Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–97–18U

І.М.Мриглод, Ю.К.Рудавський, М.В.Токарчук

СТАТИСТИЧНА ГІДРОДИНАМІКА СУМІШІ МАГНІТНИХ ТА НЕМАГНІТНИХ АТОМІВ

ЛЬВІВ

УДК: 548:537.611.44, 536.75
PACS: 75.50.M

Статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних атомів.

І.М.Мриглод, Ю.К.Рудавський, М.В.Токарчук

Анотація. Розглядається статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних атомів у зовнішньому неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$. Формулюється задача отримання узагальнених рівнянь гідродинаміки для магнітної та немагнітної підсистем атомів суміші за допомогою методу нерівноважного статистичного оператора для опису як сильно, так і слабо нерівноважних станів. Такий опис допускає розгляд взаємодіючих підсистем, що перебувають в різних нерівноважних станах. При цьому магнітна та немагнітна підсистеми характеризуються своїми параметрами нерівноважної термодинаміки. В результаті записано нерівноважні термодинамічні співвідношення, узагальнені рівняння гідродинаміки.

Statistical hydrodynamics of magnetic and nonmagnetic atoms

I.M.Mryglod, Yu.K.Rudavskii, M.V.Tokarchuk

Abstract. Statistical hydrodynamics for a mixture of magnetic and nonmagnetic atoms in an external nonhomogeneous magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ is considered. The problem of derivation of generalized equations of hydrodynamics for magnetic and nonmagnetic atomic subsystems with the help of nonequilibrium statistical operator method to describe both strongly and slightly nonequilibrium states is formulated. The description enables treatment of interacting subsystems to be in different nonequilibrium states. In so doing magnetic and nonmagnetic subsystems are characterized by their nonequilibrium thermodynamics paramiters. As a result nonequilibrium thermodynamical relations and generalized equations of hydrodynamics are given.

Подається в Український фізичний журнал
Submitted to Ukrainian Journal of Physics

1. Вступ

Магнітні рідини, суміші магнітних та немагнітних атомів в зовнішніх полях механічного, чи електромагнітного походження своїми унікальними властивостями вже знайшли важливе застосування в хімічній, електронній та інших сучасних технологіях [1]. У зв'язку з цим актуальним є теоретичне дослідження термодинамічних, структурних та динамічних властивостей магнітних рідин та сумішей з метою більш глибшого розуміння природи характерних процесів у них та їх прогнозування. Це – один з важливих напрямків в сучасній магнітогідродинаміці рідин. Клас магнітних рідин широкий: від складних класичних ферофлюїдів [2-4] до квантових рідких магнетиків [5-9].

Значного успіху досягнуто в дослідженнях термодинамічних, структурних та динамічних властивостей рідких магнетиків [7-17]. Зокрема, мікроскопічна теорія рідких феромагнетиків була запропонована в роботах [7-9]. На основі цієї теорії для рідких магнетиків проведені розрахунки вільної енергії, знайдені намагнічуваність, рідинне рівняння стану, спектр спінових коливань і його затухання. Ця мікроскопічна теорія була узагальнена на випадок двокомпонентних рідких магнетиків [12]. В роботах [13-15] досліджувались динамічні властивості (спектр коливань, високочастотні властивості) рідких феромагнетиків на основі феноменологічних рівнянь руху. В недавніх роботах [16-19] запропоновано послідовний мікроскопічний опис нерівноважних властивостей рідких магнетиків. На основі моделі, що була запропонована в [7-9], з допомогою методу нерівноважного статистичного оператора [20,21] отриманірівняння узагальненої гідродинаміки рідкого магнетика у зовнішньому неоднорідному магнітному полі. Для випадку малих відхилень від рівноваги були отримані лінеаризовані рівняння гідродинаміки, на основі яких досліджувались часові кореляційні функції та колективні моди для рідкого магнетика [22].

У даній роботі розглядається статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних атомів в зовнішньому неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$. За допомогою методу нерівноважного статистичного оператора формулюється задача отримання узагальнених рівнянь гідродинаміки для магнітної та немагнітної підсистем атомів суміші придатна для опису як сильно, так і слабо нерівноважних станів. Такий підхід допускає розгляд взаємодіючих підсистем, що перебувають в різних нерівноважних станах. При цьому магнітна та немагнітна підсистеми характеризуються своїми параметрами

нерівноважної термодинаміки. В результаті записано нерівноважні термодинамічні співвідношення, узагальнені рівняння гідродинаміки . Для випадку, коли суміш магнітних та немагнітних атомів знаходиться в слабо нерівноважному стані, отримані рівняння для часових кореляційних функцій з виділенням взаємодії підсистем. Обговорюється важливість досліджень спектру колективних збуджень для взаємодіючих підсистем магнітних та немагнітних атомів.

2. Нерівноважний статистичний оператор для системи немагнітних та магнітних атомів

Розглядатимемо систему, що є рідким розчином N_n немагнітних атомів і N_m магнітних атомів з спіном $\mathbf{S}$ в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$ і об'ємі V. Гамільтоніан системи представимо у вигляді:

$$H(t) = H_m(t) + H_n + H_{int}, \tag{2.1}$$

де

$$H_n = \sum_{l=1}^{N_n} \frac{p_i^2}{2M_n} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq j}^{N_n} \Phi(|\mathbf{r}_{lj}|) \tag{2.2}$$

- класична частина гамільтоніана, що описує "рідинну" підсистему немагнітних атомів як просту класичну рідину; $\mathbf{p}_l$ і M_n - імпульс і маса немагнітного атома, $\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|)$ - потенціал взаємодії немагнітних атомів.

$$H_{int} = \sum_{l=1}^{N_n}\sum_{f=1}^{N_m} \Phi_{nm}(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_f) \tag{2.3}$$

- частина гамільтоніану, що описує взаємодію магнітних та немагнітних атомів; $\Phi_{nm}(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_f)$ - парний потенціал їх взаємодії;

$$H_m(t) = H_{\rm L} + \hat{H}_{\rm S}(t), \tag{2.4}$$

$$H_{\rm L} = \sum_{f=1}^{N_m} \frac{p_f^2}{2{\rm M}_m} + \frac{1}{2}\sum_{f,k}^{N_m} \Phi_{mm}(|\mathbf{r}_{fk}|) \tag{2.5}$$

- класична частина гамільтоніана, що описує рідинну магнітну "підсистему" як просту класичну рідину; $\mathbf{p}_f$, ${\rm M}_m$ - імпульс і маса магнітного атома, $\Phi_{mm}(|\mathbf{r}_{fk}|)$ - класична частина потенціалу взаємодії магнітних атомів, а

$$\hat{H}_{\rm S}(t) = \hat{H}_{\rm S} - \int d\mathbf{r}\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \tag{2.6}$$

- квантова частина гамільтоніана, що описує “магнітну” підсистему в неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. $\hat{H}_{\mathrm{S}}$ - гамільтоніан обмінної взаємодії магнітних атомів

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = -\frac{1}{2}\sum_{f,k}^{N_m} J(|\mathbf{r}_{fk}|)\mathbf{S}_f\mathbf{S}_k, \tag{2.7}$$

$J(|\mathbf{r}_{fk}|)$ - обмінний інтеграл взаємодії спінів магнітних атомів. Другий доданок у правій частині (2.6) описує взаємодію спінів з зовнішнім неоднорідним магнітним полем $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, де $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{r})$ - густина магнітного моменту:

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = \sum_{f=1}^{N_m} \boldsymbol{\mathcal{M}}\mathbf{S}_f\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f), \tag{2.8}$$

$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ - магнітний момент окремого атома.

Нерівноважний стан рідкого розчину немагнітних та магнітних атомів описується нерівноважним статистичним оператором $\rho(x^N;t)$, який задовільняє рівняння Ліувіля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^N;t) + \mathrm{i}L_N\rho(x^N;t) = 0, \quad x = \{\mathbf{r},\mathbf{p},\mathbf{S}\}, \tag{2.9}$$

де $\mathrm{i}L_N$ - оператор Ліувіля.

Для гамільтоніану (2.1) оператор $\mathrm{i}L_N$ має наступний вигляд:

$$\mathrm{i}L_N = \mathrm{i}L_m(t) + \mathrm{i}L_n + \mathrm{i}L_{int}, \tag{2.10}$$

де

$$\mathrm{i}L_n = \sum_{l=1}^{N_n}\frac{\mathbf{p}_l}{M_n}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_l} - \frac{1}{2}\sum_{l\neq j=1}^{N_n}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_l}\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_l}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_j}\right) \tag{2.11}$$

- класичний оператор Ліувіля немагнітної підсистеми атомів;

$$\mathrm{i}L_{int} = -\sum_{l,f}^{N_n,N_m}\left\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_l}\Phi_{mn}(|\mathbf{r}_{lf}|)\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_l} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_f}\Phi_{nm}(|\mathbf{r}_{lf}|)\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_f}\right\} \tag{2.12}$$

- частина оператора Ліувіля, що відповідає взаємодії магнітної і немагнітної підсистем.

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}L_m(t) \quad = \quad & \sum_{f=1}^{N_m}\frac{\mathbf{p}_f}{\mathrm{M}_m}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_f} - \frac{1}{2}\sum_{f\neq k}^{N_m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_f}(\Phi_{mm}(|\mathbf{r}_{fk}|) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad J|\mathbf{r}_{fk}|)\mathbf{S}_f\mathbf{S}_k)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_f}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_k}\right)\\
&- \quad \boldsymbol{\mathcal{M}}\sum_{f=1}^{N_m}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_f}\mathbf{B}(\mathbf{r}_f,t)\mathbf{S}_f\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_f} + \mathrm{i}\hat{L}_{\mathrm{S}}(t)
\end{aligned}$$

- оператор Ліувіля магнітної підсистеми;

$$\mathrm{i}\hat{L}_{\mathrm{S}}(t)A = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}(t),A] = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{\mathrm{S}}(t),A - A\hat{H}_{\mathrm{S}}(t)] \tag{2.14}$$

- квантова частина оператора Ліувіля. Повний нерівноважний статистичний оператор системи магнітних і немагнітних атомів нормований на одиницю:

$$\int \mathrm{d}\Gamma_N\rho(x^N;t) = 1, x^N = x^{N_n}x^{N_m}, \tag{2.15}$$

$$x^{N_m} = (\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{S}_1;\ldots;\mathbf{r}_{N_m},\mathbf{p}_{N_m},\mathbf{S}_{N_m}),$$
$$x^{N_n} = (\mathbf{r}_1,\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{r}_{N_n},\mathbf{p}_{N_n}),$$
$$\int \mathrm{d}\Gamma_N(\ldots) = \int\frac{(\mathrm{d}\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{r})^{N_n}}{N_n!(2\pi\hbar)^{3N_n}}\frac{(\mathrm{d}\mathbf{p}\mathrm{d}\mathbf{r})^{N_m}}{N_m!(2\pi\hbar)^{3N_m}}\mathrm{Sp}_{\mathbf{S}_1,\ldots,\mathbf{S}_{N_m}}(\ldots).$$

Для знаходження з рівняння Ліувіля (2.9) нерівноважного статистичного оператора $\rho(x^N,;t) = \rho(x^{N_n},x^{N_m};t)$ необхідно сформулювати граничну умову, яка відповідає фізиці системи, що розглядається. Важливо проаналізувати приготування початкового стану суміші магнітних та немагнітних атомів. З точки зору досліджень та конкретних застосувань доцільно розглянути дві граничні умови. Перша, будемо вважати, що у початковий момент часу t_0 нерівноважний статистичний оператор $\rho(x^{N_n},x^{N_m};t)$ рівний добутку квазірівноважних статистичних операторів магнітної і немагнітної підсистем при відсутності зовнішнього неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$:

$$\rho(x^{N_n},x^{N_m};t)|_{t=t_0} = \rho_q^n(x^{N_n};t_0)\rho_q^m(x^{N_m};t_0). \tag{2.16A}$$

Це означає, що у початковий момент часу магнітна та немагнітна підсистеми розглядаються невзаємодіючими і кожна характеризується своїм набором термодинамічних параметрів.

Друга - можна вважати, що у початковий момент часу t_0 підсистеми магнітних і немагнітних атомів є взаємодіючі і характеризуються узгодженими термодинамічними параметрами, зокрема, значенням локальної температури, спряженої до середнього значення повної енергії частинок системи $\langle \hat{H}(\mathbf{r})\rangle^t$ в супроводжувальній системі координат при відсутності зовнішнього неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$. $\int \mathrm{d}\mathbf{r}\hat{H}(\mathbf{r}) = H$- повний гамільтоніан системи при $\mathbf{B}(\mathbf{r};t) = 0$. Тоді в $t = t_0$

$$\rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t)|_{t=t_0} = \rho_q(x^{N_n}; x^{N_m}; t_0). \tag{2.16B}$$

З точки зору вивчення взаємного впливу взаємодії магнітної і немагнітної підсистем на їх структурні, термодинамічні та динамічні властивості, гранична умова (2.16A) є більш повною та зручною. Тому надалі розв'язок рівняння Ліувіля (2.9) будемо шукати з першою граничною умовою (2.16A) з адіабатичним включенням магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$, яке повільно змінюється. Використаємо метод нерівноважного статистичного оператора [20,21], за яким розв'язок рівняння (2.9) з граничною умовою (2.16A) при $t_0 - t \to -\infty$ можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}&\rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t) = \qquad (2.17)\\ &\varepsilon \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{\varepsilon t'} e^{\varepsilon \mathrm{i} L_N t'} \rho_q^n(x^{N_n}; t+t') \rho_q^m(x^{N_m}; t+t'),\end{aligned}$$

де $\varepsilon \to +0$ після термодинамічного граничного переходу.

Розв'язок (2.17), як можна показати, безпосереднім диференціюванням його за t, задовільняє рівняння Ліувіля з нескінчено малим джерелом у правій частині:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t) + \mathrm{i}L_N \rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t) = \qquad (2.18)\\ &-\varepsilon(\rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t) - \rho_q^n(x^{N_n}; t)\rho_q^m(x^{N_m}; t)).\end{aligned}$$

Джерело порушує симетрію рівняння Ліувіля відносно інверсії часу і відбирає запізнюючі розв'язки, що відповідають скороченому опису нерівноважного стану системи. Оскільки нас буде цікавити нерівноважний гідродинамічний стан обох підсистем після їх взаємодії і дії зовнішнього неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$, то для визначення квазірівноважних статистичних операторів $\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t)$, а отже і $\rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t)$ згідно (2.17), використаємо ідеї скороченого опису нерівноважного стану в часі. Тобто кожний квазірівноважний статистичний оператор будемо визначати із екстремуму інформаційної ентропії системи при збереженні умов нормування і додаткових умовах, що фіксовані середні значення змінних скороченого опису.

Для опису гідродинамічного стану параметрами скороченого опису для класичної немагнітної підсистеми є середні значення густин числа частинок $\langle \hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t$, імпульсу $\langle \hat{p}(\mathbf{r})\rangle^t$, енергії $\langle \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\rangle^{\mathbf{t}}$ і відповідно для магнітної підсистеми середні значення густин числа частинок $\langle \hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t$, імпульсу $\langle \hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})\rangle^t$ енергії $\langle \hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\rangle^t$ та магнітного моменту $\langle \boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{r})\rangle^{\mathbf{t}}$, де $\langle \ldots \rangle^t = \int \mathrm{d}\Gamma_N \ldots \rho(x^{N_n}, x^{N_m}; t)$, і

$$\begin{aligned}\hat{n}(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{N_n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j),\\ \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{N_n} \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \qquad (2.19)\\ \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{N_n} \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq l=1}^{N_n} \Phi(|\mathbf{r}_{lj}|) \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\end{aligned}$$

- мікроскопічні значення густин числа немагнітних атомів, їх імпульсу та енергії;

$$\begin{aligned}\hat{n}^m(\mathbf{r}) &= \sum_{f=1}^{N_m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f),\\ \hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}) &= \sum_{f=1}^{N_m} \mathbf{p}_f \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f), \qquad (2.20)\\ \hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}) &= \sum_{f=1}^{N_m} \frac{p_f^2}{2\mathrm{M}_m} + \\ &\frac{1}{2} \sum_{f \neq k=1}^{N_m} \Big(\Phi_{mm}(|\mathbf{r}_{fk}|) - J(|\mathbf{r}_{fk}|) \mathbf{S}_f \mathbf{S}_k \Big) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_f),\end{aligned}$$

- мікроскопічні значення густин числа магнітних атомів, їх імпульсу та повної енергії відповідно. Далі, використовуючи метод нерівноважного статистичного оператора Д.Зубарєва [20,21] при фіксованих відповідних параметрах скороченого опису і збереження умов нормування знайдемо квазірівноважні статистичні оператори немагнітної та магнітної підсистем:

$$\rho_q^n(x^{N_n}; t) = \exp\left\{ -\Phi^n(t) - \int \mathrm{d}\mathbf{r} \beta(\mathbf{r}; t)(\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}; t)\hat{n}(\mathbf{r})) \right\}, \tag{2.21}$$

$$\Phi^n(t)=\ln\int \mathrm{d}\Gamma_{N_n}\exp\left\{-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)(\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})-\mu(\mathbf{r};t)\hat{n}(\mathbf{r}))\right\} \qquad (2.22)$$

- функціонал Масьє-Планка для немагнітної підсистеми, де

$$\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})=\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})-\mathbf{v}(\mathbf{r};t)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{r})+\frac{M_n}{2}v^2(\mathbf{r};t)\hat{n}(\mathbf{r}) \qquad (2.23)$$

- густина енергії атомів немагнітної підсистеми в системі відліку, що рухається разом з елементом системи з гідродинамічною швидкістю $\mathbf{v}(\mathbf{r};t)$.

$$\begin{aligned}\rho_q^m(x^{N_m};t) &= \exp\Big\{-\Phi^m(t)-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\beta^m(\mathbf{r};t)\big((\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}))'-\\ &\mu^m(\mathbf{r};t)\hat{n}^m(\mathbf{r})-\mathbf{b}(\mathbf{r};t)\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\big)\Big\}, \qquad (2.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^m(t) &= \ln\int \mathrm{d}\Gamma_{N_m}\exp\Big\{-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\beta^m(\mathbf{r};t)\big((\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}))'-\\ &\mu^m(\mathbf{r};t)\hat{n}^m(\mathbf{r})-\mathbf{b}(\mathbf{r};t)\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\big)\Big\}, \qquad (2.25)\end{aligned}$$

– функціонал Масьє-Планка для магнітної підсистеми, де

$$\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'=\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})-\mathbf{v}^m(\mathbf{r};t)\cdot\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})+\frac{\mathrm{M}_m}{2}\big(v^m(\mathbf{r};t)\big)^2\hat{n}^m(\mathbf{r}) \qquad (2.26)$$

– густина енергії атомів магнітної підсистеми в системі відліку, що рухається разом з елементом системи з гідродинамічною швидкістю $\mathbf{v}^m(\mathbf{r};t)$. Параметри $\beta(\mathbf{r};t)$, $\mu(\mathbf{r};t)$, в (2.21), а також $\beta^m(\mathbf{r};t)$, $\mu^m(\mathbf{r};t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$ в (2.24) визначаються із відповідних умов самоузгодження: рівності істинних середніх значень (спостережуваних величин) їх квазірівноважним середнім значенням:

$$\begin{aligned}\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t &= \langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle_q^t,\\ \langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t &= \langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle_q^t, \qquad (2.27)\\ \langle\ldots\rangle_q^t &= \int \mathrm{d}\Gamma_N\ \ldots\rho_q(x^N,t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t &= \langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle_q^t,\\ \langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t &= \langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle_q^t, \qquad (2.28)\\ \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t &= \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle_q^t.\end{aligned}$$

Для встановлення фізичного змісту параметрів $\beta(\mathbf{r};t)$, $\mu(\mathbf{r};t)$, а також $\beta^m(\mathbf{r};t)$, $\mu^m(\mathbf{r};t)$ та $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$ розглянемо відповідні термодинамічні співвідношення. Насамперед проваріюємо за параметрами $\beta(\mathbf{r};t)$, $\mu(\mathbf{r};t)$ функціонал Масьє-Планка (2.22) для немагнітної підсистеми, тоді матимемо:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi^n(t)}{\delta\beta(\mathbf{r};t)} &= -\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle_q^t, \qquad (2.29)\\ \frac{\delta\Phi^n(t)}{\delta\big(\beta(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t)\big)} &= \langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle_q^t,\end{aligned}$$

або, враховуючи умови самоузгодження (2.27), знайдемо:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi^n(t)}{\delta\beta(\mathbf{r};t)} &= -\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t,\\ \frac{\delta\Phi^n(t)}{\delta\big(\beta(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t)\big)} &= \langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t.\end{aligned}$$

Це означає, що $\beta(\mathbf{r};t)$ спряжений середній енергії атомів немагнітної підсистеми в супроводжуючій системі координат, а $\mu(\mathbf{r};t)$ – спряжений $\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t$ – нерівноважній середній густині числа атомів немагнітної підсистеми. Далі ентропія немагнітної підсистеми рівна:

$$\begin{aligned}S^n(t) &= \langle\ln\rho_q^n(x^{N_n};t)\rangle_q^t\\ &= \Phi^n(t)+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \beta(\mathbf{r};t)\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle_q^t-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \beta(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t)\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle_q^t,\end{aligned}$$

або, враховуючи умови самоузгодження (2.27) отримаємо

$$S^n(t)=\Phi^n(t)+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \beta(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t)\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t. \quad (2.30)$$

Звідси, беручи варіаційні похідні від ентропії (2.30) за середніми значеннями $\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t$ і $\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t$ при фіксованих відповідних значеннях середніх, знайдемо термодинамічні співвідношення:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S^n(t)}{\delta\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t} &= \beta(\mathbf{r};t), \qquad (2.31)\\ \frac{\delta S^n(t)}{\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t} &= -\beta(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t),\end{aligned}$$

які означають, що $\beta(\mathbf{r};t)$ – обернена локальна температура і $\mu(\mathbf{r};t)$ – локальний хімічний потенціал атомів немагнітної підсистеми. Подібним чином знайдемо термодинамічні співвідношення для магнітної підсистеми. Якщо умови самоузгодження (2.28) виконуються, то беручи варіаційні похідні від функціоналу Масьє-Планка (2.25) за параметрами $\beta^m(\mathbf{r};t)$, $\beta^m(\mathbf{r};t)\mu^m(\mathbf{r};t)$ і $\beta^m(\mathbf{r};t)\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$, отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi^m(t)}{\delta\beta^m(\mathbf{r};t)} &= -\langle(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}))'\rangle_q^t = -\langle(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}))'\rangle^t, \\ \frac{\delta\Phi^m(t)}{\delta\big(\beta^m(\mathbf{r};t)\mu^m(\mathbf{r};t)\big)} &= \langle\hat{n}^m(\mathbf{r};t)\rangle_q^t = \langle\hat{n}^m(\mathbf{r};t)\rangle^t, \\ \frac{\delta\Phi^m(t)}{\delta\big(\beta^m(\mathbf{r};t)\mathbf{b}(\mathbf{r};t)\big)} &= \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r};t)\rangle_q^t = \langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r};t)\rangle^t. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Це означає, що $\beta^m(\mathbf{r};t)$ – спряжене істинному значенню середньої енергії магнітних атомів в супроводжуючій системі координат, $\mu^m(\mathbf{r};t)$ – спряжене нерівноважній середній густині числа атомів магнітної підсистеми, а $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$ – спряжене середньому магнітному моменту її атомів. Функціонал ентропії магнітної підсистеми з врахуванням умов самоузгоджень (2.28) буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} S^m(t) = \langle\ln\rho_q^m(x^{N_m};t)\rangle_q^t = \\ \Phi^m(t) + \int d\mathbf{r}\ \beta^m(\mathbf{r};t)\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t - \\ \int d\mathbf{r}\ \beta^m(\mathbf{r};t)\mu(\mathbf{r};t)\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t - \int d\mathbf{r}\ \beta^m(\mathbf{r};t)\mathbf{b}(\mathbf{r};t)\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Далі, беручи варіаційні похідні від (2.33) за середніми значеннями $\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t$, $\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t$ і $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t$ при фіксованих відповідних значеннях середніх, знайдемо термодинамічні співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S^m(t)}{\delta\langle(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}))'\rangle^t} &= \beta^m(\mathbf{r};t), \\ \frac{\delta S^m(t)}{\delta\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t} &= -\beta^m(\mathbf{r};t)\mu^m(\mathbf{r};t), \\ \frac{\delta S^m(t)}{\delta\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t} &= -\beta^m(\mathbf{r};t)\mathbf{b}(\mathbf{r};t), \end{aligned} \tag{2.34}$$

які означають, що $\beta^m(\mathbf{r};t)$ – це обернена локальна температура, $\mu^m(\mathbf{r};t)$ – локальний хімічний потенціал та $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$ – внутрішнє магнітне поле атомів магнітної підсистеми. Необхідно зауважити, що середні значення густин енергії $\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t$ та числа атомів $\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t$ немагнітної підсистеми, що входять в ентропійний функціонал $S^n(t)$

(2.30) залежать від нерівноважного стану магнітної підсистеми, оскільки засереднення у них виконуються за допомогою повного нерівноважного статистичного оператора немагнітних і магнітних атомів в неоднорідному магнітному полі $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$. Таким же чином середні значення густин енергії $\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t$, числа атомів $\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t$ і їх магнітного моменту $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t$ магнітної підсистеми залежать від нерівноважного стану немагнітної підсистеми. Тому ентропію нерівноважного стану всієї системи можна представити як суму

$$S(t) = S^n(t) + S^m(t), \tag{2.35}$$

нерівноважні параметри $\beta(\mathbf{r};t)$, $\mu(\mathbf{r};t)$, $\beta^m(\mathbf{r};t)$, $\mu^m(\mathbf{r};t)$ і $\mathbf{b}(\mathbf{r};t)$, якої визначаються із умов самоузгоджень (2.27), (2.28).

Тепер, означивши квазірівноважні статистичні оператори немагнітної (2.21) та магнітної (2.24) підсистем, рівняння Ліувіля (2.18) з джерелом запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}L_N + \varepsilon\right)\Delta\rho(t) = \\ -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}L_N\right)\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

де

$$\Delta\rho(t) = \rho(x^{N_n}, x^{N_m};t) - \rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t).$$

Розрахунок похідної $\frac{\partial}{\partial t}$ від $\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t)$ еквівалентний введенню проєкційного оператора Кавасакі-Гантона $\mathscr{P}_q(t)$;

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t) = -\mathscr{P}_q(t)\mathrm{i}L_N\rho(x^{N_n}, x^{N_m};t) \tag{2.37}$$

де

$$\mathscr{P}_q(t) = \rho_q^n(x^{N_n};t)\mathscr{P}_q^m(t) + \rho_q^m(x^{N_m};t)\mathscr{P}_q^n(t), \tag{2.38}$$

і де $\mathscr{P}_q^m(t)$ і $\mathscr{P}_q^n(t)$ – проєкційні оператори, які діють на статистичні оператори відповідних підсистем:

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_q^n(t)\rho' = \Bigg(\frac{1}{2}\rho_q^n(x^{N_n};t) - \int d\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^n(x^{N_n};t)}{\delta\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t}\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t \\ - \int d\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^n(x^{N_n};t)}{\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t}\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t\Bigg)\int d\Gamma_{N_n}\ \rho' \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^n(x^{N_n};t)}{\delta\langle\hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rangle^t}\int \mathrm{d}\Gamma_{N_n}\ \hat{\mathcal{E}}'(\mathbf{r})\rho'$$

$$+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\frac{\delta\rho_q^n(x^{N_n};t)}{\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t}\int \mathrm{d}\Gamma_{N_n}\hat{n}(\mathbf{r})\rho',$$

і

$$\mathscr{P}_q^m(t)\rho' = \Bigg(\frac{1}{2}\rho_q^m(x^{N_m};t) - \int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t}\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t \tag{2.40}$$

$$-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t}\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t$$

$$-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t}\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t\Bigg)\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \rho'$$

$$+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rangle^t}\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \big(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\big)'\rho'$$

$$+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t}\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \hat{n}^m(\mathbf{r})\rho'$$

$$+\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\rho_q^m(x^{N_m};t)}{\delta\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t}\int \mathrm{d}\Gamma_N\ \hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rho'.$$

Необхідно зауважити, що проекційний оператор (3.5) $\mathscr{P}_q(t)$ має властивості

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_q(t)\mathscr{P}_q(t') &= \mathscr{P}_q(t),\\
\mathscr{P}_q(t)\rho(t) &= \rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t),\\
\mathscr{P}(t)\rho_q^n(x^{N_n};t) &= \rho_q^n(x^{N_n};t),\\
\mathscr{P}(t)\rho_q^m(x^{N_m};t) &= \rho_q^m(x^{N_m};t),
\end{aligned}$$

однак таких властивостей не мають оператори $\mathscr{P}_q^n(t)$ й $\mathscr{P}_q^m(t)$. Тепер, враховуючи (2.37), рівняння (2.36) запишемо у наступному вигляді:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1-\mathscr{P}_q(t))\mathrm{i}L_N + \varepsilon\right)\Delta\rho(t) = \tag{2.41}$$
$$-\big(1-\mathscr{P}_q(t)\big)\mathrm{i}L_N\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t),$$

формальним розв'язком якого є

$$\Delta\rho(t) = -\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')\big(1-\mathscr{P}_q(t')\big)\mathrm{i}L_N(t')\rho_q^n(x^{N_n};t')\rho_q^m(x^{N_m};t'),$$

звідки отримаємо:

$$\rho(x^{N_n},x^{N_m};t) = \rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t) - \tag{2.42}$$
$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T(t,t')\big(1-\mathscr{P}_q(t')\big)\mathrm{i}L_N(t')\rho_q^n(x^{N_n};t')\rho_q^m(x^{N_m};t'),$$

де

$$T(t,t') = \exp_+\left\{-\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t''\big(1-\mathscr{P}_q(t'')\big)\mathrm{i}L_N(t'')\right\} \tag{2.43}$$

– узагальнений оператор еволюції в часі з врахуванням проектування. Таким чином, ми отримали вираз для нерівноважного статистичного оператора суміші магнітних та немагнітних атомів в зовнішньому неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Інтегруючи (2.42) за координатами та імпульсами атомів немагнітної підсистеми $\mathrm{d}\Gamma_{N_n}$, отримаємо нерівноважний статистичний оператор магнітної підсистеми:

$$\rho^m(x^{N_m};t) = \int \mathrm{d}\Gamma_{N_n}\ \rho(x^{N_n},x^{N_m};t) = \rho_q^m(x^{N_m};t) - \tag{2.44}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\left\{\int \mathrm{d}\Gamma_{N_n}\ T(t,t')\big(1-\mathscr{P}_q(t')\big)\mathrm{i}L_N(t')\rho_q^n(x^{N_n};t')\right\}\rho_q^m(x^{N_m};t').$$

Подібно, інтегруючи (2.42) за координатами, імпульсами та спінами атомів магнітної підсистеми, отримаємо нерівноважний статистичний оператор немагнітної підсистеми:

$$\rho^n(x^{N_n};t) = \rho_q^n(x^{N_n};t) - \tag{2.45}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\left\{\int \mathrm{d}\Gamma_{N_m}\ T(t,t')\big(1-\mathscr{P}_q(t')\big)\mathrm{i}L_N(t')\rho_q^m(x^{N_m};t')\right\}\rho_q^n(x^{N_n};t').$$

Необхідно зазначити, що другі доданки в (2.44) і (2.45) описують взаємний вплив дисипативних процесів магнітної та немагнітної підсистем. Для детального розуміння цих процесів розкриємо дію операторів $\big(1-\mathscr{P}_q(t)\big)$ і $\mathrm{i}L_N(t)$ на $\rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t)$ в (2.44). Роблячи складні операторні перетворення можна показати, що

$$\begin{aligned}
&\big(1-\mathscr{P}_q(t')\big)\mathrm{i}L_N(t')\rho_q^n(x^{N_n};t')\rho_q^m(x^{N_m};t') = \qquad (2.46)\\
&\int_0^1 \mathrm{d}\tau\ \left(\rho_q^n(x^{N_n};t')\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^\tau \times\\
&\Big\{-\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \beta(\mathbf{r};t')\left(I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t')-\mathbf{v}(\mathbf{r};t)\mathbf{I}_p(\mathbf{r};t')\right)-\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \beta^m(\mathbf{r};t')\left(I_{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r};t')-\mathbf{v}^m(\mathbf{r};t')\mathbf{I}_p^m(\mathbf{r};t')-\right.\\
&\left.\mathbf{b}(\mathbf{r};t')\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t))\right\}\left(\rho_q^n(x^{N_n};t')\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^{1-\tau},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_N(t)\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}), \qquad (2.47)\\
\mathbf{I}_p(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_N(t)\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

– узагальнені потоки густин енергії та імпульсу атомів немагнітної підсистеми,

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_N(t)\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}),\\
\mathbf{I}_p^m(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_N(t)\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}), \qquad (2.48)\\
\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_N(t)\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

– узагальнені потоки густин енергії, імпульсу та магнітного моменту атомів магнітної підсистеми, в яких $\mathscr{P}(t)$ – залежний від часу проекційний оператор Морі, що має таку структуру:

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}(t)A &= \langle A\rangle_q^t + \qquad (2.49)\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})-\langle\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{n}(\mathbf{r})-\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})-\langle\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})-\langle\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{n}^m(\mathbf{r})-\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})-\langle\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})\rangle^t\right)+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \frac{\delta\langle A\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})-\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t\right).
\end{aligned}$$

Підставимо (2.46) в (2.42) і врахуємо те, що $\rho_q^n(x^{N_n};t)$ – квазірівноважна функція розподілу атомів немагнітної підсистеми. Тоді $\rho(x^{N_n},x^{N_m};t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\rho(x^{N_n},x^{N_m};t) = \rho_q^n(x^{N_n};t)\rho_q^m(x^{N_m};t) + \qquad (2.50)\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T(t;t')\beta(\mathbf{r};t')\int_0^1\mathrm{d}\tau\ \left(\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^\tau\times\\
&\left(I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t')-\mathbf{v}(\mathbf{r};t')\mathbf{I}_p(\mathbf{r};t')\right)\left(\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^{1-\tau}\rho_q^n(x^{N_n};t')+\\
&\int \mathrm{d}\mathbf{r}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}T(t;t')\beta^{\mathrm{M}}(\mathbf{r};t')\int_0^1\mathrm{d}\tau\ \left(\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^\tau\times\\
&\left(I_{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r};t')-\mathbf{v}^m(\mathbf{r};t')\mathbf{I}_p^m(\mathbf{r};t')-\mathbf{b}(\mathbf{r};t)\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t')\right)\times\\
&\left(\rho_q^m(x^{N_m};t')\right)^{1-\tau}\rho_q^n(x^{N_n};t').
\end{aligned}$$

Важливо проаналізувати узагальнені потоки (2.47), (2.48) з точки зору взаємодії підсистем і, зокрема, для магнітної підсистеми розкрити залежність від зовнішнього неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$. Враховуючи структуру узагальнених потоків та оператора Ліувіля (2.10) - (2.14) отримаємо, що

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t) &= \tilde{I}_{\mathcal{E}}^n(\mathbf{r};t)+\big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_{int}\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}), \qquad (2.51)\\
I_p(\mathbf{r};t) &= \tilde{I}_p^n(\mathbf{r};t)+\big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_{int}\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{\mathcal{E}}^n(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}_n(t)\big)\mathrm{i}L_n\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}), \qquad (2.52)\\
\tilde{I}_p^n(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}_n(t)\big)\mathrm{i}L_n\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}),
\end{aligned}$$

- узагальнені потоки густин енергії та імпульсу атомів немагнітної підсистеми, які не залежать від наявності магнітної підсистеми. Тут $\mathscr{P}_n(t)$ – узагальнений оператор Морі (2.49) без врахування вкладу динамічних змінних магнітної підсистеми. Вплив магнітної підсистеми на потоки густин енергії та імпульсу немагнітних атомів описується безпосередньо другими доданками у правих частинах виразів (2.51) і через дію узагальненого оператора еволюції в часі (2.43). Подібно для узагальнених потоків магнітної підсистеми (2.48), враховуючи (2.14), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
I^m_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t) &= \tilde{I}^m_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t) + \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_{int}\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}),\\
\mathbf{I}^m_p(\mathbf{r};t) &= \tilde{\mathbf{I}}^m_p(\mathbf{r};t) + \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_{int}\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}),\\
\mathbf{I}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t) &= \tilde{\mathbf{I}}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t) + \big(1-\mathscr{P}(t)\big)\mathrm{i}L_{int}\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r}),
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}^m_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}_m(t)\big)\mathrm{i}\bar{L}_m\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\\
&- \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,\big(1-\mathscr{P}_m(t)\big)\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Big[\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r}')\hat{\mathcal{E}}^m_{\text{кв}}(\mathbf{r})\Big]\mathbf{B}(\mathbf{r}';t),\\
\tilde{\mathbf{I}}^m_p(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}_m(t)\big)\mathrm{i}\bar{L}_m\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}),\\
\tilde{\mathbf{I}}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t) &= \big(1-\mathscr{P}_m(t)\big)\mathrm{i}\bar{L}_m\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\\
&- \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\,\big(1-\mathscr{P}_m(t)\big)\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Big[\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r}'),\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\Big]\mathbf{B}(\mathbf{r}';t),
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

- узагальнені потоки густин, енергії, імпульсу та магнітного моменту атомів магнітної підсистеми, які не залежать від наявності немагнітної підсистеми. $\mathrm{i}\bar{L}_m$ - оператор Ліувіля магнітної підсистеми без врахування квантової частини $\mathrm{i}\hat{L}_{\mathrm{S}}(t)$ (2.14) в (2.13), а $\mathscr{P}_m(t)$ – узагальнений оператор Морі (2.49) без врахування вкладу динамічних змінних немагнітної підсистеми. $\hat{\mathcal{E}}^m_{\text{кв}}(\mathbf{r})$ – квантова частина густини енергії магнітної підсистеми. В узагальнених потоках $\tilde{I}^m_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t)$ і $\tilde{I}_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t)$ виділина явна залежність від зовнішнього неоднорідного магнітного поля, яка теж проявляється через дію узагальненого оператора еволюції в часі (2.43). Вплив немагнітної підсистеми на потоки густин енергії, імпульсу, та магнітного моменту магнітних атомів описується безпосередньо другими доданками у правих частинах виразів (2.53), а також через дію узагальненого оператора еволюції в часі (2.43).

Таким чином, ми отримали повний нерівноважний статистичний оператор для суміші магнітних та немагнітних атомів, які знаходяться в нерівноважному гідродинамічному стані. Система перебуває у зовнішньому неоднорідному магнітному полі $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$, яке

явно входить у $\rho(x^{N_n},x^{N_m};t)$ через квантову частину оператора Ліувіля $\mathrm{i}\hat{L}_{\mathrm{S}}(t)$ (2.14). Нерівноважний статистичний оператор (2.50) виражається через дисипативні узагальнені потоки (2.47), (2.48) відповідно для немагнітних та магнітних атомів. Оскільки згідно з принципом скороченого опису гідродинамічного стану суміші нерівноважний статистичний оператор є функціоналом спостережуваних величин (середніх значень густин числа атомів $\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t$, імпульсу $\langle\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\rangle^t$ та енергії $\langle\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\rangle^t$ немагнітної підсистеми і середніх значень густин числа атомів $\langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\rangle^t$, їх імпульсу $\langle\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})\rangle^t$, магнітного моменту $\langle\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\rangle^t$ та енергії $\langle\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\rangle^t$ магнітної підсистеми), що змінюються в часі, то для них необхідно побудувати рівняння переносу, тобто узагальнені рівняння гідродинаміки для суміші магнітних та немагнітних атомів. Узагальнені рівняння гідродинаміки разом з нерівноважним статистичним оператором (2.50), нерівноважними термодинамічними співвідношеннями (2.29) - (2.31), (2.32) - (2.34) з врахуванням умов самоузгодження (2.27), (2.28) складають повноту опису як сильно, так і слабо нерівноважного гідродинамічного стану суміші немагнітних та магнітних атомів.

3. Узагальнені рівняння гідродинаміки для суміші немагнітних та магнітних атомів

Для отримання рівнянь переносу введемо наступні позначення:

$$
\tilde{a}(\mathbf{r}) = \mathrm{col}\,\Big(\hat{n}(\mathbf{r}),\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}),\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\Big)
\tag{3.1}
$$

– вектор-стовпець динамічних змінних (2.19) немагнітної підсистеми,

$$
\tilde{c}(\mathbf{r}) = \mathrm{col}\,\Big(\hat{n}^m(\mathbf{r}),\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}),\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}),\hat{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\mathbf{r})\Big)
\tag{3.2}
$$

– вектор-стовпець змінних (2.20) магнітної підсистеми. Далі використаємо тотожності:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tilde{a}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{a}}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{a}}(\mathbf{r})\rangle^t_q + \langle\tilde{I}_a(\mathbf{r};t)\rangle^t,
\tag{3.3}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tilde{c}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{c}}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{c}}(\mathbf{r})\rangle^t_q + \langle\tilde{I}_c(\mathbf{r};t)\rangle^t,
\tag{3.4}
$$

де

$$
\dot{\tilde{a}}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}L_N\tilde{a}(\mathbf{r}),\quad \dot{\tilde{c}}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}L_N\tilde{c}(\mathbf{r}),
$$

і

$$
\tilde{I}_a(\mathbf{r};t) = \mathrm{col}\,\big(I_n(\mathbf{r};t), I_p(\mathbf{r};t), I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r};t)\big)
\tag{3.5}
$$

– вектор-стовпець узагальнених потоків (2.47) немагнітної підсистеми,

$$\tilde{I}_c(\mathbf{r};t) = \mathrm{col}\left(I_n^m(\mathbf{r};t), I_p^m(\mathbf{r};t), I_{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r};t), I_{\mathcal{M}}(\mathbf{r};t)\right) \tag{3.6}$$

– вектор-стовпець узагальнених потоків (2.48) магнітної підсистеми. Тоді, виконавши усереднення у правих частинах (3.3), (3.4) з допомогою нерівноважного статистичного оператора (2.50), отримаємо узагальнені рівняння переносу для суміші немагнітних та магнітних атомів, представлених у матричній формі:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tilde{a}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{a}}(\mathbf{r})\rangle_q^t - &\qquad (3.7)\\ \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{I_aI_a}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\tilde{A}(\mathbf{r}';t) - &\\ \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{I_aI_c}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\tilde{C}(\mathbf{r}';t),&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\tilde{c}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\tilde{c}}(\mathbf{r})\rangle_q^t - &\qquad (3.8)\\ \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{I_cI_a}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\tilde{A}(\mathbf{r}';t') - &\\ \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{I_cI_c}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\tilde{C}(\mathbf{r}';t'),&\end{aligned}$$

де

$$\tilde{\varphi}_{I_aI_a}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{I_pI_p} & \varphi_{I_pI_{\mathcal{E}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_p} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{E}}} \end{bmatrix}_{(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')} \tag{3.9}$$

– матриця ядер переносу для немагнітної підсистеми з врахуванням, що $I_n(\mathbf{r};t) = 0$;

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{I_aI_c}(\mathbf{r},\mathbf{r}':t,t') &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{I_pI_p^m} & \varphi_{I_pI_{\mathcal{E}}^m} & \varphi_{I_pI_{\mathcal{M}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_p^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{E}}^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{M}}} \end{bmatrix}_{(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')}, \\ \tilde{\varphi}_{I_cI_a}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{I_p^mI_p} & \varphi_{I_p^mI_{\mathcal{E}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_p} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_{\mathcal{E}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{M}}I_p} & \varphi_{I_{\mathcal{M}}I_{\mathcal{E}}} \end{bmatrix}_{(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')}\end{aligned} \tag{3.10}$$

– матриці ядер переносу, які описують динамічні дисипативні кореляції між взаємодіючими немагнітною і магнітною підсистемами;

$$\tilde{\varphi}_{I_cI_c}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{I_p^mI_p^m} & \varphi_{I_p^mI_{\mathcal{E}}^m} & \varphi_{I_p^mI_{\mathcal{M}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_p^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_{\mathcal{E}}^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_{\mathcal{M}}} \\ 0 & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_p^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{E}}^m} & \varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{M}}} \end{bmatrix}_{(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')} \tag{3.11}$$

– матриця ядер переносу для магнетної підсистеми. В загальному випадку ядра переносу в (3.9) - (3.11) побудовані на відповідних узагальнених потоках (2.47), (2.48), мають таку структуру:

$$\begin{aligned}&\varphi_{I_lI_f}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \qquad (3.12)\\ &\langle I_l(\mathbf{r};t)T(t,t')\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\rho_q(x^{N_n},x^{N_m};t')\right)^{\tau} I_f(\mathbf{r}';t')\left(\rho_q(x^{N_n},x^{N_m};t')\right)^{-\tau}\rangle_q^t,\end{aligned}$$

де $I_l(\mathbf{r},t)$, $I_f(\mathbf{r},t)$, приймають значення: $I_p(\mathbf{r},t)$, $I_{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)$ та $I_p^m(\mathbf{r},t)$, $I_{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r},t)$, $I_{\mathcal{M}}(\mathbf{r},t)$. В рівняннях (3.7) і (3.8)

$$\begin{aligned}&\tilde{A}(\mathbf{r},t) = \qquad (3.13)\\ &\mathrm{col}\left(\beta(\mathbf{r},t)\left(\mu(\mathbf{r},t)-\frac{\mathrm{M}_n}{2}v^2(\mathbf{r},t)\right),\beta(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t),\beta(\mathbf{r},t)\right)\end{aligned}$$

– вектор-стовпець, компонентами якого є термодинамічні параметри немагнітної підсистеми, і відповідно:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\mathbf{r},t) = \mathrm{col}\Big(\beta^m(\mathbf{r},t)\left[\mu^m(\mathbf{r},t)-\frac{\mathrm{M}_m}{2}\left(v^m(\mathbf{r},t)\right)^2\right], &\qquad (3.14)\\ \beta^m(\mathbf{r},t)\mathbf{v}^m(\mathbf{r},t),\beta^m(\mathbf{r},t),\beta^m(\mathbf{r},t)\mathbf{b}(\mathbf{r},t)\Big)&\end{aligned}$$

– вектор-стовпець, компонентами якого є термодинамічні параметри магнітної підсистеми. Ядра переносу $\varphi_{I_pI_p}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi_{I_{\mathcal{E}}I_{\mathcal{E}}}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ пов'язані з узагальненими коефіцієнтами в'язкості та теплопровідності немагнітних атомів, а інші – $\varphi_{I_p^mI_p^m}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ й $\varphi_{I_{\mathcal{E}}^mI_{\mathcal{E}}^m}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ – з узагальненими коефіцієнтами в'язкості та теплопровідності магнітних атомів, залежні від зовнішнього неоднорідного магнітного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r};t)$. Це важливо більш детально обсудити, зокрема, для випадку слабо нерівноважних процесів. Рівняння переносу (3.7), (3.8) описують як сильно, так і слабо нерівноважні гідродинамічні процеси. За своєю структурою вони нелінійні і на кожному конкретному етапі досліджень необхідно виключати у них термодинамічні параметри $\tilde{A}(\mathbf{r};t)$ (3.13) та $\tilde{C}(\mathbf{r};t)$ (3.14) за допомогою умов самоузгоджень (2.27), (2.28). У випадку слабо нерівноважних процесів, коли можна припустити, що термодинамічні параметри немагнітних та магнітних атомів мало відрізняються від їх рівноважних значень і зовнішнє магнітне поле мале, рівняння переносу стають лінійними і мають наступну структуру:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\delta\tilde{a}_1(\mathbf{r})\rangle^t = & \qquad (3.15)\\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\, \mathrm{i}\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\langle\delta\tilde{a}_1(\mathbf{r}')\rangle^t + \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\, \mathrm{i}\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\langle\delta\tilde{c}_1(\mathbf{r}')\rangle^t - \\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\langle\delta\tilde{a}_1(\mathbf{r}')\rangle^{t'} - \\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\langle\delta\tilde{c}_1(\mathbf{r}')\rangle^{t'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\delta\tilde{c}_1(\mathbf{r})\rangle^t = & \qquad (3.16)\\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\, \mathrm{i}\Omega_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\langle\delta\tilde{a}_1(\mathbf{r}')\rangle^t + \int \mathrm{d}\mathbf{r}'\, \mathrm{i}\Omega_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\langle\delta\tilde{c}_1(\mathbf{r}')\rangle^t - \\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\varphi_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\langle\delta\tilde{a}_1(\mathbf{r}')\rangle^{t'} - \\ & \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{\varepsilon(t'-t)}\varphi_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')\langle\delta\tilde{c}_1(\mathbf{r}')\rangle^{t'},\end{aligned}$$

де $\delta\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1 - \langle\tilde{a}_1\rangle_0$

$$\tilde{a}_1(\mathbf{r}) = \mathrm{col}\left(\hat{n}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \hat{h}(\mathbf{r})\right) \qquad (3.17)$$

– вектор-стовпець динамічних змінних підсистеми немагнітних атомів, який співпадає з $\tilde{a}(\mathbf{r})$ (3.1) при заміні $\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})$ на $\hat{h}(\mathbf{r})$, де

$$\hat{h}(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) - \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \int \mathrm{d}\mathbf{r}''\, \Phi_{\mathcal{E}n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')\hat{n}(\mathbf{r}'') \qquad (3.18)$$

– густина узагальненої ентальпії немагнітних атомів, $\Phi_{\mathcal{E}n}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\hat{\mathcal{E}}(\mathbf{r})\hat{n}(\mathbf{r}')\rangle_0$ – рівноважна кореляційна функція, $\langle\ldots\rangle_0 =$

$\int \mathrm{d}\Gamma_N \ \ \ldots\rho_0(x^{N_n}, x^{N_m})$, $\rho_0(x^{N_n}, x^{N_m})$ – рівноважний статистичний оператор суміші немагнітних та магнітних атомів. Функція $\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ визначається із співвідношення:

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}''\,\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Phi_{nn}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

де $\Phi_{nn}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')$ – рівноважна кореляційна функція густина-густина для немагнітних атомів:

$$\Phi_{nn}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \langle\hat{n}(\mathbf{r}''), \hat{n}(\mathbf{r}')\rangle_0. \qquad (3.19)$$

Необхідно зауважити, що густина ентальпії $\hat{h}(\mathbf{r})$ виникла внаслідок виключення із рівнянь (3.7), (3.8) термодинамічного параметру $\beta(\mathbf{r};t)\left(\mu(\mathbf{r};t) - \frac{\mathrm{M}_n}{2}v^2(\mathbf{r};t)\right)$ у лінійному наближенні за допомогою умови самоузгодження $\langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\hat{n}(\mathbf{r})\rangle^t_q$.

Відповідно у матричному рівнянні (3.16) $\delta\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1 - \langle\tilde{c}_1\rangle_0$ і

$$\tilde{c}_1(\mathbf{r}) = col(\hat{n}^m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}), \hat{h}^m(\mathbf{r}), \hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})) \qquad (3.20)$$

вектор-стовпець динамічних змінних атомів магнітної підсистеми, який співпадає з $\tilde{c}(\mathbf{r})$ (3.2) при заміні $\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})$ на $\hat{h}^m(\mathbf{r})$ і $\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r})$ - на $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})$, де

$$\begin{aligned}\hat{h}^m(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r}) & \qquad (3.21)\\ - \int d\mathbf{r}'' \int d\mathbf{r}'\,\Phi^{mm}_{\mathcal{E}n}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\Phi^{mm}_{nn})^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\hat{n}_m(\mathbf{r}'') & \\ - \int d\mathbf{r}'' \int d\mathbf{r}'\,\Phi^{mm}_{\mathcal{E}\mathfrak{M}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}})^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}'') &\end{aligned}$$

- густина узагальненої ентальпії магнітних атомів, $\Phi^{mm}_{\mathcal{E}n}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\hat{n}^m(\mathbf{r}')\rangle_0$, $\Phi^{mm}_{\mathcal{E}\mathfrak{M}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\hat{\mathcal{E}}^m(\mathbf{r})\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})\rangle_0$. - рівноважні кореляційні функції для атомів магнітної підсистеми, у яких

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) & \qquad (3.22)\\ - \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}''\,\Phi^{m}_{\mathcal{M}n}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')(\Phi^{mm}_{nn})^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\hat{n}^m(\mathbf{r}''). &\end{aligned}$$

Функції $(\Phi^{mm}_{nn})^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$, $(\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}})^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ - визначаються із відповідних співвідношень $\int d\mathbf{r}''(\Phi^{mm}_{nn})^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Phi^{mm}_{nn}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, $\int d\mathbf{r}''(\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}})^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, де $\Phi^{mm}_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ - рівноважні структурні функції атомів магнітної підсистеми

$$\Phi^{mm}_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\hat{n}^m(\mathbf{r})\hat{n}^m(\mathbf{r}')\rangle_0, \qquad (3.23)$$

$$\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}')\rangle_0, \tag{3.24}$$

причому $\Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ - враховує магнітострикційні кореляції. В рівняннях переносу (3.15) (3.16) $i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ і $i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ - частотні матриці, які мають наступну структуру

$$i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}''\langle\dot{\tilde{a}}_1(\mathbf{r})\tilde{a}_1^+(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.25}$$

де $\dot{\tilde{a}}_1(\mathbf{r}) = iL_N\tilde{a}_1(\mathbf{r})$, $\tilde{a}_1^+(\mathbf{r})$ - вектор-стрічка, елементи якої є $\hat{n}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, $\hat{h}(\mathbf{r})$, $\tilde{\Phi}^{-1}_{a_1a_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')$ - матриця, обернена до матриці $\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$

$$\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{bmatrix} \Phi_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

елементами якої є рівноважні кореляційні функції густин числа частинок, імпульсу та узагальненої ентальпії атомів немагнітної підсистеми. Відповідно інші частотні матриці мають вигляд:

$$\begin{aligned} i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}''\langle\dot{\tilde{a}}_1(\mathbf{r})\tilde{c}_1^+(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{c_1c_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \\ i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \int d\mathbf{r}''\langle\dot{\tilde{c}}_1(\mathbf{r})\tilde{a}_1^+(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{a_1a_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}''\langle\dot{\tilde{c}}_1(\mathbf{r})\tilde{c}_1^+(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{c_1c_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.28}$$

$\tilde{\Phi}^{-1}_{c_1c_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}')$ - матриця обернена до матриці $\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$

$$\tilde{\Phi}_{c_1c_1} = \begin{bmatrix} \Phi^{mm}_{nn} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{mm}_{pp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^{mm}_{hh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} \end{bmatrix}_{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}, \tag{3.29}$$

елементи якої - рівноважні кореляційні функції густин $\hat{n}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})$, $\hat{h}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})$ атомів магнітної підсистеми. Частотні матриці (3.26) - (3.28) описують статичні міжчастинкові кореляції для суміші магнітних та немагнітних атомів. В той же час динамічні статистичні міжчастинкові кореляції пов'язані з перенесенням частинок, імпульсу, енергії, магнітного моменту для розглядуваної суміші у рівняннях (3.15), (3.16) описуються матрицями ядер переносу

$\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$. Кожну цю матрицю можна представити у вигляді:

$$\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \int d\mathbf{r}''\langle\tilde{I}_{a_1}(\mathbf{r})T_0(t,t')\tilde{I}^+_{a_1}(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{a_1a_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.30}$$

$$\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \int d\mathbf{r}''\langle\tilde{I}_{a_1}(\mathbf{r})T_0(t,t')\tilde{I}^+_{c_1}(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{c_1c_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.31}$$

$$\tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \int d\mathbf{r}''\langle\tilde{I}_{c_1}(\mathbf{r})T_0(t,t')\tilde{I}^+_{a_1}(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{a_1a_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.32}$$

$$\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \int d\mathbf{r}''\langle\tilde{I}_{c_1}(\mathbf{r})T_0(t,t')\tilde{I}^+_{c_1}(\mathbf{r}'')\rangle_0\tilde{\Phi}^{-1}_{c_1c_1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \tag{3.33}$$

у яких відповідні вектор-стовпці $\tilde{I}_{a_1}(\mathbf{r})$, $\tilde{I}_{c_1}(\mathbf{r})$ та вектор-стрічки $\tilde{I}^+_{a_1}(\mathbf{r}'')$, $\tilde{I}^+_{c_1}(\mathbf{r}'')$ побудовані на узагальнених потоках:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{a_1}(\mathbf{r}) &= col(I_n(\mathbf{r}), I_p(\mathbf{r}), I_h(\mathbf{r})), \qquad (3.34) \\ I_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ I_p(\mathbf{r}) &= (1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \\ I_h(\mathbf{r}) &= (1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{h}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

для підсистеми немагнітних атомів;

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{c_1}(\mathbf{r}) &= col(I^m_n(\mathbf{r}), I^m_p(\mathbf{r}), I^m_h(\mathbf{r}), I_{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})), I^m_n(\mathbf{r}) = 0, \qquad (3.35) \\ I^m_p(\mathbf{r}) &= (1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}), I^m_h(\mathbf{r}) = (1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{h}^m(\mathbf{r}), \\ I_{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}) &= (1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

для підсистеми магнітних атомів. В ядрах переносу $T_0(t,t')$ - оператор еволюції

$$T_0(t,t') = \exp\{(t'-t)(1-\mathcal{P}_0)iL_N\},$$

а $\mathcal{P}_0$ - проекційний оператор Морі побудований на динамічних змінних $\hat{n}(\mathbf{r}$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, $\hat{h}(\mathbf{r})$, і $\hat{n}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})$, $\hat{h}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})$ для немагнітних та магнітних атомів відповідно. Важливо зазначити, що динамічні змінні немагнітних атомів $\hat{n}(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, $\hat{h}(\mathbf{r})$ - ортогональні між собою (матриця статичних кореляційних функцій (3.26) - діагональна) і динамічні змінні магнітних атомів $\hat{n}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{p}}$, $\hat{h}^m(\mathbf{r})$, $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{r})$ також утворюють ортогональний базис(матриця статичних кореляційних функцій (3.29) - діагональна). Однак, дані набори динамічних змінних магнітних та немагнітних атомів в цілому не ортогональні. Функції $\Phi^m_{nn}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\langle\hat{n}(\mathbf{r})\hat{n}^m(\mathbf{r}')\rangle_0$ і $\Phi^m_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\langle\hat{h}(\mathbf{r})\hat{h}^m(\mathbf{r}')\rangle_0$ - описують статичні кореляції між атомами немагнітної і магнітної підсистеми.

Елементи матриць ядер переносу (3.30) - (3.33) описують дисипативні процеси і пов'язані з узагальненими коефіцієнтами в'язкості, теплопровідності, магнітної дифузії для магнітної і немагнітної підсистем з врахуванням перехресних, магнітострикційних динамічних кореляцій характерних для двокомпонентних систем. Зокрема, розглянемо структуру ядер переносу $\varphi_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ для немагнітної підсистеми, та $\varphi^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ - для магнітної підсистеми. Враховуючи (2.51), (2.52) для відповідних потоків атомів немагнітної підсистеми в лінійному наближені, отримаємо

$$I_p(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=I^n_p(\mathbf{r})+\hat{I}^n_p(\mathbf{r}),$$

$$I_h(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{h}(\mathbf{r})=I^n_h(\mathbf{r})+\hat{I}^n_h(\mathbf{r}),$$

де

$$I^n_p(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}^n_0)iL_n\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}),$$
$$I^n_h(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}^n_0)iL_n\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{r})$$

-узагальнені потоки густин імпульсу та ентальпії атомів немагнітної підсистеми, які не залежать від наявності магнітної підсистеми. $\hat{I}^n_p(\mathbf{r})$, $\hat{I}^n_h(\mathbf{r})$-кореляційні частини потоків, які описують вплив динаміки магнітних атомів на динаміку немагнітних атомів. Тепер ядра переносу $\varphi_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ можна записати у вигляді

$$\varphi_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')+\hat{\varphi}^{nn}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t'),$$
$$\varphi_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\varphi^{nn}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')+\hat{\varphi}^{nn}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t'),$$

де

$$\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\int d\mathbf{r}''\langle I^n_p(\mathbf{r})T_0(t,t')I^n_p(\mathbf{r}'')\rangle_0\Phi^{-1}_{pp}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \quad (3.36)$$

$$\varphi^{nn}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\int d\mathbf{r}''\langle I^n_h(\mathbf{r})T_0(t,t')I^n_h(\mathbf{r}'')\rangle_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \quad (3.37)$$

- ядра переносу для атомів немагнітної підсистеми з повним оператором еволюції $T_0(t,t')$. У просторово однорідному випадку Лаплас-Фур'є зображення за часовими і просторовими координатами ядер переносу $\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi^{nn}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ зв'язані із відповідними узагальненими коефіцієнтами переносу

$$\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{k},z)=ik^2\beta\eta^n(\mathbf{k},z)/M_nn_n, \quad (3.38)$$

$$\varphi^{nn}_{hh}(\mathbf{k},z)=ik^2k_{\text{Б}}\beta^2\lambda^n(\mathbf{k},z)/C^n_V(\mathbf{k}), \quad (3.39)$$

$\eta^n(\mathbf{k},z)$, $\lambda^n(\mathbf{k},z)$ і $C^n_V(\mathbf{k})=\langle\hat{h}(\mathbf{k}),\hat{h}(-\mathbf{k})\rangle_0k_{\text{Б}}\beta^2$- узагальнені коефіцієнти в'язкості, теплопровідності та теплоємність атомів немагнітної підсистеми. $\hat{\varphi}^{nn}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\hat{\varphi}^{nn}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$-частини ядер переносу, які описують перехресні дисипативні процеси, зокрема, з вкладом оператора Ліувіля iL_{int} взаємодії атомів обох підсистем. Очевидно, коли потенціал взаємодії $\Phi_{nm}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ набагато слабший від потенціалів взаємодії між атомами кожної з підсистем, то такими вкладами у певних випадках можна знехтувати.

Подібно для підсистеми магнітних атомів ядра переносу $\varphi^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\varphi^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ можна представити у вигляді

$$\varphi^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\bar{\varphi}^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')+\hat{\varphi}^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t'),$$
$$\varphi^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=\bar{\varphi}^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')+\hat{\varphi}^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t'),$$

де

$$\bar{\varphi}^{mm}_{pp}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=$$
$$\int d\mathbf{r}''\langle\bar{I}^m_p(\mathbf{r})T_0(t,t')\bar{I}^m_p(\mathbf{r}'')\rangle_0(\Phi^{mm}_{pp})^{-1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \quad (3.40)$$

$$\bar{\varphi}^{mm}_{hh}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')=$$
$$\int d\mathbf{r}''\langle\bar{I}^m_h(\mathbf{r})T_0(t,t')\bar{I}^m_h(\mathbf{r}'')\rangle_0(\Phi^{mm}_{hh})^{-1}(\mathbf{r}'',\mathbf{r}'), \quad (3.41)$$

-ядра переносу для атомів магнітної підсистеми з повним оператором еволюції $T_0(t,t')$. $\bar{I}^m_p(\mathbf{r})$, $\bar{I}^m_h(\mathbf{r})$ - узагальнені потоки густин імпульсу та ентальпії атомів магнітної підсистеми, які не залежать від наявності немагнітної підсистеми і, що входять в узагальнені потоки $\bar{I}^m_p(\mathbf{r})$, $\bar{I}^m_h(\mathbf{r})$:

$$I^m_p(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r})=\bar{I}^m_p(\mathbf{r})+\hat{I}^m_p(\mathbf{r}),$$

$$I_h^m(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0)iL_N\hat{h}^m(\mathbf{r})=\bar{I}_h^m(\mathbf{r})+\hat{I}_h^m(\mathbf{r}),$$

де

$$\bar{I}_p^m(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0^m)iL_m\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{r}),$$
$$\bar{I}_h^m(\mathbf{r})=(1-\mathcal{P}_0^m)iL_m\hat{\mathbf{h}}^m(\mathbf{r}),$$

$\hat{I}_p^m(\mathbf{r})$, $\hat{I}_h^m(\mathbf{r})$- кореляційні частини узагальнених потоків, які описують вплив динаміки немагнітних атомів на динаміку магнітних атомів.

У просторово однорідному випадку Лаплас-Фур'є зображення за часовими і просторовими координатами ядер переносу $\bar{\varphi}_{pp}^{mm}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\bar{\varphi}_{hh}^{mm}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$ зв'язані із відповідними узагальненими коефіцієнтами переносу

$$\bar{\varphi}_{pp}^{mm}(\mathbf{k},z)=ik^2\beta\eta^m(\mathbf{k},z)/M_m n_m, \tag{3.42}$$

$$\bar{\varphi}_{hh}^{mm}(\mathbf{k},z)=ik^2k_{\text{Б}}\beta^2\lambda^m(\mathbf{k},z)/C_V^m(\mathbf{k}), \tag{3.43}$$

$\eta^m(\mathbf{k},z)$, $\lambda^m(\mathbf{k},z)$ і $C_V^m(\mathbf{k})=\langle\hat{h}^m(\mathbf{k}),\hat{h}^m(-\mathbf{k})\rangle_0 k_{\text{Б}}\beta^2$- узагальнені коефіцієнти в'язкості, теплопровідності та теплоємність атомів магнітної підсистеми. $\hat{\varphi}_{pp}^{mm}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$, $\hat{\varphi}_{hh}^{mm}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$-частини ядер переносу, які описують перехресні дисипативні процеси пов'язані із взаємодією обох підсистем.

У цій частині необхідно зробити певні підсумки щодо системи рівнянь переносу (3.15), (3.16). Насамперед, ця система рівнянь переносу справедлива, як в просторово-неоднорідному, так і в однорідному випадках. В просторово однорідному випадку застосовуючи Фур'є - перетворення для просторових координат і Лаплас - перетворення для часової залежності, матричну систему рівнянь (3.15), (3.16) можна представити в алгебраїчній формі:

$$\begin{aligned}z\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z-i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ -i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{k})\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{k}z)\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};\mathbf{z})\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k})\rangle_z=-\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k};t=0)\rangle&,\end{aligned}\tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}z\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k})\rangle_z-i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k})\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ -i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{k})\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ +\tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z&\\ +\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k})\rangle_z=-\langle\tilde{c}_1(\mathbf{k};t=0)\rangle&,\end{aligned}\tag{3.45}$$

де, наприклад, $\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z$ і $i\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}\langle\tilde{a}_1(\mathbf{k})\rangle_z&=i\int d\mathbf{r}\int dte^{-i\mathbf{kr}}e^{-izt}\langle\tilde{a}_1(\mathbf{r})\rangle^t,\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)\\&=i\int d\mathbf{r}\int dte^{-i\mathbf{kr}}e^{-izt}\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{r};t).\end{aligned}$$

На основі рівнянь переносу (3.36), (3.37), як це було показано у випадку однокомпонентної магнітної рідини [18] можна отримати рівняння для Фур'є-Лаплас перетворень часових кореляційних функцій, побудованих на динамічних змінних немагнітної підсистем:

$$\begin{aligned}z\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)-i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)&\\ -i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)=-\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k})&,\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}z\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)-i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)&\\ -i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)=-\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k})&,\end{aligned}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}z\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)-i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)&\\ -i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)+\tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)=-\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k})&,\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}z\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)-i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)&\\ -i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)+\tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)&\\ +\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)=-\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k})&,\end{aligned}\tag{3.49}$$

де $\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)$, $\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)$, $\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)$, $\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)$ - Лаплас-образи часових кореляційних функцій, що утворюють суперматрицю

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k};z)=\begin{bmatrix}\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)&\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)\\ \tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)&\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\end{bmatrix}\tag{3.50}$$

$$\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)=\left[\begin{array}{lll}\Phi_{nn} & \Phi_{nJ} & \Phi_{nh}\\ \Phi_{Jn} & \Phi_{JJ} & \Phi_{Jh}\\ \Phi_{hn} & \Phi_{hJ} & \Phi_{hh}\end{array}\right]_{(\mathbf{k};z)}, \qquad (3.51)$$

матриця Лаплас-образів часових кореляційних функцій Фур'є–компонент густин числа частинок, імпульсу та ентальпії немагнітних атомів;

$$\tilde{\Phi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};z)=\left[\begin{array}{llll}\Phi^m_{nn} & \Phi^m_{np} & \Phi^m_{nh} & \Phi^m_{n\mathfrak{M}}\\ \Phi^m_{pn} & \Phi^m_{pp} & \Phi^m_{ph} & \Phi^m_{p\mathfrak{M}}\\ \Phi^m_{hn} & \Phi^m_{hp} & \Phi^m_{hh} & \Phi^m_{h\mathfrak{M}}\end{array}\right]_{(\mathbf{k};z)}, \qquad (3.52)$$

$$\tilde{\Phi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};z)=\left[\begin{array}{lll}\Phi^m_{nn} & \Phi^m_{np} & \Phi^m_{nh}\\ \Phi^m_{pn} & \Phi^m_{pp} & \Phi^m_{ph}\\ \Phi^m_{hn} & \Phi^m_{hp} & \Phi^m_{hh}\\ \Phi^m_{\mathfrak{M}n} & \Phi^m_{\mathfrak{M}p} & \Phi^m_{\mathfrak{M}h}\end{array}\right]_{(\mathbf{k};z)}, \qquad (3.53)$$

-матриці Лаплас-образів часових перехресних кореляційних функцій, які описують динамічні кореляції між Фур'є-компонентами динамічних змінних немагнітної підсистеми $\hat{n}(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$, $\hat{h}(\mathbf{k})$ та динамічних змінних магнітної підсистеми $\hat{n}^m(\mathbf{k})$, $\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{k})$, $\hat{h}^m(\mathbf{k})$, $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{k})$;

$$\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)=\left[\begin{array}{llll}\Phi^{mm}_{nn} & \Phi^{mm}_{np} & \Phi^{mm}_{nh} & \Phi^{mm}_{n\mathfrak{M}}\\ \Phi^{mm}_{pn} & \Phi^{mm}_{pp} & \Phi^{mm}_{ph} & \Phi^{mm}_{p\mathfrak{M}}\\ \Phi^{mm}_{hn} & \Phi^{mm}_{hp} & \Phi^{mm}_{hh} & \Phi^{mm}_{h\mathfrak{M}}\\ \Phi^{mm}_{\mathfrak{M}n} & \Phi^{mm}_{\mathfrak{M}p} & \Phi^{mm}_{\mathfrak{M}h} & \Phi^{mm}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}\end{array}\right]_{(\mathbf{k};z)}, \qquad (3.54)$$

- матриця Лаплас-образів часових кореляційних функцій Фур'є-компонент густин числа частинок $\hat{n}^m(\mathbf{k})$, імпульсу $\hat{\mathbf{p}}^m(\mathbf{k})$, ентальпії $\hat{h}^m(\mathbf{k})$ і $\hat{\mathfrak{M}}(\mathbf{k})$ для атомів магнітної підсистеми. Система матричних рівнянь переносу (3.38) - (3.41) в рамках лінійної гідродинаміки дає можливість досліджувати часові кореляційні функкії, колективні моди, узагальнені коефіцієнти переносу в широкому інтервалі значень хвильового вектора $\mathbf{k}$ і частоти ω для суміші магнітних та немагнітних атомів. Такий комплекс досліджень можливо провести у зв'язку з тим, що відомі результати двох граничних випадків стосовно однокомпонентних систем.

3.1. Прості рідини

Класичним прикладом немагнітної рідини є проста рідина. У випадку відсутності магнітної підсистеми із матричних рівнянь

(3.46)-(3.49)залишається тільки перше матричне рівняння для кореляційних функцій $\tilde{\Phi}_{a_1}a_1(\mathbf{k};\mathbf{z})$

$$\begin{aligned} z\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z) - i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)\\ +\tilde{\varphi}^{nn}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)\\ = -\tilde{\Phi}_{a_1a_1}(\mathbf{k}),\end{aligned} \qquad (3.55)$$

в якому частотна матриця $i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})$ і матриця ядер переносу $\tilde{\varphi}^{nn}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)$ мають добре відому структуру в молекулярній гідродинаміці простих рідин [24, 23, 25]:

$$i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k})=\left[\begin{array}{lll}0 & i\Omega^{nn}_{np}(\mathbf{k}) & 0\\ i\Omega^{nn}_{pn}(\mathbf{k}) & 0 & i\Omega^{nn}_{ph}(\mathbf{k})\\ 0 & i\Omega^{nn}_{hp}(\mathbf{k}) & 0\end{array}\right],$$

$$\tilde{\varphi}^{nn}_{a_1a_1}(\mathbf{k},z)=\left[\begin{array}{lll}0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi^{nn}_{pp} & \varphi^{nn}_{ph}\\ 0 & \varphi^{nn}_{hp} & \varphi^{nn}_{hh}\end{array}\right]_{(\mathbf{k},z)}$$

Тут $\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{k},z)$, $\varphi^{nn}_{pp}(\mathbf{k},z)$ рівні відповідно (3.36), (3.37) і визначають узагальнені коефіцієнти в'язкості і теплопровідності. $i\Omega^{nn}_{np}(\mathbf{k})$ $i\Omega^{nn}_{pn}(\mathbf{k}) = -\mathbf{k^2}/\beta\mathbf{S^{nn}}(\mathbf{k})$, $S^{nn}(\mathbf{k})$ - статичний структурний фактор простої рідини (немагнітних атомів). Розв'язок системи рівнянь (3.55) в марківському наближенні може бути представлений аналітично в термінах власних значень z^n_α і власних векторів $\hat{X}^n_\alpha$ для матриці $\tilde{T}^n(\mathbf{k}) = -i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k}) + \tilde{\varphi}^{\mathbf{nn}}_{\mathbf{a_1a_1}}(\mathbf{k},\mathbf{0})$. Тоді отримаємо

$$\Phi^{ij}_{a_1a_1}(\mathbf{k};z)=\sum_{\alpha=1}\frac{G^{ij}_{\alpha n}(\mathbf{k})}{z+z^n_\alpha(\mathbf{k})},$$

де

$$G^{ij}_{\alpha n}(\mathbf{k})=\sum_{l=1}\hat{X}^n_{i,\alpha}(\hat{X}^n_{j,l})^{-1}\Phi^{ij}_{a_1a_1}(\mathbf{k};0)$$

і матриця $\hat{X}^{-1}$ обернена до $\hat{X}$. В гідродинамічній границі $|\mathbf{k}| \to 0, \omega \to 0, (z=\omega+i\varepsilon), \varepsilon \to +0$, z^n_α добре відомий [23-25] спектр колективних мод, який складається з теплової моди з власним значенням

$$z^n_h(\mathbf{k}) = k^2D^n_T + 0(k^4)$$

двох звукових мод з власними значеннями

$$z^n_\pm(\mathbf{k}) = \pm i\omega^n_s(\mathbf{k}) + Z^n_s(\mathbf{k})$$

- моди, які формують центральний і бокові піки динамічного структурного спектру; та в'язкої моди

$$z^n(\mathbf{k}) = -k^2\eta^n\beta/n^n M^n,$$

яка описує поперечні в'язкі коливання.

$$D_T^n = \lambda^n/n^n M^n C_p^n$$

- коефіцієнт термодифузії немагнітної підсистеми, λ^n - коефіцієнт теплопровідності і C_p^n - теплоємність при постійному тиску;

$$\omega_s^n(\mathbf{k}) = c_n k + 0(k^3)$$

- частота поширення звуку ($c_n = \gamma^n/\beta M_n S^{nn}(0)$ - адіабатична швидкість звуку), $\gamma^n = C_p^n/C_V^n$, C_V^n - теплоємність при постійному об'ємі V;

$$Z_s^n(\mathbf{k}) = \Gamma_n k^2 + 0(k^4)$$

- частота затухання звуку з коефіцієнтом затухання Γ_n

$$\Gamma_n = \frac{1}{2}(\gamma^n - 1)D_T^n + \frac{1}{2}\eta_L^n,$$

$\eta_L^n = (\frac{4}{3}\eta^n + \xi^n)/n^n M^n$, η_L^n, η^n, ξ^n - коефіцієнти повздовжньої, зсувної і об'ємної в'язкості.

3.2. Модель гейзенбергівської ферорідини [22]

Однією із яскравих моделей магнітної рідини є модель гейзенбергівської ферорідини в постійному зовнішньому магнітному полі у напрямку осі OZ. У цьому випадку гамільтоніан (2.6), (2.7) переходить в

$$\hat{H}_{\mathrm{S}} = -\frac{1}{2}\sum_{f,k}^{N_m} J(|\mathbf{r}_{fk}|)\mathbf{S}_f\mathbf{S}_k - B\sum_{f}^{N_m}\mathcal{M}S_f^z,$$

При відсутності немагнітної підсистеми із матричних рівнянь (3.46)-(3.49) залишається останнє, яке має вигляд і співпадає з [22]

$$z\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z) - i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)$$

$$+\tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z)\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};z) = -\tilde{\Phi}_{c_1c_1}(\mathbf{k}), \qquad (3.56)$$

де

$$i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & i\Omega_{np}^{mm}(\mathbf{k}) & 0 & 0 \\ i\Omega_{pn}^{mm}(\mathbf{k}) & 0 & i\Omega_{ph}^{mm}(\mathbf{k}) & i\Omega_{p\mathfrak{M}}^{mm}(\mathbf{k}) \\ 0 & i\Omega_{hp}^{mm}(\mathbf{k}) & 0 & 0 \\ 0 & i\Omega_{\mathfrak{M}p}^{mm}(\mathbf{k}) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і

$$\tilde{\varphi}_{c_1c_1}^{mm}(\mathbf{k},z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}_{pp}^{mm} & \bar{\varphi}_{ph}^{mm} & \bar{\varphi}_{p\mathfrak{M}}^{mm} \\ 0 & \bar{\varphi}_{hp}^{mm} & \bar{\varphi}_{hh}^{mm} & \bar{\varphi}_{h\mathfrak{M}}^{mm} \\ 0 & \bar{\varphi}_{\mathfrak{M}p}^{mm} & \bar{\varphi}_{\mathfrak{M}h}^{mm} & \bar{\varphi}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}^{mm} \end{bmatrix}_{(\mathbf{k},z)}$$

Ядра переносу $\bar{\varphi}_{pp}^{mm}$, $\bar{\varphi}_{hh}^{mm}$ рівні відповідно (3.40), (3.41) і визначають узагальнені коефіцієнти в'язкості, теплопровідності, $\bar{\varphi}_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}^{mm}$ - спінову дифузію магнітних атомів. Розв'язок системи рівнянь (3.56) в марківському наближенні може бути також представлений аналітично в термінах власних значень z_α^m і власних векторів $\hat{X}_\alpha^m$ для матриці $\tilde{T}^m(\mathbf{k}) = -i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k}) + \tilde{\varphi}_{\mathbf{c_1c_1}}^{\mathbf{mm}}(\mathbf{k},\mathbf{0})$. В результаті для кореляційних функцій отримаємо:

$$\Phi_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k};z) = \sum_{\alpha=1}\frac{G_{\alpha m}^{ij}(\mathbf{k})}{z + z_\alpha^m(\mathbf{k})},$$

де

$$G_{\alpha m}^{ij}(\mathbf{k}) = \sum_{l=1}\hat{X}_{i,\alpha}^m(\hat{X}_{j,l}^m)^{-1}\Phi_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k};0)$$

і матриця $\hat{X}^{-1}$ обернена до $\hat{X}$. Спектр колективних мод z_α^m для гейзенбергівської рідини може бути знайдений в гідродинамічній границі $|\mathbf{k}| \to 0, \omega \to 0$, коли функцій $i\Omega_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k})$, $\bar{\varphi}_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k},0)$ рівні термодинамічних значенням

$$i\Omega_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k}) = \mathbf{ik}\omega_{\mathbf{ij}},$$

$$\bar{\varphi}_{c_1c_1}^{ij}(\mathbf{k},0) = k^2\gamma_{ij},$$

(причому γ_{ij} виражаються через відповідні коефіцієнти в'язкості η^m, теплопровідності λ^m та дифузії D_m магнітних атомів) із рівності [22].

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} z & ik\omega_{np} & 0 & 0 \\ ik\omega_{pn} & z+k^2\gamma_{pp} & ik\omega_{ph} & ik\omega_{p\mathfrak{M}} \\ 0 & ik\omega_{hp} & z+k^2\gamma_{hh} & k^2\gamma_{h\mathfrak{M}} \\ 0 & ik\omega_{\mathfrak{M}p} & k^2\gamma_{\mathfrak{M}h} & z+k^2\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} \end{pmatrix} = 0. \qquad (3.57)$$

Цей спектр гідродинамічних мод гейзенберівської ферорідини складається: з теплової мод з власним значенням

$$z_h^m = -D_T^m k^2, \quad D_T^m = \frac{1}{2v_s^2}\left[b+\sqrt{b^2-4v_s^2 c_m}\right],$$

де

$$b = \omega_{pn}\omega_{np}(\gamma_{hh}+\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}}) + \omega_{ph}\omega_{hp}\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} + \omega_{p\mathfrak{M}}\omega_{\mathfrak{M}p}\gamma_{hh} -$$
$$\omega_{ph}\omega_{\mathfrak{M}p}\gamma_{h\mathfrak{M}} - \omega_{p\mathfrak{M}}\omega_{hp}\gamma_{\mathfrak{M}h},$$
$$c = \omega_{pn}\omega_{np}\left(\gamma_{hh}\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} - \gamma_{h\mathfrak{M}}\gamma_{\mathfrak{M}h}\right).$$
$$v_s^2 = \omega_{pn}\omega_{np} + \omega_{ph}\omega_{hp} + \omega_{p\mathfrak{M}}\omega_{\mathfrak{M}p},$$

v_s- швидкість звуку; двох звукових мод з власними значеннями

$$z_\pm^m(\mathbf{k}) = \pm i\omega_s^m(\mathbf{k}) + Z_s^m(\mathbf{k}),$$

дифузійної спінової моди з

$$z^m(\mathbf{k}) = -k^2 D_m,$$

$$D_m = \frac{1}{2v_s^2}\left[b-\sqrt{b^2-4v_s^2 c}\right],$$

які формують центральний та бокові піки динамічного структурного фактора $S^{mm}(\mathbf{k};\omega)$, та в'язкої моди з власним значенням

$$z^m(\mathbf{k}) = -k^2\eta^m\beta/n^m M^m,$$

- яка описує поперечні в'язкі коливання магнітних атомів. η^m - коефіцієнт зсувної в'язкості ферорідини. Тут

$$\omega_s^m(\mathbf{k}) = c_m k + 0(k^3)$$

- частота поширення звуку, а $Z_s^m(\mathbf{k})$ - частота затухання звуку з коефіцієнтом затухання Γ_m

$$Z_s^m(\mathbf{k}) = \Gamma_m k^2 + 0(k^4),$$

$$\Gamma_m = \frac{1}{2}\gamma_{pp} + \frac{\omega_{ph}\omega_{hp}}{2v_s^2}\gamma_{hh} + \frac{\omega_{p\mathfrak{M}}\omega_{\mathfrak{M}p}}{2v_s^2}\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{M}} +$$
$$\frac{1}{2v_s^2}\left[\omega_{ph}\omega_{\mathfrak{M}p}\gamma_{h\mathfrak{M}} + \omega_{p\mathfrak{M}}\omega_{hp}\gamma_{\mathfrak{M}h}\right].$$

Розгляд даних граничних випадків простої рідини (немагнітної підсистеми) з одної сторони, і гейзенбергівської ферорідини з другої, дає підстави детального аналізу колекитивних мод суміші магнітних та немагнітних атомів в марківському наближенні виходячи із $det[\tilde{I}z - i\tilde{\Omega}(\mathbf{k}) + \tilde{\varphi}(\mathbf{k},\mathbf{0})] = \mathbf{0}$, де $i\tilde{\Omega}(\mathbf{k})$ і $\tilde{\varphi}(\mathbf{k},0)$ суперматриці:

$$i\tilde{\Omega}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} i\tilde{\Omega}_{a_1a_1}(\mathbf{k}) & i\tilde{\Omega}_{a_1c_1}(\mathbf{k}) \\ i\tilde{\Omega}_{c_1a_1}(\mathbf{k}) & i\tilde{\Omega}_{c_1c_1}(\mathbf{k}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k},0) = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{a_1a_1}(\mathbf{k};\mathbf{0}) & \tilde{\varphi}_{a_1c_1}(\mathbf{k};\mathbf{0}) \\ \tilde{\varphi}_{c_1a_1}(\mathbf{k};\mathbf{0}) & \tilde{\varphi}_{c_1c_1}(\mathbf{k};\mathbf{0}) \end{bmatrix}.$$

Такі питання будуть розглянуті в наступних роботах.

Література

[1] Mahyd–95. The 14-th International Riga Conference on Magnetohydrodynamics. August 24-26, 1995, Jurmala, Latvia. Abstracts, p. 242.

[2] Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics. Cambridge, Cambridge Univ. Press. 1985.

[3] Kalikmanov V.I. Statistical thermodynamics of ferrofluids. // Physica A, 1992, V. 183, No 1-2, P. 25-50.

[4] Rubi J.M., Miguel M.C. Transport phenomena in ferrofluids. // Physica A, 1993, V. 194, P. 209-217.

[5] Haudrich K., Kobe S. Amorphe Ferro- und Ferrimagnetika. Berlin, Akademika-Verlag, 1980.

[6] Busch G., Guentherodt H. Ferromagnetic behaviour of liquid alloys. // Phys. Lett. A, 1968, V. 27, No 2, P. 110.-112.

[7] Вакарчук И.А., Рудавский Ю.К., Понедилок Г.В. К проблеме жидкого ферромагнетика. // Укр.физ.журн., 1982, Т. 27, No 9, С. 1414-1415.

[8] Вакарчук И.А., Рудавский Ю.К., Понедилок Г.В. Микроскопическая теория аморфных и жидких ферромагнетиков. // Сб. трудов "Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики". D-17-81-758. Дубна, 1981, С. 307-317.

[9] Вакарчук И.А., Рудавский Ю.К., Понедилок Г.В. Теория жидких магнетиков. // ТМФ, 1984, Т. 58, No 3, С. 445-460.

[10] Hemmer P.C., Imbro P. Ferromagnetic fluids. // Phys. Rev. A, 1977, V. 16, No 1, P. 380-386.

[11] Ido Y., Takahashi T. Nonequilibrium theory of viscoelastic magnetic fluids. // Journ. Phys. Soc. Jap., 1991, V. 60, No 2, P. 466-476.

[12] Вакарчук И.А., Марголыч И.Ф. К теории многокомпонентных неупорядоченных магнетиков. // ТМФ, 1987, Т. 72, No 3, С. 462-476.

[13] Ахиезер И.А., Ахиезер И.Т. Колебания ферромагнитной жидкости. // ЖЭТФ, 1984, Т. 86, No 1, С. 120-124.

[14] Ахиезер И.А., Ахиезер И.Т. Колебания жидких ненасыщенных ферромагнетиков. // ФТТ, 1987, Т.29, No 7, С. 2167-2169.

[15] Ахиезер И.А., Ахиезер И.Т. Нелинейные колебания в магнетиках 2. Нелинейные спиновые волны в двухподрешоточных магнетиках. Волны и разрывы в ферромагнитной жидкости. (Обзор).// Укр.физ.журн.,1991, Т.36, No 9, С.1363-1376.

[16] Мриглод І.М., Токарчук М.В. Узагальнена гідродинаміка рідких магнетиків. // Фізика конденсованих систем, 1993, No 2, С. 102-110.

[17] Mryglod I.M., Tokarchuk M.V. Hydrodynamic theory of a magnetic liquid. // Cond. Matt. Phys., 1994, No 3, P. 116-133.

[18] Мриглод І.М., Токарчук М.В. Гідродинаміка рідкого стану системи частинок з локалізованим магнітним моментом. // Укр.фіз.журн., 1994, Т.39, No 7,8., С.838-842.

[19] Mryglod I.M., Tokarchuk M.V., Folk R. On the hydrodynamic theory of a magnetic liquid I. General description. // Physica A, 1995, V. 220, P. 325-348.

[20] Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

[21] Зубарев Д.Н. Современные методы статистической теории неравновесных процессов. В кн. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М., ВИНИТИ, 1980, Т. 15, С. 131-220.

[22] Mryglod I.M., Folk R. On the hydrodynamic theory of a magnetic liquid II. Hydrodynamic modes in the Heisenberg fluid. // Physica A., 1996. V. 234. P.129-150.

[23] Mryglod I.M., Tokarchuk M.V. On the statistical hydrodynamics of simple fluids. The generalized transport coefficients. Lviv., 1992. Preprint Inst. for Cond. Matter. Phys., ICMP-92.-6V, 24 p. (in Ukr).

[24] Boon T.P., Yip S. Molecular Hydrodynamics. No-Y., Mc.Graw- Hill, 1980.

[25] Mryglod I.M., Omelyan I.P., Tokarchuk M.V. Generalized collective

modes for the Lennard-Jones fluid. // Mol. Phys., 1995. V. 84, No 2. P. 235-259.

[26] Omelyan I.P., Mryglod I.M. Generalized collective modes of a Lenuard-Jones fluid. High mode approximetion. // Cond.Matt. Phys., 1994, No 4. - P. 128-160.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Ігор Миронович Мриглод
Юрій Кирилович Рудавський
Михайло Васильович Токарчук

Статистична гідродинаміка суміші магнітних та немагнітних атомів

Роботу отримано 22 жовтня 1997 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України