Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–96–01U

М.В.Токарчук, О.Є.Кобрин

# РОЗВ'ЯЗОК КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЕНСКОГА-ЛАНДАУ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ УМОВ

ЛЬВІВ

**УДК:** 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

**PACS:** 05.60.+w, 05.70.Ln, 05.20.Dd, 52.25.Dg, 52.25.Fi

**Розв'язок кінетичного рівняння Енскога-Ландау методом граничних умов**

М.В.Токарчук, О.Є.Кобрин

**Анотація.** Розглянуто нестаціонарний нерівноважний процес, що описується кінетичним рівнянням Енскога-Ландау. Для цього рівняння знайдено нестаціонарний розв'язок у наближенні парних зіткнень та записано рівняння переносу. Вперше вклад від міжчастинкових кореляцій частинок, що взаємодіють далекосяжним потенціалом, враховано послідовно до кінця на протязі всіх обчислень. З врахуванням цього записано ядра переносу. Розглянуто граничні випадки: стаціонарний процес та стаціонарний процес, малі густини. Проаналізовано кінетичні коефіцієнти і нові доданки в них, що отримуються при цьому. У висновках стверджується, що використаний метод придатний до гідродинамічного опису швидких процесів.

**The solution of Enskog-Landau kinetic equation using boundary conditions method**

M.V.Tokarchuk, A.E.Kobryn

**Abstract.** Non-stationary and non-equilibrium proces is considered on the basis of an Enskog-Landau kinetic equation using boundary conditions method. A non-stationary solution of this equation is found in the pair collision approximation. The influence of the long-range interparticle correlations are taken into account sequentially for the firs time. Transport coefficients with additional new terms are calculated. Limiting cases of stationary process low densities are considered. An application of the boundary conditions method to hydrodynamic description of fast processes is discussed.

**Подається до** Physica A
**Submitted to** Physica A

## 1. Вступ

Розвиток методів побудови теорії нерівноважних процесів в густих газах, рідинах та плазмі є одним із важливих напрямків сучасної теоретичної фізики. Зокрема, побудова кінетичних рівнянь для таких систем (як класичних, так і квантових) все ще складає одну з основних проблем кінетичної теорії. Вона додатково ускладнюється у випадку густих газів, рідин чи плазми тим, що кінетика та гідродинаміка виявляються тісно пов'язаними і тому повинні розглядатись одночасно [1–6].

В роботах [7,8] був розвинутий підхід для отримання кінетичних рівнянь із перших принципів статистичної механіки, зокрема із рівняння Ліувіля для повної нерівноважної функції розподілу системи. В його основі лежить принцип послаблення кореляцій між частинками з часом. Кінетичне рівняння Больцмана, що добре описує нерівноважні властивості та процеси переносу в розріджених системах, легко отримується в рамках цього методу як нульове наближення за густиною. Однак цей метод стає непридатним, коли густина перестає бути малим параметром теорії. При описі густих систем кращі результати отримуються із застосуванням теорії Енскога SET (standard Enskog theory) [9,10]. Отримане Енскогом рівняння при моделюванні молекул твердими сферами займає помітне поряд з рівнянням Больцмана місце в кінетичній теорії [11,12]. Це досягається перевагою моделі твердих сфер, при якій зіткнення можна вважати миттєвими, а ймовірність зближення багатьох частинок одночасно – безмежно малою. Введена ним поправка на густину виявилась суттєвою, оскільки в густих системах перенос при зіткненнях є основним механізмом переносу. Кожна молекула майже локалізована в одній точці простору оточуючими її сусідніми молекулами і перенос потоком є затруднений. І хоч ця теорія непогано описує залежність кінетичних коефіцієнтів від густини, все ж уявлення про структуру інтегралу зіткнень в ній залишаються досить грубими і феноменологічними.

Наступними вдалими кроками у розвитку кінетичної теорії густих систем були створення на основі SET модифікованої MET (modified Enskog theory) та ревізованої RET (revized Enskog theory) теорій Енскога густих газів [13] та узагальнення їх на випадок наявності далекосяжної взаємодії KMFT (kinetic mean field theory) [14,15]. В [16] була запропонована так звана кінетична теорія DRS (Davis-Rice-Sangers-theory), де розглядається міжчастинковий потенціал взаємодії в формі прямокутної ями. Пізніше була розроблена ревізована версія цієї теорії – RDRS (Revized DRS) [17].



В роботі [1] був запропонований а в роботах [2–4] узагальнений метод отримання кінетичних рівнянь для густих систем. В цих роботах застосовується формулювання модифікованої граничної умови до ланцюжка рівнянь ББГКІ із врахуванням кореляцій, що пов'язані із локальними законами збереження. В наближенні парних зіткнень це дозволило отримати кінетичне рівняння типу Енскога, але вже без будь-яких феноменологічних припущень. Схожі ідеї, але з іншою модифікацією підходу [7], були висунуті та розвивались в роботах [18–22], в монографії [23]. Крім того в роботах [18–23] здійснювалась спроба узагальнення підходу на випадок наявності несингулярних потенціалів взаємодії. Це ж питання порушувалось і частково розв'язане в [24–27] (з посиланнями на деякі роботи із [18–23]), а також [28–31], а в [32] з використанням лише гідродинамічних методів.

Базуючись на методиці, описаній в [2], в [33] була розглянута й узагальнена теорія RDRS – GDRS, де з метою вибору більш реалістичної моделі запропоновано кінетичне рівняння для густих класичних систем з міжчастинковим потенціалом взаємодії у вигляді багатосходинкової функції, здійснено його послідовне виведення і знайдено його нормальний розв'язок.

Певні успіхи у розвитку кінетичної теорії густих газів і рідин стимулювали перенесенню нових методів опису їх нерівноважних властивостей на системи з явно вираженими далекосяжними взаємодіями, такими як, наприклад, кулонівськими. Перш за все це пов'язане із тим, що чиста модель твердих сфер не може бути застосована до переважної більшості систем. Необхідним є врахування реалістичності потенціалу міжмолекулярної взаємодії, як це, наприклад, частково зроблено в [28,29,34,35]. Зауважимо також, що поряд із переміщенням уваги в бік вибору реалістичних потенціалів взаємодії відбувалось і узагальнення існуючих теорій на випадок багатокомпонентних рідин і газів [36], а в [37,38] - суміші хімічно реагуючих газів, а також ускладнення самих розглядуваних систем [39–41]. Необхідно відмітити, що саме на етапі вибору далекосяжного потенціалу міжчастинкової взаємодії як кулонівського ми приходимо до іншого класу задач, що потребують для свого розв'язання, можливо, якісно нових підходів. Це, зокрема, стосується випадків, коли далекосяжна частина потенціалу носить електричний (кулонівський) характер. Бо тоді доводиться мати справу, фактично, не з густими газами, а з густою плазмою. Труднощі при розгляді таких систем добре відомі [42–48]. Пов'язані вони в більшості випадків із неоднозначністю побудови інтегралів зіткнень, що безпосередньо залежать від способу "приготування" плазми [49] з врахуванням сильних взаємодій частинок на малих відстанях (у наближенні парних зіткнень) та колективних взаємодій частинок на великих відстанях, що відповідає поляризаційному наближенню. В [28,29,50–55] відмічається, що для вивчення процесів переносу в іонізованих газах (плазмі) в загальному застосовна методика Енскога, однак зберігається та незручність, що для кулонівських систем інтеграли зіткнень мають неаналітичну поведінку як на малих, так і на великих відстанях. В [3], зокрема, відмічається, що розбіжностей на малих відстанях можна уникнути шляхом вибору певним чином близькосяжного потенціалу взаємодії. Однак для послідовного усунення цієї проблеми на великих відстанях необхідним є врахування ефектів динамічного екранування, або вибір далекосяжного потенціалу у вигляді екранованого (див. як приклад [56]). Серед інших труднощів слід назвати відсутність параметра, за яким можна проводити розклад для отримання кінетичного рівняння. Нагадаємо, що такими параметрами в кінетичній теорії розріджених газів є [44,57,58] густина $\varepsilon = n/\sigma^3$, а в плазмі – плазмовий параметр $\mu = \dfrac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{kTR_D}$, де $R_D = \sqrt{\dfrac{kT}{4\pi ne^2}}$ – радіус Дебая. Величини $\varepsilon$ та $\mu$ характеризують роль взаємодії частинок в кінетичному рівнянні від якої залежать як дисипативні, так і недисипативні процеси в системі.

У цій роботі розглядається кінетичне рівняння Енскога-Ландау для однокомпонентної системи заряджених твердих кульок, що було отримане в роботі [3]. Для нього нормальний розв'язок шукався методом Чепмена-Енскога [11,59] і був знайдений у першому наближенні, що дозволило порахувати й записати в аналітичному вигляді кінетичні коефіцієнти. Пізніше подібний підхід був застосований до багатокомпонентної системи заряджених твердих кульок, для якої також були знайдені характерні кінетичні коефіцієнти [60,61]. Простота й очевидність методу Чепмена-Енскога розв'язування кінетичних рівнянь для розріджених газів та плазми дозволили відносно легко перенести цей метод на розглядувані в [3] системи, що можна було б описати як системи з помірною та високою густиною. Однак цей метод дозволяє знайти шукану одночастинкову функцію розподілу, а отже й кінетичні коефіцієнти, лише в стаціонарному випадку. Як відомо, метод Чепмена-Енскога не дозволяє вийти за рамки стаціонарних процесів. Ці ж недоліки властиві й методу Греда [62], що часто застосовується для розв'язування кінетичних рівнянь поряд із методом Чепмена-Енскога. В даній роботі для знаходження нормального розв'язку розглядуваного кінетичного рівняння застосовується метод граничних умов, що був запропонований в [63]. Зокрема, в цій роботі автори показали, що отримуваний з його допомогою розв'язок класичного кінетичного рівняння Больцмана для розрідженого газу [9–11,43,44] у стаціонарному випадку повністю співпадає з уже відомим, що отримується другими методами: методом Чепмена-Енскога [9–11], методом Греда [62], іншими [64,65]; а в наступній роботі [66] розвинули цей підхід для знаходження нормального розв'язку кінетичного рівняння Больцмана суміші розріджених газів.



## 2. Кінетичне рівняння Енскога-Ландау та закони збереження

### 2.1. Модифікований ланцюжок рівнянь Боголюбова [1,2]

В роботах [3,67] було отримане кінетичне рівняння Енскога-Ландау для одночастинкової функції розподілу $f_1(x_1;t)$ однокомпонентної системи заряджених твердих кульок із ланцюжка рівняннь ББГКІ зврахуванням модифікованих граничних умов в наближені парних зіткнень. Перших два рівняння такого ланцюжка мають вигляд [1,2]

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\right\} f_1(x_1;t) - \frac{1}{m}\int \mathrm{d}x_2\, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\Phi(|\boldsymbol{r}_{12}|)\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\} f_2(x_1,x_2;t) = 0,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}L_2 + \varepsilon\right\} f_2(x_1,x_2;t) = \varepsilon g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t) f_1(x_1;t) f_1(x_2;t).$$

Тут $\varepsilon \to 0$ після термодинамічної границі; $\Phi(|\boldsymbol{r}_{12}|)$ – повний потенціал міжчастинкової взаємодії заряджених твердих кульок, що складається із короткосяжного $\Phi^{hs}(|\boldsymbol{r}_{12}|)$ та далекосяжного $\Phi^{l}(|\boldsymbol{r}_{12}|)$ потенціалів; $x \equiv \{\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\}$ – набір фазових змінних (координата та імпульс), що визначені для кожної частинки на просторі $\mathbb{R}^3$ [3], $\boldsymbol{v} = m^{-1}\boldsymbol{p}$ – швидкість частинки;

$$\mathrm{i}L_2 = \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{v}_2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\Phi(|\boldsymbol{r}_{12}|)\frac{1}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\}.$$

Функція $g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t) \equiv g_2\big(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2|\beta(t),n(t)\big)$ – квазірівноважна бінарна кореляційна функція для системи заряджених твердих кульок, що є функціоналом локальної густини частинок $n(\boldsymbol{r}_1;t)$ та аналогу оберненої температури $\beta(\boldsymbol{r}_1;t)$ [1]. Формальний розв'язок рівняння для $f_2(x_1,x_2;t)$ можна представити у вигляді

$$f_2(x_1,x_2;t) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{d}\tau \; \exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2)\tau\Big\} g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t+\tau) \times f_1(x_1;t+\tau) f_1(x_2;t+\tau).$$

### 2.2. Кінетичне рівняння Енскога-Ландау

Підставляючи розв'язок для $f_2(x_1,x_2;t)$ у рівняння для $f_1(x_1;t)$, після певних наближень [67] можна отримати кінетичне рівняння Енскога-Ландау однокомпонентної системи заряджених твердих кульок для нерівноважної одночастинкової функції розподілу $f_1(x_1;t)$ у вигляді

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_1 \frac{\partial}{\partial r_1}\right\} f_1(x_1;t) = I_E(x_1;t) + I_{MF}(x_1;t) + I_L(x_1;t) \,. \tag{1}$$

Права частина цього рівняння складає узагальнений інтеграл зіткнень Енскога-Ландау, де кожен з доданків може розглядатись як окремий інтеграл зіткнень. Структура цих доданків є такою:

$I_E(x_1;t)$ - інтеграл зіткнень ревізованої теорії Енскога RET [3]:

$$I_E(x_1;t) = \sigma^2 \int \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\, \Theta(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g})(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g}) \times \Big\{ g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1+\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma;t)\, f_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1';t)\, f_1(\boldsymbol{r}_1+\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma,\boldsymbol{v}_2';t) - g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1-\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma;t)\, f_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_1;t)\, f_1(\boldsymbol{r}_1-\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma,\boldsymbol{v}_2;t)\Big\}, \tag{2}$$

де $\sigma$ – діаметр твердих кульок. $\boldsymbol{g}$ – вектор відносної швидкості частинок, $\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$ – одиничний вектор у напрямку між центрами частинок 1 та 2,

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 + \hat{\boldsymbol{r}}_{12}(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\boldsymbol{g}), \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1,$$
$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \hat{\boldsymbol{r}}_{12}(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\boldsymbol{g}), \qquad \hat{\boldsymbol{r}}_{12} = |\boldsymbol{r}_{12}|^{-1}\boldsymbol{r}_{12};$$

$I_{MF}(x_1;t)$ - інтеграл зіткнень кінетичної теорії середнього поля KMFT [14,15]:

$$I_{MF}(x_1;t) = \frac{1}{m}\int \mathrm{d}x_2\, \frac{\partial \Phi^l(|\boldsymbol{r}_{12}|)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} \times g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t)\, f_1(x_1;t)\, f_1(x_2;t)\,, \tag{3}$$



де $\Phi^l(|\boldsymbol{r}_{12}|)$ – далекосяжна частина потенціалу міжчастинкової взаємодії;

$I_L(x_1;t)$ - узагальнений інтеграл зіткнень Ландау [3]:

$$I_L(x_1;t) = \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\int \mathrm{d}x_2\, g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t)\left[\frac{\partial \Phi^l(|\boldsymbol{r}_{12}|)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\right] \times \left[\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t'\; \frac{\partial \Phi^l(|\boldsymbol{r}_{12}+\boldsymbol{g}t'|)}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\right] \times \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\} f_1(x_1;t)\, f_1(x_2;t)\,. \tag{4}$$

Зауважимо, що у цих виразах $g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t)$ враховує повний потенціал взаємодії (твердосферну частину та далекосяжний кулонівський хвіст).

### 2.3. Локальні закони збереження в загальній формі

Одним із найважливіших питань при коректному отримані та розв'язуванні кінетичних рівнянь є їх узгодженість із локальними законами збереження густин числа частинок (маси), імпульсу та повної енергії, а також обгрунтування рівнянь гідродинаміки і безпосередній розрахунок коефіцієнтів переносу через молекулярні параметри. В загальному ці закони збереження для класичних систем мають наступну структуру [68]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r};t) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t) = 0, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_j} : \overset{\leftrightarrow}{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{r};t) = 0, \tag{5b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t) = 0. \tag{5c}$$

Тут рівняння (5a) – це закон збереження маси (рівняння неперервності), рівняння (5b) – це закон збереження імпульсу, (5c) – це закон збереження повної енергії. У цих виразах $\rho(\boldsymbol{r};t) = mn(\boldsymbol{r};t)$ – густина маси, а $n(\boldsymbol{r};t)$ – середня густина числа частинок

$$n(\boldsymbol{r};t) = \langle \hat{n}(\boldsymbol{r};t)\rangle^t = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\; f_1(x_1;t),$$

$$\hat{n}(\boldsymbol{r};t) = \sum_{a=1}^{N}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$

де $\hat{n}(\boldsymbol{r};t)$ – мікроскопічна густина частинок; $\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t)$ – середня густина імпульсу, з нею пов'язаний вектор середньої гідродинамічної швидкості $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)$:

$$\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t)=\rho(\boldsymbol{r};t)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{\boldsymbol{j}}_\rho(\boldsymbol{r})\rangle^t=m\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\boldsymbol{v}f_1(x_1;t),$$
$$\hat{\boldsymbol{j}}_\rho(\boldsymbol{r})=m\sum_{a=1}^N\boldsymbol{v}_a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$
$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)=\frac{1}{n(\boldsymbol{r};t)}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\boldsymbol{v}f(x;t),$$

де $\hat{\boldsymbol{j}}_\rho(\boldsymbol{r})$ – мікроскопічна густина імпульсу; $\Pi_{ij}(\boldsymbol{r};t)$ – компоненти тензора густини потоку імпульсу:

$$\Pi_{ij}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{r})\rangle^t=m\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;v_iv_jf_1(x;t)-$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\left[\frac{\partial}{\partial r_i}\varPhi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right](\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}'_j)f_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}';t),$$
$$\hat{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{r})=\sum_{a=1}^N\left[mv_{a,i}v_{a,j}-\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}^N\left[\frac{\partial}{\partial r_{a,i}}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)\right]r_{ab,j}\right]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$

де $\hat{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{r})$ – компоненти тензора мікроскопічної густини потоку імпульсу; $\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)$ – середня густина повної енергії, що складається з кінетичної та потенціальної частин:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)=\mathcal{E}_{kin}(\boldsymbol{r};t)+\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{r};t),$$
$$\mathcal{E}_{kin}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{\mathcal{E}}_{kin}(\boldsymbol{r})\rangle^t=\frac{m}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;v^2f_1(x;t),$$
$$\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{\mathcal{E}}_{int}(\boldsymbol{r})\rangle^t=$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\varPhi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)f_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}';t),$$
$$\hat{\mathcal{E}}_{kin}(\boldsymbol{r})=\frac{m}{2}\sum_{a=1}^N v_a^2\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$
$$\hat{\mathcal{E}}_{int}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}^N\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$

де $\hat{\mathcal{E}}_{kin}(\boldsymbol{r})$ – мікроскопічна густина кінетичної енергії, $\hat{\mathcal{E}}_{int}(\boldsymbol{r})$ – мікроскопічна густина потенціальної енергії; $\boldsymbol{j}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)$ – середній потік енергії:



$$\boldsymbol{j}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{\boldsymbol{j}}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r})\rangle^t=\frac{m}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\boldsymbol{v}v^2f_1(x;t)+$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\boldsymbol{v}\varPhi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)f_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}';t)-$$
$$\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\left[\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\varPhi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right](\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')f_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}';t),$$
$$\hat{\boldsymbol{j}}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r})=\sum_{a=1}^N\left(\frac{mv_a^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}^N\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_a}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)\right](\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b)\right)\boldsymbol{v}_a\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a),$$

де $\hat{\boldsymbol{j}}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r})$ – мікроскопічна густина потоку енергії.

Важливо відзначити те, що густина числа частинок $n(\boldsymbol{r};t)$, імпульсу $\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t)$ та кінетичної енергії $\mathcal{E}_{kin}(\boldsymbol{r};t)$ визначаються через нерівноважну одночастинкову функцію розподілу $f_1(x;t)$, а густина потенціальної енергії $\mathcal{E}_{int}(\boldsymbol{r};t)$ – через нерівноважну двочастинкову функцію розподілу $f_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}';t)$. Густини тензора потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\Pi}(\boldsymbol{r};t)$ та вектора потоку енергії $\boldsymbol{j}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)$ виражаються вже через нерівноважні одно- та двочастинкові функції розподілу.

У виразах для тензора густини потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\Pi}(\boldsymbol{r};t)$, та вектора густини потоку енергії $\boldsymbol{j}_\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t)$ можна виділити відповідні конвективні вклади і від рівнянь (5b), (5c) перейти до рівнянь гідродинаміки:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t)+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}[\rho(\boldsymbol{r};t)\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}+\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r};t)]=0, \tag{5b$'$}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho(\boldsymbol{r};t)\left[\frac{V^2(\boldsymbol{r};t)}{2}+e(\boldsymbol{r};t)\right]\right\}+ \tag{5c$'$}$$
$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r};t)\left[\frac{V^2(\boldsymbol{r};t)}{2}+e(\boldsymbol{r};t)\right]+\right.$$
$$\left.\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r};t)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)+\boldsymbol{j}_Q(\boldsymbol{r};t)\right]=0,$$

де (5b$'$) – макроскопічне рівняння руху, в якому $\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r};t)$ є середньою густиною тензора тиску

$$P_{ij}(\boldsymbol{r};t)=\langle\hat{P}_{ij}(\boldsymbol{r})\rangle^t,$$

$$\hat{P}_{ij}(\boldsymbol{r}) = \sum_{a=1}^{N}\Bigg[m\Big(v_{a,i} - V_i(\boldsymbol{r};t)\Big)\Big(v_{a,j} - V_j(\boldsymbol{r};t)\Big) -$$
$$\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial r_{a,i}}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)\right] r_{ab,j}\Bigg]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a).$$

Рівняння (5c$'$) – рівняння переносу теплової енергії, де $e(\boldsymbol{r};t)$ – внутрішня енергія на одиницю маси, що зв'язана з повною енергією

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r};t) = \rho(\boldsymbol{r};t)\left[\frac{V^2(\boldsymbol{r};t)}{2} + e(\boldsymbol{r};t)\right].$$

$\boldsymbol{j}_{_Q}(\boldsymbol{r};t)$ – тепловий потік

$$\boldsymbol{j}_{_Q}(\boldsymbol{r};t) = \langle\hat{\boldsymbol{j}}_{_Q}(\boldsymbol{r})\rangle^t,$$
$$\hat{\boldsymbol{j}}_{_Q}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}\Bigg\{\Big(\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)\Big)\Bigg[m\Big(\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r};t)\Big) +$$
$$\sum_{a\neq b}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|) - \sum_{a\neq b}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_a}\varPhi(|\boldsymbol{r}_{ab}|)\right](\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)\Bigg]\Bigg\}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a).$$

У розглядуваному випадку, для узгодження кінетики і гідродинаміки необхідно порахувати середні густини тензора потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\varPi}(\boldsymbol{r};t)$ та потоку енергії $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t)$ за допомогою нерівноважних функцій розподілу $f_1(x;t)$, $f_2(x,x';t)$. Підстановка $f_2(x,x';\,t)$ дасть:

$$\varPi_{ij}(\boldsymbol{r};t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\; v_i v_j f_1(x_1;t) -$$
$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\varPhi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) + \varPhi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)(r_j - r'_j)\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2)\tau\Big\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau),$$
$$\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\boldsymbol{v}v^2 f_1(x_1;t) -$$
$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\boldsymbol{v}\Big(\varPhi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) + \varPhi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2)\tau\Big\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau) +$$



$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Big(\varPhi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) + \varPhi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2)\tau\Big\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau).$$

У цих виразах для подальших обчислень необхідно зробити наближення, при яких було отримане кінетичне рівняння Енскога-Ландау [3,67]. Насамперед треба провести розклади за далекосяжною частиною оператора Ліувіля і обмежитись лінійним наближенням:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}L_2^l\tau} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}L_2^0\tau} + \int_0^{\tau}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{e}^{(\tau-\lambda)\mathrm{i}L_2^0}\;\Big[\mathrm{i}L^l(1,2)\Big]\;\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}L_2^0} + \ldots$$

Тоді враховуючи те, що короткосяжний потенціал твердих кульок діє в області $[0\div\sigma]$, а далекосяжний потенціал діє в області $[\sigma\div\infty]$, вирази для компонент тензора густини потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\varPi}(\boldsymbol{r};t)$ та вектора густини потоку енергії $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t)$ матимуть вид:

$$\varPi_{ij}(\boldsymbol{r};t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\; v_i v_j f_1(x_1;t) -$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\varPhi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)(r_j - r'_j)\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2^{hs})\tau\Big\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau) -$$
$$\frac{1}{2}\int_{\sigma}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\varPhi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)(r_j - r'_j)\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\exp\Big\{(\varepsilon + \mathrm{i}L_2^{(0)})\tau\Big\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau) -$$
$$\frac{1}{2}\int_{\sigma}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}\;\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\;\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\varPhi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\Big)(r_j - r'_j)\times$$
$$\varepsilon\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau\int_0^{\tau}\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{e}^{(\tau-\lambda)\mathrm{i}L_2^0}\;\Big[\mathrm{i}L^l(1,2)\Big]\;\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}L_2^0}\times$$

$$g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau),$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{v}v^2 f_1(x_1;t)-$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\ \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\Phi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\exp\left\{(\varepsilon+\mathrm{i}L_2^{hs})\tau\right\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau)+$$

$$\frac{1}{2}\int_\sigma^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\ \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\Phi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\exp\left\{(\varepsilon+\mathrm{i}L_2^{(0)})\tau\right\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau)-$$

$$\frac{1}{2}\int_\sigma^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\ \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\Phi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\right)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\times$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\int_0^\tau \mathrm{d}\lambda\ \mathrm{e}^{(\tau-\lambda)\mathrm{i}L_2^0}\ \left[\mathrm{i}L^l(1,2)\right]\ \mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}L_2^0}\times$$

$$g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau)+$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\sigma \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\ \boldsymbol{v}\Phi^{hs}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\times$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\exp\left\{(\varepsilon+\mathrm{i}L_2^{hs})\tau\right\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau)+$$

$$\frac{1}{2}\int_\sigma^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}'\ \boldsymbol{v}\Phi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\times$$



$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\exp\left\{(\varepsilon+\mathrm{i}L_2^{(0)})\tau\right\}g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau)+$$

$$\frac{1}{2}\int_\sigma^\infty \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\mathrm{d}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}\Phi^{l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\times$$

$$\varepsilon\int_{-\infty}^t \mathrm{d}\tau\int_0^\tau \mathrm{d}\lambda\ \mathrm{e}^{(\tau-\lambda)\mathrm{i}L_2^0}\ \left[\mathrm{i}L^l(1,2)\right]\ \mathrm{e}^{\lambda\mathrm{i}L_2^0}\times$$

$$g_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t+\tau)f_1(x;t+\tau)f_1(x';t+\tau),$$

де

$$\mathrm{i}L_2^{(0)}=\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{v}'\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}'},\quad \mathrm{i}L_2^{hs,l}=\mathrm{i}L_2^{(0)}+\mathrm{i}L^{hs,l}(1,2),$$
$$\mathrm{i}L^{hs,l}(1,2)=-\frac{1}{m}\frac{\partial\Phi^{hs,l}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{\partial\boldsymbol{r}}\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}'}\right\},$$

$f_1(x;t)$ треба підставляти в отримані вирази як розв'язок рівняння (1).

## 2.4. Рівняння для параметрів скороченого опису

Для знаходження розв'язку кінетичного рівняння Енскога-Ландау (1) тим чи іншим методом необхідно використовувати у відповідних наближеннях локальні закони збереження. При цьому вирази для кінетичних коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності будуть визначатися шляхом розрахунків тензора густини потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\Pi}(\boldsymbol{r};t)$ та вектора густини потоку енергії $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t)$ на основі розв'язку для $f_1(x;t)$ та відповідних наближень $g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t)$. Оскільки шукається такий розв'язок, що відповідає лінійним гідродинамічним процесам переносу за градієнтами термодинамічних параметрів, то структуру виразів для тензора густини потоку імпульсу $\overleftrightarrow{\Pi}(\boldsymbol{r};t)$ та вектора густини потоку енергії$\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r};t)$ можна знайти безпосередньо за допомогою кінетичного рівняння (1) не роблячи розрахунків за отриманими вище формулами. Для здійснення цієї процедури зручно ввести, як ів [3], такі гідродинамічні параметри: густину $n(\boldsymbol{r}_1;t)$ (або густину маси $\rho(\boldsymbol{r}_1;t)$), гідродинамічну швидкість $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)$ та густина кінетичної енергії $\omega_k(\boldsymbol{r}_1;t)$:

$$
\begin{aligned}
n(\boldsymbol{r}_1;t) &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ f_1(x_1;t)\,, \\
\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t) &= \frac{1}{n(\boldsymbol{r}_1;t)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ f_1(x_1;t)\,\boldsymbol{v}_1, \\
w_k(\boldsymbol{r}_1;t) &= \frac{1}{2n(\boldsymbol{r}_1;t)} \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ f_1(x_1;t)\,c_1^2(\boldsymbol{r}_1;t)\,,
\end{aligned}
$$

Тут $\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{r}_1;t) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)$ - теплова швидкість частинки. Ці параметри разом утворюють 5-компонентний вектор адитивних інваріантів взаємодії $\Psi = (m, m\boldsymbol{v}, \omega_k)$. Множачи вихідне кінетичне рівняння (1) на його компоненти та інтегруючи по $\boldsymbol{v}_1$, одержимо рівняння для вибраних нами гідродинамічних параметрів. В загальному вигляді вони матимуть наступний вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n(\boldsymbol{r}_1;t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n(\boldsymbol{r}_1;t) &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)\,, \qquad (6)\\
\frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}_1;t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho(\boldsymbol{r}_1;t) &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\rho(\boldsymbol{r}_1;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} : \overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t)\,, \qquad (7)
$$

$$
\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{r}_1;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_k(\boldsymbol{r}_1;t) &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t) - \qquad (8)\\
&\quad - \overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t) : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)\,,
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t) = \overleftrightarrow{P}^k(\boldsymbol{r}_1;t) + \overleftrightarrow{P}^{hs}(\boldsymbol{r}_1;t) + \overleftrightarrow{P}^{mf}(\boldsymbol{r}_1;t) + \overleftrightarrow{P}^{l}(\boldsymbol{r}_1;t)\,,\\
&\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t) = \boldsymbol{q}^k(\boldsymbol{r}_1;t) + \boldsymbol{q}^{hs}(\boldsymbol{r}_1;t) + \boldsymbol{q}^{mf}(\boldsymbol{r}_1;t) + \boldsymbol{q}^{l}(\boldsymbol{r}_1;t)\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

є повний тензор в'язких напружень та повний вектор теплового потоку відповідно. Вони мають адитивний характер і складаються з кількох доданків, кожен з яких зумовлений вкладом від одного з інтегралів зіткнень: $\overleftrightarrow{P}^{hs}$ - від інтегралу зіткнень Енскога (2), $\overleftrightarrow{P}^{mf}$ - від інтегралу зіткнень у наближенні середнього поля (3), $\overleftrightarrow{P}^{l}$ - від інтегралу зіткнень Ландау (4), $\overleftrightarrow{P}^{k}$ - чисто кінетичні вклади. Для розглядуваної системи ці величини можна представити у наступному виді:

$$
\overleftrightarrow{P}^k(\boldsymbol{r}_1;t) = m\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ f_1(x_1;t)\,\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{r}_1;t)\,\boldsymbol{c}_1(\boldsymbol{r}_1;t)\,, \qquad (10)
$$



$$
\begin{aligned}
\overleftrightarrow{P}^{hs}(\boldsymbol{r}_1;t) &= \frac{m\sigma^3}{2}\times \qquad (11)\\
&\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\ \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\ \Theta(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g})\,(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g})\,\{\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1\}\,\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\times\\
&\int_0^1 \mathrm{d}\lambda\ F^{hs}(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma - \hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_2;t)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overleftrightarrow{P}^{mf}(\boldsymbol{r}_1;t) &= -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\ \Big(\varPhi^l(|\boldsymbol{r}_{12}|)\Big)'\frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\times \qquad (12)\\
&\int_0^1 \mathrm{d}\lambda\ F^{mf}(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{r}_{12} - \boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{r}_1 + \lambda\boldsymbol{r}_{12}, \boldsymbol{v}_2;t)\,.
\end{aligned}
$$

При цьому використано позначення

$$
\begin{aligned}
&F^{hs}(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma - \hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_2;t) = \qquad (13)\\
&\quad g_2(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma - \hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma;t)\times\\
&\quad f_1(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma - \hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_1;t)\, f_1(\boldsymbol{r}_1 + \lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma, \boldsymbol{v}_2;t)\,,
\end{aligned}
$$

$F^{mf} = F^{hs}$ при заміні $\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma$ на $\boldsymbol{r}_{12}$. Така різниця у записах $F^{hs}$ та $F^{mf}$ пояснюється тим, що розсіяння твердих кульок відбувається лише в тих випадках, коли вони зближаються на мінімальну відстань - відстань їх ефективного діаметра, тоді як кулонівські частинки можуть розсіюватись і на далеких відстанях.

Для отримання $\overleftrightarrow{P}^{l}(\boldsymbol{r}_1;t)$ треба спочатку перетворити деякі підінтегральні множники в (4). По-перше, слід розкрити похідні $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}$; по-друге, після цього обчислити інтеграл по $t'$. З врахуванням виду $\varPhi^l(|\boldsymbol{r}_{12}|)$ одержимо:

$$
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\frac{1}{r_{12}} = -\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{12}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{g}t'|} = -\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\cdot\frac{r_{12} + gt'\cos[\widehat{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{g}}]}{|\boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{g}t'|^3},
$$

де $\cos[\widehat{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{g}}]$ - косинус кута між вектором взаємної відстані між частинками, що розлітаються, $-\boldsymbol{r}_{12}$ та вектором їх відносної швидкості $\boldsymbol{g}$. Інтегруючи останній вираз по $t'$ отримаємо наступне:

$$
\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t'\ \frac{r_{12} + gt'\cos[\widehat{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{g}}]}{|\boldsymbol{r}_{12} + \boldsymbol{g}t'|^3} = \frac{1}{gr_{12}}.
$$

Після цього вираз для $I_L(x_1;t)$ (4) набере виду

$$
I_L(x_1;t) = \frac{Z^4e^4}{m^2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\int \mathrm{d}x_2\ g_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_{12};t)\,\frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5}\frac{1}{g}\times
$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\} f_1\left(x_1;t\right) f_1\left(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{v}_2;t\right).$$

Роблячи заміну змінних $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_{12}-\boldsymbol{r}_1$ можна перейти від інтегрування по $\boldsymbol{r}_2$ до інтегрування по $\boldsymbol{r}_{12}$. Остаточно для $\overleftrightarrow{P}^l\left(x_1;t\right)$ одержимо

$$\overleftrightarrow{P}^l\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)=\frac{Z^4e^4}{m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\int \mathrm{d}x_2\ \frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{g}\times \tag{14}$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\lambda\ F^l,$$

де $F^l=F^{mf}$. $\overleftrightarrow{P}^l\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)$ – новий член у виразі для тензора в'язких напружень у порівнянні з роботою [69]. Порівняння структури виразу (7) з врахуванням (10) – (12), (14) із структурою виразу (5b) із врахуванням остаточного вигляду $\overleftrightarrow{\Pi}(\boldsymbol{r}_1;t)$ дозволяє стверджувати, що вони містять ідентичні доданки. А отже використання рівнянь (6), (7) при розв'язуванні кінетичного рівняння (1) є еквівалентним використанню рівнянь (5a) та (5b).

Запишемо вирази для векторів теплових потоків.

$$\boldsymbol{q}^k\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)=m\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ f_1\left(x_1;t\right)c_1^2\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)\boldsymbol{c}_1\left(\boldsymbol{r}_1;t\right), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{q}^{hs}\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)=\frac{m\sigma^3}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ \mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\ \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\ \Theta\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g}\right)\left(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\boldsymbol{g}\right)\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\times \tag{16}$$
$$\left\{\left(c_1'\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)\right)^2-\left(c_1\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)\right)^2\right\}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\lambda\ F^{hs}.$$

Опираючись на симетрійні властивості, якими повинна володіти одночастинкова функція розподілу $f_1(x_1;t)$, можна показати (навіть не знаючи аналітичного виду $f_1(x_1;t)$, що $\boldsymbol{q}^{hs}\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)=0$. Отже член середнього поля дає вклад лише в тензор в'язких напружень, а вектор теплового потоку не змінює при цьому своєї форми. Співвідношення для $\boldsymbol{q}^l\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)$ запишемо по аналогії з $\overleftrightarrow{P}^l\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)$

$$\boldsymbol{q}^l\left(\boldsymbol{r}_1;t\right)=\frac{Z^4e^4}{2m}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ c_1^2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\int \mathrm{d}x_2\ \frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{g}\times \tag{17}$$
$$\left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right\}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\lambda\ F^l.$$



Вираз (17) також є новим в порівнянні з результатами [69]. Порівняння структури виразу (8) з врахуванням (15) – (17) із структурою виразу (5c) із врахуванням остаточного вигляду $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}_1;t)$ дозволяє знайти між ними деякі відмінності. Якщо розкрити повністю $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}_1;t)$ у відповідних наближеннях, то різниця від (15) – (17) стосуєтьс ятільки двох останніх доданків в $\boldsymbol{j}_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}_1;t)$. Тому для отримання наближеного розв'язку для рівняння (1) в принципі достатньо буде використання рівнянь(6) – (8).

## 3. Метод граничних умов

Будемо шукати нормальний розв'язок кінетичного рівняння Енскога-Ландау (1) методом граничних умов [63,66]. Згідно з цим методом введемо в праву частину рівняння (1) безмежно малий член із $\varepsilon\to 0$:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\right\} f_1\left(x_1;t\right)= \tag{18}$$
$$I_E\left(x_1;t\right)+I_{MF}\left(x_1;t\right)+I_L\left(x_1;t\right)-$$
$$\varepsilon\left(f_1\left(x_1;t\right)-f_1^{(0)}\left(x_1;t\right)\right),$$

де $f_1^{(0)}\left(x_1;t\right)$ – відома одночастинкова функція розподілу, що задовільняє рівняння (6) – (8) для параметрів скороченого опису системи. Тоді розв'язок шукається у вигляді $f_1\left(x_1;t\right)=f_1^{(0)}\left(x_1;t\right)+\delta f\left(x_1;t\right)$ і задача знаходження нормального розв'язку зводиться до знаходження поправки $\delta f\left(x_1;t\right)$. Підставляючи $f_1(x_1;t)$ в (18), одержимо:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\varepsilon\right\}\delta f+\frac{D}{Dt}f_1^{(0)}= \tag{19}$$
$$I_E\left(f_1^{(0)},f_1^{(0)}\right)+I_{MF}\left(f_1^{(0)}\right)+I_L\left(f_1^{(0)},f_1^{(0)}\right)+$$
$$I_E\left(f_1^{(0)},\delta f\right)+I_E\left(\delta f,f_1^{(0)}\right)+I_{MF}\left(\delta f\right)+$$
$$I_L\left(f_1^{(0)},\delta f\right)+I_L\left(\delta f,f_1^{(0)}\right)+I_E\left(\delta f,\delta f\right)+I_L\left(\delta f,\delta f\right).$$

Зміст та структура використаних у цьому рівнянні позначень – очевидні [3,63,66]. Також прийнято до уваги факт, що інтеграл зіткнень $I_{MF}(x_1;t)$ (3) фактично є функціоналом лише однієї одночастинкової функції розподілу. Доданки з індексами $E$ є нелокальними, тому при обчисленнях далі слід брати їх розклад відносно локальної одночастинкової функції розподілу й обривати цей розклад на членах, степені яких вищі $\delta f$. Якщо доданки з індексами $MF$ та $L$ теж вважати нелокальними функціоналами, то попередньо вказану процедуру слід застосовувати і до них. Об'єднаємо деякі вирази в (19):

$I_E(\delta f) = I_E\left(f_1^{(0)},\delta f\right) + I_E\left(\delta f, f_1^{(0)}\right)$ лінеаризований нелокальний функціонал зіткнень Енскога,

$I_L(\delta f) = I_L\left(f_1^{(0)},\delta f\right) + I_L\left(\delta f, f_1^{(0)}\right)$ лінеаризований функціонал зіткнень Ландау.

З врахуванням цих позначень перетворимо (19) до такого виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\delta f - I_E^{(0)}(\delta f) - I_{MF}(\delta f) - I_L(\delta f) + \varepsilon\delta f = \\ -\frac{D}{Dt}f_1^{(0)} - \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\delta f + I_E\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + \\ I_{MF}\left(f_1^{(0)}\right) + I_L\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + I_E^{(1)}(\delta f).\end{aligned} \tag{20}$$

Тут $I_E^{(0)}(\delta f)$ – лінеаризований локальний оператор зіткнень Енскога, що є нульовим членом розкладу лінеаризованого нелокального функціоналу зіткнень $I_E(\delta f)$, а $I_E^{(1)}(\delta f)$ – усі інші доданки у цьому розкладі.

Позначимо $L_t(\delta f) = I_E^{(0)}(\delta f) + I_{MF}(\delta f) + I_L(\delta f)$ та введемо оператор $S(t,t')$, що володіє такими властивостями

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t,t') = L_t(\delta f)\,S(t,t'), \qquad S(t,t')\,|_{t'=t} = 1.$$

Використовуючи ці властивості оператора $S(t,t')$ рівняння (20) можна представити в інтегральній формі. Одержимо:

$$\begin{aligned}\delta f(x_1;t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')} S(t,t') \Big\{ -\frac{D}{Dt}f_1^{(0)} - \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\delta f + \\ I_E\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + I_{MF}\left(f_1^{(0)}\right) + I_L\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + I_E^{(1)}(\delta f) \Big\}_{t'},\end{aligned} \tag{21}$$

де запис $t'$ внизу біля дужок означає, що підінтегральний вираз є функцією $t'$. Додатковою умовою на знаходження $\delta f(x;t)$ є очевидна



границя $\lim\limits_{t\to-\infty}\delta f(x;t) = 0$. Від (21) легко перейти до ітераційної процедури для знаходження поправки $\delta f(x;t)$. Наприклад, її можна організувати наступним чином:

$$\begin{aligned}\delta f^{(k+1)}(x_1;t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')} S(t,t') \times \\ \Big\{ -\frac{D}{Dt}f_1^{(0)} - \boldsymbol{v}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\delta f^{(k)} + \\ I_E\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + I_{MF}\left(f_1^{(0)}\right) + I_L\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) + I_E^{(1)}\left(\delta f^{(k)}\right) \Big\}_{t'},\end{aligned} \tag{22}$$

причому $\delta f\big|_{k=0} = 0$ і для знаходження в $(k+1)$-у наближенні використовуються закони збереження, або рівняння для параметрів скороченого опису в $k$ наближенні. Для реалізації даної ітераційної процедури, необхідно означити нульове наближення одночастинкової функції розподілу $f_1^{(0)}(x_1;t)$. Для випадку сферичних заряджених твердих кульок $f_1^{(0)}(x_1;t)$ може бути вибрана у вигляді локально-рівноважної максвелівської функції розподілу

$$f_1^{(0)}(x_1;t) = n(\boldsymbol{r}_1;t)\left(\frac{m}{2\pi kT(\boldsymbol{r}_1;t)}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{mc_1^2(\boldsymbol{r}_1;t)}{2kT(\boldsymbol{r}_1;t)}\right\}.$$

Знайдемо поправку до функції розподілу $f_1^{(0)}(x_1;t)$ із застосуванням ітераційної процедури (22). При обчисленні та при отриманні законів збереження (6), (7) та рівняння (8) треба буде врахувати наступне:

$$\begin{aligned} g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t) \equiv g_2\Big(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;n(t),\beta(t)\Big) \to g_2\Big(\boldsymbol{r}_{12};n(t),\beta(t)\Big), \\ F \to F^{(0)} = g_2\Big(\boldsymbol{r}_{12};n(t),\beta(t)\Big) f_1^{(0)}(x_1;t)\, f_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2;t), \end{aligned} \tag{23}$$

де $g_2\Big(\boldsymbol{r}_{12};n(t),\beta(t)\Big)$ – квазірівноважна БКФ, що залежить від взаємної відстані між частинками. Зауважимо, що поряд із таким введенням квазірівноважної бінарної кореляційної функції її можна також вводити й іншим чином, як наприклад:

$$\begin{aligned} g_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;t) \equiv g_2\Big(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;n(t),\beta(t)\Big) = \\ g_2\Big(\boldsymbol{r}'_{12};n(t),\beta(t)\Big) + \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} g_2\Big(\boldsymbol{r}'_{12};n(t),\beta(t)\Big) + \ldots \end{aligned}$$

і розклад БКФ ведеться в околі середньої точки $\boldsymbol{r}'_{12}$

$$\boldsymbol{r}'_{12} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{2}, \quad \text{тоді як} \quad \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1.$$

У подальших розрахунках ми використовуватимемо представлення (23). Приймаючи це до уваги, запишемо закони збереження в нульовому порядку. Для тензорів в'язких напружень та векторів теплових потоків одержимо:

$$\overleftrightarrow{P}^k = \overleftrightarrow{I} P^k, \quad P^k = nkT, \tag{24}$$

$$\overleftrightarrow{P}^{hs} = \overleftrightarrow{I} P^{hs}, \quad P^{hs} = \frac{2}{3}\pi n^2\sigma^3 kT g_2(\sigma|n,\beta), \tag{25}$$

$$\overleftrightarrow{P}^{mf} = \overleftrightarrow{I} P^{mf}, \quad P^{mf} = -\frac{2}{3}\pi (nZe)^2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r}\, g_2(r|n,\beta), \tag{26}$$

$$\overleftrightarrow{P}^{l} = 0, \quad \boldsymbol{q}^k = \boldsymbol{q}^{hs} = \boldsymbol{q}^{mf} = \boldsymbol{q}^l = 0. \tag{27}$$

У цих виразах $\overleftrightarrow{I}$ – одиничний тензор, $\overleftrightarrow{P}^l$ та $\boldsymbol{q}^l$ зануляються із-за непарності підінтегральних функцій. Маючи порахованими величини $\overleftrightarrow{P}^k(\boldsymbol{r}_1;t), \overleftrightarrow{P}^{hs}(\boldsymbol{r}_1;t), \overleftrightarrow{P}^{mf}(\boldsymbol{r}_1;t)$ та $\overleftrightarrow{P}^l(\boldsymbol{r}_1;t)$ (24) – (27), можна записати повний тиск у нульовому наближенні:

$$P = nkT\left(1 + \frac{2}{3}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right) - \frac{2}{3}\pi(nZe)^2 \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r}\, g_2(r|n,\beta).$$

Обчислимо вирази в фігурних дужках в (22) справа. Матимемо:

$$\frac{D}{Dt} f_1^{(0)} = f_1^{(0)} \left\{ \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{mc_1^2}{2kT} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \right. \tag{28}$$
$$\left. \frac{m\boldsymbol{c}_1}{kT}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{mc_1^2}{2kT} - \frac{3}{2}\right)\frac{\boldsymbol{c}_1}{T}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{m}{kT}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1 : \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \right\}.$$

Для усунення часових похідних в (28) використовуються закони збереження (6), (7) та рівняння (8) у нульовому наближенні з врахуванням (24) – (27). При обчисленні наступних доданків треба покласти $k = 0$:

$$I_E^{(k+1)}\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) = -\frac{P^{hs}}{P^k} f_1^{(0)} \left\{ 2\boldsymbol{c}_1 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\ln n + \right. \tag{29}$$
$$\left. \left(\frac{3mc_1^2}{10kT} - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{c}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\ln T + \frac{2m}{5kT}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1 : \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left(\frac{mc_1^2}{5kT} - 1\right)\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}_1} \right\},$$



$$I_{MF}\left(f_1^{(0)}\right) = f_1^{(0)}\frac{\boldsymbol{c}_1}{P^k}\frac{\partial P^{mf}}{\partial \boldsymbol{r}_1}, \tag{30}$$
$$I_L\left(f_1^{(0)}, f_1^{(0)}\right) = 0, \quad I_E^{(1)}\left(\delta f^{(k)}\right) = 0.$$

Отже тепер можна записати повний вираз для поправки $\delta f(x_1;t)$ в першому наближенні:

$$\delta f^{(1)}(x_1;t) = -\int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')} S(t,t') \Bigg[ f_1^{(0)}(x_1;t) \times \tag{31}$$
$$\left\{ \left(1 + \frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\left[\frac{mc_1^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right]\boldsymbol{c}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\ln T(\boldsymbol{r}_1;t) + \right.$$
$$\left.\left. \left(1 + \frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{m}{kT}\left[\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1 - \frac{1}{3}c_1^2\overleftrightarrow{I}\right] : \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t) \right\} \right]_{t'},$$

звідки видно, що в цьому наближенні явний вклад у вираз поправки до одночастинкової функції розподілу $f_1(x_1;t)$ дають лише члени, що пов'зані з близькосяжною взаємодією. Враховуються розміри частинок на противагу кінетичній теорії розріджених газів [32,43,44], де частинки вважаються точковими. Крім цього вклад від близькосяжної рівно ж як і від далекосяжної взаємодії здійснюється через оператор $S(t,t')$, де вони є "заховані" в операторі $L$. Формально вираз (31) є такий самий, як і отриманий в роботі [69], але структура операторів $S(t,t')$ є різною. Відмінність полягає у тому, що тут враховується ще один член з далекодією.

## 4. Рівняння переносу у першому наближенні

Маючи повний вираз для поправки $\delta f(x_1;t)$ в першому наближенні (31), можна в цьому ж наближенні записати закони збереження (6), (7) та рівняння (8). Для цього необхідно спочатку отримати явні вирази величин (10) – (12), (14) – (17) з врахуванням поправки (31). Для $\overleftrightarrow{P}^{c\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$ одержимо:

$$\overleftrightarrow{P}^{k\,1}(r_1;t) = \overleftrightarrow{I} P^k - \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')} M^k(t,t') \left[\overleftrightarrow{S}\right]_{t'}, \tag{32}$$

де

$$(S_t)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\alpha(\boldsymbol{r}_1;t)}{\partial r_{1,\beta}} + \frac{\partial V_\beta(\boldsymbol{r}_1;t)}{\partial r_{1,\alpha}}\right) - \tag{33}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)}{\partial \boldsymbol{r}_1}:\overleftrightarrow{I}\right)I_{\alpha\beta}$$

є тензором швидкостей зсуву, а

$$M^k(t,t') = \frac{m}{5}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1 S(t,t') \times \tag{34}$$
$$\left[f_1^{(0)}(x_1;t)\left(1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{m}{kT}\left(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{3}c_1^2\overleftrightarrow{I}\right)\right]_{t'}$$

є ядром кінетичної частини законів переносу.

Для обчислення $\overleftrightarrow{P}^{hs\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$, $\overleftrightarrow{P}^{mf\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$ та $\overleftrightarrow{P}^{l\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$ розкладемо функції $F^{hs}$, $F^{mf}$ та $F^{l}$ (13) в ряд по неоднорідності й по відхиленню $\delta f(\boldsymbol{r}_1;t)$ і збережемо тільки перші члени. Розклад $F^{hs}$ матиме вид

$$\int_0^1 \mathrm{d}\lambda g_2(\boldsymbol{r}_1+\lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma-\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma,\boldsymbol{r}_1+\lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma;t)\times \tag{35}$$
$$f_1(\boldsymbol{r}_1+\lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma-\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma,\boldsymbol{v}_1;t)\,f_1(\boldsymbol{r}_1+\lambda\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\sigma,\boldsymbol{v}_2;t)=$$
$$\frac{\sigma}{2}g_2(\sigma|n,\beta)\,f_1^{(0)}(x_1;t)\,f_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2;t)\times$$
$$(\hat{\boldsymbol{r}}_{12}\cdot\nabla)\ln\frac{f_1^{(0)}(x_1;t)}{f_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2;t)}+$$
$$g_2(\sigma|n,\beta)\left\{f_1^{(0)}(x_1;t)\,\delta f_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2;t)+\right.$$
$$\left.\delta f_1^{(0)}(x_1;t)\,f_1^{(0)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{v}_2;t)\right\}.$$

При обчисленні $\overleftrightarrow{P}^{mf\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$, $\overleftrightarrow{P}^{l\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$ можна використовувати запропонований розклад (35), але з заміною

$$g_2(\sigma|n,\beta)\to g_2(\boldsymbol{r}_{12}|n,\beta)\,,\quad \hat{\boldsymbol{r}}_{12}\to|\boldsymbol{r}_{12}|^{-1}\boldsymbol{r}_{12},\quad \sigma\to|\boldsymbol{r}_{12}|.$$

Таким чином отримаємо:

$$\overleftrightarrow{P}^{hs\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=\overleftrightarrow{P}^{hs}- \tag{36}$$
$$\frac{4}{9}n^2\sigma^4 g_2(\sigma|n,\beta)\sqrt{\pi mkT}\left[\frac{6}{5}\overleftrightarrow{S}+(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\overleftrightarrow{I}\right]-$$
$$\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')}M^c(t,t')\left[\overleftrightarrow{S}\right]_{t'},$$
$$\overleftrightarrow{P}^{mf\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=\overleftrightarrow{I}P^{mf}. \tag{37}$$



Вклад в тензор напружень від інтегралу зіткнень типу середнього поля залишається без змін. Те ж саме отримується і для $\overleftrightarrow{P}^{l\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)$

$$\overleftrightarrow{P}^{l\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=\overleftrightarrow{P}^{l}(\boldsymbol{r}_1;t)=0. \tag{38}$$

Повний вираз для тензора в'язких напружень є сумою (32), (36), (37), та (38):

$$\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t)=\overleftrightarrow{I}P(\boldsymbol{r}_1;t)-$$
$$\frac{4}{9}n^2\sigma^4 g_2(\sigma|n,\beta)\sqrt{\pi mkT}\left[\frac{6}{5}\overleftrightarrow{S}+(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\overleftrightarrow{I}\right]-$$
$$\left(1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')}M^c(t,t')\left[\overleftrightarrow{S}\right]_{t'}.$$

Обчислення для вектора теплового потоку дадуть наступне:

$$\boldsymbol{q}^{c\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=-\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')}L^c(t,t')\left[\frac{1}{T}\nabla T\right]_{t'}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{q}^{hs\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=-\frac{2}{3}n^2\sigma^4 g_2(\sigma|n,\beta)\sqrt{\frac{\pi k^3T}{m}}\nabla T(\boldsymbol{r}_1;t)- \tag{40}$$
$$\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')}L^c(t,t')\left[\frac{1}{T}\nabla T\right]_{t'},$$

$$\boldsymbol{q}^{l\,1}(\boldsymbol{r}_1;t)=\boldsymbol{q}^{l}(\boldsymbol{r}_1;t)=0. \tag{41}$$

Тут

$$L^c(t,t')=\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ c_1\frac{mc_1^2}{2}S(t,t')\times \tag{42}$$
$$\left[f_1^{(0)}(x_1;t)\left(1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\left(\frac{mc_1^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right)c_1\right]_{t'}$$

є ще одним ядром кінетичної частини законів переносу. Повний вектор теплового потоку є, очевидно, сумою (39-41):

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t)=-\frac{2}{3}n^2\sigma^4 g_2(\sigma|n,\beta)\sqrt{\frac{\pi k^3T}{m}}\nabla T(\boldsymbol{r}_1;t)-$$
$$\left(1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t'\ \mathrm{e}^{-\varepsilon(t-t')}L^c(t,t')\left[\frac{1}{T}\nabla T\right]_{t'}$$

## 5. Стаціонарний випадок. Кінетичні коефіцієнти

Розглянемо стаціонарний випадок, тобто випадок, коли оператор $L$ не залежить від часу: $S(t,t') = \exp\{L_t(t-t')\}$. Окремі доданки в виразах для $\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t)$ та $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t)$ наберуть іншого, спрощеного виду. Так, другі доданки в (36) та (40) можна буде представити у такій формі

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{5}\int \mathrm{d}\boldsymbol{c}_1\; m\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1):\overleftrightarrow{S},$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{c}_1\; c_{1\,\alpha}\frac{mc_1^2}{2}A_\alpha(\boldsymbol{c}_1)\nabla T,$$

де величини $\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1)$ та $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1)$ визначаються наступним чином:

$$\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1) = \left(1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\times \int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\;\mathrm{e}^{-\tau\varepsilon}\mathrm{e}^{-\tau L} f_1^{(0)}(x_1;t)\frac{m}{kT}\left(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}_1^2\overleftrightarrow{I}\right), \tag{43}$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1) = \left(1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\times \int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\;\mathrm{e}^{-\tau\varepsilon}\mathrm{e}^{-\tau L} f_1^{(0)}(x_1;t)\frac{\boldsymbol{c}_1}{T}\left(\frac{mc_1^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right).$$

Розглянемо функції

$$\overleftrightarrow{b}(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau L} f_1^{(0)}(x_1;t)\times \left(1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{m}{kT}\left(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{3}c_1^2 I\right), \tag{44}$$
$$\boldsymbol{a}(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau L} f_1^{(0)}(x_1;t)\times \left(1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{\boldsymbol{c}_1}{T}\left(\frac{mc_1^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right).$$

Диференціюючи вирази (44) для $\overleftrightarrow{b}(\tau)$ та $\boldsymbol{a}(\tau)$ по $\tau$ отримаємо таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial\overleftrightarrow{b}}{\partial\tau}+L\overleftrightarrow{b}=0, \tag{45}$$
$$\overleftrightarrow{b}(0) = f_1^{(0)}(x_1;t)\left(1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{m}{kT}\left(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{3}c_1^2\overleftrightarrow{I}\right),$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\tau}+L\boldsymbol{a}=0,$$
$$\boldsymbol{a}(0) = f_1^{(0)}(x_1;t)\left(1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right)\frac{\boldsymbol{c}_1}{T}\left(\frac{mc_1^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right).$$



Початкові значення $\overleftrightarrow{b}(0)$, $\boldsymbol{a}(0)$ відомі як вирази, що виникають при розв'язуванні кінетичних рівнянь в теорії твердих кульок – RET [11, 13]. Також відомо, що ці вирази є строго ортогональні до компонент 5-вектора адитивних інваріантів $\Psi$. Слідуючи [63] можна записати, що

$$\|\overleftrightarrow{b}(\tau)\| \le \|\overleftrightarrow{b}(0)\|\,\mathrm{e}^{-\rho\tau},\quad \|\boldsymbol{a}(\tau)\| \le \|\boldsymbol{a}(0)\|\,\mathrm{e}^{-\rho\tau},$$

норма $\|\varphi\|$ означає $\|\varphi\| = \int\left[f_1^{(0)}(x_1;t)\right]^{-1}\varphi^2 d\boldsymbol{c}_1$, а $\varrho<0$ є найближчим до нуля власним значенням, або точкою спектру оператора $L$. Внаслідок цієї умови невласні інтеграли (43) для $\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1)$ та $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1)$ збігаються навіть при $\varepsilon=0$, отже граничний перехід $\varepsilon\to 0$ та інтегрування в цих виразах є комутативними і цей перехід можна здійснити під знаком інтегралу. В результаті одержимо:

$$\frac{1}{5}\int\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1\; m\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1):\overleftrightarrow{S},\quad \text{де}\quad \overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1)=\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\;\overleftrightarrow{b}(\tau), \tag{46}$$
$$\frac{1}{3}\int\mathrm{d}\boldsymbol{c}_1\; c_{1,\alpha}\frac{mc_1^2}{2}A_\alpha(\boldsymbol{c}_1)\nabla T,\quad \text{де}\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1)=\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\;\boldsymbol{a}(\tau).$$

Інтегруючи диференціальні рівняння (45) в межах від $-\infty$ до 0 з врахуванням граничних умов, а також використовуючи нові вирази (46) для $\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1)$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1)$, одержимо інтегральні рівняння для знаходження $\overleftrightarrow{B}(\boldsymbol{c}_1)$ та $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}_1)$:

$$L\overleftrightarrow{B} = -\left[1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right]\frac{m}{kT}\left[\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_1-\frac{1}{3}c_1^2\overleftrightarrow{I}\right]f_1^{(0)}(x_1;t),$$
$$L\boldsymbol{A} = -\left[1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right]\frac{\boldsymbol{c}_1}{T}\left[\frac{mc_1^2}{2kT}-\frac{5}{2}\right]f_1^{(0)}(x_1;t).$$

Окрім цього подібні міркування також можна застосувати при отриманні виразу для поправки $\delta f(x_1;t)$ у стаціонарному випадку. Одержимо:

$$\delta f_1(x_1;t) = -\overleftrightarrow{B}:\frac{\partial\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t)}{\partial\boldsymbol{r}_1}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla T(\boldsymbol{r}_1;t).$$

Нормальний розв'язок кінетичного рівняння Енскога-Ландау для однокомпонентної системи заряджених твердих кульок методом Чепмена-Енскога у випадку, коли в далекосяжній частині інтегралу зіткнень $g_2 \to 1$, дає для тензора в'язких напружень $\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t)$ та вектора теплового потоку $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t)$ такі результати:

$$\overleftrightarrow{P}(\boldsymbol{r}_1;t) = P(\boldsymbol{r}_1;t)\overleftrightarrow{I} - 2\eta\overleftrightarrow{S}(\boldsymbol{r}_1;t) - æ\nabla : \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_1;t),$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1;t) = -\lambda\nabla T(\boldsymbol{r}_1;t),$$

де æ – об'ємна в'язкість

$$æ = \frac{4}{9}n^2\sqrt{\pi mkT}\sigma^4 g_2(\sigma|n,\beta), \tag{47}$$

$\eta$ – зсувна в'язкість

$$\eta = \frac{3}{5}\,æ + \frac{5}{8}\sqrt{\frac{mkT}{\pi}}\;\frac{\left\{1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right\}^2}{2\sigma^2 g_2(\sigma|n,\beta) + \pi^2\frac{(Ze)^4}{(kT)^2}\ln\frac{D}{\sigma}}, \tag{48}$$

$\lambda$ – теплопровідність

$$\lambda = \frac{3k}{2m}\,æ + \frac{75k}{32m}\sqrt{\frac{mkT}{\pi}}\;\frac{\left\{1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right\}^2}{2\sigma^2 g_2(\sigma|n,\beta) + \pi^2\frac{(Ze)^4}{(kT)^2}\ln\frac{D}{\sigma}}, \tag{49}$$

а $D$ – радіус екранування в системі (аналог радіуса Дебая з врахуванням розмірів частинок).

Можна зауважити, об'ємна в'язкість має таку ж структуру, що і в методі Чепмена-Енскога (47). Тоді як для інших кінетичних коефіцієнтів спостерігаються відмінності від (48), (49). Справді:

$$\eta = \frac{3}{5}\,æ + 2\,nkT\;\frac{\left\{1+\frac{4}{15}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right\}^2}{\left\{I_E^0(\delta f) + I_L(\delta f)\right\}}, \tag{50}$$

$$\lambda = \frac{3k}{2m}\,æ + \frac{5k}{m}\,nkT\;\frac{\left\{1+\frac{2}{5}\pi n\sigma^3 g_2(\sigma|n,\beta)\right\}^2}{\left\{I_E^0(\delta f) + I_L(\delta f)\right\}}. \tag{51}$$



Далі задача полягає в обчисленні інтегралів зіткнень $I_E^{(0)}(\delta f)$ та $I_L(\delta f)$, тобто треба порахувати інтеграли зіткнень (2) (у нульовому наближенні по неоднорідності) та (4) разом у першому наближенні по відхиленню $\delta f$, де поправка $\delta f$ підставляється з (31). Трудність полягає в тому, що поправка (31) в свою чергу теж виражається через інтеграли зіткнень $I_E^{(0)}(\delta f)$, $I_L(\delta f)$, що входять в оператор $S(t,t')$. Згадаймо, що оператор $S(t,t')$ у стаціонарному випадку має вигляд $S(t,t') = \exp\left\{L_t(t-t')\right\}$, де $L_t = I_E^{(0)}(\delta f) + I_{MF}(\delta f) + I_L(\delta f)$. Тому першим прийнятним наближенням може бути, щоб сама поправка виражалась через $I_E^{(0)}(\delta f)$, $I_L(\delta f)$ пораховані з $\delta f'$, де $\delta f' = \delta f$ при $S(t,t') = 1$. Для $I_E^{(0)}(\delta f)$ отримуватимуться результати [3], а для $I_L(\delta f)$ в (50), (51) отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} I_L(\delta f) = \frac{Z^4e^4}{m^2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2\; g_2\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_{12};t\right)\frac{\boldsymbol{r}_{12}\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5}\frac{1}{g}\times \\ \left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right\}\times \\ \left\{f_1\left(x_1;t\right)\delta f\left(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{v}_2;t\right) + \delta f\left(x_1;t\right) f_1\left(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_{12},\boldsymbol{v}_2;t\right)\right\}, \end{aligned}$$

де $\delta f\,(x;t)$ обчислюється за формулою (31) із

$$S(t,t') = \exp\left\{L_t(t-t')\right\} = \exp\left\{[I_E^{(0)}(\delta f') + I_L(\delta f')](t-t')\right\}$$

при

$$\delta f'\,(x;t) = \delta f\,(x;t)\Big|_{S(t,t')=1}.$$

На цьому етапі обчислень вже необхідною є конкретизація бінарної квазірівноважної кореляційної функції $g_2$ як на контакті, так і в $\boldsymbol{r}$-просторі.

Причини таких відмінностей детально обговорювались в [63] і цілком можуть бути перенесені на результати даної роботи. При побудові нормального розв'язку кінетичного рівняння Енскога-Ландау у цій роботі часові похідні $\dfrac{\partial}{\partial t}$ від гідродинамічних параметрів скороченого опису не покладались малими, отже нормальний розв'язок для такого рівняння придатний для гідродинамічного опису швидких процесів.

## Література

[1] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. Формулировка граничных условий к цепочке Боголюбова с учетом локальных законов сохранения. // ТМФ, 1984, том 60, No 2, с. 270-279.

[2] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян I.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей. Киев, 1988. / Препринт АН УССР, ИТФ-88-102Р, 25 с.;
Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян I.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей. I. Временные корреляционные функции. Киев, 1989. / Препринт АН УССР, ИТФ-89-59Р, 28 с.;

[3] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. О кинетических уравнениях для плотных газов и жидкостей. // ТМФ, 1991, том 87, No 1, с. 113 - 129.

[4] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей. II. Обобщенные уравнения переноса и коллективные моды. Львов, 1993. / Препринт АН Украины, ИФКС-93-9Р, 39 с.;
Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. Объединение кинетического и гидродинамического подходов в теории плотных газов и жидкостей. // ТМФ, 1993, том 96, No 3, с. 325-350.

[5] Климонтович Ю.Л. О необходимости и возможности единого описания кинетических и гидродинамических процессов. // ТМФ, 1992, том 92, No 2, с. 312-330.

[6] Klimontovich Yu.L. The unified description on kinetic and hydrodynamic processes in gases and plasmas. // Phys. Lett. A, 1992, vol. 170, p. 434.

[7] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946.

[8] Зубарев Д.Н., Новиков М.Ю. Обобщенная формулировка граничного условия к уравнению Лиувилля и цепочке Б-Б-Г-К-И. // ТМФ, 1972, том 13, No 3, с. 406-420.

[9] Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960.

[10] Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М., Мир, 1973, 245 с.



[11] Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М., Мир, 1976, 556 с.

[12] Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Москва, Наука, 1967, 440 с.

[13] Ernst M.H., van Beijeren H. The modified Enskog equation. // Physica, 1973, vol. 68, No 3, p. 437-456.

[14] Karkheck J., Stell G. Kinetik mean-field theories. // J. Chem. Phys., 1981, vol. 75, p. 1475-1487.

[15] Stell G., Karkheck J., van Beijeren H. Kinetik mean-field theories: Results of energy constraint in maximizing entropy. // J. Chem. Phys., 1983, vol 79, No 6, p. 3166-3176.

[16] Davis H.T., Rice S.A., Sangers J.V. On the kinetic theory of dense fluids. The fluid of rigid spheres with a squarewell attraction. // J. Chem. Phys., 1961, vol 35, No 6, p. 2210-2233.

[17] Karkheck J., van Beijeren H., de Schepper J., Stell G. Kinetic theory and $H$-theorem for a dense square-well fluid. // Phys. Rev. A, 1985, vol. 32, No 4, p. 2517-2520.

[18] Рудяк В.Я. К теории кинетических уравнений плотного газа. // ЖТФ, 1984, том 54, No 7, с. 1246-1252.

[19] Рудяк В.Я. О выводе кинетического уравнения типа Энскога для плотного газа. // ТВТ, 1985, том 23, No 2, с. 268-272.

[20] Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. Об учете межмолекулярных сил притяжения при выводе кинетических уравнений. // ТМФ, 1985, том 64, No 2, с. 277-286.

[21] Рудяк В.Я. Кинетические уравнения неидеального газа с реальными потенциалами взаимодействия. // ЖТФ, 1987, том 57, No 8, с. 1466-1475.

[22] Рудяк В.Я. Коэффициэнты переноса неидеального газа. // ТВТ, 1989, том 27, No 4, с. 697-701.

[23] Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск, Наука, 1987, 272 с.

[24] Курочкин В.И. Приближенное кинетическое уравнение и уравнения переноса для умеренно плотного газа из молекул с твердой сердцевиной. // ТВТ, 1990, том 28, No 1, с. 40-46.

[25] Курочкин В.И. К кинетической теории плотного газа из молекул с твердой сердцевиной. // ЖТФ, 1992, том 62, No 5, с. 13-21.

[26] Курочкин В.И., Цаплин С.В. Коэффициэнты переноса плотного газа из молекул с твердой сердцевиной. // ЖТФ, 1993, том 63, No 8, с. 203-206.

[27] Курочкин В.И., Цаплин С.В. Коэффициэнты переноса плотного газа на основе модели эффективного пртенциала. // ТВТ, 1993,

том 31, No 6, с. 903-908.
[28] Муленко И.А., Хомкин А.Л. Решение уравнения Больцмана для полностью ионизованной плазмы с короткодействующим потенциалом взаимодействия между зарядами. // ТВТ, 1991, том 29, No 6, с. 1234-1239.
[29] Серовский Л.А. Моделирование самодиффузии в плотных газах и жидкостях. // ТВТ, 1991, том 29, No 6, с. 1016-1018.
[30] Шмидт А.Б. Влияние потенциалов близкодействия на термодинамику слабонеидеальной однокомпонентной плазмы. // ТВТ, 1988, том 26, No 2, с. 387-389.
[31] Серовский Л.А., Виленская И.Е. Избыточная вязкость и теплопроводность плотных газов. // ТВТ, 1988, том 28, No 2, с. 610-612.
[32] Modinos A. Transport coefficients of a dilute gas. // Phys. Rev. A, 1992, vol. 45, No 12, p. 8580-8582.
[33] Токарчук М.В., Омелян I.П. Модельні кінетичні рівняння для густих газів і рідин. // УФЖ, 1990, том 36, No 8, с. 1255-1261.
[34] Вассерман А.А., Хасилев И.П. Об эффективности учета реалистичного потенциала межмолекулярного взаимодействия в теории Энскога. // ТВТ, 1989, том 27, No 1, с. 35-41.
[35] Вассерман А.А, Хасилев И.П. Расчет теплопроводности плотного газа на основе теории Энскога с учетом реальности потенциала межмолекулярного взаимодействия. // ТВТ, 1991, том 29, No 5, с. 878-882.
[36] Kincaid J.M., Perez S., Cohen E.G.D. Modified Enskog theory for fluid mixtures. // Phys. Rev. A, 1988, vol. 38, No 5, p. 3628.
[37] Алексеев Б.В., Грушин И.Т. Применение обобщенного метода Энскога к расчету процессов переноса в смесях реагирующих газов. I. // ТВТ, 1988, том 26, No 4, с. 685-694.
[38] Алексеев Б.В., Грушин И.Т. Применение обобщенного метода Энскога к расчету процессов переноса в смесях реагирующих газов. II. // ТВТ, 1988, том 26, No 5, с. 878-887.
[39] Curtiss C.F. The classical Boltzman equation of a molecular gas. // J. Chem. Phys., 1992, vol. 92, No 2, p. 1416-1419.
[40] Curtiss C.F. Bound state effects on the classical Boltzman equation. // J. Chem. Phys., 1992, vol. 97, No 2, p. 1420-1423.
[41] Luo H., Hoheisel C. Collective transport in a molecular liquid with quadrupole interaction. // Phys. Rev. A, 1991, vol. 43, No 4, p. 1819-1825.
[42] Балеску Р. Статистическая механика заряженых частиц. М., Мир, 1967, 514 с.



[43] Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М., Наука, 1971, 332 с.
[44] Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., Наука, 1975, 352 с.
[45] Чен Ф. Введение в физику плазмы. М., Мир, 1987, 400 с.
[46] Лазарев А.В., Ларин А.В., Трубников Д.Н. О классической аппроксимации $\Omega^{(2,2)}$-интегралов. // Химическая физика, 1992, том 11, No 8, с. 1034-1037.
[47] Трубников Б.А. Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 1. Москва, Госатомиздат, 1963, с. 98-182.
[48] Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 1. Москва, Госатомиздат, 1963, с. 183-272.
[49] Крылов В.И. Интеграл столкновений кинетического уравнения для сильно неравновесной плазмы имеющей несколько сортов частиц. // ФП, 1991, том 17, No 7, с. 889-892.
[50] Алексеев Б.В., Грушин И.Т., Грушина Л.П. Применение обобщенного метода Энскога к расчету процессов переноса в ионизованном газе. // ТВТ, 1991, том 29, No 2, с. 251-260.
[51] Алексеев Б.В. К теории обобщенного кинетического уравнения Больцмана. // ТВТ, 1993, том 31, No 4, с. 626-635.
[52] Хохштим А., Массель Г. Вычисление коэффициэнтов переноса в ионизованных газах. В книге: Кинетические процессы в газах и плазме, сборник статей под ред. А.Хохштима. М., Атомиздат, 1972, 368 с. С. 126-221.
[53] Подлубный Л.И., Ростовский В.С., Филинов В.С. Теоретическое исследование электропроводности неидеальной плазмы аргона и ксенона. // ТВТ, 1988, том 26, No 2, с. 218-225.
[54] Максимов А.В., Силин В.П., Чеготов М.В. К теории переноса в полностью неидеальной плазме. // ФП, 1990, том 16, No 5, с. 575-586.
[55] Назаренко И.П., Паневин И.Г. Упрощенный метод расчета электропроводности, электронной проводности и термодиффузии аргона. // ТВТ, 1989, том 27, No 3, с. 482-489.
[56] Rosenfeld Ya. Screening potential in strongly coupled plasmas: Reanalysis of recent highly accurate simulations. // Phys. Rev. A, 1992, vol. 46, No 2, p. 1059-1065.
[57] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. Москва, Наука, 1982, 608 с.
[58] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Курс теоретической физики, т. 10. Физическая кинетика. Москва, Наука, 1979, 528 с.

[59] John W. Bond, Kenneth M. Watson, Jasper A. Welch. Atomic theory of gas dynamics. Massachusetts, Addison-Wesley Reading, 1965.

[60] Токарчук М.В., Омелян І.П., Кобрин О.Є. Кінетичне рівняння Енскога-Ландау. Обчислення коефіцієнтів переносу для моделі заряджених твердих кульок. Львів, 1992. / Препринт АН України, ІФКС-92-22У, 36 с.

[61] Kobryn A.E., Omelyan I.P. Enskog-Landau kinetic equation for two-component dense plasma. The solution, transport coefficients. Proceeding, Contributed papers of International Conference "Physics in Ukraine", volume: Plasma physics. Kiev, June 22-27 1993, p. 135-138.

[62] Жданов В.М. Явления переноса в многокомпонентной плазме. Москва, Энергоатомиздат, 1982, 177 с.

[63] Зубарев Д.Н., Хонькин А.Д. Метод построения нормальных решений кинетических уравнений с помощью граничных условий. // ТМФ, 1972, том 11, No 3, с. 403-412.

[64] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. Москва, Наука, 1977, 368 с.

[65] Balescu R. Transport processes in plasmas. Vol. 1: Classical transport. Amsterdam, North-Holland, 1988, 434 p. Vol. 2: Neoclassical transport. Amsterdam, North-Holland, 1988, 435 p.

[66] Балабанян Г.О., Хонькин А.Д. Построение обобщенных нормальных решений кинетических уравнений для смеси газов. // ТМФ, 1974, том 18, No 1, с. 130-137.

[67] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В. Вывод кинетических уравнений для системы твердых шаров методом неравновесного статистического оператора. Киев, 1990. / Препринт АН УССР, ИТФ-90-11Р, 27 с.

[68] Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. Москва, Наука, 1971, 415 с.

[69] Токарчук М.В., Омелян И.П. Нормальные решения Энскога-Власова методом граничных условий. Труды всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики", том 1. Львов, 3-5февраля 1987 г., с. 245-252.

Михайло Васильович Токарчук
Олександр Євгенійович Кобрин

Розв'язок кінетичного рівняння Енскога-Ландау методом граничних умов

Роботу отримано 7 лютого 1996р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії нерівноважних процесів

Виготовлено при ІФКС НАН України