Національна академія наук України

ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

ICMP–97–13U

І.О. Вакарчук[*], П.А. Глушак, М.В. Токарчук

УЗГОДЖЕНИЙ ОПИС КІНЕТИКИ ТА ГІДРОДИНАМІКИ КВАНТОВИХ БОЗЕ-СИСТЕМ.
1. Рівняння переносу

[*] Львівський державний університет ім. І.Я.Франка, 290000 Львів, вул. Університетська 1

ЛЬВІВ

УДК: 536.75; 536-12.01

PACS: 67.40, 47.37.+q

Узгоджений опис кінетики та гідродинаміки квантових бозе-систем. 1. Рівняння переносу

І.О. Вакарчук, П.А. Глушак, М.В. Токарчук

Анотація. Запропоновано один із послідовних підходів узгодженого опису кінетики та гідродинаміки багатобозонних систем. Отримані узагальнені рівняння переносу як для сильно, так і для слабо нерівноважних бозе-систем.

Consistent description of kinetics and hydrodynamics of quantum bose-systems. 1. Transport equations.

I.O. Vakarchuk, P.A. Hlushak, M.V. Tokarchuk

Abstract. The consistent approach for description of kinetics and hydrodynamics of many-Boson systems is proposed. Generalized transport equations for stronly and weakly non-equilibrium Bose-systems are obtained.

Подається до Українського фізичного журналу
Submitted to Ukrainian Journal of Physics

ВСТУП

Теоретичні дослідження нерівноважних властивостей газоподібного гелію, зміни їх при переході з пониженням температури нижче $T_c = 4.2$ K у рідкий стан - HeI, а нижче $T_\lambda = 2.17$ K у рідкий стан - HeII, який характеризується надплинністю, залишаються актуальними в сучасній статистичній теорії нерівноважних процесів квантових систем. Побудувати нерівноважну статистичну теорію, яка б послідовно описувала газоподібний, рідкий і надплинний гелій з врахуванням фазових переходів є чи не головною метою кожного теоретика, якого зацікавили унікальні фізичні властивості гелію. Необхідно зазначити, що фізичною моделлю в теоретичних описах як рівноважних, так і нерівноважних властивостей реального гелію служить квантова система бозе-частинок. Зокрема, гідродинамічному опису нормального та надплинного станів такої системи присвячено багато робіт [1–16]. Короткий огляд результатів досліджень в рамках лінійної гідродинаміки був проведений у недавній роботі Ю.О.Церковнікова [16]. В роботах [17–19] запропоновані теоретичні підходи опису нелінійних гідродинамічних флуктуацій, пов'язаних з проблемою розрахунку дисперсії для кінетичних коефіцієнтів переносу та спектру колективних мод у низькочастотній області для надплинної бозе-рідини. Проблеми побудови кінетичних рівнянь для бозе-систем на основі мікроскопічного підходу розглядались в роботах [20,21]. Для нормальних бозе-систем проведені розрахунки спектру колективних мод (без врахування теплової моди), динамічного структурного фактора, кінетичних коефіцієнтів переносу [9, див. посилання] на основі гідродинамічного чи кінетичного підходів. Проте дані результати є справедливі тільки в гідродинамічній області (малі значення хвильового вектора $\mathbf{k}$ і частоти ω). В цілому для бозе-систем існує важлива проблема виходу за гідродинамічну область в область проміжних значень $\mathbf{k}$ і ω, де кінетичні та гідродинамічні процеси взаємозв'язані і повинні розглядатись одночасно. Це одна з актуальних проблем статистичної теорії нерівноважних процесів переносу в квантових рідинах.

Значного успіху досягнуто в роботах [22–25], в яких запропонований підхід узгодженого опису кінетики і гідродинаміки класичних густих газів і рідин на основі методу нерівноважного статистичного оператора Д.М. Зубарєва [26,27]. Цей підхід ми застосуємо до узгодженого опису кінетики і гідродинаміки багатобозонної системи. Необхідно відзначити, що у недавній роботі Ю.О.Церковнікова [28] розглядалась задача побудови лінеаризованого кінетичного рівняння для бозе-системи вище критичної температури з допомогою методу двочасових температурних функцій Гріна [29,30].

У другій частині роботи отримаємо нерівноважний статистичний оператор багатобозонної системи при узгодженому описі кінетики і гідродинаміки за допомогою методу нерівноважного статистичного оператора. За параметри скороченого опису нерівноважного стану вибрані квантова нерівноважна одночастинкова функція розподілу та середнє значення потенціальної енергії взаємодії, для яких отримана зв'язана система рівнянь переносу.

У третій частині розглядається кінетика і гідродинаміка слабо нерівноважного бозе-газу. Тут отримані замкнуті рівняння переносу для парамертів скороченого опису. На основі їх розв'язків записано кінетичне рівняння для квантової одночастинкової функції розподілу, у якому ядро переносу містить перенормовку кінетичних кореляцій гідродинамічними кореляціями. Крім цього, отримано систему рівнянь для часових кореляційних функцій параметрів скороченого опису, через які визначаються динамічний структурний фактор системи, часові кореляційні функції густини операторів імпульсу та енергії.

2. Нерівноважний статистичний оператор для бозе-системи

Будемо розглядати нормальну бозе-систему з гамільтоніаном:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}}\frac{p^2}{2m}\hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\nu(q)\hat{a}^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}-\mathbf{k}}{2}}\,\hat{\rho}_{\mathbf{q}}\,\hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}-\mathbf{k}}{2}}\,,\end{aligned} \tag{2.1}$$

де: $\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ – бозе оператори знищення і народження частинок в стані з імпульсом $\mathbf{p}$, $\nu(q) = \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r})\Phi(|\mathbf{r}|)\,d\mathbf{r}$ – фур'є-компонента потенціалу взаємодії між частинками, V – об'єм,

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}}\hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \tag{2.2}$$

– фур'є-компонента оператора густини числа частинок, N – повне число частинок системи.

Нерівноважний стан такої квантової системи повністю описується нерівноважним статистичним оператором $\hat{\rho}(t)$, який задовільняє квантовому рівнянню Ліувілля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) + i\hat{L}_N\hat{\rho}(t) = 0, \tag{2.3}$$

де оператор Ліувілля $i\hat{L}_N\hat{A} = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$.

Для розв'язку рівняння необхідно задати граничні умови. Ми будемо використовувати метод нерівноважного статистичного оператора [26,27] і з самого початку поставимо задачу відбору таких розв'язків рівняння (2.3), які відповідають ідеям скороченого опису [31], тобто залежать від часу тільки через середні значення набору спостережуваних величин $\left\langle \hat{P}_m \right\rangle^t$ та не залежить від початкового моменту часу t_0: $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(\ldots \left\langle \hat{P}_m \right\rangle^t \ldots)$. Такі розв'язки можна отримати, включивши нескінченно мале джерело у праву частину рівняння Ліувілля (2.3) [26,27]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) + i\hat{L}_N\hat{\rho}(t) = -\epsilon(\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_q(t)), \tag{2.4}$$

де $\epsilon \to +0$ після граничного термодинамічного переходу. Джерело порушує симетрію рівняння Ліувілля відносно $t \to -t$ і відбирає запізнюючі розв'язки, що відповідають скороченому опису нерівноважного стану системи. Квазірівноважний статистичний оператор $\hat{\rho}_q(t)$, який визначається із умови екстремуму інформаційної ентропії системи при збереженні умови нормування

$$\mathrm{Sp}\ \hat{\rho}_q(t) = 1 \tag{2.5}$$

і при фіксованих значеннях набору величин $\left\langle \hat{P}_m \right\rangle^t$ – параметрів скороченого опису.

При дослідженнях гідродинамічного нерівноважного стану нормальної бозе-рідини, що характеризується процесами переносу енергії, імпульсу та маси, параметрами скороченого опису є спостережувані величини: середні значення густин енергії $\langle \hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}} \rangle^t$, імпульсу $\left\langle \hat{P}_{\mathbf{q}} \right\rangle^t$, і числа частинок $\langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \rangle^t$ [10,14,16]. Засередження означене як

$$\langle (\ldots) \rangle^t = \mathrm{Sp}[(\ldots)\,\hat{\rho}(t)]. \tag{2.6}$$

Фур'є-компоненти густини енергії і густини імпульсу

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}} = {} & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}}\, \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} + \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{k}} \nu(k) \hat{a}^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}-\mathbf{k}}{2}}\, \hat{\rho}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}-\mathbf{k}}{2}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}}\, \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \tag{2.8}$$

разом з густиною числа частинок (2.2) задовільняють локальні закони збереження, а їх середні значення – рівняння узагальненої гідродинаміки (у лінійному наближенні рівняння молекулярної гідродинаміки) квантових систем. Важливою рисою для густин енергії, імпульсу і числа частинок, що локально зберігаються, є те, що вони визначаються через оператор фазової густини числа частинок $\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ – оператор Клімонтовича:

$$\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \hat{a}^+_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{q}}{2}}\, \hat{a}_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2}}, \tag{2.9}$$

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{2.10}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{2.11}$$

$$\hat{\varepsilon}^{kin}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{2.12}$$

$$\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{k}} \nu(k) \hat{a}^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}\, \hat{n}_{\mathbf{k}}(p')\, \hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}, \tag{2.13}$$

де: $\hat{\varepsilon}^{kin}_{\mathbf{q}}$ та $\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}$ – фур'є-компоненти операторів густини кінетичної та потенціальної енергій. Середні значення для цих величин можна записати у вигляді:

$$\langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}} \rangle^t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \tag{2.14}$$

$$\left\langle \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}} \right\rangle^t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \tag{2.15}$$

$$\left\langle \hat{\varepsilon}^{kin}_{\mathbf{q}} \right\rangle^t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) f_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \tag{2.16}$$

де одночастинкова функція розподілу $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \langle \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) \rangle^t$ задовільняє кінетичне рівняння для квантової бозе-системи. На відміну від (2.14)–(2.16), середнє значення потенціальної енергії визначається через квантову двочастинкову нерівноважну функцію розподілу:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} \right\rangle^t = {} & \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{k}} \nu(k) \times \\ & \times\ f_2(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}; \mathbf{p}'; \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}, t), \end{aligned} \tag{2.17}$$

де

$$f_2(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2};\mathbf{p}';\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2};t) = \\ = \left\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}\,\hat{n}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}')\,\hat{a}_{\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}-\mathbf{q}}{2}}\right\rangle^t. \tag{2.18}$$

На цьому етапі виникає проблема узгодженого опису кінетики і гідродинаміки квантової бозе-системи. Для гідродинамічного опису нерівноважного стану системи достатньо включити у набір параметрів скороченого опису середні значення числа частинок $\langle\hat{\rho}_{\mathbf{q}}\rangle^t$, імпульсу $\left\langle\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t$ і повної енергії $\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}\rangle^t$. З іншого боку для кінетичного опису нерівноважного стану системи характерним параметром є квантова одночастинкова функція розподілу $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$, що задовільняє кінетичне рівняння. Узгодження кінетики і гідродинаміки для дуже розрідженого бозе-газу не викликає проблем (густина є малим параметром) і параметром скороченого опису може бути вибрана тільки квантова одночастинкова функція розподілу $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$. При переході до квантових бозе-рідин вклад колективних кореляцій, що описуються середньою потенціальною енергією взаємодії $\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t$ (2.17), є більш важливий ніж одночастинкові кореляції, пов'язані із $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$. Звідси випливає, що для узгодженого опису кінетики і гідродинаміки бозе-рідини за параметри скороченого опису нерівноважного стану необхідно вибрати квантову одночастинкову нерівноважну функцію розподілу $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$ і середню потенціальну енергію взаємодії $\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t$. Подібні проблеми узгодженого опису кінетики і гідродинаміки класичних густин газів і рідин, як вже відзначалось вище, розглядались у роботах [23–25]. Тому, використовуючи [23–27], квазірівноважний статистичний оператор $\hat{\rho}_q(t)$, що входить у (2.4), знайдемо із умови екстремуму інформаційної ентропії системи при збереженні умови нормування (2.5) при фіксованих значеннях $\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$ та $\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t$:

$$\hat{\rho}_q(t) = \exp\Big\{ -\Phi(t) - \sum_{\mathbf{q}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\,\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} - \\ - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\,\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big\}. \tag{2.19}$$

Лагранжеві множники $\beta_{-\mathbf{q}}(t)$, $\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)$ визначаються із умов самоузгоджень:

$$\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t = \left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t_q, \qquad \langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t_q, \tag{2.20}$$

$$\langle(\ldots)\rangle^t_q = \mathrm{Sp}[(\ldots)\,\rho_q(t)],$$

а функціонал Мас'є-Планка

$$\Phi(t) = \ln\,\mathrm{Sp}\,\exp\Big\{ -\sum_{\mathbf{q}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\,\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}} - \\ - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\,\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big\} \tag{2.21}$$

знаходиться із умови нормування (2.5). При заданому квазірівноважному операторі $\hat{\rho}_q(t)$ (2.19) знайдемо нерівноважний статистичний оператор $\hat{\rho}(t)$, що задовільняє квантове рівняння Ліувілля з джерелом. Для цього запишемо рівняння (2.4) у вигляді [27]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (1-P_q(t))\,i\hat{L}_N + \epsilon\right](\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_q(t)) = \\ = -\,(1-P_q(t))\;i\hat{L}_N\hat{\rho}_q(t), \tag{2.22}$$

де узагальнений проєкційний оператор Кавасакі-Гантона діє тільки на статистичні оператори

$$P_q(t)\hat{\rho}' = \Big[\hat{\rho}_q(t) - \sum_{\mathbf{q}} \frac{\delta\hat{\rho}_q(t)}{\delta\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t}\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t - \\ - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \frac{\delta\hat{\rho}_q(t)}{\delta\,\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t\Big]\,\mathrm{Sp}\,\hat{\rho}' + \\ + \sum_{\mathbf{q}} \frac{\delta\hat{\rho}_q(t)}{\delta\left\langle\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\right\rangle^t}\mathrm{Sp}(\hat{\varepsilon}^{int}_{\mathbf{q}}\hat{\rho}') + \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}} \frac{\delta\hat{\rho}_q(t)}{\delta\,\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t}\mathrm{Sp}(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\rho}') \tag{2.23}$$

і має властивості:

$$P_q(t)\hat{\rho}' = \hat{\rho}_q(t),\; P_q(t)\hat{\rho}'_q(t') = \hat{\rho}_q(t),\; P_q(t)P_q(t') = P_q(t).$$

Формальний розв'язок рівняння (2.22) має вигляд:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_q(t) - \int_{-\infty}^{t} dt'\;\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,T_q(t,t')\times \\ \times\Big(1-P_q(t')\Big)i\hat{L}_N\hat{\rho}_q(t'), \tag{2.24}$$

де узагальнений оператор еволюції з врахуванням проєктування

$$T_q(t,t') = \exp_+\left\{-\int_{t'}^{t} dt'\,\Big(1-P_q(t')\Big)i\hat{L}_N\right\}. \tag{2.25}$$

Далі розкриємо дію операторів $\Big(1-P_q(t')\Big)i\hat{L}_N$ на $\hat{\rho}_q(t')$ у правій частині (2.24), в результаті отримаємо:

$$\Big(1-P_q(t')\Big)i\hat{L}_N\hat{\rho}_q(t') = -\int\limits_0^1 d\tau(\hat{\rho}_q(t))^\tau\Big\{\sum_{\mathbf{q}}\beta_{-\mathbf{q}(t)}I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q},t)+$$
$$+\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{q}}\gamma_{-\mathbf{q}(\mathbf{p},t)}I_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t)\Big\}(\hat{\rho}_q(t))^{1-\tau}, \tag{2.26}$$

де узагальнені потоки

$$I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q},t) = \Big(1-P(t)\Big)i\hat{L}_N\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}, \tag{2.27}$$

$$I_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = \Big(1-P(t)\Big)i\hat{L}_N\hat{n}_{\mathbf{q}}^{int}(\mathbf{p}). \tag{2.28}$$

Вирази (2.27) та (2.28) містять узагальнений проєкційний оператор Морі:

$$P(t)\hat{b} = \langle\hat{b}\rangle_q^t + \sum_{\mathbf{q}}\frac{\delta\langle\hat{b}\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t}(\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}-\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t)+$$
$$+\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\frac{\delta\langle\hat{b}\rangle_q^t}{\delta\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t}(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})-\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t), \tag{2.29}$$

що діє тільки на оператори фізичних величин і має властивості:

$$P(t)n_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = n_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \quad P(t)\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int} = \hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}, \quad P(t)P(t') = P(t).$$

Підставимо (2.26) у (2.24), в результаті для нерівноважного статистичного оператора бозе-системи отримаємо:

$$\hat{\rho}(t) = \rho_q(t) + \sum_{\mathbf{q}}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,T_q(t,t')\times \tag{2.30}$$
$$\times\int\limits_0^1 d\tau(\rho_q(t'))^\tau I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q},t')(\rho_q(t'))^{1-\tau}\beta_{-\mathbf{q}}(t')+$$
$$+\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,T_q(t,t')\times$$
$$\times\int\limits_0^1 d\tau(\rho_q(t'))^\tau I_n(\mathbf{p},\mathbf{q},t')(\rho_q(t'))^{1-\tau}\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p},t').$$

Нерівноважний статистичний оператор (2.30) отриманий при узгодженому описі кінетики і гідродинаміки багатобозонної системи. За допомогою нього знайдемо незамкнуту систему рівнянь переносу для параметрів скороченого опису $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$, $\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t$. Для цього використаємо тотожності:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t) = \frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle_q^t + \langle I_n(\mathbf{p},\mathbf{q})\rangle^t,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle_q^t + \langle I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q})\rangle^t, \tag{2.31}$$

де:

$$\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = i\hat{L}_N\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{q}}^{int} = i\hat{L}_N\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}. \tag{2.32}$$

Тепер усереднимо у правих частинах (2.31) з нерівноважним статистичним оператором (2.30), в результаті знайдемо систему рівнянь для нерівноважної функції розподілу $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$ і середнього значення густини енергії взаємодії $\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle_q^t + \sum_{\mathbf{q}'}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\times \tag{2.33}$$
$$\times\,\varphi_{n\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',t,t')\beta_{-\mathbf{q}}(t')+$$
$$+\sum_{\mathbf{q}'}\sum_{\mathbf{p}'}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',\mathbf{q}',t,t')\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t'),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle^t = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{q}}^{int}\rangle_q^t + \sum_{\mathbf{q}'}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\times$$
$$\times\,\varphi_{\varepsilon\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t,t')\beta_{-\mathbf{q}}(t')+$$
$$+\sum_{\mathbf{q}'}\sum_{\mathbf{p}'}\int\limits_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{\varepsilon n}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p}',t,t')\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t').$$

У рівняннях (2.33) введені узагальнені ядра переносу, які описують дисипативні процеси в системі:

$$\varphi_{n\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',t,t') = \mathrm{Sp}\,\Big[I_n(\mathbf{q},\mathbf{p},t)T_q(t,t')\times \tag{2.34}$$
$$\times\int\limits_0^1 d\tau\rho_q^\tau(t')I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q}',t')\rho_q^{1-\tau}(t')\Big],$$

$$\varphi_{\varepsilon n}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',\mathbf{p},t,t') = \mathrm{Sp}\left[I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q},t')T_q(t,t') \times \right. \qquad (2.35)$$

$$\left. \times \int_0^1 d\tau \rho_q^\tau(t') I_n(\mathbf{p},\mathbf{q}',t)\rho_q^{1-\tau}(t')\right],$$

$$\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{q}',\mathbf{p}',t,t') = \mathrm{Sp}\left[I_n(\mathbf{q},\mathbf{p},t)T_q(t,t') \times \right. \qquad (2.36)$$

$$\left. \times \int_0^1 d\tau \rho_q^\tau(t') I_n(\mathbf{p}',\mathbf{q}',t)\rho_q^{1-\tau}(t')\right],$$

$$\varphi_{\varepsilon\varepsilon}^{int}(\mathbf{q},\mathbf{q}',t,t') = \mathrm{Sp}\left[I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q},t')T_q(t,t') \times \right. \qquad (2.37)$$

$$\left. \times \int_0^1 d\tau \rho_q^\tau(t') I_\varepsilon^{int}(\mathbf{q}',t')\rho_q^{1-\tau}(t')\right].$$

Система рівнянь (2.33) для одночастинкової функції розподілу і середньої густини потенціальної енергії є сильно нелінійною системою і може бути використана для опису як сильно, так і слабо нерівноважних станів бозе-системи при узгодженому описі кінетики і гідродинаміки. Ці рівняння переносу для багатобозонної системи є новими. Проєктуючи їх на значання компонент вектора $\mathbf{\Psi}(\mathbf{p}) = \left(1, \mathbf{p}, \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m}\right)$, відповідно до (2.14)-(2.16), отримаємо рівняння нелінійної гідродинаміки, у яких процеси переносу кінетичної і потенціальної частин енергії описуються двома взаємозв'язаними рівняннями.

Очевидно, що такі рівняння гідродинаміки нелінійних процесів дають можливість більш детально описувати процеси взаємного перетворення кінетичної та потенціальної енергії частинок при переході від газоподібного до рідинного стану при зміні густини, тиску і температури.

3. Кінетика і гідродинаміка слабо нерівноважної бозе-системи

Для опису нерівноважного стану бозе-системи близького до рівноважного, тобто коли параметри скороченого опису $\langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle^t$, $\langle \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}^{int}\rangle^t$ повільно змінюються у просторі і часі та мало відрізняються від

своїх рівноважних значень, достатньо лінійного наближення за відхиленнями параметрів $\beta_\mathbf{q}(t)$, $\gamma_\mathbf{q}(\mathbf{p},t)$ від їх рівноважних значень. У цьому випадку зручно перейти від набору операторів динамічних змінних $\{\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p}), \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}^{int}\}$ до набору $\{\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p}), \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}\}$ з Фур'є-компонентою оператора густини повної енергії (2.7). Квазірівноважний статистичний оператор $\rho_q(t)$ (2.19) для набору $\{\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p}), \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}\}$ може бути представлений у вигляді:

$$\hat{\rho}_q(t) = \exp\Big\{ -\Phi(t) - \sum_\mathbf{q} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\,\hat{\varepsilon}_\mathbf{q} - \qquad (3.1)$$

$$- \sum_\mathbf{q}\sum_\mathbf{p} \bar{\gamma}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\,\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\Big\},$$

де параметр $\bar{\gamma}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t) = \gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t) - (\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m})\beta_\mathbf{q}(t)N^{-1/2}$ визначається із умови самоузгодження $\langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle_q^t$, а параметр $\beta_{-\mathbf{q}}(t)$ – із умови $\langle \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}\rangle^t = \langle \hat{\varepsilon}_\mathbf{q}\rangle_q^t$. Тоді розкладемо оператор (3.1) за відхиленнями $\delta\beta_\mathbf{q}(t) = \beta_\mathbf{q}(t) - \beta$, $\delta\gamma_\mathbf{q}(\mathbf{p};t) = \bar{\gamma}_\mathbf{q}(\mathbf{p};t) + \mu\beta$ (β, μ - рівноважні значення відповідно оберненої температури і хімічного потенціалу), обмежившись лінійним наближенням:

$$\hat{\rho}_q(t) = \int_0^1 d\tau\, \rho_0^\tau \Big(1 - \sum_\mathbf{q} \delta\beta_{-\mathbf{q}}(t)\hat{\varepsilon}_\mathbf{q} - \qquad (3.2)$$

$$- \sum_\mathbf{q}\sum_\mathbf{p} \delta\gamma_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p};t)\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p},t)\Big)\, \rho_0^{1-\tau},$$

де ρ_0 - рівноважний статистичний оператор:

$$\rho_0 = \frac{1}{Q}\exp\{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\}, \qquad Q = \mathrm{Sp}\exp\{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N}\}. \quad (3.3)$$

За допомогою умов самоузгодження визначимо параметри $\delta\beta_\mathbf{q}(t)$ та $\delta\gamma_\mathbf{q}(\mathbf{p};t)$. Обчислимо спочатку параметр $\delta\gamma_\mathbf{q}(\mathbf{p};t)$:

$$\langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle^t = \langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle_q^t = \langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle_0 - \Big(\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\hat{\varepsilon}_{-\mathbf{q}}\Big)_0 \beta_\mathbf{q}(t) -$$

$$- \sum_{\mathbf{p}'} \Big(\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})_{-\mathbf{q}}\Big)_0 \gamma_\mathbf{q}(\mathbf{p}',t), \qquad (3.4)$$

де:

$$\langle \hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rangle_0 = \mathrm{Sp}\,\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\rho_0,$$

а рівноважні квантові кореляційні функції:

$$\Big(\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\hat{\varepsilon}_{-\mathbf{q}}\Big)_0 = \mathrm{Sp}\left(\hat{n}_\mathbf{q}(\mathbf{p})\int_0^1 d\tau \rho_0^\tau \hat{\varepsilon}_{-\mathbf{q}}\rho_0^{1-\tau}\right), \qquad (3.5)$$

$$\Big(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\Big)_0 = \mathrm{Sp}\,\Big(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\int_0^1 d\tau \rho_0^\tau \hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rho_0^{1-\tau}\Big).$$

Для скорочення запису введемо наступні позначення:

$$\Phi_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \Big(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{\varepsilon}_{-\mathbf{q}}\Big)_0, \tag{3.6}$$

$$\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}') = \Big(\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\Big)_0,$$

після чого запишемо (3.4) у наступному вигляді:

$$\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t = -\Phi_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p})\delta\beta_{\mathbf{q}}(t) - \sum_{\mathbf{p}'}\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}')\delta\gamma_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t). \tag{3.7}$$

Означимо обернену функцію $\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}')$ до функції $\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}')$ співвідношенням:

$$\sum_{\mathbf{p}''}\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'')\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{p}') = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'},$$

і, домноживши на неї рівняння (3.7), після сумування за імпульсами $\delta\gamma_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t)$ запишеться у вигляді:

$$\delta\gamma_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}',t) = \sum_{\mathbf{p}}\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\Phi_{n\varepsilon}(\mathbf{q},\mathbf{p})\delta\beta_{\mathbf{q}}(t) - \tag{3.8}$$

$$-\sum_{\mathbf{p}}\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^t.$$

Підставимо цей вираз у (3.2), тоді отримаємо:

$$\hat{\rho}_q(t) = \int_0^1 d\tau\,\rho_0^\tau\Big(1 - \sum_{\mathbf{q}}\delta\beta_{-\mathbf{q}}(t)\hat{h}_{\mathbf{q}} - \tag{3.9}$$

$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^t\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big)\,\rho_0^{1-\tau},$$

де

$$\hat{h}_{\mathbf{q}} = \hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\Phi_{\varepsilon n}(\mathbf{q},\mathbf{p}')\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}). \tag{3.10}$$

Причому легко показати

$$\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \Big(\hat{h}_{\mathbf{q}}\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big)_0 = 0,$$

що означає ортогональність операторів $\hat{h}_{\mathbf{q}}$, $\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p})$. Цей факт дає можливість просто виключити термодинамічний параметр $\delta\beta_{\mathbf{q}}(t)$ із (3.9) за допомогою умови самоузгодження $\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}\rangle^t = \langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{q}}\rangle^t_q$, яка трансформується у прийнятому наближенні в умову $\langle\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t = \langle\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t_q$. В результаті квазірівноважний статистичний оператор для квантової бозе-системи у лінійному наближенні можна представити у вигляді:

$$\hat{\rho}_q(t) = \int_0^1 d\tau\,\rho_0^\tau\Big(1 + \sum_{\mathbf{q}}\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf{q})\hat{h}_{\mathbf{q}} - \tag{3.11}$$

$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^t\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big)\,\rho_0^{1-\tau},$$

де $\delta\hat{h}_{\mathbf{q}} = \hat{h}_{\mathbf{q}} - \langle\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^0$, $\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) - \langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^0$, а $\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf{q})$ - обернена функція до кореляційної функції $\Phi_{hh}(\mathbf{q}) = \big(\hat{h}_{\mathbf{q}}\hat{h}_{-\mathbf{q}}\big)_0$. Тепер, підставимо квазірівноважний статистичний оператор (3.11) у (2.24), в результаті отримаємо наступний вираз для нерівноважного статистичного оператора багатобозонної системи:

$$\hat{\rho}(t) = \int_0^1 d\tau\,\rho_0^\tau\Big(1 + \sum_{\mathbf{q}}\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf{q})\hat{h}_{\mathbf{q}} - \tag{3.12}$$

$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^t\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\Big)\,\rho_0^{1-\tau} -$$

$$-\sum_{\mathbf{q}}\int_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,T_0(t,t')\,\times$$

$$\times\int_0^1 d\tau\,\rho_0^\tau I_h(\mathbf{q})\rho_0^{1-\tau}\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf{q})\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^{t'} -$$

$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\mathbf{p}'}\int_{-\infty}^t dt'\,\exp\{\epsilon(t'-t)\}\,T_0(t,t')\,\times$$

$$\times\int_0^1 d\tau\,\rho_0^\tau I_n(\mathbf{p}',\mathbf{q})\rho_0^{1-\tau}\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p})\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^{t'},$$

де квантові узагальнені потоки

$$I_h(\mathbf{q}) = \Big(1 - P_0\Big)i\hat{L}_N\hat{h}_{\mathbf{q}},\; I_n(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \Big(1 - P_0\Big)i\hat{L}_N\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), \tag{3.13}$$

а P_0 - проєкційний оператор Морі, побудований на операторах $\hat h_{\mathbf q}$ та $\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)$:

$$P_0\hat b = \sum_{\mathbf q}\left(\hat b\hat h_{-\mathbf q}\right)_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf q)\hat h_{\mathbf q} + \tag{3.14}$$
$$+\sum_{\mathbf q}\sum_{\mathbf p}\sum_{\mathbf p'}\left(\hat b\hat n_{-\mathbf q}(\mathbf p')\right)_0\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf q,\mathbf p',\mathbf p)\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p),$$
$$P_0P_0 = P_0,\ P_0(1-P_0)=0,\ P_0\hat h_{\mathbf q}=\hat h_{\mathbf q},\ P_0\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)=\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p).$$

Оператор еволюції в часі з врахуванням проєктування

$$T_0 = \exp\left\{(t'-t)(1-P_0)i\hat L_N\right\}. \tag{3.15}$$

Отже, ми отримали нерівноважний статистичний оператор для квантової бозе-системи у лінійному наближенні при узгодженому описі кінетики і гідродинаміки. Як бачимо із (3.12) $\rho(t)$ є функціоналом квантової одночастинкової нерівноважної функції розподілу $\langle\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t$ і середнього значення оператора "ентальпії" $\langle\hat h_{\mathbf q}\rangle^t$. Два останні доданки у (3.12) описують дисипативні процеси, пов'язані з кінетичними і гідродинамічними флуктуаціями. За допомогою $\rho(t)$ отримаємо систему рівнянь переносу для середніх $\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^t$, $\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t$. Для цього використаємо тотожності:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t = \langle i\hat L_N\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t = \langle i\hat L_N\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t_q + \langle I_n(\mathbf q,\mathbf p)\rangle^t, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^t = \langle i\hat L_N\hat h_{\mathbf q}\rangle^t = \langle i\hat L_N\hat h_{\mathbf q}\rangle^t_q + \langle I_h(\mathbf q)\rangle^t. \tag{3.17}$$

Усереднюючи у правих частинах (3.16), (3.17) узагальнені потоки $I_n(\mathbf q,\mathbf p)$, $I_h(\mathbf q)$ з нерівноважним статистичним оператором (3.12), запишемо узагальнені рівняння переносу у наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t - \sum_{\mathbf p'} i\Omega_{nn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf p')\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p')\rangle^t - i\Omega_{nh}(\mathbf q,\mathbf p)\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^t +$$
$$+\sum_{\mathbf p'}\int_{-\infty}^{t} dt'\ \exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{nn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf q',t,t')\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^{t'} + \tag{3.18}$$
$$+\int_{-\infty}^{t} dt'\ \exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{nh}(\mathbf q,\mathbf p,t,t')\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^{t'} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^t - \sum_{\mathbf p'} i\Omega_{hn}(\mathbf q,\mathbf p')\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p')\rangle^t - i\Omega_{hh}(\mathbf q)\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^t + \tag{3.19}$$
$$+\sum_{\mathbf p'}\int_{-\infty}^{t} dt'\ \exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{hn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf q',t,t')\langle\delta\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p')\rangle^{t'} +$$
$$+\int_{-\infty}^{t} dt'\ \exp\{\epsilon(t'-t)\}\,\varphi_{hh}(\mathbf q,t,t')\langle\delta\hat h_{\mathbf q}\rangle^{t'} = 0,$$

де

$$i\Omega_{nn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf p') = \sum_{\mathbf p''}\left(i\hat L_N\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p'')h_{-\mathbf q}\right)_0\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf q,\mathbf p'',\mathbf p'), \tag{3.20}$$

$$i\Omega_{nh}(\mathbf q,\mathbf p) = \left(i\hat L_N\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\hat h_{\mathbf q}\right)_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf q), \tag{3.21}$$

$$i\Omega_{hn}(\mathbf q,\mathbf p) = \sum_{\mathbf p'}\left(i\hat L_N\hat h_{\mathbf q}\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\right)_0\Phi^{-1}_{nn}(\mathbf q,\mathbf p',\mathbf p), \tag{3.22}$$

$$i\Omega_{hh}(\mathbf q) = \left(i\hat L_N\hat h_{\mathbf q}\hat h_{\mathbf q}\right)_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf q), \tag{3.23}$$

– нормовані статичні квантові кореляційні функції;

$$\varphi_{nn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf p',t,t') = \sum_{\mathbf p''}\left(I_n(\mathbf q,\mathbf p)T_0(t,t')I_n(\mathbf p,-\mathbf q)\right)_0 \times \tag{3.24}$$
$$\times\ \Phi^{-1}_{nn}(\mathbf q,\mathbf p'',\mathbf p'),$$
$$\varphi_{nh}(\mathbf q,\mathbf p,t,t') = \left(I_n(\mathbf q,\mathbf p)T_0(t,t')I_h(-\mathbf q)\right)_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf q), \tag{3.25}$$
$$\varphi_{hn}(\mathbf q,\mathbf p,t,t') = \sum_{\mathbf p'}\left(I_h(\mathbf q)T_0(t,t')I_n(-\mathbf q,\mathbf p')\right)_0 \times$$
$$\times\ \Phi^{-1}_{nn}(\mathbf q,\mathbf p',\mathbf p), \tag{3.26}$$
$$\varphi_{hh}(\mathbf q,t,t') = \left(I_h(\mathbf q)T_0(t,t')I_h(-\mathbf q)\right)_0\Phi^{-1}_{hh}(\mathbf q) \tag{3.27}$$

– узагальнені ядра переносу. Функція $\varphi_{nn}(\mathbf q,\mathbf p,\mathbf p',t,t')$ описує дисипативні процеси, пов'язані з кінетичними кореляціями. Процеси, пов'язані з гідродинамічними кореляціями, описуються функцією $\varphi_{hh}(\mathbf q,t,t')$, а функції $\varphi_{nh}(\mathbf q,\mathbf p,t,t')$ і $\varphi_{nh}(\mathbf q,\mathbf p,t,t')$ описують взаємний вплив кінетичних та гідродинамічних кореляцій. В результаті ми отримали замкнуту систему рівнянь для квантової одночастинкової функції розподілу $f_1(\mathbf q,\mathbf p,t)=\langle\hat n_{\mathbf q}(\mathbf p)\rangle^t$ і середнього значення оператора густини "ентальпії" $\langle\hat h_{\mathbf q}\rangle^t$ для квантової слабо нерівноважної бозе-системи. Важливо розв'язати дану систему відносно

$\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t$. Для цього, використовуючи перетворення Лапласа, систему рівнянь (3.18), (3.19) можна представити у вигляді:

$$z\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^z-\sum_{\mathbf{p}'}i\Omega_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}')\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^z- \tag{3.28}$$
$$-i\Omega_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p})\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^z+\sum_{\mathbf{p}'}\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^z+$$
$$+\varphi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p},z)\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^z=-\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^{t=0},$$

$$z\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^z-\sum_{\mathbf{p}'}i\Omega_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}')\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^z-i\Omega_{hh}(\mathbf{q})\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^z+ \tag{3.29}$$
$$\sum_{\mathbf{p}'}\varphi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^z+\varphi_{hh}(\mathbf{q},z)\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^z=-\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^{t=0}.$$

Розв'язавши рівняння (3.29) відносно $\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\rangle^t$, підставимо результат у перше рівняння:

$$z\langle\hat{\delta}n_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^z-\sum_{\mathbf{p}'}i\Omega_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}')\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^z+ \tag{3.30}$$
$$+\sum_{\mathbf{p}'}D_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)=\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^{t=0},$$

де

$$D_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)=\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)-[i\Omega_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p})- \tag{3.31}$$
$$-\varphi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p},z)]\frac{1}{1+\varphi_{hh}(\mathbf{q},z)}[i\Omega_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p})-\varphi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p},z)].$$

Вираз (3.30) є замкнутим кінетичним рівнянням для квантової нерівноважної одночастинкової функції розподілу $\langle\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^z$, у якому ядро переносу $D_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}',z)$ містить перенормовку кінетичних кореляцій гідродинамічними кореляціями. Дане кінетичне рівняння чи взагалі система рівнянь (3.18), (3.19) є основою для вивчення часових кореляційних функцій та колективних мод слабо нерівноважної бозе- системи. На основі цієї системи рівнянь переносу відомим способом [31,32] можна отримати замкнуту систему рівнянь для часових кореляційних функцій, побудованих на операторах $\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$, $\hat{h}_{\mathbf{q}}$:

$$z\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}';z)-\sum_{\mathbf{p}''}i\Omega_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'')\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{p}';z)- \tag{3.32}$$
$$-i\Omega_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p})\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}';z)+\sum_{\mathbf{p}''}\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'',z)\times$$
$$\times\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{p}';z)+\varphi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}';z)=-\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'),$$

$$z\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)-\sum_{\mathbf{p}''}i\Omega_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'')\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p}'';z)- \tag{3.33}$$
$$-i\Omega_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p})\Phi_{hh}(\mathbf{q};z)+\sum_{\mathbf{p}''}\varphi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}'',z)\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p}'';z)+$$
$$+\varphi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}';z)=0,$$

$$z\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)-\sum_{\mathbf{p}''}i\Omega_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'')\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{p}';z)+ \tag{3.34}$$
$$+\sum_{\mathbf{p}''}\varphi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',z)\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',\mathbf{p}';z)+$$
$$+\varphi_{hh}(\mathbf{q};z)\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}';z)=0,$$

$$z\Phi_{hh}(\mathbf{q};z)-\sum_{\mathbf{p}''}i\Omega_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'')\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p}'';z)+ \tag{3.35}$$
$$+\sum_{\mathbf{p}''}\varphi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p}'',z)\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p}'';z)+$$
$$+\varphi_{hh}(\mathbf{q};z)\Phi_{hh}(\mathbf{q};z)=-\Phi_{hh}(\mathbf{q}),$$

де

$$\begin{aligned}
&\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}';z)=\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\delta\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p}')\rangle^z,\\
&\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)=\langle\delta\hat{n}_{\mathbf{q}}(\mathbf{p})\delta\hat{h}_{-\mathbf{q}}\rangle^z,\\
&\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p};z)=\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\delta\hat{n}_{-\mathbf{q}}(\mathbf{p})\rangle^z,\\
&\Phi_{hh}(\mathbf{q};z)=\langle\delta\hat{h}_{\mathbf{q}}\delta\hat{h}_{-\mathbf{q}}\rangle^z
\end{aligned} \tag{3.36}$$

– Лаплас-образи часових кореляційних функцій $\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}';t)$, $\Phi_{nh}(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$, $\Phi_{hn}(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$, $\Phi_{hh}(\mathbf{q};t)$. Причому через часову кореляційну функцію $\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}';t)$ можна визначити часову кореляційну функцію "густина-густина":

$$\Phi_{nn}(\mathbf{q};t)=\sum_{p}\sum_{p'}\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}';t), \tag{3.37}$$

яка пов'язана фур'є-перетворенням з динамічним структурним фактором бозе-системи

$$S(\mathbf{q},\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\exp(i\omega t)\Phi_{nn}(\mathbf{q};t), \tag{3.38}$$

та часову кореляційну функцію густини операторів імпульсу:

$$\Phi_{\mathbf{p},\mathbf{p}}(\mathbf{q};t) = \sum_{p'}\sum_{p''} \mathbf{p}\Phi_{nn}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\mathbf{p}'';t)\mathbf{p}'. \tag{3.39}$$

Система рівнянь (3.32)-(3.35) для часових кореляційних функцій слабо нерівноважної бозе-системи отримана на основі узгодженого опису кінетики та гідродинаміки. Це нові рівняння для квантової бозе-системи. Проєктуючи їх на власні функції $(1,\mathbf{p})$ квантової одночастинкової функції розподілу $f_1(\mathbf{p},\mathbf{q},t)$, отримаємо відповідну систему рівнянь для часових кореляційних функцій (3.37), (3.39), $\Phi_{hh}(\mathbf{q},t)$ та для їх перехресних кореляційних функцій, яка може бути отримана на основі рівняннь молекулярної гідродиниміки чи на основі методу функцій Ґріна [10] (з врахуванням зв'язку часових кореляційних функцій з відповідними часовими функціями Ґріна). Більш того, проєктування системи рівнянь (3.32)-(3.35) на вищі моменти квантової одночастинкової функції розподілу приводить до відповідних систем гідродинамічних рівнянь для часових кореляційних функцій для густин операторів числа частинок, імпульсу, ентальпії, узагальненого тензора в'язких напружень та узагальненого потоку ентальпії бозе-частинок. Подібні рівняння для часових функцій Ґріна були отримані у роботах Церковнікова [10,13,15]. Принциповий інтерес в такому підході становлять дослідження колективних мод та узагальнених коефіцієнтів переносу в'зкості, теплопровідності для квантових бозе-систем. Детальному розгляду даних проблем буде присвячена наступна робота.

Література

[1] Боголюбов Н.Н. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. – Дубна ОИЯИ. – 1963. – 49с. – (Препринт ОИЯИ, Р–1395).

[2] Халатников И.М. Теория сверхтекучести. – М.: Наука, 1971.

[3] Hohenbeig P.C., Martin P.C. // Ann.of Phys.– 1965. – V.34, №2. – P. 291-359.

[4] Красников В.А. // Докл. АН СССР. – 1967. – Т.174, №5. – С. 1037–1041.

[5] Морозов В.Г. // ТМФ. – 1976. – Т.28, №2. – С. 267–280.

[6] Пелетминский С.В., Соколовский А.И., Щелоков В.С. // ТМФ. – 1978. – Т.34, №1. – С. 81-98.

[7] Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. – М.: Наука, 1978.

[8] Скрыпник В.П., Щелоков В.С. // ТМФ. – 1981. – Т.46, №2. – С. 242–250.

[9] Гетце В. Фазовые переходы жидкость-стекло. Современные проблемы физики. – М.: Наука, 1992.

[10] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1985. – Т.63, №3. – С. 440–457.

[11] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1986. – Т.69, №3. – С. 439–465.

[12] Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А. Метод двухвременних температурних функций Грина в равновесной и неравновесной статистической механике. В кн.: Труди МИ АН СССР. – М.: Наука, 1986. – Т.175. – С. 134–177.

[13] Церковников Ю.А. Молекулярная гидродинамика квантовой бозе-жидкости и метод двухвременних функций Грина. В кн.: Современные проблемы статистической физики. – Львов. - Киев.: Наукова думка, 1989. Т.1. – С. 253–264.

[14] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1990. – Т.85, N1. – С. 124–149.

[15] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1990. – Т.85, N2. – С. 258–287.

[16] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1992. – Т.93, N3. – С. 412–465.

[17] Лебедев В.В., Сухоруков А.И., Халатников И.М. // ЖЕТФ. – 1981. –Т.80, вып.4. – С. 1429–1448.

[18] Морозов В.Г. // ТМФ. – 1986. – Т.67, N1. – С. 129–142.

[19] Морозов В.Г. Метод корреляционных функций в флуктуационной гидродинамике сверхтекучей жидкости. – Киев. – 1986. – (Препринт /АН УССР, ИТФ: ИТФ-86-131Р.). – 28 с.

[20] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методи статистической физики. – М.: Наука, 1977. – 367 с.

[21] Kirkpatrick T.R., Dorfman I.R. // Journ. of Low Temp. Phys. – 1985. – V.58, №3/4. – P. 301–331.

[22] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. // ТМФ. – 1984. – Т.60, №2. –С. 270–279.

[23] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотних газов и жидкостей. – Киев. – 1988. – 25 с. – (Препринт /АН УССР, ИТФ: ИТФ–88–102Р).

[24] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. // ТМФ. – 1991. – Т.87, №1. – С. 113–129.

[25] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. // ТМФ. – 1993. – Т.96., №1. – С. 325–350.

[26] Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. – М.: Наука. – 1971. – 415 с.

[27] Зубарев Д.Н. Современные методы теории неравновесних процессов. В кн.: Современные проблемы математики. – М.: ВИ-

НИТИ, 1980. – Т.15. – С. 131–226.
[28] Церковников Ю.А. // ТМФ. – 1993. – Т.96, N3. С.351–372.
[29] Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. // ДАН СССР. – 1957. – Т.126. – С. 53–56.
[30] Зубарев Д.Н. // Усп.физ.наук. – 1960. – Т.71, вып.1, – С. 71–116.
[31] Калашников В.П. // ТМФ. – 1978. – Т.34, №3. – С. 412–425.
[32] Зубарев Д.Н., Токарчук М.В. // ТМФ. – 1987. –Т.70, №2. – С. 234–254.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Іван Олександрович Вакарчук
Петро Андрійович Глушак
Михайло Васильович Токарчук

Узгоджений опис кінетики та гідродинаміки квантових бозе-систем. 1. Рівняння переносу

Роботу отримано 7 липня 1997 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України