Національна академія наук України

ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

ICMP–99–14U

О.Ф.Бацевич[*], І.М.Мриглод, Ю.К.Рудавський[*] М.В.Токарчук

СПЕКТР ГІДРОДИНАМІЧНИХ ЗБУДЖЕНЬ ТА ЧАСОВІ КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ СУМІШІ МАГНІТНИХ І НЕМАГНІТНИХ ЧАСТИНОК

[*]Державний університет "Львівська політехніка", 290013, Львів, вул. С.Бандери 12,

ЛЬВІВ

УДК: 548:537.611.44, 536.75

PACS: 75.50.M

Спектр гідродинамічних збуджень та часові кореляційні функції суміші магнітних і немагнітних частинок

О.Ф. Бацевич, І.М.Мриглод, Ю.К.Рудавський, М.В.Токарчук

Анотація. Робота присвячена дослідженню суміші магнітних та немагнітних частинок у гідродинамічній границі. На основі аналізу структури гідродинамічної матриці запропоноване узагальнення для багатокомпонентної суміші. У цьому випадку показано, що серед колективних мод є 2 звукові та m дисипативних мод, де m визначається числом аддитивних інтегралів руху. Знайдені аналітичні вирази для часових кореляційних функцій, побудованих на операторах густини консервативних величин. На цій основі для випадку двокомпонентної суміші магнітних та немагнітних частинок у парамагнітному стані отримані вирази для динамічних структурних факторів системи.

Hydrodynamic excitation spectrum and time correlation functions for the mixture of magnetic and nonmagnetic particles

O.F.Batsevych I.M.Mryglod, Yu.K.Rudavskii, M.V.Tokarchuk,

Abstract. This work is devoted to the investigation of the mixture of magnetic and nonmagnetic particles in the hydrodynamic limit. Analysis of the structure of hydrodynamic matrix allows to consider the hydrodynamics of a multicomponent mixture. It was shown that among the collective modes there exist two sound and m dissipative modes, where m is determined by the number of additive integrals of motion. The analytical expressions for the time correlation functions constructed on the basis of density operators of conserved quantities, were derived. On this basis expressions for the dynamical structure factors were derived for the case of binary mixture of magnetic and nonmagnetic particles in the paramagnetic state.

Подається в Український фізичний журнал
Submitted to Український фізичний журнал year 1999

1. Вступ

У зв'язку із активним вивченням магнітних рідин [1,2], теоретичні дослідження спектрів колективних збуджень, коефіцієнтів переносу та часових кореляційних функцій для статичних моделей сумішей магнітних та немагнітних частинок, становлять значний експериментальний та прикладний інтерес. Особливе значення при цьому мають розрахунки коефіцієнтів переносу, динамічних структурних факторів (парціальних структурних факторів "густина-густина" і магнітного динамічного структурного фактора) та вивчення впливу на ці величини зовнішнього магнітного поля. Вивчення спектру колективних збуджень дає можливість аналізу особливостей поширення звукових, теплових, взаємодифузійних, спінових коливань, і дозволяє зрозуміти механізм появи нових колективних процесів кінетичної природи. З точки зору експериментів з розсіяння є актуальним дослідження гідродинамічної границі ($\boldsymbol{k} \to 0, \omega \to 0$, де $\boldsymbol{k}$ та ω – хвильовий вектор та частота), та розрахунок відповідних часових кореляційних функцій.

У роботах [3,4] була представлена статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних частинок у зовнішньому неоднорідному магнітному полі. Методом нерівноважного статистичного оператора [8,9] були отримані узагальнені рівняння гідродинаміки, придатні для опису як сильно, так і слабо нерівноважних станів. Зокрема, для опису слабо нерівноважних процесів знайдені лінеаризовані рівняння молекулярної гідродинаміки та рівняння для часових кореляційних функцій та проаналізовані відповідні функції пам'яті, які повязані із узагальненими коефіцієнтами переносу в'язкості, теплопровідності, термов'язкості, спінової дифузії тощо.

Метою даної роботи є використання отриманих раніше результатів [3–5] для вивчення гідродинамічної області хвильових векторів k та частот ω. Зокрема, ми знайдемо спектр гідродинамічних збуджень та запропонуємо один із методів відшукання вагових коефіцієнтів для отримання аналітичних виразів для часових кореляційних функцій. Особливість пропонованого підходу полягає в тому, що усі викладки будуть проводитись для більш загального випадку багатокомпонентної суміші. Таким чином, отримані результати мають більш широку область застосування.

2. Рівняння молекулярної гідродинаміки

Продовжуючи цикл робіт [6,7,5], де досліджувались гідродинамічні процеси слабонерівноважних магнітних рідин і сумішей магнітних та немагнітних частинок, ми будемо розглядати рідку суміш магнітних та немагнітних частинок у гідродинамічному стані. Система описується гамільтоніаном типу [5] із взаємодією між спінами, типу Гайзенберга. Для дослідження такої системи, можна, використовуючи метод нерівноважного стастистичного оператора Зубарєва [8,9], отримати рівняння молекулярної гідродинаміки та рівняння для часових кореляційних функцій [6,7]. Для малих відхилень системи від положення рівноваги, після перетворення Лапласа, можемо записати рівняння узагальненої гідродинаміки у матричному вигляді [6]:

$$\left\{ \mathrm{i}\omega\cdot\tilde{1} - \mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) + \tilde{\Phi}(k,\omega) \right\} \langle \Delta\hat{Y}_i(k)\rangle^{\omega} = 0. \tag{2.1}$$

Лаплас-зображення часових кореляційних функцій $\hat{F}(k,z)$ задовільняють рівняння

$$\left\{ z\cdot\tilde{1} - \mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) + \tilde{\Phi}(k,z) \right\} \tilde{F}(k,z) = \tilde{F}_0(k), \tag{2.2}$$

тут $\mathrm{i}\tilde{\Omega}(k)$ – частотна матриця, $\tilde{\Phi}(k,z)$ – матриця функцій пам'яті, визначені наступним чином:

$$\mathrm{i}\tilde{\Omega}(k) = (\mathrm{i}\hat{L}\cdot\hat{Y}(k), \hat{Y}(-k))\ (\hat{Y}(k), \hat{Y}^{+}(-k))^{-1}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(k,z) = &\left((1-\mathcal{P})\,\mathrm{i}\hat{L}\cdot\hat{Y}, \frac{1}{z+(1-\mathcal{P})\,\mathrm{i}\hat{L}}\,(1-\mathcal{P})\,\mathrm{i}\hat{L}\cdot\hat{Y}^{+} \right)\\ &\times \left(\hat{Y}(k), \hat{Y}^{+}(-k)\right)^{-1},\end{aligned} \tag{2.4}$$

де $\mathrm{i}\hat{L}$ – оператор Ліувіля системи, $\mathcal{P}$ - проекційний оператор Морі, що діє за правилом:

$$\mathcal{P}\cdot\tilde{A} = \left(\tilde{A}, \hat{Y}(-k)\right) \left(\hat{Y}(k), \hat{Y}^{+}(-k)\right)^{-1} \hat{Y}(k), \tag{2.5}$$

$(\hat{A},\hat{B})$ означає кореляційну функцію

$$(\hat{A},\hat{B}) = \int_0^1 \langle \hat{A}\rho_0^{\tau}\hat{B}\rho_0^{-\tau}\rangle\, d\tau, \tag{2.6}$$

де $\langle\ldots\rangle$ позначає засереднення за рівноважним розподілом Ґіббса ρ_0, а $\hat{Y}(k)$ – вектор-стовпець параметрів скороченого опису системи.

В якості параметрів скороченого опису беруть Фур'є компоненти густин консервативних змінних. Для двокомпонентної суміші магнітних та немагнітних частинок [5], після проведення процедури ортогоналізації, вони записуються у вигляді:

$$\hat{Y}(k) = \{\hat{n}_1(k), \hat{n}_2(k), \hat{p}(k), \hat{s}(k), \hat{h}(k)\}, \tag{2.7}$$

і є відповідно Фур'є компонентами парціальних густин числа немагнітних частинок (сорт 1) та магнітних частинок (сорт 2), повного імпульсу, відпроектованого магнітного моменту та повної ентальпії, і залежать від модуля хвильового вектора k. Матриця статичних кореляційних функцій $\tilde{F}_0(k) = \left(\hat{Y}_i(k), \hat{Y}_i^+(k)\right)$, що входить у праву сторону (2.2), для ортогоналізованих параметрів скороченого опису (2.7), має блокдіагональну структуру [5].

Використовуючи властивості симетрії кореляційних функцій відносно інверсії часу та відносно операцій просторової симетрії, можна показати [7], що в системі, яка описується п'ятьма параметрами скороченого опису (2.7) і перебуває в однорідному зовнішньому магнітному полі, матриця $\mathrm{i}\tilde{\Omega}$ буде мати “хрестоподібну” структуру: ненульовими елементами будуть лише ті, які містять індекс, що відповідає імпульсу. Легко показати, що така ж структура матриці $\mathrm{i}\tilde{\Omega}$ буде і в загальнішому випадку багатокомпонентних сумішей.

Будемо розглядати загальніший випадок $m+2$ параметрів скороченого опису, де $m = m_1 + m_2$. Тут m_1 є кількістю компонент рідинної підсистеми (кількість сортів частинок), якій відповідають параметри $\{\hat{n}_1(k), \ldots, \hat{n}_{m_1}(k)\}$; m_2 є кількістю консервативних змінних, що відносяться до спінової підсистеми (ними можуть бути парціальні магнітні моменти різних сортів магнітних частинок $\{\hat{s}_1(k), \ldots, \hat{s}_{m_2}(k)\}$ у випадку, якщо останні комутують з гамільтоніаном); ще двома параметрами є густина повного імпульсу $\hat{p}(k)$ та ентальпії $\hat{h}(k)$.

Легко переконатись, що завдяки консервативності параметрів скороченого опису, частотна матриця (2.3) у гідродинамічному наближенні є лінійною по k:

$$\mathrm{i}\tilde{\Omega} = \mathrm{i}k \cdot v_s \cdot \tilde{\nu} = \delta \cdot v_s \cdot \tilde{\nu}, \tag{2.8}$$

тоді як матриця функцій пам'яті є квадратичною:

$$\tilde{\tilde{\Phi}} = -k^2 \cdot v_s \cdot \tilde{\varphi} = \delta^2 \cdot v_s \cdot \tilde{\varphi}, \tag{2.9}$$

Тут і надалі будемо користуватись позначенням $\delta \equiv \mathrm{i}k$ і вважати δ малим параметром. Квадратичний вклад по δ в частотну матрицю рівний нулю. Коефіцієнт пропорційності v_s в (2.8, 2.9) вибраний

наступним чином:

$$v_s^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\left(\frac{\mathrm{i}\tilde{\Omega}}{\delta}\right)^2\right], \tag{2.10}$$

звідси випливає, що шпур квадрату матриці $\tilde{\nu}$ рівний 2:

$$\mathrm{Sp}\,\tilde{\nu}^2 = 2. \tag{2.11}$$

Вибраний таким чином, коефіцієнт v_s, як буде показано далі, дає нам швидкість поширення звукових хвиль в системі і його введення дозволяє працювати з обезрозміреними матрицями $\tilde{\nu}$ та $\tilde{\varphi}$, що значно спрощує викладки.

Використовуючи марківське наближення, яке є асимптотично точне в гідродинамічній області, бачимо, що залежність повної гідродинамічної матриці $\tilde{T}_H \equiv \mathrm{i}\tilde{\Omega} - \tilde{\Phi}$ від z зникає. Тому, розглядаючи рівняння (2.1), (2.2) в гідродинамічному наближенні, для малих k і z, ми можемо обмежитися у рівняннях (2.1), (2.2) розглядом гідродинамічної матриці $\tilde{T}_\delta$:

$$\tilde{T}_\delta(z) = \tilde{\nu} + \delta \cdot \tilde{\varphi}, \tag{2.12}$$

враховуючи, що:

$$\tilde{T}_H = \mathrm{i}\tilde{\Omega} - \tilde{\Phi} = \delta \cdot v_s \cdot \tilde{T}_\delta. \tag{2.13}$$

Нехай в наборі $m+2$ параметрів скороченого опису імпульс має номер π ($\hat{Y}_\pi(k) = \hat{p}(k)$), тоді, враховуючи зв'язок (2.8) та вищезгадані властивості симетрії, $\tilde{\nu}$ для такої системи запишеться [5]:

$$\tilde{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \nu_{1,\pi} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \nu_{\pi-1,\pi} & 0 & \ldots & 0 \\ \nu_{\pi,1} & \ldots & \nu_{\pi,\pi-1} & 0 & \nu_{\pi,\pi+1} & \ldots & \nu_{\pi,m+2} \\ 0 & \ldots & 0 & \nu_{\pi+1,\pi} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \nu_{m+2,\pi} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

з тих самих міркувань матриця $\tilde{\varphi}$ буде мати протилежну до $\tilde{\nu}$ структуру:

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,\pi-1} & 0 & \varphi_{1,\pi+1} & \cdots & \varphi_{1,m+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\pi-1,1} & \cdots & \varphi_{\pi-1,\pi-1} & 0 & \varphi_{\pi-1,\pi+1} & \cdots & \varphi_{\pi-1,m+2} \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi_{\pi,\pi} & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_{\pi+1,1} & \cdots & \varphi_{\pi+1,\pi-1} & 0 & \varphi_{\pi+1,\pi+1} & \cdots & \varphi_{\pi+1,m+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m+2,1} & \cdots & \varphi_{m+2,\pi-1} & 0 & \varphi_{m+2,\pi+1} & \cdots & \varphi_{m+2,m+2} \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Легко переконатись, що для матриці $\tilde{\nu}$ із структурою (2.14) виконується властивість:

$$\tilde{\nu}^3 = \tilde{\nu}, \qquad (2.16)$$

3. Спектр гідродинамічної матриці

Пошук розв'язків рівнянь (2.1) та (2.2) зводиться до знаходження системи власних значень $\{z_i\}$ гідродинамічного оператора $\tilde{T}_\delta$ (2.12), які є пропорційними власним значенням $\{Z_i\}$ повного гідродинамічного оператора $\tilde{T}_H$ рівняння (2.1) (див. (2.13)):

$$Z_i = \delta\, v_s {\cdot} z_i. \qquad (3.1)$$

Власні значення z_i можна шукати у вигляді ряду по δ:

$$z_i = \lambda_i + \delta{\cdot}D_i + \delta^2{\cdot}\gamma_i + \ldots, \qquad (3.2)$$

де квадратична поправка $\delta^2{\cdot}\gamma_i$ у (3.2) може бути знайдена лише при врахуванні в гідродинамічній матриці $\tilde{T}_\delta$ квадратичних по δ і вищих поправок, тому, використовуючи вирази (2.8) і (2.9), в остаточних результатах ми мусимо обмежитись лише нульовим і лінійним наближенням z_i по δ.

Для знаходження λ_i та D_i маємо рівняння:

$$\det \tilde{B}(\lambda, D) = 0, \qquad (3.3)$$
$$\tilde{B}(\lambda, D) \equiv \tilde{\nu} - \lambda + \delta{\cdot}(\tilde{\varphi} - D), \qquad (3.4)$$

де λ та D – відповідні діагональні матриці. Нулі характеристичного полінома $\det(\tilde{\nu} - \lambda) = (\lambda^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\tilde{\nu}^2)(-\lambda)^m$ матриці $\tilde{\nu}$ дають нам три різні розв'язки для власних значень (3.2) у нульовому наближенні:

$$\lambda_+ \equiv \lambda_{m+1} = +1, \quad \lambda_- \equiv \lambda_{m+2} = -1, \quad \lambda_0 \equiv \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0, \qquad (3.5)$$

причому λ_+, λ_- – прості, а λ_0 – m-кратно вироджені корені. Власні значення λ_+, λ_- відповідають власним значенням $\pm\delta\, v_s$ повного гідродинамічного оператора $\tilde{T}_H$ (див (3.1)), тому λ_+, λ_- описують пропагаторні моди і відповідають за поширення звуку в системі [7]; λ_0 описують до дисипативні моди, що відповідають за дифузійні процеси.

Для знаходження D_i, розкладемо детермінант матриці $\tilde{B}(\lambda, D)$ (3.4) в ряд по δ з точністю до лінійних доданків:

$$\det \tilde{B}(\lambda, D) = \det(\tilde{\nu} - \lambda) + \delta \cdot \sum_{i,j} (\varphi_{ij} - D\delta_{ij})\, \frac{\partial \det \tilde{B}(\lambda, D)}{\partial(\delta{\cdot}\varphi_{ij})}\bigg|_{\delta=0} = \qquad (3.6)$$
$$= \det(\tilde{\nu} - \lambda) + \delta \cdot \sum_{i,j} (\varphi_{ij} - D\delta_{ij}) A_{ij}(\lambda) = 0,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, $A_{ij}(\lambda) = \mathrm{Ad}_{ij}\Big(\tilde{B}(\lambda, D)\Big)\Big|_{\delta=0}$ – алгебраїчне доповнення до елемента B_{ij} матриці $\tilde{B}$ при $\delta = 0$. Легко бачити, що $\tilde{B}(\lambda, D)\Big|_{\delta=0} = \tilde{\nu} - \lambda$, і, як відомо із загальної теорії матриць [10]:

$$A_{ij}(\lambda) = (\tilde{\nu} - \lambda)^{-1}_{ji} \cdot \det(\tilde{\nu} - \lambda). \qquad (3.7)$$

Для матриці $(\tilde{\nu} - \lambda)$ нескладно знайти обернену матрицю, і ми отримаємо:

$$A_{ij}(\lambda) = (-\lambda)^{m-1} {\cdot} \big(\lambda^2 - 1 + \lambda\tilde{\nu} + \lambda\tilde{\nu}^2\big)_{ji}. \qquad (3.8)$$

Рівняння (3.6) тепер запишеться у вигляді:

$$\det \tilde{B}(\lambda, D) = \det(\tilde{\nu} - \lambda) + (-\lambda)^{m-1}\delta \cdot \mathrm{Sp}\left[(\tilde{\varphi} - D)(\lambda^2 - 1 + \lambda\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^2)\right]. \qquad (3.9)$$

Підставляючи власне значення $\lambda = \lambda_\pm$, із (3.9) отримаємо рівняння для знаходження $D_\pm$:

$$\mathrm{Sp}\left[(\tilde{\varphi} - D_\pm)(\lambda_\pm^2 - 1 + \lambda_\pm\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^2)\right] = 0. \qquad (3.10)$$

Звідси $D_\pm = \big(\mathrm{Sp}(\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^2) \pm \mathrm{Sp}(\tilde{\varphi}\tilde{\nu})\big)/\big(\mathrm{Sp}(\tilde{\nu}^2) \pm \mathrm{Sp}(\tilde{\nu})\big)$, або ж, враховуючи, що $\mathrm{Sp}(\tilde{\varphi}\tilde{\nu}) = \mathrm{Sp}(\tilde{\nu}) = 0$, остаточно маємо:

$$D_* \equiv D_+ = D_- = \frac{\mathrm{Sp}(\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^2)}{\mathrm{Sp}(\tilde{\nu}^2)}, \qquad (3.11)$$

Розв'язки для дисипативних мод $\{D_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ легше отримати безпосередньо із рівняння (3.3). При $\lambda = \lambda_0 = 0$ отримуємо:

$$\det \tilde{B}(0, D) = \det\left(\tilde{\nu} + \delta{\cdot}(\tilde{\varphi} - D)\right) = 0. \qquad (3.12)$$

Розкладемо $\det \tilde{B}(0,D)$ по елементах π-ого рядка:

$$\det \tilde{B}(0,D) = \sum_{i(\neq\pi)} \nu_{\pi i}{\cdot}A_{\pi i} + \delta{\cdot}(\varphi_{\pi\pi} - D){\cdot}A_{\pi\pi}. \tag{3.13}$$

Множник $A_{\pi i} = \mathrm{Ad}_{\pi i}\tilde{B}(0,D)$ є алгебраїчним доповненням елемента $B_{\pi i}$ (який рівний $\nu_{\pi i}$) матриці $\tilde{B}(0,D)$, і є детермінантом матриці $\tilde{B}'$, розмірності $(m+1){\times}(m+1)$, що утворюється з матриці $\tilde{B}(0,D)$, розмірності $(m+2){\times}(m+2)$, шляхом викреслювання π-го рядка та i-го стовпця. В матриці $\tilde{B}'$ всі стовпці, крім π-го, пропорційні до δ, тому δ^m можна винести за межі детермінанта:

$$A_{\pi i} = \mathrm{Ad}_{\pi i}(\tilde{\nu} + \delta\cdot(\tilde{\varphi} - D)) = \delta^m \cdot \mathrm{Ad}_{\pi i}(\tilde{\nu} + \tilde{\varphi} - D), \quad i \neq \pi,$$

крім того, легко бачити, що $A_{\pi\pi} = \delta^{m+1}\cdot \mathrm{Ad}_{\pi\pi}(\tilde{\varphi} - D)$, і ми можемо остаточно записати (3.13) у вигляді:

$$\begin{aligned}\det \tilde{B}(0,D) = \delta^m \cdot \sum_{i(\neq\pi)} \nu_{\pi i}{\cdot}\mathrm{Ad}_{\pi i}(\tilde{\nu} + \tilde{\varphi} - D) \\ + \delta^{m+2}{\cdot}(\varphi_{\pi\pi} - D){\cdot}\mathrm{Ad}_{\pi\pi}(\tilde{\varphi} - D)\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Коефіцієнт при δ^m дає нам алгебраїчне рівняння m-го порядку для знаходження m дифузійних коефіцієнтів дисипативних мод, яке можна записати у компактній формі наступним чином:

$$\det(\text{æ}(D)) = 0, \tag{3.15}$$

де

$$\text{æ}(D) = \left.(\tilde{\nu} + \tilde{\varphi} - D{\cdot}\tilde{1})\right|_{\text{æ}_{\pi,\pi}(D)\equiv 0}\,. \tag{3.16}$$

Зокрема для бінарної системи із параметрами скороченого опису (2.7) маємо:

$$\text{æ}(D) = \begin{pmatrix} \varphi_{n_1,n_1} - D & \varphi_{n_1,n_2} & \nu_{n_1,p} & \varphi_{n_1,s} & \varphi_{n_1,h} \\ \varphi_{n_2,n_1} & \varphi_{n_2,n_2} - D & \nu_{n_2,p} & \varphi_{n_2,s} & \varphi_{n_2,h} \\ \nu_{p,n_1} & \nu_{p,n_2} & 0 & \nu_{p,s} & \nu_{p,h} \\ \varphi_{s,n_1} & \varphi_{s,n_2} & \nu_{s,p} & \varphi_{s,s} - D & \varphi_{s,h} \\ \varphi_{h,n_1} & \varphi_{h,n_2} & \nu_{h,p} & \varphi_{h,s} & \varphi_{h,h} - D \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Рівнянню (3.15) можна надати певну геометричну інтерпретацію. Для цього введемо матрицю $\tilde{\theta}$ розмірності $(m{+}1){\times}(m{+}1)$, матриці $\tilde{\nu}$. Введемо x - залежний "метричний тензор": $\tilde{g}(x) = (\tilde{\theta} - x{\cdot}\tilde{1})^{-1}$, тоді, розкладаючи $\det(\text{æ}(D))$ по елементах π- го стовпця і π-го рядка, можна довести, що формула (3.15) еквівалентна наступній:

$$\vec{\nu}'{\cdot}\tilde{g}(D){\cdot}\vec{\nu} = 0. \tag{3.18}$$

Отже, задача зводиться до відшукання таких чисел $\{D_i\}$, при яких, вектори $\vec{\nu}$ і $\vec{\nu}'$ є ортогональні відносно метрики, заданої "тензором" $\tilde{g}(D_i)$.

Тепер ми можемо записати власні значення (3.2) гідродинамічної матриці $\tilde{T}_\delta$ у вигляді:

$$z_i = 0 + \delta{\cdot}D_i + \delta^2{\cdot}\gamma_i, \qquad i = 1,\ldots,m, \tag{3.19}$$

$$z_+ \equiv z_{m+1} = 1 + \delta{\cdot}D_* + \delta^2{\cdot}\gamma_+, \tag{3.20}$$

$$z_- \equiv z_{m+2} = -1 + \delta{\cdot}D_* + \delta^2{\cdot}\gamma_-, \tag{3.21}$$

де значення індекса $i = \{1,\ldots,m\}$ відповідає дисипативним модам, $i = m+1,\, m+2$ – звуковим модам, D_* задається рівнянням (3.11), а D_i – рівнянням (3.15).

4. Кореляційні функції

Знаходження часових кореляційних функцій $\tilde{F}(k,z)$ (2.2) зводиться до відшукання матриці $\tilde{M}(z) = (z{\cdot}\tilde{1} - \tilde{T}_H(k))^{-1}$, що є функцією від гідродинамічного оператора, дійсно,

$$\tilde{F}(k,z) = (z - \tilde{T}_H(k))^{-1}\tilde{F}_0(k) = \tilde{M}(z){\cdot}\tilde{F}_0(k). \tag{4.1}$$

В загальному випадку функція від матриці $\tilde{A}$, що має власні значення $\{z_i\}$, може бути записана (див [10]):

$$f(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\tilde{G}^i, \tag{4.2}$$

коли матриця $\tilde{A}$ є матрицею простої структури. Величини $\tilde{G}^i$ у (4.2) – це так звані вагові коефіцієнти матриці $\tilde{A}$. Матриця $\tilde{T}_\delta$ для довільного δ є матрицею простої структури, адже при $\delta \neq 0$ всі власні значення є різними (3.19) - (3.21), а при $\delta = 0$ мінімальний анулюючий многочлен $\eta(x) = x(x-1)(x+1)$ матриці $\tilde{\nu}$ $(= \lim_{\delta\to 0}\tilde{T}_\delta)$ не містить кратних коренів, що є необхідною і достатньою умовою простоти. Те, що $\eta(x)$ є мінімальним анулюючим многочленом матриці $\tilde{\nu}$ (тобто $\eta(\tilde{\nu}) = 0$), випливає з властивості (2.16).

Таким чином, для $\tilde{\nu}$ і $\tilde{T}_\delta$ можна записати:

$$f(\tilde{\nu}) = f(1)\,\tilde{G}^+_\nu + f(-1)\,\tilde{G}^-_\nu + f(0)\,\tilde{G}^0_\nu, \tag{4.3}$$

$$f(\tilde{T}_\delta) = \sum_{i=1}^{m+2} f(z_i)\,\tilde{G}^i_\delta. \tag{4.4}$$

В границі $\delta \to 0$ вагові коефіцієнти $\tilde{G}^i_\delta$ дають нам, як буде видно далі, $m+2$ різних вагових коефіцієнтів $\{\tilde{g}^i_0,\ i=1,\ldots,m\}$, тому надалі ми будемо формально розрізняти матриці $\tilde{\nu}$ і $\tilde{T}_0 = \lim\limits_{\delta\to 0}\tilde{T}_\delta$, адже їх системи вагових коефіцієнтів $\{\tilde{G}^\pm_\nu,\ \tilde{G}^0_\nu\}$ та $\{\tilde{g}^i_0,\ i=1,\ldots,m\}$, відповідно, не співпадають.

Рівність (4.2) для матриці $\tilde{T}_\delta$ до другого порядку по параметру малості δ буде мати вигляд

$$f(\tilde{\nu}+\delta\,\tilde{\varphi}) = \sum_{i=1}^{m+2} f(\lambda_i + \delta{\cdot}D_i + \delta^2{\cdot}\gamma_i)(\tilde{g}^i_0 + \delta{\cdot}\tilde{g}^i_1 + \delta^2{\cdot}\tilde{g}^i_2), \tag{4.5}$$

де $\tilde{g}^i_0$, $\tilde{g}^i_1$, $\tilde{g}^i_2$ – відповідно нульове, перше і друге наближення по δ вагових коефіцієнтів $\tilde{G}^i_\delta$ (4.4):

$$\tilde{G}^i_\delta = \tilde{g}^i_0 + \delta{\cdot}\tilde{g}^i_1 + \delta^2{\cdot}\tilde{g}^i_2 + \ldots. \tag{4.6}$$

Вагові коефіцієнти $\tilde{G}^i_\delta$, як легко показати, володіють властивостями:

$$\tilde{G}^i_\delta{\cdot}\tilde{G}^j_\delta = \tilde{G}^i_\delta{\cdot}\delta_{ij}, \tag{4.7}$$

де δ_{ij} – символ Квонеккера. Підставивши (4.6) в (4.7), отримаємо для наближенть $\tilde{g}^i_0$, $\tilde{g}^i_1$, … ланцюжок тотожностей:

$$\tilde{g}^i_0{\cdot}\tilde{g}^j_0 = \tilde{g}^i_0{\cdot}\delta_{ij}, \tag{4.8}$$

$$\tilde{g}^i_0{\cdot}\tilde{g}^j_1 + \tilde{g}^i_1{\cdot}\tilde{g}^j_0 = \tilde{g}^i_1{\cdot}\delta_{ij}. \tag{4.9}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Розклад лівої частини (4.5) в ряд по δ дасть:

$$f(\tilde{\nu}+\delta\,\tilde{\varphi}) = \sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\tilde{\nu}^k + \delta{\cdot}\sum_{k\geq 1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\{\tilde{\nu}^{k-1},\tilde{\varphi}\} + \delta^2{\cdot}\sum_{k\geq 2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\{\tilde{\nu}^{k-2},\tilde{\varphi}^2\}, \tag{4.10}$$

де

$$\{\tilde{\nu}^s,\tilde{\varphi}\} \equiv \sum_{k=0}^{s}\tilde{\nu}^k\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^{s-k} = \tilde{\nu}^s\tilde{\varphi} + \tilde{\nu}^{s-1}\tilde{\varphi}\tilde{\nu} + \ldots + \tilde{\varphi}\tilde{\nu}^s, \tag{4.11}$$

$$\{\tilde{\nu}^s,\tilde{\varphi}^2\} \equiv \sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{s-k}\tilde{\nu}^k\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^l\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^{s-k-l}. \tag{4.12}$$

Перший доданок у правій частині (4.10) можна записати як $f(\tilde{\nu})$. Розклавши по δ обидві частини (4.5), і прирівнявши до 0 коефіцієнти при однакових степенях δ, отримаємо 3 тотожності:

$$f(\tilde{\nu}) = \sum_{i=1}^{m+2} f(\lambda_i){\cdot}\tilde{g}^i_0, \tag{4.13}$$

$$\sum_{k\geq 1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\{\tilde{\nu}^{k-1},\tilde{\varphi}\} = \sum_{i=1}^{m+2}\left[f(\lambda_i){\cdot}\tilde{g}^i_1 + f'(\lambda_i)D_i{\cdot}\tilde{g}^i_0\right], \tag{4.14}$$

$$\sum_{k\geq 2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\{\tilde{\nu}^{k-2},\tilde{\varphi}^2\} = \sum_{i=1}^{m+2}\Bigg[f(\lambda_i){\cdot}\tilde{g}^i_2 + f'(\lambda_i)D_i{\cdot}\tilde{g}^i_1 + \left(f'(\lambda_i)\gamma_i + \frac{f''(\lambda_i)}{2!}D_i^2\right){\cdot}\tilde{g}^i_0\Bigg]. \tag{4.15}$$

З усього попереднього видно, що обчислення кореляційних функцій зводиться до знаходження вагових коефіцієнтів (4.6). Подальше відшукання вагових коефіцієнтів грунтується на аналізі рівнянь (4.13)–(4.16).

Проаналізуємо (4.13). Оскільки λ_i, приймає три значення $\lambda_\pm = \pm 1$, $\lambda_0 = 0$, то рівняння (4.13) можемо записати у вигляді:

$$f(\tilde{\nu}) = f(1)\,\tilde{g}^+_0 + f(-1)\,\tilde{g}^-_0 + f(0)\,\tilde{P}, \tag{4.16}$$

де

$$\tilde{P} = \sum_{i=1}^{m}\tilde{g}^i_0. \tag{4.17}$$

Розглянемо послідовно три функції $f_+(x) = x(x+1)$, $f_-(x) = x(x-1)$, $f_0(x) = (x-1)(x+1)$, кожна з яких занулює два доданки в правій частині (4.16). Що дає нам можливість послідовно знайти вирази для $\tilde{g}^+_0$, $\tilde{g}^-_0$, $\tilde{P}$:

$$\tilde{g}^+_0 = \frac{\tilde{\nu}(\tilde{\nu}+1)}{2},\quad \tilde{g}^-_0 = \frac{\tilde{\nu}(\tilde{\nu}-1)}{2}, \tag{4.18}$$

$$\tilde{P} = 1 - \tilde{\nu}^2. \tag{4.19}$$

Порівнюючи (4.16) і (4.3) бачимо, що $\tilde{g}_0^+$, $\tilde{g}_0^-$, $\tilde{P}$ співпадають з $\tilde{G}_\nu^+$, $\tilde{G}_\nu^-$, $\tilde{G}_\nu^0$ відповідно. Формули (4.19), (4.17) дають нам нульове правило сум для дисипативних мод:

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_0^i = 1 - \tilde{\nu}^2. \tag{4.20}$$

Таким чином, бачимо, що ваговий коефіцієнт єдиної m-кратно виродженої дисипативної моди матриці $\tilde{\nu}$ рівний сумі вагових коефіцієнтів m різних дисипативних мод матриці $\tilde{T}_0$.

Зауважимо, що оператор $\tilde{P}$ має властивості проекційного оператора:

$$\tilde{P}^2 = \tilde{P}, \tag{4.21}$$

що випливає з властивості (2.16) матриці $\tilde{\nu}$.

Тепер розглянемо рівність (4.14). Використовуючи властивість (2.16), легко спростити функції $\{\tilde{\nu}^k, \tilde{\varphi}\}$. Відповідно для парних і непарних показників k знаходимо:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\nu}^{2s}, \tilde{\varphi}\} &= \{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varphi}\} + (s-1)\cdot\tilde{\nu}^2\{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\}\tilde{\nu}, \\ \{\tilde{\nu}^{2s-1}, \tilde{\varphi}\} &= \{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\} + (s-1)\cdot\tilde{\nu}\{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\}\tilde{\nu}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

Перепишемо (4.14), відділивши “звукові” доданки від “дисипативних”:

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\{\tilde{\nu}^{k-1}, \tilde{\varphi}\} &= f(0)\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_1^i + \sum_{+,-} f(\pm 1)\tilde{g}_1^{\pm} \\ &+ f'(0)\sum_{i=1}^{m} D_i \tilde{g}_0^i + D_* \sum_{+,-} f'(\pm 1)\tilde{g}_0^{\pm}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

При виборі $f(x) = 1$ відразу отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{m+2} \tilde{g}_1^i = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{m} \tilde{g}_1^i = -(\tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_1^-). \tag{4.24}$$

Підставивши в (4.24) функцію $f(x) = x^{2p+1} - x^{2s+1}$, де $p, s > 1$, знаходимо:

$$\tilde{\nu}\tilde{\varphi}\tilde{\nu} + \tilde{\nu}^2\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^2 = 2D_*\cdot\tilde{\nu}^2, \quad \text{або} \quad \tilde{\nu}^2\tilde{\varphi}\tilde{\nu} + \tilde{\nu}\tilde{\varphi}\tilde{\nu}^2 = 2D_*\cdot\tilde{\nu}, \tag{4.25}$$

що є певною додатковою тотожністю, якій задовільняють матриці $\tilde{\varphi}$ та $\tilde{\nu}$.

Розглянувши послідовно функції $f_1(x) = \frac{x^{2p}}{2p} - \frac{x^{2s}}{2s}$ та $f_2(x) = \frac{x^{2p+1}}{2p+1} - \frac{x^{2s+1}}{2s+1}$, із рівняння (4.24) отримуємо:

$$\tilde{g}_1^+ - \tilde{g}_1^- = \{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varphi}\} - 3D_*\cdot\tilde{\nu}^2, \quad \tilde{g}_1^+ + \tilde{g}_1^- = \{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\} - 2D_*\cdot\tilde{\nu}, \tag{4.26}$$

де враховано тотожності (4.25). З виразів (4.26) слідує, що:

$$\tilde{g}_1^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\} - 2D_*\cdot\tilde{\nu} \pm \{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varphi}\} \mp 3D_*\cdot\tilde{\nu}^2\right). \tag{4.27}$$

Вибравши $f(x) = x$, після нескладних перетворень, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{m} D_i \tilde{g}_0^i = \tilde{P}\tilde{\varphi}\tilde{P}. \tag{4.28}$$

Використовуючи тепер властивість (4.8), можемо показати, що $(\tilde{P}\tilde{\varphi}\tilde{P})^n = \sum_{i=1}^{m} D_i^n \tilde{g}_0^i$, або для більш загального випадку довільної функції $F(x)$ такої, що $F(0) = 0$, маємо:

$$F(\tilde{P}\tilde{\varphi}\tilde{P}) = \sum_{i=1}^{m} F(D_i)\tilde{g}_0^i. \tag{4.29}$$

Узагальнення (4.29) на випадок функції $F(0) \neq 0$ дає формула:

$$\tilde{P}\cdot F(\tilde{P}\tilde{\varphi}\tilde{P})\cdot\tilde{P} = \sum_{i=1}^{m} F(D_i)\tilde{g}_0^i. \tag{4.30}$$

Якщо у вираз (4.30) підставити функцію $F_k(x) = \prod_{i=1(\neq k)}^{m}(D_i - x)$, отримаємо:

$$\tilde{g}_0^k = \prod_{i=1(\neq k)}^{m} \tilde{P}\frac{D_i - \tilde{\varphi}}{D_i - D_k}\tilde{P}. \tag{4.31}$$

Бачимо, що розгляд рівності (4.13) дав нам можливість знайти $\tilde{g}_0^{\pm}$, з рівняння (4.14) отримані вагові коефіцієнти для дисипативних мод $\tilde{g}_0^i$, $i = 1, \ldots, m$, та $\tilde{g}_1^{\pm}$. Тому можна сподіватись, що рівність (4.16) дасть нам можливість знайти $\tilde{g}_1^i$, $i = 1, \ldots, m$.

Проаналізуємо рівність (4.16). Аналогічно до (4.23) спростимо функції $\{\tilde{\nu}^k, \tilde{\varphi}^2\}$:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\nu}^{2s}, \tilde{\varphi}^2\} &= \{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varphi}^2\} + (s-1)\left[2D_*\{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varphi}\} + \tilde{\nu}^2\{\tilde{\nu}\tilde{\varphi}^2\}\tilde{\nu}\right] \\ &+ 2D_*^2(s-1)(s-2)\tilde{\nu}^2, \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\nu}^{2s-1}, \tilde{\varphi}^2\} &= \{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}^2\} + (s-1)\left[2D_*\{\tilde{\nu}, \tilde{\varphi}\} + \tilde{\nu}\{\tilde{\nu}\tilde{\varphi}^2\}\tilde{\nu}\right] \\ &+ 2D_*^2(s-1)(s-2)\tilde{\nu}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Підставляючи функції $f_1(x)=\frac{x^{2m}}{2m}-\frac{x^{2p}}{2p}$ та $f_2(x)=\frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$ у вираз (4.23), після нескладних перетворень отримаємо:

$$\tilde{g}_2^+ + \tilde{g}_2^- = \{\tilde{\nu}^2,\tilde{\varphi}^2\} - 2\left[2D_*\{\tilde{\nu}^2,\tilde{\varphi}\} + \tilde{\nu}^2\{\tilde{\nu},\tilde{\varphi}^2\}\tilde{\nu}\right] + 12D_*^2\tilde{\nu}^2, \quad (4.34)$$

$$\tilde{C} \equiv \tilde{g}_2^+ - \tilde{g}_2^- = \{\tilde{\nu},\tilde{\varphi}^2\} - \frac{3}{2}\left[2D_*\{\tilde{\nu},\tilde{\varphi}\} + \tilde{\nu}\{\tilde{\nu},\tilde{\varphi}^2\}\tilde{\nu}\right] + \frac{15}{2}D_*^2\tilde{\nu}. \quad (4.35)$$

Для знаходження $\tilde{g}_1^i$, нам потрібні будуть наступні рівності, які нескладно довести, використовуючи (4.25):

$$\tilde{g}_0^+\cdot\tilde{\varphi}\cdot\tilde{g}_0^+ = D_+\cdot\tilde{g}_0^+, \quad \tilde{g}_0^-\cdot\tilde{\varphi}\cdot\tilde{g}_0^- = D_-\cdot\tilde{g}_0^-, \quad (4.36)$$

$$\tilde{g}_0^j\cdot\tilde{\varphi}\cdot\tilde{P} = \hat{P}\cdot\tilde{\varphi}\cdot\tilde{g}_0^j = D_j\cdot\tilde{g}_0^j, \quad (4.37)$$

де ми розрізняємо коефіцієнти дифузії для '+' і '−' звукових мод (див. (3.11)), що є необхідним для подальшого розгляду.

Підставляючи $f(x)=x$ в формулу (4.16), отримаєм:

$$\sum_{i=1}^{m+2}(D_i\tilde{g}_1^i + \gamma_i\tilde{g}_0^i) = -\tilde{C}, \quad (4.38)$$

де $\tilde{C}$ визначене в (4.35)

Введемо оператори $\widehat{Q}_i$, що діють за правилом

$$\widehat{Q}_i\cdot\tilde{A} = \sum_{j=1(\neq i)}^{m+2}\frac{1}{D_i-D_j}\left(\tilde{g}_0^i\cdot\tilde{A}\cdot\tilde{g}_0^j + \tilde{g}_0^j\cdot\tilde{A}\cdot\tilde{g}_0^i\right), \quad i=1,\ldots,m+2. \quad (4.39)$$

Подіявши оператором $\widehat{Q}_i$ на рівність (4.38), бачимо, що завдяки (4.8), другий доданок в лівій частині під символом сумування зникне. Тоді, використавши рівність (4.9), ми отримаємо:

$$\widehat{Q}_i\cdot(-\tilde{C}) = \widehat{Q}_i\cdot\sum_{j=1}^{m+2}D_j\cdot\tilde{g}_1^j = \tilde{g}_1^i. \quad (4.40)$$

Таким чином, для вагових коефіцієнтів $\tilde{g}_1^i$ маємо:

$$\tilde{g}_1^i = \sum_{j(\neq i)}^{m+2}\frac{1}{D_j-D_i}\left(\tilde{g}_0^i\cdot\tilde{C}\cdot\tilde{g}_0^j + \tilde{g}_0^j\cdot\tilde{C}\cdot\tilde{g}_0^i\right), \quad i=1,\ldots,m+2. \quad (4.41)$$

Бачимо, що розрізняти коефіцієнти дифузії D_+, D_- є необхідно для уникнення невизначеностей типу 0/0 при знаходженні матриць $\tilde{g}_1^{\pm}$.

Використовуючи рівності (4.36), (4.37), легко показати, що:

$$\tilde{g}_0^+\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^- = \frac{1}{2}(D_- - D_+)\,\tilde{g}_0^+\tilde{\varphi}g_0^-, \quad \tilde{g}_0^-\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^+ = \frac{1}{2}(D_- - D_+)\,\tilde{g}_0^-\tilde{\varphi}g_0^+, \quad (4.42)$$

$$\tilde{g}_0^+\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^j = (D_j - D_+)\,\tilde{g}_0^+\tilde{\varphi}g_0^j, \qquad \tilde{g}_0^j\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^+ = (D_j - D_+)\,\tilde{g}_0^j\tilde{\varphi}g_0^+, \quad (4.43)$$

$$\tilde{g}_0^-\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^j = (D_- - D_j)\,\tilde{g}_0^-\tilde{\varphi}g_0^j, \qquad \tilde{g}_0^j\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^- = (D_- - D_j)\,\tilde{g}_0^j\tilde{\varphi}g_0^-, \quad (4.44)$$

$$\tilde{g}_0^j\cdot\tilde{B}\tilde{g}_0^k = \tilde{g}_0^j\tilde{\varphi}\tilde{\nu}\tilde{\varphi}\tilde{g}_0^k, \quad (4.45)$$

де $j,k=1,\ldots,m$. На основі цих співвідношень та формули (4.41) отримаємо:

$$\tilde{g}_1^{\pm} = \pm\tilde{g}_0^{\pm}\tilde{\varphi}(\tilde{P} + \frac{1}{2}\tilde{g}_0^{\mp}) \pm (\tilde{P} + \frac{1}{2}\tilde{g}_0^{\mp})\tilde{\varphi}\tilde{g}_0^{\pm}, \quad (4.46)$$

$$\tilde{g}_1^j = (\tilde{R}_j\cdot\tilde{\varphi} - 1)\tilde{\nu}\tilde{\varphi}\tilde{g}_0^j + \tilde{g}_0^j\tilde{\varphi}\tilde{\nu}(\tilde{\varphi}\cdot\tilde{R}_j - 1), \quad (4.47)$$

де

$$\tilde{R}_j = \sum_{k=1(\neq j)}^{m}\frac{\tilde{g}_0^k}{D_k - D_j}, \quad j=1,\ldots,m. \quad (4.48)$$

Вираз (4.46) у розгорнутому вигляді співпадає з отриманим раніше виразом (4.27)

Таким чином, нами отримані нульові та перші наближення для вагових коефіцієнтів багатокомпонентної суміші в аналітичному вигляді. З точністю до першого порядку по δ можемо записати:

$$f(\tilde{\nu} + \delta\cdot\tilde{\varphi}) = \sum_{+,-} f(\pm1 + \delta\cdot D_*)\cdot(\tilde{g}_0^{\pm} + \delta\cdot\tilde{g}_1^{\pm}) + \sum_{i=1}^{m} f(\delta\cdot D_i)\cdot(\tilde{g}_0^i + \delta\cdot\tilde{g}_1^i), \quad (4.49)$$

де всі величини, що входять у праву сторону (4.49), задаються формулами (3.11), (3.16), (4.18), (4.31), (4.46) - (4.48). Вираз (4.49) слід розглядати як інтерполяційний, розуміючи під множниками типу $f(\pm1 + \delta\cdot D_*)$ ряди, які вони породжують.

Враховуючи зв'язок (2.13), розв'яки для часових кореляційних функцій (4.1) в гідродинамічній границі можуть бути записані у вигляді:

$$\tilde{F}(k,z) = \left\{\sum_{+,-}\frac{\tilde{g}_0^{\pm} + \mathrm{i}k\cdot\tilde{g}_1^{\pm}}{z \mp \mathrm{i}kv_s + k^2v_sD_*} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\tilde{g}_0^i + \mathrm{i}k\cdot\tilde{g}_1^i}{z + k^2v_sD_i}\right\}\cdot\tilde{F}_0. \quad (4.50)$$

5. Суміш магнітних та немагнітних частинок у парамагнітному стані

Розглянемо тепер конкретний приклад суміші магнітних та немагнітних частинок (2.7) у парамагнітному стані при відсутності зовнішнього магнітного поля. У цьому випадку

$$\nu_{p,s} = \nu_{s,p} = 0, \quad \varphi_{s,\hat{Y}} = \varphi_{\hat{Y},s} = 0, \tag{5.1}$$

для всіх $\hat{Y} \neq s$. Завдяки цьому гідродинамічна матриця (2.12) розпадається на 2 блоки: матрицю $\tilde{\nu}_1 + \delta\cdot\tilde{\varphi}_1$, розмірності 4×4 та діагональний елемент $\delta\cdot\varphi_{ss}$, де $\tilde{\nu}_1$ та $\tilde{\varphi}_1$ є матрицями $\tilde{\nu}$ та $\tilde{\varphi}$ з викресленими 4-м рядком та 4-м стовпцем, які відповідають змінній s.

Для спрощення запису введемо вектор-стовпець $\vec{\omega}$ та вектор-рядок $\vec{\omega}'$

$$\vec{\omega} = (\nu_{n_1,p}, \nu_{n_2,p}, 0, 0, \nu_{h,p})^{\mathrm{т}}, \quad \vec{\omega}' = (\nu_{p,n_1}, \nu_{p,n_2}, 0, 0, \nu_{p,h}), \tag{5.2}$$

що є відповідно 3-м стовпцем та 3-м рядком матриці $\tilde{\nu}$. Введемо також вектори:

$$\vec{\xi} = \tilde{\varphi}\cdot\vec{\omega}, \quad \vec{\xi}' = \vec{\omega}'\cdot\tilde{\varphi}; \quad \text{або} \quad \xi_i = \sum_j \varphi_{i,j}\omega_j, \quad \xi'_i = \sum_j \omega'_j \varphi_{j,i}, \tag{5.3}$$

де індекси без штрихів $(i, j, \ldots)$ тут і надалі пробігають $\{n_1, n_2, h\}$, а індекси зі штрихами $(i', j', \ldots)$ пробігають $\{p, s\}$. Індекси, що позначаються великими латинськими літерами $(I, J, \ldots)$ пробігають всі значення $\{n_1, n_2, p, s, h\}$.

Із виразу (2.10) знаходимо (див також [5]), що квадрат швидкості звуку в такій системі є оберненою адіабатичною стисливістю, визначеною в ансамблі з постійними намагніченістю та кількостями частинок обох сортів:

$$v_s^2 = -\frac{V^2}{\bar{m}} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{NSM} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{NSM}, \tag{5.4}$$

де $\bar{m} = c_1 m_1 + c_2 m_2$ – маса, V – об'єм, ρ – масова густина, P – тиск, c_1 та c_2 – відповідні концентрації частинок.

Коефіцієнт затухання звуку (3.11):

$$D_* = \frac{1}{2}\left(\sum_i \omega'_i \xi_i + \varphi_{p,p}\right). \tag{5.5}$$

Рівняння (3.15) для знаходження коефіцієнтів дифузії дисипативних мод факторизується, і ми отримуємо:

$$D_1 = \varphi_{s,s}, \tag{5.6}$$

$$D_2 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}, \tag{5.7}$$

$$D_3 = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}, \tag{5.8}$$

де D_1 – коефіцієнт спіндифузії, D_2, D_3 – коефіцієнти взаємо- та термодифузії. Тут

$$b = 2D_* - \mathrm{Sp}\,\tilde{\varphi}_1, \quad c = \det(\tilde{\nu}_1 + \tilde{\varphi}_1). \tag{5.9}$$

У нульовому наближенні по δ для вагових коефіцієнтів із виразу (4.18) маємо відповідно:

$$(\tilde{g}_0^{\pm})_{i,j} = \frac{1}{2}\omega_i\omega'_j, \quad (\tilde{g}_0^{\pm})_{s,J} = (\tilde{g}_0^{\pm})_{J,s} = 0, \tag{5.10}$$

$$(\tilde{g}_0^{\pm})_{p,i} = \pm\frac{1}{2}\omega'_i, \quad (\tilde{g}_0^{\pm})_{i,p} = \pm\frac{1}{2}\omega_i, \quad (\tilde{g}_0^{\pm})_{p,p} = \frac{1}{2} \tag{5.11}$$

– для звукових мод;

$$\tilde{g}_0^1 = \mathrm{diag}(0,0,0,1,0) \tag{5.12}$$

–для спіндифузійної моди; ненульовими коефіцієнтами для термо- та взаємодифузійних мод є:

$$(\tilde{g}_0^2)_{i,j} = (D_3 - D_2)^{-1}\big(D_3\delta_{ij} + \omega_i\omega'_j(\varphi_{p,p} - 2D_* - D_3) + \omega_i\xi'_j + \xi_i\omega'_j - \varphi_{i,j}\big), \tag{5.13}$$

$$(\tilde{g}_0^3)_{i,j} = (D_2 - D_3)^{-1}\big(D_2\delta_{ij} + \omega_i\omega'_j(\varphi_{p,p} - 2D_* - D_2) + \omega_i\xi'_j + \xi_i\omega'_j - \varphi_{i,j}\big). \tag{5.14}$$

Із виразів (4.46), (4.18), (4.19) після деяких спрощень, ненульові лінійні поправки до вагових коефіцієнтів можна записати у вигляді:

$$(\tilde{g}_1^{\pm})_{i,j} = \pm\frac{1}{2}\big(\omega_i\xi'_j + \xi_i\omega'_j + \omega_i\omega'_j(\varphi_{p,p} - 3D_*)\big), \tag{5.15}$$

$$(\tilde{g}_1^{\pm})_{p,j} = \frac{1}{2}\big(\xi'_j + \omega'_j(\varphi_{p,p} - 2D_*)\big), \tag{5.16}$$

$$(\tilde{g}_1^{\pm})_{i,p} = \frac{1}{2}\big(\xi_i + \omega_i(\varphi_{p,p} - 2D_*)\big), \tag{5.17}$$

$$(\tilde{g}_1^{\pm})_{p,p} = \pm\frac{1}{2}(\varphi_{p,p} - 2D_*), \quad (\tilde{g}_1^{\pm})_{s,J} = (\tilde{g}_1^{\pm})_{I,s} = 0 \tag{5.18}$$

– для звукових мод,

$$(\tilde g_1^2)_{i,p} = (D_3-D_2)^{-1}\Big(D_2[\omega_i(D_2-\mathrm{Sp}\,\tilde\varphi_1+\varphi_{p,p}+\varphi_{i,i}) \\ +\xi_i-\varphi_{i,i}\omega_i]+\eta_i\Big), \tag{5.19}$$

$$(\tilde g_1^2)_{p,j} = (D_3-D_2)^{-1}\Big(D_2[\omega_j'(D_2-\mathrm{Sp}\,\tilde\varphi_1+\varphi_{p,p}+\varphi_{j,j}) \\ +\xi_j'-\omega_j'\varphi_{i,i}]+\eta_i'\Big), \tag{5.20}$$

$$(\tilde g_1^3)_{i,p} = (D_2-D_3)^{-1}\Big(D_3[\omega_i(D_3-\mathrm{Sp}\,\tilde\varphi_1+\varphi_{p,p}+\varphi_{i,i}) \\ +\xi_i-\varphi_{i,i}\omega_i]+\eta_i\Big), \tag{5.21}$$

$$(\tilde g_1^3)_{p,j} = (D_2-D_3)^{-1}\Big(D_3[\omega_j'(D_3-\mathrm{Sp}\,\tilde\varphi_1+\varphi_{p,p}+\varphi_{j,j}) \\ +\xi_j'-\omega_j'\varphi_{i,i}]+\eta_i'\Big), \tag{5.22}$$

для термо- та взаємодифузійних мод. Для спіндифузійної моди $\tilde g_1^1 = \tilde 0$. Вектори $\vec\eta$ та $\vec\eta'$ у виразах (5.19–5.22) означені наступним чином:

$$\vec\eta = \tilde\varphi^{-1}\vec\omega\cdot\frac{\det\tilde\varphi}{\varphi_{s,s}\varphi_{p,p}}, \quad \vec\eta' = \vec\omega'\tilde\varphi^{-1}\cdot\frac{\det\tilde\varphi}{\varphi_{s,s}\varphi_{p,p}}, \tag{5.23}$$

Легко бачити, що, наприклад:

$$\eta_{n_2} = -\varphi_{n_2,n_1}\omega_{n_1}\varphi_{h,h}+\varphi_{h,n_1}\omega_{n_1}\varphi_{n_2,h}-\omega_{n_2}\varphi_{h,n_1}\varphi_{n_1,h} \\ +\omega_{n_2}\varphi_{n_1,n_1}\varphi_{h,h}+\varphi_{n_2,n_1}\omega_h\varphi_{n_1,h}-\omega_h\varphi_{n_2,h}\varphi_{n_1,n_1}.$$

Дійсні частини кореляційних функцій (4.50) можуть бути записані

$$\mathrm{Re}\,\tilde F(k,\omega)_{i,j} = \sum_{+,-}\frac{k^2v_sD_*\cdot(\tilde g_0^{\pm}\tilde F_0)_{i,j}+k(\omega\mp kv_s)(\tilde g_1^{\pm}\tilde F_0)_{i,j}}{(\omega\mp kv_s)^2+(v_sD_*k^2)^2} + \\ +\sum_{\mu=1}^{3}\frac{k^2v_sD_\mu\cdot(\tilde g_0^{\mu}\tilde F_0)_{i,j}+k\omega(\tilde g_1^{\mu}\tilde F_0)_{i,j}}{\omega^2+(v_sD_\mu k^2)^2}, \tag{5.24}$$

де матриця $\tilde F_0$ у нашому випадку має вигляд [5]:

$$\tilde F_0 = \begin{pmatrix} S_{n_1,n_1} & S_{n_1,n_2} & 0 & 0 & 0 \\ S_{n_2,n_1} & S_{n_2,n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{p,p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{s,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{h,h} \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Для того, щоб отримати, для наприкладу, парціальний динамічний структурний фактор густина-густина $S_{n_1,n_1}(k,\omega)$, ми повинні, згідно з формулою (5.24), порахувати добутки $(\tilde g_{0,1}^{\mu}\tilde F_0)_{n_1,n_1}$. Легко бачити, що ненульові вклади мають наступну структуру:

$$(\tilde g_0^{\pm}\tilde F_0)_{n_1,n_1} = \frac12\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_1}\cdot S_{n_1,n_1}+\frac12\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_2}\cdot S_{n_2,n_1}, \tag{5.26}$$

$$(\tilde g_0^{2}\tilde F_0)_{n_1,n_1} = (D_3-D_2)^{-1}\big(D_3+\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_1}(\varphi_{p,p}-2D_*-D_3) \\ +\nu_{n_1,p}\xi_{n_1}'+\xi_{n_1}\nu_{p,n_1}-\varphi_{n_1,n_1}\big)\cdot S_{n_1,n_1} \\ +(D_3-D_2)^{-1}\big(D_3+\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_2}(\varphi_{p,p}-2D_*-D_3) \\ +\nu_{n_1,p}\xi_{n_2}'+\xi_{n_1}\nu_{p,n_2}-\varphi_{n_1,n_2}\big)\cdot S_{n_2,n_1}, \tag{5.27}$$

$$(\tilde g_1^{\pm}\tilde F_0)_{1n,n_1} = \pm\frac12\left(\nu_{n_1,p}\xi_{n_1}'+\xi_{n_1}\omega_{n_1}'+\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_1}(\varphi_{p,p}-3D_*)\right)\cdot S_{n_1,n_1} \\ \pm\frac12\left(\nu_{n_1,p}\xi_{n_2}'+\xi_{n_1}\omega_{n_2}'+\nu_{n_1,p}\nu_{p,n_2}(\varphi_{p,p}-3D_*)\right)\cdot S_{n_2,n_1}, \tag{5.28}$$

$(\tilde g_0^3\tilde F_0)_{n_1,n_1}$ отримується з $(\tilde g_0^2\tilde F_0)_{n_1,n_1}$ заміною $D_2\leftrightarrow D_3$, Видно, спіновий вклад у $S_{n_1,n_1}(k,\omega)$ буде рівний нулю, як і слід було очікувати.

Аналізуючи вклад перших наближень вагових коефіцієнтів (5.15)-(5.22) у кореляційні функції, можна помітити, що перші наближення для незвукових мод (5.19)-(5.22) будуть давати ненульовий вклад лише для структурних факторів, у яких одною із змінних є імпульс. Тому для прикладу приведемо Фур'є-компоненти часових кореляційних функцій $F_{p,p}(k,\omega)$ та $F_{p,h}(k,\omega)$:

$$\frac{F_{p,p}(k,\omega)}{F_{p,p}(k)} = \frac12\sum_{+,-}\frac{k^2v_sD_*\pm k(\omega\mp kv_s)(\varphi_{p,p}-2D_*)}{(\omega\mp kv_s)^2+(v_sD_*k^2)^2}, \tag{5.29}$$

$$\frac{F_{p,h}(k,\omega)}{F_{h,h}(k)} = \frac12\sum_{+,-}\frac{\pm k^2v_sD_*\cdot\nu_{p,h}+k(\omega\mp kv_s)\big(\xi_h'+\nu_{p,h}(\varphi_{p,p}-2D_*)\big)}{(\omega\mp kv_s)^2+(v_sD_*k^2)^2} \\ +\sum_{\mu=2}^{3}\frac{k\omega(\tilde g_1^{\mu})_{p,h}}{\omega^2+(v_sD_\mu k^2)^2}, \tag{5.30}$$

де $(\tilde g_1^{\mu})_{p,h}$ задаються формулами (5.21), (5.22), при $\mu=2,3$.

Завдяки виділеності спінової підсистеми, динамічний структурний фактор спін-спін буде мати простий вигляд:

$$F_{s,s}(k,\omega)/F_{s,s} = \frac{k^2v_sD_1}{\omega^2+(v_sD_1k^2)^2}. \tag{5.31}$$

Зауважимо, що усі інші кореляційні функції, побудовані на змінних $\{n_1,n_2,p,h\}$ мають структуру формально схожу на результати, отримані для бінарної суміші простих рідин [11,12]. Легко переконатися, що усі часові кореляційні функції будуть мати вигляд схожий до однієї з трьох кореляційних функцій, заданих виразами (5.26)-(5.31), і тому у повному обсязі не наводяться через їх громіздкість.

Отже, на основі аналізу рівнянь гідродинаміки для багатокомпонентної суміші, ми отримали спектр гідродинамічних збуджень, що включає дві пропагаторні моди, які описують процеси поширення та затухання звуку та m дифузійних мод, що відповідають за взаємодифузію частинок, спінову дифузію та термодифузію. У межах гідродинамічного наближення були також отримані точні аналітичні вирази для часових кореляційних функцій, які побудовані на гідродинамічних змінних, проаналізовано випадок двокомпонентної суміші магнітних та немагнітних частинок і отримані вирази для часових кореляційних функцій даної системи у парамагнітному стані, що є цікавим з експериментальної точки зору, бо дає у явній формі залежність динамічних структурних факторів від термодинамічних величин.

Література

1. Handrich K., Kobe S., Amorphe Ferro- und Ferrimagnetica// Academica, Berlin,- 1980.
2. Rosenweigh R.F., Ferrohydrodynamics// Cambridge Univ. Press, Cambridge,- 1985.
3. Мриглод І.М., Рудавський Ю.К., Токарчук М.В., Бацевич О.Ф., Статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних частинок. // УФЖ.- 1999.- т.44, No 9.- с. ???
4. Мриглод І.М., Рудавський Ю.К., Токарчук М.В., Бацевич О.Ф., Статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних частинок: Слабонерівноважні процеси. // УФЖ.- 1999.- т.44, No 9.- с. ???
5. Rudavskii Yu.K., Mryglod I.M., Tokarchuk M.V., Batsevych O.F. On the Statistical Hydrodynamics for a Bynary Mixture of Magnetic and Nonmagnetic Atoms.// Preprint ICMP-98-29E.
6. Mryglod I.M., Tokarchuk M.V., Folk R. On the Hydrodynamic Theory of a Magnetic Liquid I. General Description. // Physica A.- 1995.- V.220.- P. 325-348.
7. Mryglod I.M., Folk R. On the Hydrodynamic Theory of a Magnetic Liquid II. Hydrodynamic Modes in the Heizenberg Fluid // Physica A.- 1996.- V.234.- P. 129-150.

8. Зубарєв Д.Н., Современные методы статистической теории неравновесных процессов.// В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.- М.: ВИНИТИ. 1980.- т. 15.- с. 131-220.
9. Zubarew D.N., Morozov V., Ropke G., Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. Vol. 1, Basic Concepts, Kinetic Theory.// Berlin, Akad. Ver. 1, 1996, 376 p.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.// М.: Наука.- 1967.- 575 с.
11. Cohen C., Sutherland J.W.H., Deutch J.M., Hydrodynamic Correlation Functions for Binary Mixtures // Physics and Chemistry of Liquids.- 1971.- V.2.- P. 213-235.
12. Bhatia A.B., Thornton D.E., Dynamical Structure Factors for a Fluid Binary Mixture in the Hydrodynamic Limit // Physics and Chemistry of Liquids.- 1974.- P.97-111.

Олександр Флорієвич Бацевич
Ігор Миронович Мриглод
Юрій Кирилович Рудавський
Михайло Васильович Токарчук

Спектр гідродинамічних збуджень та часові кореляційні функції суміші магнітних і немагнітних частинок

Роботу отримано 21 вересня 1999 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України