**Національна академія наук України**

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–98–23U

А.Дувіряк, А.Назаренко

# РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ З В'ЯЗЯМИ

ЛЬВІВ

**УДК:** 531/533; 530.12: 531.18

**PACS:** 03.20, 03.30+p, 11.30.Cp

**Рівняння Ліувілля для систем з в'язями**

А.Дувіряк, А.Назаренко

**Анотація.** В даній роботі знайдено рівняння Ліувілля і функцію статистичного розподілу для класичних систем з в'язями. З використанням одержаних рівнянь розглянуто електромагнетне поле з точковими електричними зарядами.

**Liouville equation for systems with constraints**

A.Duviryak, A.Nazarenko

**Abstract.** In this work Liouville equation and distribution function for classical systems with constraints are found. The point electrical charges in electromagnetic field are considered by use of constructed equations.

**Подається в** Журнал фізичних досліджень
**Submitted to** Journal of Physical Studies

# 1. ВСТУП

Метод Ґіббса [1,2,10] для обчислення термодинамічних функцій різних систем базується на стандартному гамільтоновому формулюванні їх динаміки. Для калібрувально-інваріантних систем більш послідовним є нестандартний гамільтонів формалізм з в'язями. Саме він повинен служити основою для квантового та статистичного опису таких систем. Методи квантування у калібрувальних теоріях добре відомі в літературі. В той же час, їх статистичний опис розвинений лише фрагментарно. В основному в літературі будувалася рівноважна статистика систем з в'язями на основі міри Фаддєєва [12], запозиченої з методу континуального інтегрування квантової теорії калібрувальних полів.

Дана робота присвячена аналізу особливостей статистичного опису систем з в'язями, зокрема з в'язями першого класу, які ґенерують калібрувальні перетворення. Розглядається поняття статистичного ансамблю таких систем, функція розподілу і виводяться умови для неї, що узагальнюють рівняння Ліувілля.

Ці результати застосовуються для опису системи електромагнетного поля з точковими зарядженими частинками. Опис вільного електромагнетного поля, а також поля, що взаємодіє з ферміонними полями в рамках формалізму з в'язями є добре відомий (див. [7,9]). Він є основою для квантової електродинаміки. У фізиці плазми часто можна нехтувати процесами народження заряджених частинок. Тому природньо у статистичному описі розглядати електромагнетне поле з точковими зарядами. Тут ми послідовно розвиваємо формулювання динаміки такої системи в рамках формалізму з в'язями, а також будуємо статистичний опис на основі одержаних загальних результатів.

# 2. ЕЛЕМЕНТИ МЕХАНІКИ З В'ЯЗЯМИ

Як правило, вихідним пунктом у формулюванні динаміки систем з в'язями є функціонал дії

$$S = \int L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau, \tag{1}$$

де $\tau$ — параметр еволюції, $q_i(\tau)$ $(i = \overline{1,n})$ — динамічні змінні, $\dot{q}_i = dq_i/d\tau$. Функція Лагранжа $L$, на відміну від стандартного випадку,



має вироджену матрицю Гесса:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = 0, \tag{2}$$

$$\mathrm{rank} \left\| \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = n - s. \tag{3}$$

Перехід до гамільтонового формулювання стандартним шляхом неможливий внаслідок того, що тільки $n - s$ співвідношень з

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

можуть бути обернені. Решта $s$ співвідношень, які пов'язують лише канонічні змінні $q, p$, називаються первинними в'язями. Вимагаючи їх збереження на протязі еволюції, одержують вторинні в'язі. Повну сукупність в'язей розбивають на два класи.

В'язями другого класу називають максимальне число в'язей $\phi_\xi(q,p) = 0$ $(\xi = \overline{1,2\mu_1})$, які задовольняють умову:

$$\det \| \{\phi_\xi, \phi_\zeta\} \| \neq 0, \tag{5}$$

тут $\{..., ...\}$ — стандартна дужка Пуассона на вихідному $2n$-мірному фазовому просторі $\mathbf{P}$.

В'язі першого класу $\chi_l(q,p) = 0$ $(l = \overline{1,\mu})$ комутують (в сенсі дужки Пуассона) зі всією сукупністю в'язей:

$$\{\chi_l, \chi_m\} = \{\chi_l, \phi_\xi\} = 0, \; l, m = \overline{1,\mu}, \; \xi = \overline{1,2\mu_1} \tag{6}$$

(достатньо щоб умови (5)–(6) виконувались на обмеженому в'язями фазовому просторі).

В'язі, що належать до різних класів, відіграють суттєво різні ролі в динаміці гамільтонових систем. В'язі другого класу, число яких в силу умови (5) завжди парне, ефективно зменьшують число ступенів вільності. В'язі першого класу приводять до неоднозначності у розв'язках рівнянь руху, які містять довільні функції (так звана калібрувальна свобода). Неоднозначність є наслідком існування в кожний момент $\mu$ канонічних перетворень, які ґенеруються функціями $\chi_l$, з допомогою яких один частковий розв'язок може бути перетворений в інший. Щоб зафіксувати розв'язок, необхідно кожну в'язь першого класу доповнити калібрувальною в'язью, що не комутує з нею (в сенсі дужки Пуассона).

Таким чином, довільна гамільтонова система з в'язями, яка містить $2\mu_1$ в'язей другого класу та $\mu$ в'язей першого класу, а також передбачає накладання $\mu$ калібрувальних в'язей, в результаті містить $2m = 2(\mu_1 + \mu)$ в'язей другого класу. Ці в'язі визначають в **P** многовид, який є фактичним фазовим простором **M** системи. На ньому природньо індукувати симплектичну структуру, яка є обмеженням вихідної симплектичної структури на визначений в'язями многовид. Індукування симплектичної структури зручно здійснити з допомогою дужки Дірака.

Нехай $\{...,...\}$ — дужка Пуассона на **P**, $\Psi_a$ $(a = \overline{1,2m})$ — сукупність усіх в'язей, в тому числі і калібрувальних, $\|C^{-1}_{ab}\|$ — матриця, обернена до $\|\Psi_a, \Psi_b\|$. Тоді на **P** означена білінійна диференційна операція — дужка Дірака:

$$\{A,B\}_{D(\Psi)} = \{A,B\} - \{A,\Psi_a\}C^{-1}_{ab}\{\Psi_b,B\}, \tag{7}$$

яка крім відомих властивостей дужки Пуассона, має таку:

$$\{A,\Psi_a\}_{D(\Psi)} = 0,\ a = \overline{1,2m}. \tag{8}$$

Властивість (8) дозволяє безпосередньо використовувати при обчисленнях обмеження динамічних величин на **M**.

## 3. УЗАГАЛЬНЕНЕ РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ

Нехай динамічна система в фазовому просторі **P** канонічних змінних $q = (q_i)$ та $p = (p_i)$ $(i = \overline{1,n})$ задається канонічним гамільтоніаном $H(q,p)$ і рівняннями в'язей першого класу

$$\chi_l(q,p) = 0, \quad l = \overline{1,\mu}. \tag{9}$$

Рівняння руху даної системи ґенеруються гамільтоніаном Дірака $H_D$,

$$\dot q = \{q,H_D\},\ \dot p = \{p,H_D\},\ H_D = H + \lambda^l\chi_l,\ l = \overline{1,\mu}, \tag{10}$$

де $\lambda^l$ — множники Лагранжа. При переході від лагранжевого до гамільтонового опису деякі функції $\lambda$ виражаються через канонічні змінні, решта — залишаються довільними функціями часу.

Фізичний фазовий простір $\tilde{\mathbf{M}}$ системи будується як підмноговид, заданий в **P** в'язями (9), і профакторизований за канонічними перетвореннями, що генеруються цими в'язями. Для його параметризації канонічними змінними здійснемо канонічне перетворення, що трансформує вихідну систему в'язей $\chi = 0$ в еквівалентну їй канонічну систему [7]:

$$P = 0,\ [P] = \mu, \tag{11}$$



де $[P]$ означає число функцій $P$. Сукупність канонічних імпульсів $P$ разом із спряженими координатами $Q$ $(\Omega = (Q,P),\ [\Omega] = 2\mu)$ назвемо нефізичними змінними системи, а $\omega$ $([\omega] = 2(n-\mu))$ — фізичними змінними. В термінах цих змінних гамільтоніан Дірака $H_D$ можна представити у вигляді (з точністю до неістотних членів другого та вищих порядків по $P$):

$$H_D = H^\Phi(\omega) + \lambda P,$$

де $H^\Phi(\omega)$ — фізичний гамільтоніан [7]. Еволюція системи в нових змінних описується рівняннями

$$\dot\omega = \{\omega, H^\Phi(\omega)\}, \quad P = 0, \quad \dot Q = \lambda. \tag{12}$$

Системи, які відрізняються лише вибором функцій $\lambda$, назвемо фізично еквівалентними.

Оскільки в'язі $P = 0$ накладаються у всі моменти часу, то середнє значення від довільної функції $f(\omega,Q,P)$ за деякий проміжок часу повинно дорівнювати середньому значенню від функції на поверхні в'язей, тобто від $f(\omega,Q,0)$:

$$\bar f \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\omega(\tau),Q(\tau),P(\tau))d\tau = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\omega(\tau),Q(\tau),0)d\tau. \tag{13}$$

Згідно з методом Ґіббса, усереднення по часі замінимо усередненням по ансамблю, яке проводиться з функцією статистичного розподілу $\rho$, що задовільняє умову нормування

$$\int \rho(\omega,\Omega,\tau)d\omega d\Omega = 1. \tag{14}$$

Тоді середнє $\bar f$ запишеться наступним чином

$$\bar f = \int \rho(\omega,\Omega,\tau)f(\omega,Q,P)d\omega d\Omega = \int \rho(\omega,\Omega,\tau)f(\omega,Q,0)d\omega d\Omega. \tag{15}$$

З виразу (15) легко бачити, що функція розподілу $\rho(\omega,\Omega,\tau)$ містить $\delta$-функцію Дірака від в'язей $P$, тобто

$$\rho(\omega,\Omega,\tau) = \frac{1}{N}\rho^\Phi(\omega,\tau)\rho^*(Q,\tau)\delta(P), \tag{16}$$

де $1/N$ — нормівний множник. Для зручності будемо вважати, що функція розподілу $\rho^\Phi(\omega,\tau)$ є нормованою

$$\int \rho^\Phi(\omega,\tau)d\omega = 1. \tag{17}$$

Беручи до уваги (16) і (17), з умови (14) одержимо значення сталої $N$:

$$N = \int \rho^*(Q,\tau) dQ. \tag{18}$$

Довільна фізична (спостережувана) величина повинна бути калібрувально-інваріантною. Тому для всіх фізично еквівалентних систем вона набуває однакових значень на поверхні в'язей, і, отже, може бути представлена у вигляді:

$$A(\omega, P) = A^{\Phi}(\omega) + O(P), \tag{19}$$

де $O(P)$ — деяка функція $P$, яка обертається в нуль при $P = 0$. Середнє значення спостережуваної величини за рахунок структури виразів (16) і (19) може бути зведено до середнього значення за фізичними змінними системи:

$$\bar{A} = \int A^{\Phi}(\omega) \rho^{\Phi}(\omega,\tau) d\omega. \tag{20}$$

Очевидно, що для фізично еквівалентних систем функція розподілу $\rho^{\Phi}(\omega,\tau)$ має однаковий вигляд, і є інваріантною відносно вибору рівнянь для $Q$.

Оскільки для елементу фізичного фазового об'єму $d\omega$ виконується теорема Ліувілля, то функція статистичного розподілу $\rho^{\Phi}$ системи, як і у випадку теорії без в'язей, мусить бути інтегралом руху і зберігати своє значення при інфінітезимальних канонічних перетвореннях

$$\rho^{\Phi}(\omega + \delta\omega, \tau + \delta\tau) = \rho^{\Phi}(\omega,\tau). \tag{21}$$

З рівняння (21) видно, що еволюція в часі функції розподілу пов'язана з еволюцією змінних $\omega$, яка ґенерується фізичним гамільтоніаном $H^{\Phi}$. Після розкладу лівої частини (21) в ряд Маклорена одержимо рівняння для $\rho^{\Phi}$

$$\frac{\partial \rho^{\Phi}}{\partial \tau} + \{\rho^{\Phi}, H^{\Phi}\} = 0. \tag{22}$$

Фізична функція розподілу $\rho^{\Phi}$ збігається з функцією розподілу стандартної теорії. Зокрема, в рівноважному випадку для канонічного ансамблю Ґіббса

$$\rho^{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^k Z} e^{-\beta H^{\Phi}(\omega)}, \quad 2k = [\omega], \tag{23}$$

де $\beta = 1/kT$, $Z$ — статистична сума системи, яка визначається з умови нормування (17) і є калібрувально-інваріантною величиною.



За рахунок неоднозначності змінних $Q$ (рівняння для $Q$ містять довільні функції $\lambda$) функція $\rho^*(Q,\tau)$ є довільною. Її можна по-різному задавати в кожній досліджуваній задачі.

Якщо вимагати, щоб функція розподілу $\rho$ була калібрувально-інваріантною величиною, тобто задовольняла умову

$$\{\rho, P\} = 0, \tag{24}$$

то досить покласти

$$\rho^*(Q,\tau) = 1.$$

Зрозуміло, що умова (24) не залежить від вибору змінних, тобто має місце і в термінах вихідних змінних $(q,p)$ при наявності в'язей $\chi$.

Повертаючись до загального нерівноважного, випадку випишемо систему рівнянь, які задовільняє побудована калібрувально-інваріантна функція статистичного розподілу $\rho$ (16):

$$P = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \{\rho, H_D\} = 0, \tag{26}$$

$$\{\rho, P\} = 0, \tag{27}$$

$$\int \rho f(P) d\omega d\Omega = \overline{f(0)}, \tag{28}$$

$$\int \rho d\omega d\Omega = 1; \tag{29}$$

тут і далі всі аргументи функції $f$ крім в'язей опускаються.

Система рівнянь (25)-(29) в вихідних канонічних змінних теорії $(q,p)$ буде мати вигляд

$$\chi(q,p) = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \{\rho, H_D\} = 0, \tag{31}$$

$$\{\rho, \chi\} = 0, \tag{32}$$

$$\int \rho f(\chi) dq dp = \overline{f(0)}, \tag{33}$$

$$\int \rho dq dp = 1. \tag{34}$$

Для того, щоб в вихідних змінних під час усереднення за ансамблем усунути всі нефізичні змінні, перейдемо до фізично еквівалентної системи шляхом накладання калібрування

$$Q = K(\omega), \tag{35}$$

яке, будемо вимагати, забезпечує сумісність рівнянь руху

$$\lambda(\omega, Q)|_{Q=K(\omega)} = \{K(\omega), H^{\Phi}(\omega)\}.$$

Беручи до уваги те, що

$$\int \delta[Q - K(\omega)]dQ = 1, \tag{36}$$

функцію розподілу відкаліброваної теорії запишемо так

$$\rho^G = \rho^{\Phi}(\omega, \tau)\delta(P)\delta[Q - K(\omega)], \tag{37}$$

тобто

$$\rho^*(Q, \tau) = \delta\{Q - K[\omega(\tau)]\}.$$

Рівняння які задовільняє $\rho^G$ (для системи з в'язями вже другого класу), мають такий вигляд

$$(P, Q - K(\omega)) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial \rho^G}{\partial \tau} + \{\rho^G, H_D\} = 0, \tag{39}$$

$$\int \rho^G f(P, Q) d\omega d\Omega = \overline{f(0, K(\omega))}, \tag{40}$$

$$\int \rho^G d\omega d\Omega = 1, \tag{41}$$

або, в термінах вихідних змінних $(q, p)$:

$$\Psi = (\chi, \phi^G) = 0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial \rho^G}{\partial \tau} + \{\rho^G, H\}_{D(\Psi)} = 0, \tag{43}$$

$$\int \rho^G f(\Psi) dq dp = \overline{f(0)}, \tag{44}$$

$$\int \rho^G dq dp = 1. \tag{45}$$



Повертаючись до вихідних змінних, співвідношення (37) з врахуванням (23) набуде вигляду [12,16]

$$\rho^G = \frac{1}{(2\pi)^{n-\mu} Z} e^{-\beta H} J\delta(\Psi), \tag{46}$$

де

$$J = \det \parallel \{\phi^G, \chi\} \parallel,$$

$n = [q] = [p]$, $2\mu = [\Psi]$. Воно співпадає з відомим в літературі виразом для функції статистичного розподілу для систем з в'язями першого класу при наявності додаткових калібрувальних умов $\phi^G = 0$ [16].

Зауважимо, що рівняння (43)-(45) застосовні і до теорій, в яких повна система в'язей $\Psi$ є другого класу, що виникла природнім шляхом при переході від лагранжевого до гамільтонового опису, або внаслідок калібрування теорії з в'язями двох класів. Це зумовлено фактом, що для довільної системи в'язей другого класу завжди можна побудувати еквівалентну систему, половина в'язей якої буде комутувати між собою, як і у випадку в'язей $(\chi, \phi^G)$ [7].

В усіх випадках досить покласти

$$J = \sqrt{\det \parallel \{\Psi, \Psi\} \parallel}. \tag{47}$$

Якщо в'язі явно залежать від часу $\tau$, то в рівнянні (43) похідну за $\tau$ необхідно замінити оператором [3]

$$\frac{\partial^* \cdot}{\partial \tau} = \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} - \{\,\cdot\,, \Psi_l\} \parallel \{\Psi, \Psi\} \parallel^{-1}_{lk} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau}. \tag{48}$$

Оператор повної похідної за часом для систем з в'язями, залежними явно від часу, записується через модифіковану похідну (48) у вигляді

$$D_\tau = \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} + \{\,\cdot\,, H\} - \{\,\cdot\,, \Psi_l\} \parallel \{\Psi, \Psi\} \parallel^{-1}_{lk} \left\{ \frac{\partial \Psi_k}{\partial \tau} + \{\Psi_k, H\} \right\}. \tag{49}$$

Цей оператор зануляє інтеграли руху, в тому числі і функцію розподілу.

Функція рівноважного статистичного розподілу для систем з в'язями, залежними явно від часу, задовільняє рівняння

$$\frac{\partial^* \rho^G}{\partial \tau} = 0 \tag{50}$$

і співпадає з функцією розподілу (46).

# 4. РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОГО ПОЛЯ З ЕЛЕКТРИЧНИМИ ЗАРЯДАМИ

## 4.1. ФОРМАЛІЗМ ДІРАКА

Далі ми використовуємо наступні позначення. Метричний тензор простору Мінковського:

$$\|g_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1); \tag{51}$$

грецькі індекси $\mu,\nu = \overline{0,3}$ нумерують компоненти 4-векторів в просторі Мінковського, а латинські $i,j=\overline{1,3}$ — в 3-мірному евклідовому.

Система релятивістичних безспінових точкових електричних зарядів в електромагнетному полі в лагранжевому формалізмові описується в термінах частинкових змінних $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{x}_a)$ і 4-потенціалу електромагнетного поля $A^\mu = (A^0=\varphi, \mathbf{A})$. Дія такої системи є [11]

$$S = \int L d\tau, \tag{52}$$

де $L$ — функція Лагранжа, має вигляд

$$L = -\sum_{a=1}^{N} m_a \sqrt{u_a^2(\tau)} - \sum_{a=1}^{N} e_a u_a^\mu(\tau) A_\mu[x_a(\tau)] - \\ - \frac{1}{16\pi}\int F_{\mu\nu}(\mathbf{x},\tau)F^{\mu\nu}(\mathbf{x},\tau)d^3x, \tag{53}$$

а $m_a$, $e_a$, $u_a^\mu = dx_a^\mu/d\tau$ ($u_a^2 \equiv u_a^\mu u_{a\mu}$) — маса, заряд та 4-швидкість $a$-тої частинки; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор Максвелла поля.

Тут ми використовуємо опис системи з єдиним еволюційним параметром $\tau$. Такий вибір визначає 0-компоненти швидкостей $u_a^0 = 1$ і, таким чином, виключає часові компоненти частинкових змінних з подальшого розгляду.

Перейдемо до гамільтонового формулювання механіки системи згідно з загальним формалізмом Дірака.

З варіації лагранжіану за швидкостями знайдемо канонічні частинкові імпульси

$$p_{ai}(\tau) = \frac{m_a u_a^i(\tau)}{\sqrt{1-\mathbf{u}_a^2(\tau)}} - e_a A_i[x_a(\tau)] \tag{54}$$



та імпульси поля

$$B^\mu(x) = \frac{1}{4\pi}F^{\mu 0}(x). \tag{55}$$

Внаслідок незалежності лагранжіану $L$ від швидкісті $\dot{A}_0$, в гамільтоновому формалізмові виникає первинна в'язь. Вона очевидна з (55) і антисиметричності тензора Максвелла,

$$\chi_1 \equiv B^0 = 0. \tag{56}$$

З перетворення Лежандра знайдемо первинний гамільтоніан $H^{(1)}$ системи [9]

$$H^{(1)} = H + \int \lambda \chi_1 d^3x, \tag{57}$$

де $\lambda = \dot{A}_0$ — невизначена швидкість, а канонічний гамільтоніан $H$, має вигляд

$$H = \sum_{a=1}^{N}\left\{\sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a\mathbf{A}(x_a)]^2} + e_a A_0(x_a)\right\} + \\ + \int \left(\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + 2\pi B^i B^i - A_0 B^i{}_{,i}\right) d^3x; \tag{58}$$

тут

$$B^j{}_{,i} \equiv \partial_i B^j \equiv \frac{\partial B^j}{\partial x^i}.$$

Для даної системи означимо дужку Пуассона функцій $F$ і $G$ канонічних змінних частинок і полів

$$\{F,G\} \equiv \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_a^i(\tau)}\frac{\partial G}{\partial p_{ai}(\tau)} - \frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)}\frac{\partial G}{\partial x_a^i(\tau)}\right) + \\ + \int\left(\frac{\delta F}{\delta A_\mu(\mathbf{x},\tau)}\frac{\delta G}{\delta B^\mu(\mathbf{x},\tau)} - \frac{\delta F}{\delta B^\mu(\mathbf{x},\tau)}\frac{\delta G}{\delta A_\mu(\mathbf{x},\tau)}\right)d^3x, \tag{59}$$

з допомогою якої рівняння руху можуть бути записані стандартним чином.

Вимагаючи збереження в часі в'язі (56)

$$\dot{\chi}_1 = \{\chi_1, H^{(1)}\} = 0, \tag{60}$$

одержимо вторинну в'язь

$$\chi_2 = B^{i,i} + \varrho. \tag{61}$$

Тут і далі

$$\varrho(\mathbf{x},\tau)=\sum_{a=1}^{N}e_a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a(\tau)),\;\; j^i(\mathbf{x},\tau)=\sum_{a=1}^{N}e_a u_a^i(\tau)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a(\tau)).$$

Умова збереження вторинної в'язі (61) в часі забезпечується законом збереження заряду

$$\dot{\chi}_2=\{\chi_2,H^{(1)}\}=-div\,\mathbf{j}-\frac{\partial\varrho}{\partial\tau}\equiv 0, \tag{62}$$

тобто нові в'язі не виникають, а множник Лагранжа $\lambda$ та змінна $A_0$ при $\chi_1$ та $\chi_2$ залишаються невизначеними. Оскільки в'язі комутують

$$\{\chi_1,\chi_2\}\equiv 0, \tag{63}$$

то система в'язей теорії

$$\chi=(B^0,B^{i,i}+\varrho) \tag{64}$$

— першого класу.

Зауважимо, що калібрувально–інваріантні властивості теорії пов'язані з лінійною комбінацією в'язей першого класу

$$\int[\dot{A}_0B^0+A_0(B^{i,i}+\varrho)]d^3x, \tag{65}$$

яка входить в $H^{(1)}$ і містить невизначену, тобто довільну, функцію $A_0$. Дійсно, якщо покласти $A_0=\Lambda$, то (65) стає ґенератором

$$\delta W=\int(B^\mu\partial_\mu\Lambda+\varrho\Lambda)d^3x \tag{66}$$

добре відомих калібрувальних перетворень

$$A_\mu\to A_\mu+\delta A_\mu=A_\mu+\{A_\mu,\delta W\}=A_\mu+\partial_\mu\Lambda, \tag{67}$$

$$p_{ai}\to p_{ai}+\delta p_{ai}=p_{ai}+\{p_{ai},\delta W\}=p_{ai}-e_a\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x}_a,\tau)}{\partial x_a^i} \tag{68}$$

які зберігають дію і рівняння руху.

Вважаючи $A_0$ довільною функцією, яка відіграє роль множника Лагранжа, легко бачити, що первинний гамільтоніан системи $H^{(1)}$ має структуру гамільтоніану Дірака (див. (10)):

$$H_D=\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2+[\mathbf{p}_a-e_a\mathbf{A}(x_a)]^2}+\int\left(\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}+2\pi B^iB^i\right)d^3x+$$



$$+\int(\lambda\chi_1+A_0\chi_2)\,d^3x. \tag{69}$$

Таким чином, ми перейшли до канонічного опису, на базі якого будуть знайдені статистичні характеристики системи.

## 4.2. ФІЗИЧНІ ТА НЕФІЗИЧНІ ЗМІННІ ТЕОРІЇ

Знайдемо фізичні $\omega$ та нефізичні $\Omega=(Q,P)$ змінні теорії (див. (11), (12)).

Оскільки в'язі теорії знаходяться в сильній інволюції, тобто їх дужка Пуассона тотожньо дорівнює нулеві, їх можна вибрати за канонічні імпульси

$$P_1(\mathbf{x},\tau)\equiv B^0(\mathbf{x},\tau),\quad P_2(\mathbf{x},\tau)\equiv B^{i,i}(\mathbf{x},\tau)+\varrho(\mathbf{x},\tau), \tag{70}$$

спряжені до деяких нефізичних координат $Q_1$ та $Q_2$. Імпульси (70) дорівнюють нулеві і визначають канонічну систему в'язей (11) теорії.

Для знаходження фізичних імпульсів запишемо 3-мірний вектор імпульсів поля у вигляді суми поперечної та повздовжньої проекцій

$$B^i(\mathbf{x},\tau)=B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)-\partial^i\int\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_jB^j(\mathbf{y},\tau)d^3y, \tag{71}$$

де $\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ — функція Гріна оператора Лапласа $\Delta\equiv-\partial_i\partial^i$.

Для поперечних компонент поля маємо

$$\partial_iB_\perp^i\equiv 0. \tag{72}$$

Оскільки має місце рівність (72), то одна з компонент вектора $B_\perp^i$ є лінійною комбінацією двох інших. Тоді, покладаючи, що незалежними компонентами є $B_\perp^\xi=b^\xi$, $\xi=1,2$, вектор $B_\perp^i$ можна записати у вигляді

$$B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)=\left(\delta_\xi^i-\delta_3^i\frac{\partial_\xi}{\partial_3}\right)b^\xi(\mathbf{x},\tau). \tag{73}$$

Після підстановки (70) і (73) в (71), одержимо

$$B^i(\mathbf{x},\tau)=\left(\delta_\xi^i-\delta_3^i\frac{\partial_\xi}{\partial_3}\right)b^\xi(\mathbf{x},\tau)-$$

$$-\partial^i\int\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,[\varrho(\mathbf{y},\tau)-P_2(\mathbf{y},\tau)]\,d^3y. \tag{74}$$

Легко бачити, що від 3-вектора $B^i$ ми перейшли до змінних ($b^1$, $b^2$, $P_2$), які комутують між собою, і, отже, є канонічними.

З допомогою канонічного перетворення знайдемо канонічно спряжені координати до імпульсів $b^1, b^2, P_1, P_2$. Твірний функціонал канонічного перетворення в старих координатах і нових імпульсах має вигляд

$$F = \int \left\{ A_0(\mathbf{x},\tau)P_1(\mathbf{x},\tau) + A_i(\mathbf{x},\tau) \left[ \left( \delta^i_\xi - \delta^i_3 \frac{\partial_\xi}{\partial_3} \right) b^\xi(\mathbf{x},\tau) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\partial^i \int \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \left[ \varrho(\mathbf{y},\tau) - P_2(\mathbf{y},\tau) \right] d^3y. \right] \right\} d^3x. \qquad (75)$$

Нові узагальнені координати поля мають вигляд

$$Q_1(\mathbf{x},\tau) \equiv \frac{\delta F}{\delta P_1(\mathbf{x},\tau)} = A_0(\mathbf{x},\tau), \qquad (76)$$

$$Q_2(\mathbf{x},\tau) \equiv \frac{\delta F}{\delta P_2(\mathbf{x},\tau)} = -\int \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial^i A_i(\mathbf{y},\tau) d^3y, \qquad (77)$$

$$a_\xi(\mathbf{x},\tau) \equiv \frac{\delta F}{\delta b^\xi(\mathbf{x},\tau)} = \left( \delta^i_\xi - \delta^i_3 \frac{\partial_\xi}{\partial_3} \right) A^\perp_i(\mathbf{x},\tau), \ \xi = 1, 2, \qquad (78)$$

де

$$A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) = A_i(\mathbf{x},\tau) + \partial_i \int \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial^j A_j(\mathbf{y},\tau) d^3y. \qquad (79)$$

Таким чином, ми отримали сукупності фізичних $\omega = ((x^i_a,\, p_{ai}),\, (a_\xi,\, b^\xi))$, та нефізичних $\Omega = ((Q_1, P_1), (Q_2, P_2))$ змінних теорії.

В змінних ($A^\perp_i,\ B^i_\perp,\ Q_1,\ P_1,\ Q_2,\ P_2$) гамільтоніан Дірака записується наступним чином

$$H_D = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a(\tau) - e_a \mathbf{A}_\perp(x_a(\tau))]^2} +$$

$$+ \int \left( -\frac{1}{8\pi} A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) \Delta A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) + 2\pi B^i_\perp(\mathbf{x},\tau) B^i_\perp(\mathbf{x},\tau) \right) d^3x -$$

$$-2\pi \int \varrho(\mathbf{x},\tau) \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varrho(\mathbf{y},\tau) d^3x d^3y +$$

$$+ \int \left( \lambda(\mathbf{x},\tau) P_1(\mathbf{x},\tau) + Q_1(\mathbf{x},\tau) P_2(\mathbf{x},\tau) \right) d^3x +$$

$$+ \int \left\{ 4\pi P_2(\mathbf{x},\tau) \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varrho(\mathbf{y},\tau) - \right.$$



$$\left. -2\pi P_2(\mathbf{x},\tau) \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) P_2(\mathbf{y},\tau) \right\} d^3x d^3y. \qquad (80)$$

Останній член в (80) є квадратичним за в'язями, і не дає вкладу у рівняння руху.

Зауважимо, що змінні $A^\perp_i$, $B^i_\perp$ не є канонічно спряженими. Канонічно спряженими є фізичні змінні $a_\xi$, $b^\xi$.

Фізичний гамільтоніан системи $H^\Phi$, який визначає енергію системи і співпадає з гамільтоніаном Дірака на поверхні в'язей, тобто при $P_1 = P_2 = 0$, має вираз:

$$H^\Phi = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a(\tau) - e_a \mathbf{A}_\perp(x_a(\tau))]^2} +$$

$$+ \int \left( -\frac{1}{8\pi} A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) \Delta A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) + 2\pi B^i_\perp(\mathbf{x},\tau) B^i_\perp(\mathbf{x},\tau) \right) d^3x -$$

$$-2\pi \int \varrho(\mathbf{x},\tau) \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varrho(\mathbf{y},\tau) d^3x d^3y. \qquad (81)$$

Використовуючи вигляд гамільтоніану Дірака в нових змінних (80), запишемо рівняння Гамільтона

$$\dot{Q}_1(\mathbf{x},\tau) = \lambda(\mathbf{x},\tau), \quad \dot{P}_1(\mathbf{x},\tau) = -P_2(\mathbf{x},\tau), \qquad (82)$$

$$\dot{Q}_2(\mathbf{x},\tau) = 4\pi \int \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varrho(\mathbf{y},\tau) d^3y + Q_1(\mathbf{x},\tau), \ \dot{P}_2(\mathbf{x},\tau) = 0, \qquad (83)$$

$$\dot{A}^\perp_i = 4\pi B^i_\perp, \quad \dot{B}^i_\perp = -j^i_\perp + \frac{1}{4\pi} \Delta A^\perp_i, \qquad (84)$$

де

$$A^\perp_i(\mathbf{x},\tau) = \int \left\{ \delta^\xi_i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \partial_{ix} \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \partial^\xi_y \right\} a_\xi(\mathbf{y},\tau) d^3y.$$

Легко бачити, що рівняння для фізичних змінних (84), які визначають фізичний сектор теорії, не залежать від вибору довільної функції $\lambda$, що пов'язано з калібрувальною інваріантністю теорії.

### 4.3. КАЛІБРУВАННЯ ТЕОРІЇ

Оскільки рівняння руху теорії (82), (83) містять довільну функцію $\lambda$, то змінні $Q_1$ та $Q_2$ не можуть бути знайдені однозначно. Для фіксації двох нефізичних координат $Q_1$, $Q_2$ накладемо дві додаткові калібрувальні в'язі на них у вихідних змінних:

$$\phi^G_1 = L^i A_i, \quad \phi^G_2 = Z_1 A_0 + 4\pi L^i B^i. \qquad (85)$$

Вони задовільняють співвідношення

$$\phi_2^G = \{\phi_1^G, H_D\}, \tag{86}$$

що забезпечує їх сумісність з рівнянням (83).

Тут і далі використовуються диференційні оператори

$$L^i \equiv n^i + n^i_j \partial^j, \quad Z_1 \equiv L^i \partial_i, \quad Z_2 \equiv L^i L^{\dagger i}, \tag{87}$$

де $n^i$, $n^i_j$ — сталі коефіцієнти. Також використовуються оператори з $^\dagger$, одержані з даних за правилом

$$L(\mathbf{x})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = L^\dagger(\mathbf{y})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{88}$$

де аргумент оператора вказує на змінну, на яку він діє.

Система в'язей відкаліброваної теорії

$$\Psi = (4\pi L^i B^i + Z_1 A_0,\ B^0,\ L^i A_i,\ B^{i,i} + \varrho) \tag{89}$$

— другого класу.

Для даної теорії з в'язями $\Psi$ побудуємо дужку Дірака. Для цього знайдемо матрицю $\mathbf{C}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \equiv \|\{\Psi_i(\mathbf{x},\tau), \Psi_j(\mathbf{y},\tau)\}\|$, яка дорівнює

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & Z_1(\mathbf{x}) & -4\pi Z_2(\mathbf{x}) & 0 \\ -Z_1^\dagger(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 4\pi Z_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & Z_1(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & -Z_1^\dagger(\mathbf{x}) & 0 \end{array} \right\| \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{90}$$

Обернена до (90) матриця $\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ визначається з умови

$$\int C_{ik}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) C^{-1}_{kj}(\mathbf{z}-\mathbf{y}) d^3z = \delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

і дорівнює

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & -g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & -4\pi g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ 0 & 0 & 0 & -g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ 0 & 4\pi g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \end{array} \right\|, \tag{91}$$

де функції $g_1$, $g_1^\dagger$ і $g_2$ визначаються з наступних співвідношень

$$Z_1(\mathbf{x}) g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ Z_1^\dagger(\mathbf{x}) g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{92}$$



$$g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int g_1(\mathbf{x}-\mathbf{u}) Z_2(\mathbf{u}) g_1^\dagger(\mathbf{u}-\mathbf{y}) d^3u. \tag{93}$$

Дужка Дірака даної теорії має загальний вигляд

$$\{F,G\}_{D(\Psi)} = \{F,G\} -$$

$$- \int \{F, \Psi_i(\mathbf{x},\tau)\}\, \mathbf{C}^{-1}_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \{\Psi_j(\mathbf{y},\tau), G\} d^3x d^3y. \tag{94}$$

Явний вигляд дужки Дірака подано в додатку до роботи.

Легко бачити, що запропонована калібровка (85) узагальнює добре відому калібровку Кулона та аксіальну калібровку. Для розгляду одержаних результатів у згаданих калібровках необхідно покласти відповідно $L^i = \partial^i$ та $L^i = n^i$.

Щоб одержати в гамільтоновому описі калібровку Лоренца, необхідно розглянути калібрувальні в'язі, нелінійні за польовими змінними. Розглянемо довільну калібровку, яку зручно записати у вигляді:

$$\phi_1^G = L^i A_i - \epsilon, \quad \phi_2^G = Z_1 A_0 + 4\pi L^i B^i - \eta, \tag{95}$$

де $\epsilon$ та $\eta$ — довільні функції. Для того, щоб калібровка (95) була сумісна з рівняннями руху, досить покласти

$$\eta = \dot{\epsilon}. \tag{96}$$

Калібрувальні умови (95) зводяться до калібровки Лоренца, якщо

$$L^i = \partial^i,\ \epsilon = -\dot{\sigma},\ \eta = -\Delta\sigma - 4\pi\varrho, \tag{97}$$

де функція $\sigma$ задовільняє рівняння Даламбера [6]

$$\Box\sigma = 4\pi\varrho. \tag{98}$$

## 4.4. РІВНОВАЖНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ

Рівноважна функція розподілу ансамблю Ґіббса системи електромагнетного поля з електричними зарядами, згідно з результатами розділу 3, має вигляд

$$\rho^G = \frac{1}{(2\pi)^{3N+2} Z} \exp\left\{ -\beta \left[ \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}(x_a)]^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int \left( \frac{1}{16\pi} F_{ij}F^{ij} + 2\pi B^i B^i \right) d^3x + \int A_0 (B^{i,i} + \varrho) d^3x \right] \right\}.$$

$$\cdot\,\delta(B^0)\delta(B^{i,i}+\varrho)\delta(L^iA_i)\delta(4\pi L^iB^i+Z_1A_0)\det{}^2 Z_1(\mathbf{x})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (99)$$

яка містить узагальнені (залежні від просторових змінних) та функціональні (залежні від польових змінних) $\delta$–функції [5,7,13]. Статистична сума системи $Z$, після очевидного інтегрування за $B^0$ і $A_0$, записується так

$$Z=\int\exp\left\{-\beta\left[\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2+[\mathbf{p}_a-e_a\mathbf{A}(x_a)]^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\left(\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}+2\pi B^iB^i\right)d^3x\right]\right\}$$

$$\delta(B^{i,i}+\varrho)\delta(L^iA_i)\,\det Z_1(\mathbf{x})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{dx_a^idp_{ai}DA_iDB^i}{(2\pi)^{3N+2}}. \quad (100)$$

Рівноважна функція розподілу ансамблю Ґіббса (99) задовільняє рівняння Ліувілля, яке в калібровці (85) має вигляд

$$\Psi=(4\pi L^iB^i+Z_1A_0,\ B^0,\ L^iA_i,\ B^{i,i}+\varrho)=0, \quad (101)$$

$$\frac{\partial\rho^G}{\partial\tau}+\{\rho^G,H\}_{D(\Psi)}=0, \quad (102)$$

$$\int\rho^G\,f(\Psi)dx_a^idp_{ai}DA_\mu DB^\mu=\overline{f(0)}, \quad (103)$$

$$\int\rho^G\,dx_a^idp_{ai}DA_\mu DB^\mu=1, \quad (104)$$

де дужка Дірака співпадає з виразом (125), а інтеграл за польовоми змінними обчислюється за правилами континуального інтегрування.

Функція розподілу та статистична сума системи в фізичних та нефізичних змінних мають вигляд

$$\rho^G=\frac{1}{(2\pi)^{3N+2}Z}\exp\left\{-\beta\left[\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2+[\mathbf{p}_a(\tau)-e_a\mathbf{A}_\perp(x_a(\tau))]^2}+\right.\right.$$

$$+\int\left(-\frac{1}{8\pi}A_i^\perp(\mathbf{x},\tau)\Delta A_i^\perp(\mathbf{x},\tau)+2\pi B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)\right)d^3x-$$

$$\left.\left.-2\pi\int\varrho(\mathbf{x},\tau)\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varrho(\mathbf{y},\tau)d^3xd^3y\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\,\delta(P_1)\delta(P_2)\delta(Q_1-K_1(a,b))\delta(Q_2-K_2(a,b)), \quad (105)$$



$$Z=\int\exp\left\{-\beta\left[\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2+[\mathbf{p}_a(\tau)-e_a\mathbf{A}_\perp(x_a(\tau))]^2}+\right.\right.$$

$$+\int\left(-\frac{1}{8\pi}A_i^\perp(\mathbf{x},\tau)\Delta A_i^\perp(\mathbf{x},\tau)+2\pi B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)B_\perp^i(\mathbf{x},\tau)\right)d^3x-$$

$$\left.\left.-2\pi\int\varrho(\mathbf{x},\tau)\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varrho(\mathbf{y},\tau)d^3xd^3y\right]\right\}\frac{dx_a^idp_{ai}Da_\xi Db^\xi}{(2\pi)^{3N+2}}, \quad (106)$$

де явний вигляд $K_1$ та $K_2$ у виразі для функції розподілу не є істотний, а у виразі для статистичної суми вже проведено очевидне інтегрування за нефізичними змінними.

### 4.5. РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ В ПРЕДСТАВЛЕННІ ФУР'Є

Розкладемо потенціали $\mathbf{A}$ та $\varphi$, а також густини заряду та струму за плоскими хвилями [13]:

$$(\varphi(\mathbf{x},\tau),\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau))=\sqrt{4\pi}\int(\varphi_k(\tau),\mathbf{a}_k(\tau))e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

$$\varrho(\mathbf{x},\tau)=\int\varrho_k(\tau)e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},\quad \mathbf{j}(\mathbf{x},\tau)=\int\mathbf{j}_k(\tau)e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (107)$$

де

$$\varrho_k(\tau)=\sum_a e_ae^{-i\mathbf{kx}_a(\tau)},\quad \mathbf{j}_k(\tau)=\sum_a e_a\mathbf{u}_a(\tau)e^{-i\mathbf{kx}_a(\tau)}. \quad (108)$$

Використовуючи умову дійснозначності потенціалів і густин

$$\mathbf{a}_k^*=\mathbf{a}_{-k},\quad \varphi_k^*=\varphi_{-k},\quad \varrho_k^*=\varrho_{-k},\quad \mathbf{j}_k^*=\mathbf{j}_{-k}, \quad (109)$$

а також розклад на дійсні та уявні складові

$$\mathbf{a}_k=\sum_{\alpha=1}^{2}\gamma(\alpha)\,\mathbf{a}_k^\alpha,\quad \varphi_k=\sum_{\alpha=1}^{2}\gamma(\alpha)\,\varphi_k^\alpha, \quad (110)$$

перепишемо лагранжіан системи (53) у векторній формі в представленні Фур'є

$$L=-\sum_a m_a\sqrt{1-\mathbf{u}_a^2(\tau)}+\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\frac{1}{2}\sum_\alpha\left[(\dot{\mathbf{a}}_k^\alpha)^2-k^2(\mathbf{a}_k^\alpha)^2+\right.\right.$$

$$+(\mathbf{k}\mathbf{a}_k^\alpha)^2+k^2(\varphi_k^\alpha)^2+(-1)^\alpha 2(\mathbf{k}\dot{\mathbf{a}}_k^\alpha)\varphi_k^{\beta(\alpha)}-$$

$$- \sqrt{4\pi}\,(\varphi_k^\alpha \varrho_k^\alpha - \mathbf{a}_k^\alpha \mathbf{j}_k^\alpha)\Big]\Big\}, \tag{111}$$

де

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} 2, & \alpha = 1, \\ 1, & \alpha = 2, \end{cases} \quad \gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ i, & \alpha = 2. \end{cases} \tag{112}$$

Здійснюючи перехід до гамільтонового формалізму за схемою, аналогічною до попередньої (розділ 4), отримуємо систему в'язей першого класу

$$\chi_k^\alpha = (\chi_{1k}^\alpha, \chi_{2k}^\alpha) = \left(\pi_k^\alpha, \quad (-1)^{\beta(\alpha)}(\mathbf{k}\mathbf{b}_k^{\beta(\alpha)}) - \sqrt{4\pi}\varrho_k^\alpha\right), \tag{113}$$

і гамільтоніан Дірака

$$H_D = \sum_a \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}(x_a)]^2} +$$

$$+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_\alpha \left[ (\mathbf{b}_k^\alpha)^2 + k^2 (\mathbf{a}_k^\alpha)^2 - (\mathbf{k}\mathbf{a}_k^\alpha)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_\alpha \varphi_k^\alpha \left[ (-1)^{\beta(\alpha)}(\mathbf{k}\mathbf{b}_k^{\beta(\alpha)}) - \sqrt{4\pi}\varrho_k^\alpha \right] + \sum_\alpha \lambda_k^\alpha \pi_k^\alpha \right\}. \tag{114}$$

Рівняння руху отримуються стандартним чином в термінах дужки Пуассона:

$$\{F, G\} = \sum_a \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_a} - \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_a} \right) +$$

$$+ (2\pi)^3 \int d^3k \sum_\alpha \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{a}_k^\alpha} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{b}_k^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{a}_k^\alpha} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{b}_k^\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\delta F}{\delta \varphi_k^\alpha} \frac{\delta G}{\delta \pi_k^\alpha} - \frac{\delta G}{\delta \varphi_k^\alpha} \frac{\delta F}{\delta \pi_k^\alpha} \right) \right]. \tag{115}$$

Здійснюючи канонічне перетворення до фізичних

$$a_{k\xi}^\alpha = \left( \delta_{i\xi} - \delta_{i3} \frac{k_\xi}{k_3} \right) (\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha)_i, \; b_{k\xi}^\alpha = (\mathbf{b}_{\perp k}^\alpha)_\xi, \; \xi = 1, 2, \tag{116}$$

та нефізичних змінних поля

$$Q_{1k}^\alpha = \varphi_k^\alpha, \; P_{1k}^\alpha = \pi_k^\alpha, \tag{117}$$

$$Q_{2k}^\alpha = (-1)^{\beta(\alpha)} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{a}_k^{\beta(\alpha)})}{k^2},$$



$$P_{2k}^\alpha = (-1)^{\beta(\alpha)}(\mathbf{k}\mathbf{b}_k^{\beta(\alpha)}) - \sqrt{4\pi}\varrho_k^\alpha = 0, \tag{118}$$

де

$$\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha = \mathbf{a}_k^\alpha - \mathbf{k}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{a}_k^\alpha)}{k^2}, \quad \mathbf{b}_{\perp k}^\alpha = \mathbf{b}_k^\alpha - \mathbf{k}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{b}_k^\alpha)}{k^2}, \tag{119}$$

запишемо гамільтоніан Дірака у вигляді:

$$H_D = \sum_a \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}_\perp(x_a)]^2} +$$

$$+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2} \sum_\alpha \left[ (\mathbf{b}_{\perp k}^\alpha)^2 + k^2 (\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha)^2 + \varrho_k \frac{2\pi}{k^2} \varrho_{-k} \right] + \right.$$

$$+ \sum_\alpha \left[ P_{2k}^\alpha \frac{1}{2k^2} P_{2k}^\alpha + \frac{\sqrt{4\pi}}{k^2} P_{2k}^\alpha \varrho_k^\alpha - \right.$$

$$\left. - \; Q_{1k}^\alpha P_{2k}^\alpha + \lambda_k^\alpha P_{1k}^\alpha \right]\Big\}, \tag{120}$$

Формальна дужка Пуассона, з допомогою якої записуються рівняння руху в нових змінних, діє так

$$\{a_{k\xi}^\alpha, b_{q\zeta}^\beta\} = (2\pi)^3 \delta_{\xi\zeta}^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad \{Q_{ik}^\alpha, P_{jk}^\beta\} = (2\pi)^3 \delta_{ij}^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \tag{121}$$

Статистичний опис у представленні Фур'є будується аналогічно до попереднього. Тут ми обмежимося виразом для статистичної суми в термінах фізичних змінних. Фур'є–представлення зручне тим, що легко дозволяє сформулювати термодинаміку системи у скінченому об'ємі. Для цього інтегрування за хвильовим вектором достатньо замінити сумою, тобто

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (....) = \frac{1}{V} \sum_\mathbf{k} (....), \tag{122}$$

де $V$ — об'єм системи.

Використовуючи попередню формулу, запишемо статистичну суму

$$Z = \frac{1}{(2\pi)^{3N+2}} \int \exp \left( -\beta \left[ \sum_a \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}_\perp(x_a)]^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \; \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k},\alpha} \left\{ (\mathbf{b}_{\perp k}^\alpha)^2 + k^2 (\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha)^2 + \varrho_k \frac{2\pi}{k^2} \varrho_{-k} \right\} \right] \right) \cdot$$

$$\cdot \, d\mathbf{x}_a d\mathbf{p}_a \prod_\mathbf{k} da_{k\xi}^\alpha db_{k\xi}^\alpha. \tag{123}$$

Одержаний вираз для статистичної суми міг бути також знайдений шляхом канонічного Фур'є–перетворення формули (106).

## 5. ВИСНОВКИ

Досліджено особливості статистичного опису класичних систем з в'язями різних класів, в тому числі з тими, які ґенерують калібрувальні перетворення. Виходячи з рівняннь Дірака для опису динаміки систем з в'язями нами знайдено рівняння Ліувілля для функції статистичного розподілу у випадках невідкаліброваної та відкаліброваної теорії (розділ 3). Для відкаліброваних систем в станах термодинамічної рівноваги одержана функція розподілу співпадає з відомим в літературі виразом для побудованої *a priori* міри [18], з якою проводиться статистичне усереднення. На відміну від систем без в'язей, знайдена функція статистичного розподілу задовольняє систему рівнянь, що є наслідком модифікації динаміки при наявності в'язей. Рівняння для функції розподілу систем з вказаними особливостями узагальнює відоме рівняння Ліувілля і співпадає з ним у фазовому просторі фізичних змінних.

Знайдені рівняння і вирази статистичної механіки систем з в'язями були застосовані для розгляду системи електромагнетного поля з точковими електричними зарядами.

Продемонстровані особливості узагальненої класичної та узагальненої статистичної механіки електромагнетного поля з точковими електричними зарядами. Детально досліджено калібрувально–інваріантні властивості системи. Для цього вона розглядадається в рамках узагальненої гамільтонової механіки, використовуючи як вихідні канонічні змінні (розділ 4.1), так і фізичні-нефізичні змінні (розділ 4.2). Рівняння статистичної механіки записано вже для відкаліброваної теорії з допомогою дужки Дірака, знайденої явно в калібровці:

$$\left(n^i + n^i_j \partial^j\right) A_i = 0.$$

З метою знаходження статистичної суми системи заряди-поле в скінченому об'ємі рівняння теорії відтворено в представленні Фур'є (розділ 4.5), що може бути корисним для задач фізичної електроніки.

Перспективою для подальших досліджень в даній галузі можна вважати розробку проблем квантування систем з в'язями, а з тим і побудови рівняння Неймана (квантового аналога рівняння Ліувілля) при наявності в'язей, аналіз яких для ряду задач започатковано в літературі.



## ДОДАТОК. ДУЖКА ДІРАКА

Після підстановки в'язей і матриці (91) у (94), дужка Дірака запишеться так:

$$\begin{aligned}
\{F,G\}_{D(\Psi)} = &\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_a^i(\tau)}\frac{\partial G}{\partial p_{ai}(\tau)} - \frac{\partial G}{\partial x_a^i(\tau)}\frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)}\right) + \\
&+\int\left[\frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)}\frac{\delta G}{\delta B^i(\mathbf{x},\tau)} - \frac{\delta G}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)}\frac{\delta F}{\delta B^i(\mathbf{x},\tau)}\right] d^3x - \\
&-\int d^3x d^3y \left\{4\pi\left[L_x^i \frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)} g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\delta G}{\delta A_0(\mathbf{y},\tau)} - \right.\right. \\
&\left. - \frac{\delta F}{\delta A_0(\mathbf{x},\tau)} g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) L_y^i \frac{\delta G}{\delta A_i(\mathbf{y},\tau)}\right] - \\
&+\left[\partial_x^i \frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)} g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y}) L_y^j \frac{\delta G}{\delta B^j(\mathbf{y},\tau)} - \right. \\
&\left. - L_x^j \frac{\delta F}{\delta B^j(\mathbf{x},\tau)} g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \partial_y^i \frac{\delta G}{\delta A_i(\mathbf{y},\tau)}\right] - \\
&-4\pi g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[\partial_x^i \frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)} \frac{\delta G}{\delta A_0(\mathbf{y},\tau)} - \partial_y^i \frac{\delta G}{\delta A_i(\mathbf{y},\tau)} \frac{\delta F}{\delta A_0(\mathbf{x},\tau)}\right] - \\
&-4\pi g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \sum_{a=1}^{N}\left[\frac{\delta F}{\delta A_0(\mathbf{x},\tau)} \frac{\partial \varrho(\mathbf{y},\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} \frac{\partial G}{\partial p_{ai}(\tau)} - \right. \\
&\left. - \frac{\delta G}{\delta A_0(\mathbf{y},\tau)} \frac{\partial \varrho(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} \frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)}\right] + \\
&+\sum_{a=1}^{N}\left[L_x^j \frac{\delta F}{\delta B^j(\mathbf{x},\tau)} \frac{\partial \varrho(\mathbf{y},\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial p_{ai}(\tau)} - \right. \\
&\left.\left. - L_y^j \frac{\delta G}{\delta B^j(\mathbf{y},\tau)} \frac{\partial \varrho(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} \frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)} g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]\right\}
\end{aligned} \tag{124}$$

Зауважимо, що дужка Дірака, як і дужка Пуассона, обчислюється для функцій, взятих в один момент часу. Якщо замість $G$ підставити гамільтоніан $H$, одержимо

$$\{F,H\}_{D(\Psi)} = \sum_{a=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x_a^i(\tau)} u_a^i(\tau) + \frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)} \dot{p}_{ai}(\tau)\right) +$$

$$+\int\left(\frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)}\dot{A}_i(\mathbf{x},\tau)+\frac{\delta F}{\delta B^i(\mathbf{x},\tau)}\dot{B}^i(\mathbf{x},\tau)\right)d^3x-$$

$$-\int d^3x d^3y\left\{4\pi\left[L_x^i\frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)}g_1^\dagger(\mathbf{x}-\mathbf{y})\chi_2(\mathbf{y},\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+L_y^i\dot{B}^i(\mathbf{y},\tau)\frac{\delta F}{\delta A_0(\mathbf{x},\tau)}\right]+\left[g_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi_2^G(\mathbf{y},\tau)-\right.$$

$$\left.-4\pi g_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})\chi_2(\mathbf{y},\tau)\right]\left[\partial_x^i\frac{\delta F}{\delta A_i(\mathbf{x},\tau)}-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{a=1}^N\frac{\partial\varrho(\mathbf{x},\tau)}{\partial x_a^i(\tau)}\frac{\partial F}{\partial p_{ai}(\tau)}\right]\right\}, \tag{125}$$

причому $\{F,H\}_{D(\Psi)}=\{F,H_D\}_{D(\Psi)}$.

## Література


1. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. — М.: Наука, 1977. — 368с.
2. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — 312с.
3. Барбашов Б.М., Нестеренко В.О., Червяков А.М. Функциональный интеграл для систем со связями, явно зависящими от времени. // ТМФ — 1985. — **63**, N 1. — с.88-96
4. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.) Введение в квантовую статистическую механику. — М.: Наука, 1984. — 384с.
5. Вилковыский Г.А., Фрадкин Е.С. Квантование релятивистских систем со связями. // IV Междунар. совещ. Объед. инст. яд. иссл. D2-9788, 1976. — с.141-162
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512с.
7. Гитман Д.М., Тютин И.В. Каноническое квантование полей со связями. — М.: Наука, 1986. — 216с.
8. Дирак П. К созданию квантовой теории поля: Основные статьи 1925-1958 годов. — М.: Наука, 1990. — 368с.
9. Дирак П. Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1964. — 568с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. — М.: Наука, 1973. — 504с.





12. Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. // ТМФ — 1969. — **1**, N 1. — с.1-17
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968. — 384с.
14. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. — М.: Мир, 1973.
15. Horwitz L.P., Schieve W.C., Piron C. Gibbs Ensembles in Relativistic Classical and Quantum Mechanics. // Ann. Phys., 1981. — **137**. — p.306-340.
16. Miller D.E., Karsch F. Covariant Structure of Relativistic Gases in Equilibrium. // Phys. Rev. D. — 1981. — **24**, N 10. — p.2564-2575.
17. Miller D.E., Ray P.S. Thermodynamics of a Relativistic Fermi Gas in a Strong Magnetic Field. // Helv. Phys. Acta — 1984. — **57**, N 1. — p.96-100
18. Miller D.E. Thermodynamics of Relativistic Composite Systems. // Statistical Mechanics of Quarks and Hadrons. — North-Holland Publishing Company, 1981. — p.293-301

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Аскольд Андрійович Дувіряк
Андрій Володимирович Назаренко

Рівняння Ліувілля для систем з в'язями

Роботу отримано 14 вересня 1998 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів і сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України