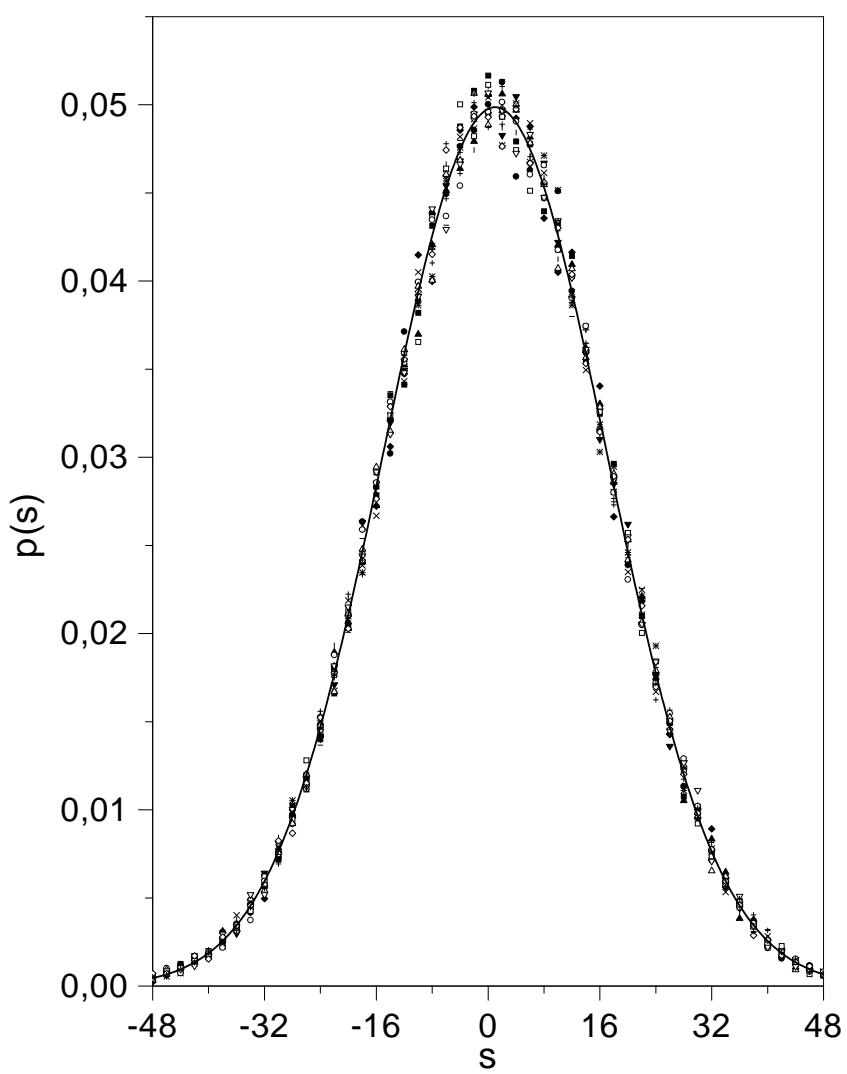


Рис. 8. Розподіли недіагональних елементів матриць \mathbf{S} для 16 випадкових матриць

На Рис. 8 зображені такі розподіли для шістнадцяти випадкових матриць розмірності $N = 256$ з $r = 16$, $d_A \approx 257$, а суцільною кривою—відповідний розподіл (81). Добре узгодження чисельних результатів з аналітичними, отриманими в припущенні про статистичний характер процесу хаотизації, на нашу думку, обґрунтуете правомірність статистичного опису так збудованих бінарних матриць. Строго кажучи, вираз (81) описує розподіл не окремої бінарної матриці, а засереднений розподіл великого ансамблю матриць, в який входить багато класів еквівалентності, оскільки всі матриці утворені переставлянням рядків чи стовпців мають один і той самий розподіл. Параметри розподілів випадкових і близьких до них матриць не змінюються і при зміні знаку рядка чи стовпця. Конкретний вигляд розподілу (72) для кожної окремої матриці завдяки наявності флюктуацій відрізняється від середнього, але, із зростанням розмірності матриці відносний вплив флюктуацій зменшується.

5.3. Означення параметра неортогональності

У кожному з описаних вище класів матриць \mathbf{A} мова йшла про властивість ортогональності. Це пов’язано з тим, що ортогональність рядків (стовпців) бінарних матриць відіграє особливу роль: в матрицях Адамара всі рядки (стовпці) ортогональні між собою, у випадкових матрицях ортогональні пари рядків (стовпців) більше ніж інших, в колінеарних матрицях ортогональні пари рядків (стовпців) цілком відсутні. Тому для характеристики бінарної матриці в цілому введемо параметр *неортогональності* d_A в такий спосіб

$$d_A = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} S_{i,j}^2 = \sum_{s=-N}^N s^2 p(s). \quad (83)$$

В силу ортогональності матриць (54) параметр $d_A = 0$. Для колінеарних матриць відповідно до (61) маємо, що $S_{i,j} = \pm N$, тому $d_A = N^2$. Для випадкових матриць, як випливає з (81)-(82), знаходимо

$$d_A = \sigma^2 + \langle s \rangle^2 = N \left(1 + \frac{r^4}{N^3} - \frac{r^4}{N^4} \right). \quad (84)$$

Очевидним є також те, що параметр d_A не залежить від елементарних перетворень матриці \mathbf{A} , тобто від переставлення рядків (стовпців) і зміни їх знаку. Виникає запитання: чи існують бінарні матриці з параметрами неортогональності в межах $0 < d_A \lesssim N$ і $N \lesssim d_A < N^2$, які б природним чином (“неперервно”) переходили

від ортогональних до випадкових і від випадкових до колінеарних, чи навпаки. Алгоритм побудови таких матриць приведений нижче.

5.4. Хаотизація впорядкованих фазових елементів

Бінарні матриці з проміжними значеннями параметра неортогональності можна отримати з впорядкованих за алгоритмом *хаотизації*, кожен крок якого полягає в наступному: генеруємо випадкові координати двох елементів матриці \mathbf{A} і, якщо елементи різні, то переставляємо їх місцями. Використання цього алгоритму приводить до збільшення параметра неортогональності ортогональних матриць і до його зменшення для колінеарних матриць.

Після достатнього числа кроків хаотизації всі матриці стають випадковими і подальша хаотизація вже не виводить їх із цього класу. Такий вихід на насичення пов'язаний з тим, що алгоритм хаотизації переставляє будь-які різні елементи в тому числі і вже переставлені. Відзначимо, що в цьому процесі зберігається значення параметра r . Крім того, отримані матриці на протязі значного числа кроків "пам'ятують" свою початкову структуру і "забувають" її тільки після входу у випадкову область. Фізично це означає, що фазова маска містить великі зв'язані кластери початкової структури, розміри яких зменшуються з наближенням параметра неортогональності до значення приблизно рівного N .

5.5. Клас квазіортогональних фазових елементів

Описаний алгоритм проілюстрований Рис. 9, на якому зображені три маски, отримані з маски, що описується канонічною матрицею Адамара (Рис. 3 b), після $k = 16$ (a), $k = 70$ (b), $k = 2000$ (c) кроків хаотизації.

Як видно з рисунків, навіть при високих ступенях хаотизації в квазіортогональних масках можна віднайти їхню вихідну структуру, те ж спостерігається і у квазіортогональних масках.

Опишемо зміну параметрів розподілу (72) в процесі хаотизації ортогональних фазових елементів.

Отримаємо середнє число переставлених елементів \mathcal{N}_{ch} довільної бінарної матриці від номера кроку хаотизації k . Нехай на кроці k переставлено \mathcal{N}_{ch}^+ елементів, які початково мали значення +1 і \mathcal{N}_{ch}^- елементів, які початково мали значення -1, тоді на наступному кроці перше число зросте на $(\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_{ch}^+)/\mathcal{N}_+$ і зменшиться на $\mathcal{N}_{ch}^+/\mathcal{N}_-$

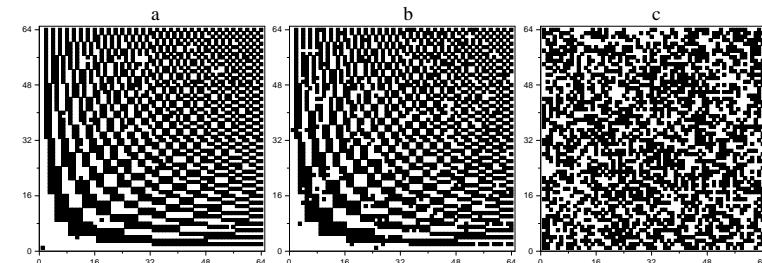


Рис. 9. Бінарні фазові елементи, отримані в результаті хаотизації структури, зображені на Рис. 3 b: а) – після 16 кроків хаотизації ($d_A \approx 4$); б) – після 70 кроків ($d_A \approx 16$); в) – після 2000 кроків ($d_A \approx 64$)

(в середньому), аналогічно зміниться і число \mathcal{N}_{ch}^- , тобто,

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{N}_{ch}^+ &= (1 - \mathcal{N}_{ch}^+ / \mathcal{N}_+) \Delta k - (\mathcal{N}_{ch}^+ / \mathcal{N}_-) \Delta k, \\ \Delta \mathcal{N}_{ch}^- &= (1 - \mathcal{N}_{ch}^- / \mathcal{N}_-) \Delta k - (\mathcal{N}_{ch}^- / \mathcal{N}_+) \Delta k.\end{aligned}\quad (85)$$

Додамо ці два вирази і перепишемо результат у вигляді диференціального рівняння

$$\frac{d\mathcal{N}_{ch}}{dk} = 2 - \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_- \mathcal{N}_+} \mathcal{N}_{ch}. \quad (86)$$

Розв'язавши його з початковою умовою $\mathcal{N}_{ch}(0) = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{ch} &= 2 \frac{\mathcal{N}_+ \mathcal{N}_-}{N^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{N^2}{\mathcal{N}_+ \mathcal{N}_-} k \right) \right] \\ &= \frac{N^2 - r^2}{2} \left[1 - \exp \left(-\frac{4k}{N^2 - r^2} \right) \right].\end{aligned}\quad (87)$$

Чисельні розрахунки показують, що хаотизовані ортогональні матриці володіють розподілами (72), які досить точно описуються виразом (81) з відповідними параметрами (Рис. 10), коли $\sqrt{N} \lesssim d_A \lesssim N$, де параметр d_A обчислюється за формулою (83).

На Рис. 10 різними символами показані розподіли (72), знайдені шляхом прямого чисельного розрахунку при хаотизації ортогональної матриці розмірності $N = 256$ з $r = 1$ для певних значень параметра неортогональності d_A .

Суцільними кривими зображені ці ж розподіли, обчислені з використанням виразу (81). Причому, тут використані параметри, роз-

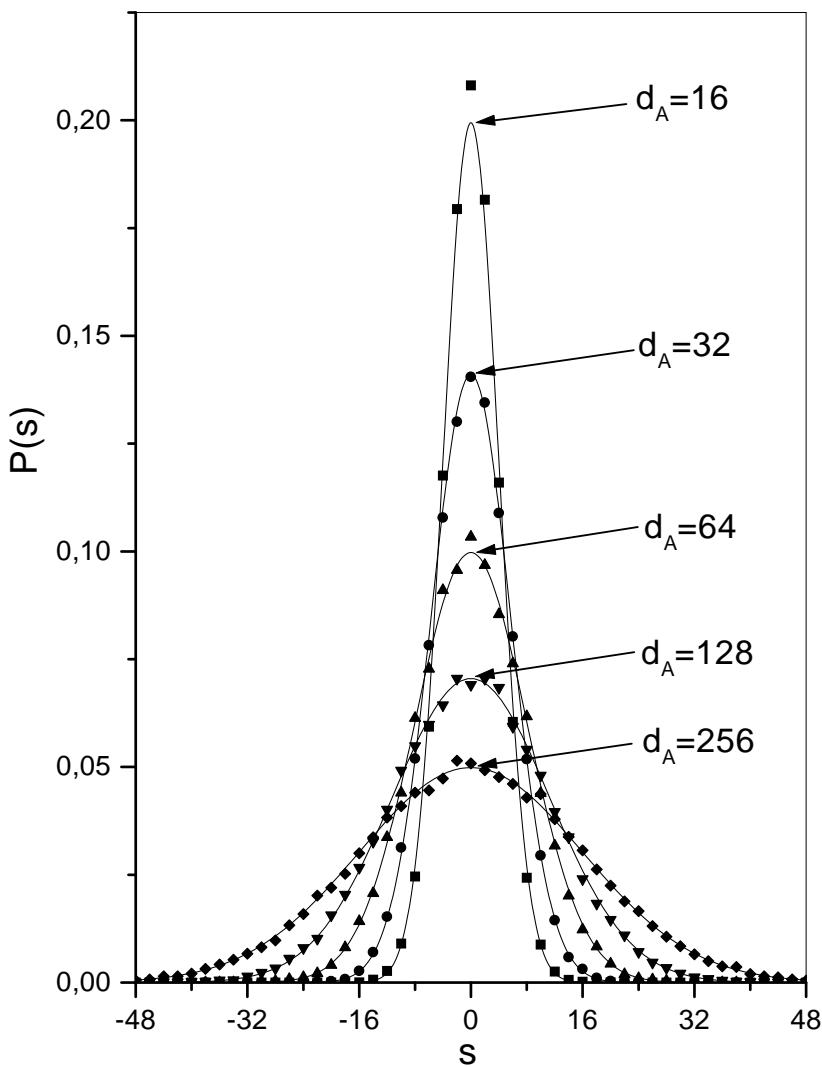


Рис. 10. Розподіл $p(s)$ недіагональних елементів матриці S для різних значень параметра неортогональності d_A при хаотизації ортогональної матриці розмірності $N = 256$.

раховані за формулами (89) для відповідного k . Залежність параметрів розподілу (81) $\langle s \rangle$ і σ^2 від кроку хаотизації ортогональних матриць описується формулами

$$\langle s \rangle = \frac{r^2}{N} \left[1 - \exp \left(-\frac{8k}{N^2 - r^2} \right) \right]. \quad (88)$$

$$\sigma^2 = N \left(1 - \frac{r^4}{N^4} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{16k}{N^2 - r^2} \right) \right], \quad (89)$$

звідки випливає залежність середнього значення параметра неортогональності від кроку хаотизації

$$d_A = N \left(1 + \frac{r^4}{N^3} - \frac{r^4}{N^4} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{16k}{N^2 - r^2} \right) \right]. \quad (90)$$

Скориставшись виразом (87) можна отримати залежність цих параметрів від числа переставлених елементів \mathcal{N}_{ch}

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \frac{r^2}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mathcal{N}_{ch}}{N^2 - r^2} \right)^2 \right], \\ \sigma^2 &= N \left(1 - \frac{r^4}{N^4} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{2\mathcal{N}_{ch}}{N^2 - r^2} \right)^4 \right], \\ d_A &= N \left(1 + \frac{r^4}{N^3} - \frac{r^4}{N^4} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{2\mathcal{N}_{ch}}{N^2 - r^2} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Результати прямого чисельного розрахунку практично співпадають з кривими (суцільні лінії), отриманими із аналітичних формул. Ступінь такого співпадання залежить від розмірності матриці N і збільшується при зростанні N . На Рис. 11 приведені залежності параметра d_A від числа переставлених елементів \mathcal{N}_{ch} , суцільні криві — середні значення (91). Характерний обрив чисельних результатів поблизу $\mathcal{N}_{ch} \approx N^2/2$ (позначені штриховими вертикальними лініями) пов'язаний з тим, що алгоритм хаотизації не може переставити більше ніж $\approx (N^2 - r^2)/2$ елементів, як бидово він не працював (див. вираз (90)). Якби ми переставляли тільки непереставлені елементи, то прийшли б нарешті до матриці, в якій всі елементи поміняли знак, тобто, отримали б вихідну матрицю з протилежним знаком, що й описують (в середньому) суцільні криві.

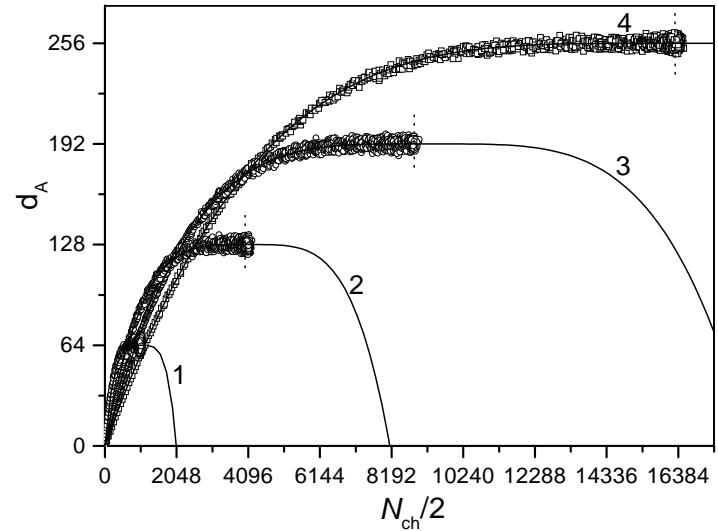


Рис. 11. Залежність параметра неортогональності для класу квазі-ортогональних матриць від числа переставлених елементів (крива 1 відповідає розмірності матриці 64; крива 2 - 128; крива 3 - 192; крива 4 - 256).

5.6. Клас квазіколінеарних фазових елементів

Стіввідношення, аналогічні до (89) – (91), можна отримати і для колінеарних матриць (рис. 12), зокрема при $n_+^X = n_-^X = n_+^Y = n_-^Y$, для розподілу

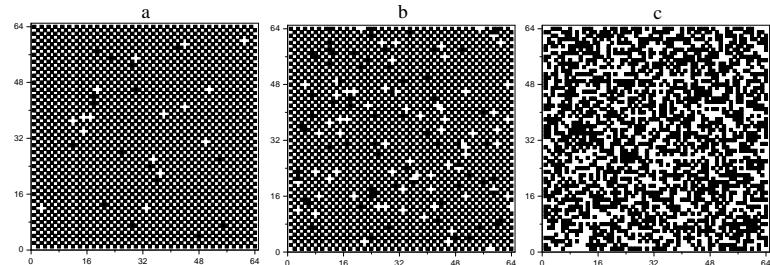


Рис. 12. Бінарні фазові елементи, отримані в результаті хаотизації структури, зображені на рис. 5 b: а) – після 16 кроків хаотизації ($d_A \approx 3850$); б) – після 70 кроків ($d_A \approx 3118$); в) – після 2000 кроків ($d_A \approx 68$)

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \left\{ \left(1 + \frac{1}{N-1} \right) \exp \left(-\frac{(s + \langle s \rangle)^2}{2\sigma^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{N-1} \right) \exp \left(-\frac{(s - \langle s \rangle)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}, \quad (92)$$

залежності параметрів від кроку хаотизації такі

$$\langle s \rangle = N \exp \left(-\frac{8k}{N^2} \right), \quad \sigma^2 = N \left[1 - \exp \left(-\frac{16k}{N^2} \right) \right], \quad (93)$$

а від числа переставлених елементів –

$$\langle s \rangle = N \left(1 - \frac{2N_{ch}}{N^2} \right)^2, \quad \sigma^2 = N \left[1 - \left(1 - \frac{2N_{ch}}{N^2} \right)^4 \right]. \quad (94)$$

На Рис. 13 символами показані чисельно знайдені розподіли колінеарної матриці (типу "шахівниці") розмірності $N = 256$ після певного числа кроків хаотизації, а суцільними кривими представлені аналітичні залежності (92) з параметрами, обчисленими за формулами (93).

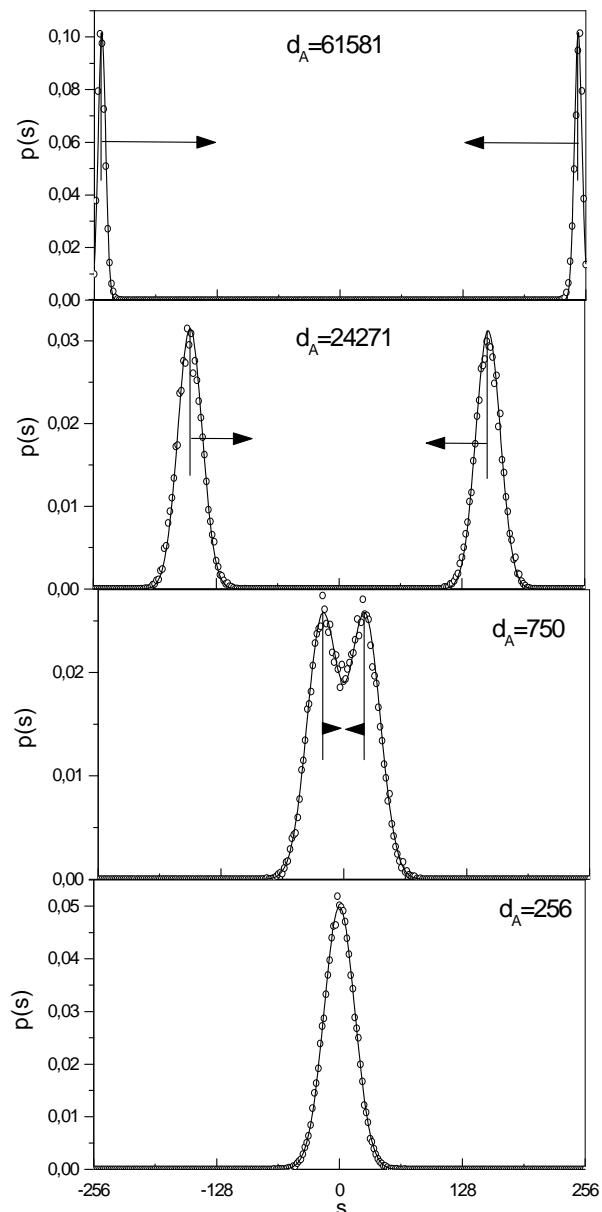


Рис. 13. Еволюція розподілу недіагональних елементів матриці S в процесі хаотизації колінеарної матриці розмірності $N = 256$.

З виразів (93) і (94) знаходимо відповідні залежності для середнього значення параметра неортогональності

$$d_A = \sigma^2 + \langle s \rangle^2 = N + N(N-1) \exp\left(-\frac{16k}{N^2}\right),$$

$$d_A = N + N(N-1) \left(1 - \frac{2N_{ch}}{N^2}\right)^4. \quad (95)$$

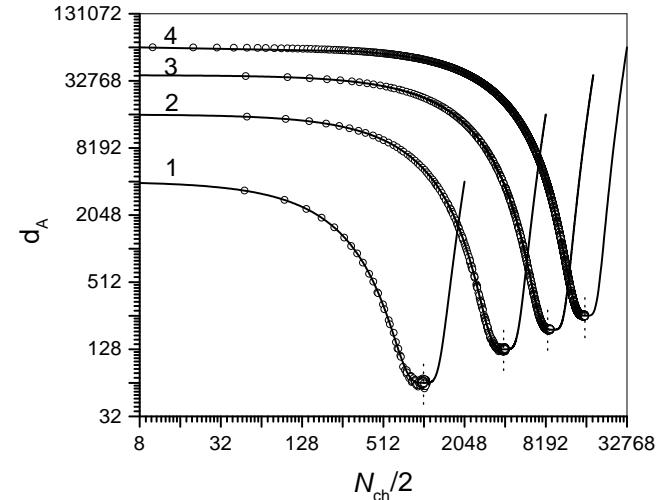


Рис. 14. Залежність параметра неортогональності для класу квазіколінеарних матриць від числа переставлених елементів (крива 1 відповідає розмірності матриці 64; крива 2 - 128; крива 3 - 192; крива 4 - 256).

На Рис. 14 приведені залежності параметра неортогональності від числа переставлених елементів N_{ch} колінеарних матриць типу "шахівниця" кількох розмірностей. Суцільними кривими нанесені відповідні аналітичні залежності (95).

З виразів (94) або (95) можна знайти цікаву залежність, яка пов'язує положення пика розподілу з його шириноро

$$\langle s \rangle = N \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{N}}, \quad \sigma^2 = N - \frac{\langle s \rangle^2}{N}, \quad (96)$$

а також виразити ці параметри через параметр неортогональності

$$\langle s \rangle = N \sqrt{\frac{d_A - N}{N(N-1)}}, \quad \sigma^2 = \frac{N^2 - d_A}{N-1}. \quad (97)$$

Підкреслимо, що формули (92) – (97) вірні тільки для колінеарних матриць з параметром $r = 0$, хоча вони придатні і для наближеного опису таких матриць з малими значеннями параметра r .

Відзначимо, що параметр d_A характеризує в загальному відхилення матриці від ортогональності, а параметр σ^2 — міру хаотичності матриць, для впорядкованих матриць — ортогональних і колінеарних — $\sigma^2 = 0$, а для випадкових — $\sigma^2 \approx N$. В області квазіортогональних матриць ($0 \leq d_A \lesssim N$) вони майже рівні, тобто, неортогональність є певною мірою хаотичності.

Слід відзначити характерну особливість розподілів недіагональних елементів матриць S побудованих із квазіколінеарних матриць A . В процесі хаотизації колінеарної матриці A розподілі (див. Рис. 13) мають два чітко виражені піки, які зближаються в міру зменшення параметра неортогональності d_A (росту числа кроків хаотизації k). При наближенні до області хаотичності отримуємо для розподілу двогорбу криву подібну за своєю формою до розподілу значень параметра порядку в теорії фазових переходів. При цьому область квазіколінеарності відповідає низькотемпературній області магнетика, де параметр порядку приймає відмінні від нуля значення. Область квазіортогональності відповідає високотемпературній області магнетика, де найбільш ймовірне значення намагніченості є нуль. Область хаотичності є подібна до критичної області магнетика і подібно до останньої має певні розміри. Важливим параметром теорії магнетизму є залежність величини параметру порядку від температури. Подібно до цього можемо встановити залежність положення піку розподілу квазіколінеарних матриць (див. Рис. 13) від параметра неортогональності. З формули (97) отримуємо

$$\langle s \rangle = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(d_A - d_A^{(\text{хаот})} \right)^\beta, \quad (98)$$

де $d_A^{(\text{хаот})} = N$ — значення параметра неортогональності для хаотичної матриці.

Використовуючи термінологію теорії фазових переходів [25,26], знаходимо значення критичного показника β величини $\langle s \rangle$

$$\beta = \frac{1}{2} \quad (99)$$

Причому, як і в теорії магнетизму

$$\langle s \rangle = \begin{cases} 0, & \text{при } d_A \leq d_A^{(\text{хаот})} \\ \mu^{1/2}, & \text{при } d_A > d_A^{(\text{хаот})} \end{cases} \quad (100)$$

де $\mu = d_A - d_A^{(\text{хаот})}$ — величина відхилення параметра неортогональності від його значення для випадкової матриці.

5.7. Зв'язок між класами квазіортогональних та квазіколінеарних фазових елементів

Раніше відзначалося, що добуток Адамара-Шура деяких ортогональних матриць H на їхню інверсну H^{inv} дає колінеарну матрицю C . Зокрема, для канонічної матриці (рис. 3 b)

$$H_{can} \circ H_{can}^{inv} = C, \quad (101)$$

де C — колінеарна матриця у вигляді "шахової структури" (див. рис 5 b). Очевидно, що добутки типу (101) можна узагальнити для довільної квазіортогональної матриці A , отриманої в процесі хаотизації канонічної матриці Адамара H_{can} . Нами встановлено, що, виходячи з формул (90) і (95), коли відомий параметр неортогональності матриці A , то параметр неортогональності матриці адамарового множення C однозначно розраховується в залежності від схеми множення Адамара-Шура (101):

$$C^{(1)} = A \circ H_{can}^{inv}, \quad d_{C^{(1)}} = N + N(N-1) \left(1 - \frac{d_A}{N} \right); \quad (102)$$

$$C^{(2)} = A \circ A^{inv}, \quad d_{C^{(2)}} = N + N(N-1) \left(1 - \frac{d_A}{N} \right)^2, \quad (103)$$

Слід відмітити, що за аналогією (101) в обох випадках матриці $C^{(1)}$ і $C^{(2)}$ відносяться до класу квазіколінеарних.

Рис. 15 ілюструє цю залежність (суцільні лінії) в порівнянні з результатами чисельних розрахунків (символи ' \circ ' і ' \diamond ').

Як видно, прямими чисельними розрахунками підтверджується лінійна (102) та квадратична (103) залежності параметра неортогональності результуючої матриці адамарового множення C . Отримані результати підтверджують, що між введеними вище новими

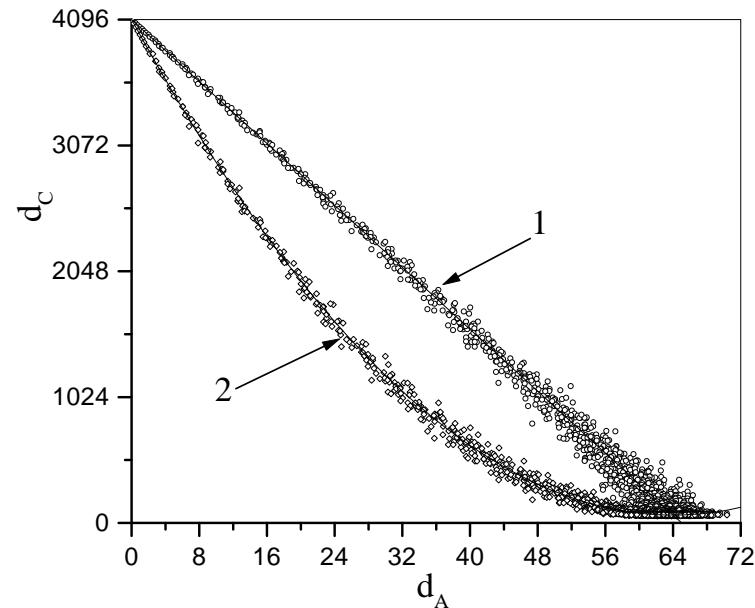


Рис. 15. Лінійна (1) та квадратична (2) залежності між параметрами неортогональності d_A квазіортогональних і квазіколінеарних матриць

класами квазіортогональних та квазіколінеарних фазових елементів існує взаємозалежність.

Наголосимо на тому, що побудова матриць з проміжними значеннями параметра неортогональності шляхом хаотизації впорядкованих не вичерпує всієї множини матриць із заданим параметром d_A , оскільки можна побудувати матриці з таким же d_A , але з розподілом відмінним від вигляду (81) чи (92).

6. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ОПТИЧНИЙ ПАРАМЕТР

6.1. Частотна інтерпретація

На основі отриманої формулі (14) можна зробити висновок, що для всіх типів бінарних фазових елементів формування вінерівського спектру просторових частот відбувається в результаті модуляції спектру елементарної комірки $|F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)|^2$ модулюючою додатньовизначену функцією (53).

Оскільки кореляційні коефіцієнти, які однозначно визначаються бінарним розподілом фази, не можуть одночасно приймати нульові значення, то загальною характеристикою вінерівського спектру фазового елемента є появі тонкої структури інтерференційних максимумів/мінімумів інтенсивності.

В цьому випадку для оцінки тонкої структури введемо різницеву функцію

$$\begin{aligned}\Delta(\omega_x, \omega_y) &= |F(\omega_x, \omega_y)|^2 - NM|F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)|^2 \\ &= [\mathcal{M}(\omega_x, \omega_u) - NM]|F_0(\omega_x)F_0(\omega_u)|^2,\end{aligned}\quad (104)$$

яка описує в частотній площині відхилення інтенсивності вінерівського спектру фазового елементу від інтенсивності базового вінерівського спектру елементарної комірки.

Різницева функція (104) набуває як додатні, так і від'ємні значення, причому для всіх просторових частот величина: $NM|F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)|^2 - \mathcal{M}(\omega_x, \omega_x) \geq 0$. В цьому випадку важливим є величина різницевої функції, я не її знак. Тому побудуємо нормовану функцію $|\Delta(\omega_x, \omega_y)|^2/Q_{00}^{(2)}|F_0(\omega_x)F_0(\omega_y)|^4$ і проведемо усереднення цієї функції за всіма просторовими частотами в 0-ому та ± 1 -ому

порядках дифракції

$$\left\langle |\Delta(\omega_x, \omega_y)|^2 \right\rangle = \frac{1}{(2\pi NM)^2} \int_{-\pi/T_x}^{\pi/T_x} \int_{-\pi/T_y}^{\pi/T_y} |\mathcal{M}(\omega_x, \omega_y) - NM|^2 d\omega_x d\omega_y. \quad (105)$$

Розрахунок цього інтегралу (за $d\omega_x$, чи за $d\omega_y$) зводиться до розрахунку інтегралів вигляду

$$\frac{T_x}{2\pi} \int_{-\pi/T_x}^{\pi/T_x} \cos \omega_x k T_x \cos \omega_x k' T_x d\omega_x = \frac{1}{2} [\text{sinc}(k - k') + \text{sinc}(k + k')]. \quad (106)$$

В результаті отримуємо важливе співвідношення:

$$\begin{aligned} \left\langle |\Delta(\omega_x, \omega_y)|^2 \right\rangle &= \frac{2}{N^2 M^2} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} Q_{k0}^{(1)2} + \sum_{l=1}^{M-1} Q_{0l}^{(1)2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)2} + Q_{kl}^{(2)2}] \right\} \end{aligned} \quad (107)$$

Дане співвідношення виберемо за означення узагальненого оптичного параметра, який характеризує усереднений рівень флюктуацій інтенсивності вінерівського спектру частот фазового елементу. Такий параметр визначається виключно бінарним розподілом фази.

6.2. Оцінка співвідношення сигнал/шум.

Згідно формули (27) координатно-частотний розподіл однозначно задає автокореляційну функцію $\varphi(x_0, y_0)$ фазового елемента. Незалежно від характеру бінарного розподілу фази в точці $x_0 = y_0 = 0$ максимум інтенсивності автокореліційної функції

$$|\varphi(0, 0)|^2 = Q_{00}^{(1)2} = (NM)^4. \quad (108)$$

Тоді усереднена за всіма комірками фазового елемента величина

$$\begin{aligned} \langle |\varphi(k, l)|^2 \rangle &= \frac{1}{N(M-1) + M(N-1)} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} Q_{k0}^{(1)2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{M-1} Q_{0l}^{(1)2} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)2} + Q_{kl}^{(2)2}] \right\} \end{aligned} \quad (109)$$

характеризує середнє значення інтенсивності автокореляційної функція. Відповідно, співвідношення сигнал/шум (SNR) бінарного фазового елемента можна записати

$$\text{SNR} = \frac{(NM)^2}{\langle |\varphi(k, l)|^2 \rangle} \quad (110)$$

Виходячи із даної формули, параметр $\langle |\varphi(k, l)|^2 \rangle$ характеризує рівень оптичного шуму елемента, який задається бінарним розподілом фази $\Delta\phi(n, m)$. Для характеристики фазових елементів ця величина є принципово важливим оптичним параметром.

7. ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

7.1. Вінерівський спектр класу квазіортогональних фазових елементів.

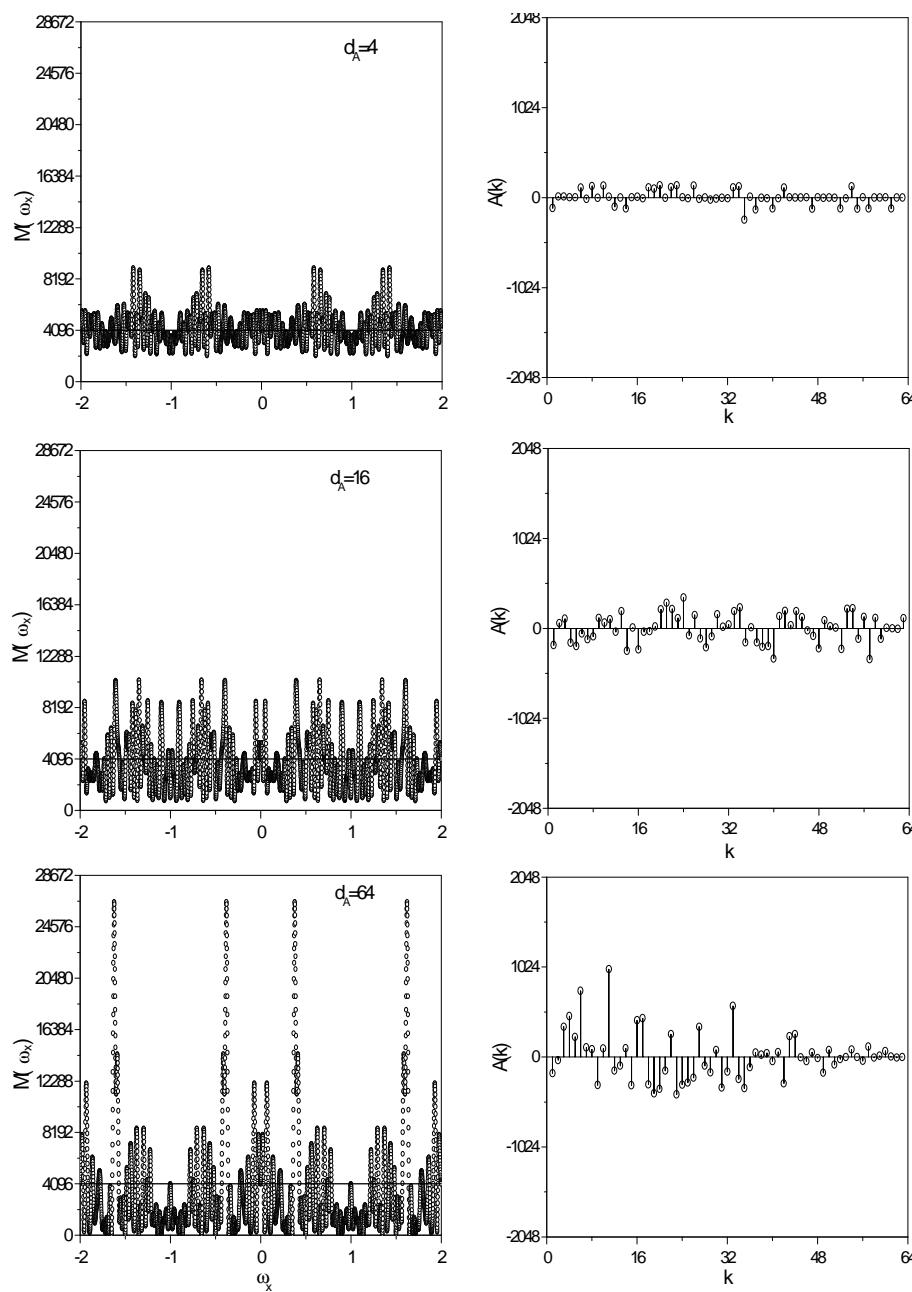
Аналіз одновимірного розподілу вінерівського спектру важливий тим, що в напрямі ортогональності (клас ортогональних елементів) і в напрямі базисних векторів (клас колінеарних елементів) спостерігаються цікаві властивості. Виходячи із формули (53) при $\omega_y = 0$ для вінерівського спектру отримуємо формулу

$$\begin{aligned} |F(\omega_x)|^2 &= |F_0(\omega_x)|^2 \left\{ NM + 2 \left[\sum_{k=1}^{N-1} Q_{k0}^{(1)} \cos \omega_x k T_x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{l=1}^{M-1} Q_{0l}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)}] \cos \omega_x k T_x \right] \right\}. \end{aligned} \quad (111)$$

Якщо провести за формулою (105) усереднення, то отримуємо другий оптичний параметр

$$\begin{aligned} \left\langle |\Delta_x(\omega_x)|^2 \right\rangle &= \frac{2}{N^2 M^2} \left\{ \left[\sum_{l=1}^{M-1} Q_{0l}^{(1)} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{N-1} \left[Q_{k0}^{(1)} + \sum_{l=1}^{M-1} [Q_{kl}^{(1)} + Q_{kl}^{(2)}] \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (112)$$

який характеризує тонку структуру вінерівського спектру в напрямі ортогональності чи колінеарності стовпців елементарних комірок. Зауважимо, що виведений параметр суттєво відмінний від (107).

Рис. 16. $f_a(k)w$

Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України при фінансовій підтримці УНТЦ (Проект # 559).

Автори вдячні І.Р.Юхновському за постійні консультації та Фітьо В.М. і Муравському Л.І. за обговорення результатів роботи.

Література

1. Burckhardt C. B. Use of a Random Phase Mask for the Recording of Fourier Transform Holograms of Data Masks // Appl. Opt. **9**, P.695-700 (1970).
2. Javidi B., Horner J. L. Optical pattern recognition for validation and security verification // Opt. Eng. **33**, P.1752-1756 (1994).
3. Fitio V. M., Muravsky L. I., Stefansky A. I. Using of random phase masks for image recognition in optical correlations // Proc. SPIE **2747**, P.224-234 (1995).
4. Kallman R. R., Goldstein D. H. Phase-encoding input images for optical pattern recognition // Opt. Eng. **33**, P.1806-1812 (1994).
5. Weaver C.S., Goodman J.W. A technique for optically convolving two functions // Appl. Opt. **5**, P.1248-1249 (1966).
6. Takeda Y., Oshida Y., Miyamura Y. Random Phase Shifters for Fourier Transformed Holograms // Appl. Opt. **11**, P.818-822 (1972).
7. Nakayama Y., Kato M. Diffuser with Pseudorandom Phase Sequence // JOSA **69**, P.1367-1372 (1979).
8. Gao G., Kostuk R. Improvement to Holographic Digital Data-Storage Systems with Random and Pseudorandom Phase Masks // Appl. Opt. **36**, P.4853-4861 (1997).
9. Hall M. Combinatorial Theory (Braids Publishing Company, Waltham (Massachusetts), Toronto, London, 1967).
10. Harmuth H. F. Transmission of Information by Orthogonal Function (Springer-Verlag, New York, 1969).
11. Претт У. Цифровая обработка изображений. Том 1.: М.: Мир, 1982, 310 с.
12. Шовгенюк М.В., Крохмальський Т.Є., Козловський М.П. Статистичний опис оптичних властивостей квазіортогональних фазових елементів // Укр. фіз. журн., том **43**, № 12, С.1613-1624 (1998). T.Ye.Krokhmalskii, M.P.Kozlovskii Properties of Quasi-orthogonal No 12, 1613-1624 (1998)
13. Gaskill J. D. Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics (John Wiley & Sons, New York/ Chichester/ Brisbane/ Toronto, 1978).
14. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1960).

15. Шовгенюк М. В. Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ІТФ-92-25У, Львів, 1992, 40 с.
16. Шовгенюк М. В. Координатно-частотний розподіл сигналів: виведення формули дифракції Френеля на ізольованій щілині // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ІТФ-92-21У, Львів, 1992, 28 с.
17. Шовгенюк М. В. Координатно-частотний розподіл періодичних сигналів: аналіз вінерівського спектру частот фазових растро-вих структур // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ІТФ-93-22У, Львів, 1994, 32 с.
18. Shovgenyuk M. V., Hlushak P. A. The calculation of diffraction efficiency of periodic phase elements // Proc. SPIE, **2747**, P.468-474 (1995).
19. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices // J. Math. and Physics **12**, 311-320 (1933).
20. Drouin N. Building Hadamard Matrices in Step 4 to Order 200 (U.S. Department of Commerce, NISTIR 5121, April 1993).
21. Sylvester J. J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Signsuccesions, and Teseland Pavements in Two or more Colours, with Applicatins to Newton's Rule, Ornamental Tile-work, and the Theory of Numbers // Phil. Mag. (4) **34**, P.461-475 (1867).
22. Kovalenko I. M., Hnedenko B. V. Probability Theory (Vyshcha shkola, Kyiv, 1990) (in Russian).
23. Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. vol. 1 (John Wiley & Sons, Chapman & Hall, New York, London, 1957).
24. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва. Мир 1989. 655 с.
25. H. Stanley. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Clarendor Press. Oxford, 1971,
26. Ма III. Современная теория критических явлений.- М.: Мир, 1980.- 295 с.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Михайло Васильович Шовгенюк
Тарас Євстахійович Крохмальський
Михайло Павлович Козловський

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ БІНАРНИХ ФАЗОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ДЛЯ ГОЛОГРАФІЧНИХ СИСТЕМ РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

Роботу отримано 30 грудня 1999 р.

Затверджено до друку Вченого радиою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу статистичної теорії
конденсованого стану

Виготовлено при ІФКС НАН України
© Усі права застережені