

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

Про рівняння руху поляризованої дзиґи

А. Дувіряк

Анотація. З умов балансу моменту імпульсу та виразу для сили реакції випромінювання виводяться два різних рівняння руху поляризованої дзиґи, що відрізняються на член типу Шотта. Для симетричної дзиґи обидва рівняння інтегровні, і приводять до суттєво різних розв'язків. Дискутується питання про коректність умов балансу моменту імпульсу та роль члену типу Шотта.

On the equations of motion of a polarized spinning-top

A. Duviryak

Abstract. We derive, from the balance conditions of the angular momentum, and from the expression for radiation reaction force, two different equations of motion of a polarized spinning-top which differ by Schott-like term. Both equations are integrable for the symmetric top and lead to quite different solutions. Correctness of the angular momentum balance conditions and the role of Schott-like term are discussed.

ICMP-21-03U

А. Дувіряк

ПРО РІВНЯННЯ РУХУ ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ДЗИґИ

Подається в EJP
Submitted to EJP

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Аскольд Дувіряк

Про рівняння руху поляризованої дзиги

Роботу отримано 7 грудня 2021 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку атестаційною комісією ІФКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

Відомо, що інтенсивність випромінювання системи прискорених зарядів, яка описується формулою Лармора, не узгоджується з роботою сили променевої протидії цим зарядам, а різниця цих величин рівна швидкості зміни так званої енергії Шотта [1, 2]. Хоча дискусія про фізичну природу чи інтерпретацію енергії Шотта ведеться віддавна, усталеного уявлення про неї ще не склалося [3–5]. Інше питання – наскільки істотним є шоттівський член у рівнянні балансу енергії системи рухомих зарядів. В багатьох класичних підручниках з електродинаміки, таких як Джексона [6, § 16.2], Панофскі і Філіпса [7, § 21-6] чи Гріффіса [8, § 11.2.2], з цього рівняння виводять рівняння руху заряджених частинок, що враховує силу променевої протидії. При цьому вимагають, щоби шоттівський член давав нульовий внесок, принаймні у середньому за час руху заряду (наприклад, періодичного руху). Або ж вважають очевидним (як у підручнику Ландау-Ліфшиця [9, § 75]), що член Шотта є нехтувано малим, якщо обмежитися майже стаціонарним рухом системи зарядів¹.

У дійсності, величина шоттівського члена може бути різною. В літературі на простих прикладах руху релятивістичних частинок в електромагнетному полі показано, що під час періодичного руху малим може бути не тільки середнє [10], а й миттєве значення члена Шотта [11]. Але його нехтування при аналізі майже стаціонарного руху заряду у магнетному полі приводить до скінченної похибки у нахилі траєкторії [12]. А у рівноприскореному русі шоттівський член є від'ємним, сумірним за абсолютною величиною з іншими членами рівняння балансу енергії, і необмежено спадає у часі [4].

Подані вище приклади побудовані на основі рівнянь руху, отриманих безвідносно до формули Лармора чи балансу енергії – інакше ці рівняння, рух зарядів і їх енергія були б недостовірними. На щастя, існує низка альтернативних до вище зазначеного способів виведення рівнянь руху точкових зарядів [1, 9, 13–15]. Майже усі вони приводять до рівняння Лоренца-Абрагама-Дірака [16] чи його нерелятивістичного наближення, відомого як рівняння Абрагама-Лоренца [17]. З цих рівнянь можна однозначно вивести рівняння балансу енергії [9, § 75], що містить член Шотта, якою б не була його величина.

Подібно до інтенсивності випромінювання, в підручниках розглядається потік моменту імпульсу, що втрачається зарядами через випромінювання. Для однієї частинки в консервативному централь-ному полі швидкість втрати моменту імпульсу можна знайти в [6],

¹Тобто рухом, який був би стаціонарним, коли знехтувати випромінюванням.

для системи зарядів відповідну формулу виведено в [9, § 72, § 75]. Як і у випадку з енергією, ця формула не узгоджується з моментом сил променевої протидії зарядам, а різниця рівна швидкості зміни векторної величини, котру тут називатимемо *моментом імпульсу Шотта*. У згаданих підручниках пропонується, за аналогією до випадку з енергією, нехтувати відповідним членом типу Шотта і в рівнянні балансу моменту імпульсу також.

У даній роботі продемонстровано, що загалом така процедура є некоректною, і може приводити до хибних вислідів навіть у нерелятивістичному наближенні. Для цього розглядається вільна електрично нейтральна дзиґа, що має власний сталий електричний дипольний момент. Поступальний рух такої дзиґи є тривіальним рухом за інерцією, а для опису її обертового руху можна використати рівняння балансу моменту імпульсу. Виникає питання: чи включати у це рівняння шоттівський член? В обох випадках (з членом і без) рівняння балансу можна звести до нелінійних рівнянь типу Ойлера, і якщо дзиґа аксіально-симетрична, то ці рівняння інтегровні. Отримані розв'язки в обох випадках суттєво відрізняються один від одного, і представляють цілком різні еволюції дзиґи. Таким чином, постає проблема вибору коректного рівняння балансу моменту імпульсу, яка дискутується у Висновках.

2. Рівняння балансу моменту імпульсу системи зарядів

Розгляньмо нерелятивістичну систему зарядів q з масами m , розташованих у просторі в точках $\mathbf{r}(t)$ і рухомих зі швидкостями $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$, значно меншими від швидкості світла c . Така система втрачає енергію за через дипольне випромінювання (інші мультипольні компоненти в нерелятивістичному наближенні є нехтувано малими). Так само, система втрачає момент імпульсу, який можна обчислити по-різному. В підручнику Ландау і Ліфшиця це зроблено двома способами. 1-й спосіб, подібний до отримання формули Лармора – шляхом підрахунку потоку моменту імпульсу дипольного випромінювання через сферу, що охоплює заряди – приводить до формули (див. [9], §72, Задача 2, р-ня (3); також р-ня (75.7))

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}} \times \ddot{\mathbf{d}} \quad (2.1)$$

для моменту імпульсу $\mathbf{L} = \sum m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, де $\mathbf{d} = \sum q \mathbf{r}$ – дипольний момент системи; тут і далі підсумовування ведеться за усіма частин-

ками системи.

2-й спосіб ґрунтується на обчисленні моменту сил променевої протидії Абрагама-Лоренца, і дає іншу формулу (див. [9], §75, р-ня без номера):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}}. \quad (2.2)$$

Щоб отримати узгодження з формулою (2.1), автори [9] представляють вираз у правій частині (2.2) у вигляді:

$$\mathbf{d} \times \ddot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dt} \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}} \times \dot{\mathbf{d}} \quad (2.3)$$

і, зауваживши, що повна похідна за часом (1-й член справа) пропадає внаслідок усереднення впродовж стаціонарного руху (маючи на думці майже стаціонарний рух; див. виноску¹ на стор. 1), отримують формулу (2.1).

За аналогією до поняття енергії Шотта [1, 2], зручно ввести векторну величину, яку зватимемо *момент імпульсу Шотта*:

$$\mathbf{L}_S \equiv \frac{2}{3c^3} \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3} \frac{d}{dt} \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}. \quad (2.4)$$

Тоді з урахуванням р-ня (2.3) праву частину р-ня (2.2) можна звести до правої частини р-ня (2.1) плюс *шоттівський член* $\dot{\mathbf{L}}_S$ (швидкість зміни моменту імпульсу Шотта), який в [9, § 75] вважається нехтувано малим.

В підручнику Джексона [6, § 16.2] з рівняння Абрагама-Лоренца для частинки в зовнішньому центральному полі $V(r)$:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \frac{2q^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad \text{де } \mathbf{F}_{\text{ex}} = -\frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.5)$$

виводять рівняння балансу моменту імпульсу $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ частинки:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}}. \quad (2.6)$$

Тут враховано, що момент зовнішньої сили $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ex}} = 0$, а решту у правій частині знову можна представити так:

$$\frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{v}} = \tau_0 \frac{d^2 \mathbf{L}}{dt^2} - \frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.7)$$

де $\tau_0 = \frac{2q^2}{3mc^3}$ – малий параметр з розмірністю часу (для електрона $\tau_0 \approx (2/3) \times 10^{-23}$ сек.). В [6, § 16.2] припускається, що момент імпульсу \mathbf{L} мало змінюється за час τ_0 . Тому 1-м, шоттівським членом

$\dot{\mathbf{L}}_S = \tau_0 \ddot{\mathbf{L}}$, можна знехтувати, що зводить р-ня (2.6) до такого:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{2q^2}{3c^3} \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.8)$$

Прискорення у 2-му члені виражають через зовнішню силу з допомогою незбуреного рівняння руху². В результаті отримано рівняння балансу:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{\tau_0}{m} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dt} \right\rangle \mathbf{L}, \quad (2.9)$$

в якому усереднення $\langle \dots \rangle$ здійснено вздовж орбіти. З цього рівняння випливає, що $|\dot{\mathbf{L}}| = O(\tau_0)$, а $|\dot{\mathbf{L}}_S| = |\tau_0 \dot{\mathbf{L}}| = O(\tau_0^3)$, отже нехтування шоттівським членом було законним.

В наступних розділах ми розглянемо контрприклад, коли нехтування шоттівським членом приводить до неправильних вислідів.

3. Рівняння руху вільної поляризованої дзиги

Нехай система зарядів становить композитну частинку, яку розглядатимемо як тверде тіло – вільну дзигу. Якщо дзига в цілому електро-нейтральна, то її поступальний рух – це тривіальний рух за інерцією. Обертальний рух дзиги можна описати з допомогою рівняння балансу моменту імпульсу. Для цього довільну точку дзиги $\mathbf{r}(t)$ представимо так: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{O}(t)\boldsymbol{\rho}$, де $\mathbf{O}(t) \in \text{SO}(3)$ є матрицею повороту, а $\boldsymbol{\rho}$ – стає (у часі) розташування цієї точки у власній системі відліку дзиги. Звідси маємо кінематичні співвідношення:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{O}}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{O}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}), \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{O}\{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{\rho}\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор кутової швидкості дзиги у її власній системі відліку, дуальний до косо-симетричної матриці $\dot{\mathbf{O}} \equiv \mathbf{O}^T \dot{\mathbf{O}}$. Загалом, для довільного вектору $\boldsymbol{\alpha}$ у власній системі відліку, та його образу $\mathbf{a} = \mathbf{O}\boldsymbol{\alpha}$ в лабораторній, має місце співвідношення:

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{O}\{\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\alpha}\}. \quad (3.2)$$

Ці кінематичні співвідношення можна підставити у рівняння балансу моменту імпульсу, щоб отримати рівняння обертального руху типу Ойлера.

²Зауважмо, що в [9, §75] цей спосіб застосовують не лише до рівнянь балансу, але і для редукції прискорень і вищих похідних у правій частині рівнянь Абрагама-Лоренца (2.5) чи Лоренца-Абрагама-Дірака, а редуковані таким чином рівняння називають в літературі рівняннями Ландау-Ліфшиця.

У цьому місці виникає дилема – яке саме рівняння балансу обрати: (2.1) чи (2.2)?

Розгляньмо обидві можливості.

Підставляння співвідношень (3.1) в (2.1) дає рівняння:

$$\mathbf{l}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}\boldsymbol{\Omega} = -\frac{2}{3c^3} \{(\mathbf{d} \times \boldsymbol{\Omega})^2 \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{d} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}})) \mathbf{d}\}, \quad (3.3)$$

де $\mathbf{l} = \|I_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$) – тензор інерції, а $\mathbf{d} \equiv \mathbf{O}^T \mathbf{d} = \sum m \boldsymbol{\rho}$ – сталий дипольний момент дзиги у її власній системі відліку.

Подібним чином, врахування (3.1) і (3.2) в (2.2) дає рівняння:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{l}\boldsymbol{\Omega} &= \frac{2}{3c^3} \mathbf{d} \times \{ \mathbf{d} \times (\boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Omega} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \\ &+ (\mathbf{d} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \boldsymbol{\Omega} + 2(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \dot{\boldsymbol{\Omega}} \}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $\boldsymbol{\Omega} \equiv |\boldsymbol{\Omega}|$. Це рівняння, що є відповідником рівняння Абрагама-Лоренца для дзиги, природно назвати *рівнянням Абрагама-Лоренца-Ойлера (АЛО)*. Рівняння (3.3), в якому у порівнянні з (3.4) знехтувано шоттівським членом, назовемо *вкороченим рівнянням АЛО*.

Для опису повної динаміки дзиги у просторі рівняння (3.3) чи (3.4) слід доповнити рівняннями Пуасона:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

що пов'язують компоненти кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ з кутами Ойлера φ, θ, ψ .

4. Динаміка аксіально-симетричної дзиги

4.1. Вкорочені рівняння Абрагама-Лоренца-Ойлера

Надалі обмежимося випадком аксіально-симетричної дзиги з дипольним моментом вздовж осі симетрії:

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij}, \quad I_2 = I_1; \quad d_1 = d_2 = 0, \quad d_3 \equiv d \quad (4.1)$$

(підсумовування за i немає). Також вважатимемо, що $I_1 \neq 0, I_3 \neq 0$, якщо не зазначено інше. Тоді рівняння (3.3) розчеплюється у таку

нелінійну систему рівнянь, зведену до нормального вигляду:

$$\dot{\Omega}_1 - (1 - I_3/I_1)\Omega_2\Omega_3 = -\tau\Omega_\perp^2\Omega_1, \quad (4.2)$$

$$\dot{\Omega}_2 + (1 - I_3/I_1)\Omega_1\Omega_3 = -\tau\Omega_\perp^2\Omega_2, \quad (4.3)$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\tau\Omega_\perp^2\Omega_3, \quad (4.4)$$

де знову введено малий параметр розмірності часу $\tau = \frac{2d^2}{3I_1c^3}$, а $\Omega_\perp = |\mathbf{\Omega}_\perp| = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$, де $\mathbf{\Omega}_\perp = \{\Omega_1, \Omega_2, 0\}$.

Щоб розв'язати цю систему, домножмо спочатку р-ня (4.2) на Ω_2 , р-ня (4.3) на Ω_1 , і додамо їх, отримавши рівняння для Ω_\perp :

$$\dot{\Omega}_\perp = -\tau\Omega_\perp^3. \quad (4.5)$$

Його розв'язок

$$\Omega_\perp(t) = \Omega_{\perp 0}/R(t), \quad \text{де} \quad R(t) \equiv \sqrt{1 + 2\tau\Omega_{\perp 0}^2 t}, \quad \Omega_{\perp 0} \equiv \Omega_\perp(0), \quad (4.6)$$

можна підставити в (4.4), а тоді – в (4.2), (4.3), звівши усю систему до лінійної. Скориставшись аксіальною симетрією, виберімо початкові умови так, щоб $\Omega_{10} \equiv \Omega_1(0) = 0$. Тоді $\Omega_{\perp 0} = |\Omega_{20}|$, і розв'язок набуває вигляду:

$$\Omega_1(t) = \frac{\Omega_{20}}{R(t)} \sin \left\{ \frac{\tilde{\Omega}_{30}[R(t)-1]}{\tau\Omega_{20}^2} \right\}, \quad \Omega_2(t) = \frac{\Omega_{20}}{R(t)} \cos \left\{ \frac{\tilde{\Omega}_{30}[R(t)-1]}{\tau\Omega_{20}^2} \right\},$$

$$\Omega_3(t) = \Omega_{30}/R(t), \quad (4.7)$$

де $\Omega_{30} \equiv \Omega_3(0)$, а $\tilde{\Omega}_{30} \equiv (1 - I_3/I_1)\Omega_{30}$.

Маючи цей розв'язок, можна визначити розташування дзиги у просторі у кожен момент часу. Для цього обернімо рівняння Пуасона (3.5) щодо похідних від кутів Ойлера, звівши цю систему до нормального вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) / \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \Omega_1 \cos \psi - \Omega_2 \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= \Omega_3 - (\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Підставляння у праву частину розв'язку (4.6)-(4.7), і заміна часової та однієї з кутівих змінних:

$$t \mapsto \vartheta = [R(t)-1]/(\tau\Omega_{\perp 0}^2), \quad \psi \mapsto \tilde{\psi} = \psi - \tilde{\Omega}_{30}\vartheta \quad (4.9)$$

дозволяє спростити систему (4.8) до вигляду:

$$\begin{aligned} d\varphi/d\vartheta &= \Omega_{20} \cos \tilde{\psi} / \sin \theta \\ d\theta/d\vartheta &= -\Omega_{20} \sin \tilde{\psi}, \\ d\tilde{\psi}/d\vartheta &= \Omega_{30}I_3/I_1 - \Omega_{20} \cos \tilde{\psi} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Оскільки розглядається вільна дзига в ізотропному просторі, то усі її початкові розташування фізично еквівалентні, і досить обрати розв'язок для будь-яких початкових значень, наприклад, такий:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = 0 &\implies \psi = \tilde{\Omega}_{30}\vartheta, \\ \theta &= \operatorname{arctg}(\Omega_{20}/\tilde{\Omega}_{30}), \\ \varphi &= \frac{\Omega_{20}}{\sin \theta} \vartheta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Цей розв'язок з точністю до заміни $t \mapsto \vartheta$ збігається з розв'язком незбурених рівнянь Ойлера-Пуасона для вільної симетричної дзиги, тобто рівнянь (4.8) з функціями $\Omega_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), що є розв'язками р-нь Ойлера (4.2)-(4.4) з нулями у правій частині. Це означає, що дзига обертаючись прецесує зі сталим кутом θ (тобто, $\dot{\theta} = 0$), а швидкість прецесії $\dot{\varphi}$ зменшується з часом як $1/R(t) \sim 1/\sqrt{t}$. Зменшується так само і швидкість власного обертання $\dot{\psi}$, що є дивним. Дійсно, можна уявити еквівалентну дзигу – з тим самим тензором інерції та дипольним моментом, в якій усі заряди розташовані на осі симетрії. Тоді немає зарядів, що обертаються відносно осі симетрії. Звідки ж з'являється момент гальмівної сили щодо цієї осі ?

4.2. Редуковані рівняння Абрагама-Лоренца-Ойлера

Розглянемо тепер рівняння Абрагама-Лоренца-Ойлера (3.4). Воно містить у правій частині 2-гу похідну $\ddot{\mathbf{\Omega}}$, помножену на малий параметр $d^2/c^3 \propto \tau$, тобто є сингулярно-збуреним рівнянням, схожим за структурою до рівняння Абрагама-Лоренца (2.5). Такі рівняння допускають неаналітичні за параметром збурення τ надлишкові розв'язки, що описують нефізичний рух з необмеженим самоприскоренням. Проблема усувається редукуванням вищих похідних у малих членах з допомогою незбурених рівнянь руху та їх диференціальних наслідків, що дає фізично прийнятні рівняння руху типу Ландау-Ліфшица (див. зауваження² на стор. 4).

Якщо розписати покомпонентно рівняння (3.4) для аксіально-симетричної дзиги (4.1), і врахувати у правих частинах незбурені рівняння Ойлера (р-ня (4.2)-(4.4) з нулями справа) разом з їх диференціальними наслідками, то отримуємо таку систему *редукованих рівнянь Абрагама-Лоренца-Ойлера* [18, 19]:

$$\dot{\Omega}_1 - \Omega_2\tilde{\Omega}_3 = -\tau\{\Omega_\perp^2 + (I_3/I_1)^2\Omega_3^2\}\Omega_1, \quad (4.12)$$

$$\dot{\Omega}_2 + \Omega_1\tilde{\Omega}_3 = -\tau\{\Omega_\perp^2 + (I_3/I_1)^2\Omega_3^2\}\Omega_2, \quad (4.13)$$

$$\dot{\Omega}_3 = 0, \quad (4.14)$$

де $\tilde{\Omega}_3 \equiv (1 - I_3/I_1)\Omega_3$. З р-ня (4.14) випливає, що $\Omega_3 = \text{const}$. Решта рівнянь (4.12), (4.13) інтегруються подібно до рівнянь (4.2), (4.3). Із введеними вище позначеннями і аналогічним вибором початкових умов $\Omega_{10} = 0$ розв'язок має вигляд:

$$\Omega_1 = \Omega_{20}\Phi(t) \sin \tilde{\Omega}_3 t, \quad \Omega_2 = \Omega_{20}\Phi(t) \cos \tilde{\Omega}_3 t, \quad (4.15)$$

$$\Phi(t) \equiv \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta e^{2t/\sigma} - 1}}, \quad \beta \equiv 1 + \frac{I_3^2 \Omega_3^2}{I_1^2 \Omega_{20}^2}, \quad \sigma \equiv \frac{I_1^2}{I_3^2 \Omega_3^2 \tau}. \quad (4.16)$$

В границі $\Omega_3 \rightarrow 0$ функція $\Phi(t)$ зводиться до $1/R(t)$; див. (4.6).

Рівняння Пуассона (4.8) для цього випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Omega_{20}\Phi(t) \cos \bar{\psi} / \sin \theta \\ \dot{\theta} &= -\Omega_{20}\Phi(t) \sin \bar{\psi}, \\ \dot{\bar{\psi}} &= \Omega_{30}I_3/I_1 - \Omega_{20}\Phi(t) \cos \bar{\psi} \text{ctg } \theta, \end{aligned} \quad (4.17)$$

де $\bar{\psi} = \psi - \tilde{\Omega}_3 t$.

Знову, в силу ізотропності простору, досить знайти будь-який частковий розв'язок рівнянь (4.17). Це можна здійснити чисельно, оскільки знайти точний аналітичний розв'язок не вдається. Натомість легко показати, що існує частковий розв'язок з такою асимптотикою при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi \sim (I_3/I_1)\Omega_3 t, \quad \psi \sim \tilde{\Omega}_3 t, \quad \theta \sim e^{-t/\sigma}. \quad (4.18)$$

Отже, в границі $t \rightarrow \infty$ дзиґа орієнтується вертикально ($\theta \rightarrow 0$) і обертається з кутовою швидкістю $\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \Omega_3$. Це не узгоджується з розв'язком для випадку вкорочених рівнянь Абрагама-Лоренца-Ойлера, коли дзиґа при $t \rightarrow \infty$ припиняє будь-який обертовий рух, згідно з розв'язком (4.11).

5. Висновки

Рівняння балансу моменту імпульсу системи зарядів без члену Шотта (2.1) і з ним (2.2) приводять до різних обертових рухів симетричної поляризованої дзиґи. В першому випадку дзиґа рухається так, як і вільна дзиґа Ойлера, сповільнюючи однак в асимптотиці $t \rightarrow \infty$ усі кутові швидкості $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ (а $\dot{\theta} = 0$) пропорційно за степеневим законом $\sim 1/\sqrt{t}$; див. рис. 1. В другому випадку дзиґа зменшує кут нахилу за експоненційним законом, стабілізуючи в асимптотиці орієнтацію власної осі та власне обертання з кутовою швидкістю

Ω_3 , моментом імпульсу $L_3 = I_3\Omega_3$ та енергією $E = I_3\Omega_3^2/2$; рис. 2. Хоча така поведінка дзиґи видається природнішою, ніж у першому випадку, потрібні більш строгі аргументи на користь того чи іншого рівняння.

Згідно з [9, § 75], рівняння (2.2) виведено з виразу для сили реакції дипольного випромінювання – узагальнення виразу Абрагама-Лоренца для системи зарядів. Оскільки рівняння Абрагама-Лоренца загальноприйняте, то слід надати перевагу рівнянню балансу (2.2). Зауважмо, що автори підручника [9] очевидно розглядають його як проміжну формулу (ненумеровану у тексті), яку далі зводять до раніше отриманого рівняння (2.1) шляхом нехтування шоттівським членом. Умовою правомірності такого кроку вказується стаціонарність руху (очевидно, йдеться про незбурений рух). У нашому випадку вільна симетрична дзиґа Ойлера очевидно здійснює стаціонарний рух, однак врахування радіаційного збурення без шоттівського члену чи з ним приводить до різних майже стаціонарних рухів з різними кінцевими станами дзиґи. Тому застосування принаймні одного з рівнянь балансу (2.1) чи (2.2) в нашому випадку є помилковим.

Подібно до формули Лармора, рівняння балансу (2.1) виведено в [9] (§ 72, Задача 2) шляхом інтегрування потоку моменту імпульсу через сферу деякого радіусу R_0 , що охоплює систему зарядів. Згідно з поширеною інтерпретацією, енергія Шотта (а в даному випадку – момент імпульсу) не врахована у формулі Лармора (у даному випадку – в р-ні (2.1)), бо локалізована поблизу зарядів [4]. Але нехтування шоттівським членом у нашому випадку приводить до безповоротної “втрати” дзиґою енергії $E = I_3\Omega_3^2/2$ та моменту імпульсу $L_3 = I_3\Omega_3$ поза поверхню інтегрування, що ставить під сумнів таке припущення про локалізацію. Згідно з іншою, пізнішою інтерпретацією [5], при розгляді формули Лармора зазвичай не враховують той факт, що хоча радіус сфери інтегрування R_0 випадає з остаточної формули (див., наприклад, (67.8) чи (67.9) в [9]), її права частина відноситься до моменту часу, спізненого на R_0/c – величину, необхідну для досягнення електромагнетним сигналом сфери з її центру. Перерахунок формули Лармора до “реального” часу, здійснений в [5], відновлює у ній шоттівський член, і цим усуває неузгодженість рівнянь балансу енергії. Такий перерахунок, однак, апелює до електромагнетної структури заряджених частинок, що відіграє, таким чином, роль носія енергії Шотта. В Додатку подібний перерахунок здійснено у рівнянні балансу моменту імпульсу зарядженої частинки, який демонструє коректність формули (2.2) і хибність застосування формули (2.1).

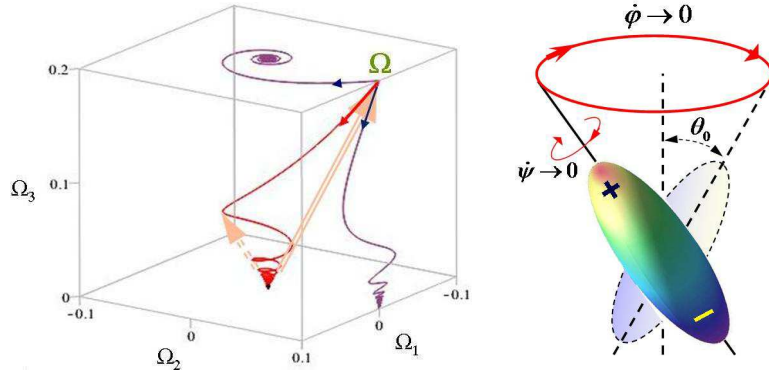


Рис. 1. Зліва – годограф кутової швидкості Ω у власній системі відліку симетричної поляризованої дзиґи та його проєкції на координатні площини згідно із вкороченими рівняннями АЛО: відношення головних моментів інерції $I_3/I_1 = 2/5$, початкова кутова швидкість $\Omega_0 = \{0, 0.1, 0.2\}$ в одиницях $1/\tau$. Справа – якісна поведінка дзиґи у просторі: кут нахилу θ – сталий, а кутові швидкості прецесії $\dot{\phi}$ та власного обертання $\dot{\psi}$ зменшуються в асимптотиці $t \rightarrow \infty$ як $\sim 1/\sqrt{t}$.

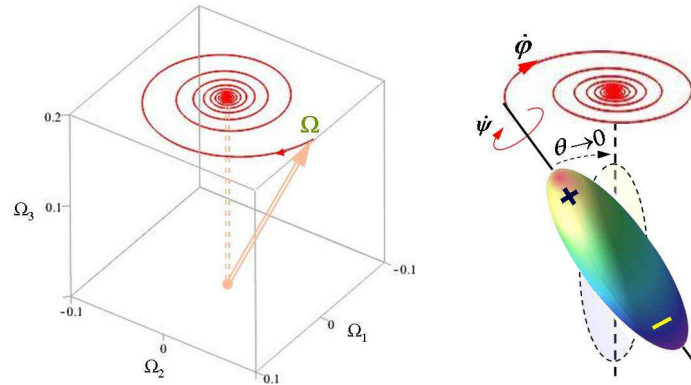


Рис. 2. Те саме, що й на рис. 1, але згідно з редукованими рівняннями АЛО: кут нахилу θ в асимптотиці $t \rightarrow \infty$ експоненційно прямує до нуля, а кутова швидкість власного обертання прямує до сталої Ω_3 .

Додаток. До природи шоттівського члена у рівнянні балансу моменту імпульсу

Услід за [5] представимо заряджену частинку як сферу малого радіусу r_0 , а її масу – як суму “защепної” маси m_0 та електромагнетної маси $m_{em} = 2q^2/(3c^2r_0)$. Тоді рівняння руху можна представити так:

$$\frac{d}{dt} \{m_0 \mathbf{v}(t) + m_{em} \mathbf{v}(t - r_0/c)\} + O(r_0) = \mathbf{F}_{ex}(t), \quad (\text{A.1})$$

що в границі $r_0 \rightarrow 0$ повна маса $m = m_0 + m_{em}$ залишається скінченною, а рівняння (A.1) переходить в (2.5). 1-й член у фігурних дужках представляє “защепний” внесок в імпульс частинки, 2-й член – внесок її електромагнетного “хутра”; внаслідок скінченності розмірів заряду ця частина реагує на зміну швидкості зі спізненням. Надалі момент часу t як аргумент фізичних величин будемо упускати, а спізнений момент часу $t - r_0/c$ будемо відзначати індексом “ret”.

Домножмо рівняння (A.1) векторно на \mathbf{r} і перегрупуємо члени:

$$\frac{d}{dt} \{m_0 \mathbf{r} \times \mathbf{v} + m_{em} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_{ret}\} + O(r_0) = -\frac{2q^2}{3c^3} [\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}]_{ret}. \quad (\text{A.2})$$

Це рівняння прояснює зміст рівняння (2.8): зліва у фігурних дужках – повний момент імпульсу частинки, що містить “защепний” та електромагнетний внески. Справа – результат інтегрування потоку моменту імпульсу через сферу, радіус якої не може бути меншим, ніж r_0 (звідси і спізнений аргумент). У границі

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} m_{em} \{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]_{ret} - \mathbf{r} \times \mathbf{v}\} = -\tau_0 \dot{\mathbf{L}} \equiv -\mathbf{L}_S, \quad (\text{A.3})$$

де $\tau_0 = 2q^2/(3mc^3)$, що зводить рівняння (A.2) до (2.6). Очевидно, що подібним чином можна інтерпретувати зв’язок рівнянь балансу (2.1) і (2.2) для системи зарядів.

Література

1. Schott G. Electromagnetic radiation and the mechanical reactions arising from it. — Cambridge University Press, 1912.
2. Eriksen E., Grøn Ø. On the energy and momentum of an accelerated charged particle and the sources of radiation // Eur. J. Phys. — 2007. — Vol. 28, no. 3. — P. 401–407.
3. Rowland D. R. Physical interpretation of the Schott energy of an accelerating point charge and the question of whether a uniformly

- accelerating charge radiates // *Eur. J. Phys.* — 2010. — Vol. 31, no. 5. — P. 1037–1051.
4. Grøn Ø. The significance of the Schott energy for energy-momentum conservation of a radiating charge obeying the Lorentz–Abraham–Dirac equation // *Am. J. Phys.* — 2011. — Vol. 79, no. 1. — P. 115–122.
 5. Singal A. K. Compatibility of Larmor’s formula with radiation reaction for an accelerated charge // *Found. Phys.* — 2016. — Vol. 46, no. 5. — P. 554–574.
 6. Jackson J. D. *Classical electrodynamics.* — 3rd edition. — Wiley, 1999.
 7. Panofsky W. K. H., Phillips M. *Classical electricity and magnetism.* Dover Books on Physics. — 2nd edition. — Dover Publications, 1962.
 8. Griffiths D. J. *Introduction to Electrodynamics.* — 4th edition. — Cambridge University Press, 2017.
 9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* — 6-е изд. — Москва : Наука, 1973.
 10. Singal A. K. Poynting flux in the neighbourhood of a point charge in arbitrary motion and radiative power losses // *Eur. J. Phys.* — 2016. — Vol. 37, no. 4. — P. 045210.
 11. Nakamura T. On the Schott term in the Lorentz–Abraham–Dirac equation // *Quantum Beam Sci.* — 2020. — Vol. 4, no. 4. — 34. — 8 p.
 12. Singal A. K. Radiation reaction and the pitch angle changes for a charge undergoing synchrotron losses // *MNRAS.* — 2016. — Vol. 458, no. 3. — P. 2303–2306.
 13. de Groot S. R., Suttrop L. G. *Foundations of electrodynamics.* — Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1972.
 14. Rohrlich F. *Classical charged particles: foundations of their theory.* — New York : Addison-Wesley, 1990.
 15. Yaremko Yu., Tretyak V. *Radiation reaction in classical field theory: basics, concepts, methods.* — Saarbrücken : LAP, 2012.
 16. Dirac P. A. M. *Classical theory of radiating electrons* // *Proc. R. Soc. Lon. Ser-A.* — 1938. — Vol. 167, no. 929. — P. 148–169.
 17. Lorentz H. A. *The Theory of Electrons: And its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat.* — 2nd edition. — New York : Dover Publications, Inc., 1952.
 18. Duviryak A. Rotary dynamics of the rigid body electric dipole under the radiation reaction // *Eur. Phys. J. D.* — 2020. — Vol. 74, no. 9. — 189. — 7 p.
 19. Дувіряк А. Променева протидія зарядженої дзиги // *Фіз. зб. НТШ.* — 2020. — Т. 10. — С. 128–144.

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. *Condensed Matter Physics* is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN: Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences; ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alerting Services; INSPEC; “Referatyvnyi Zhurnal”; “Dzherelo”.

EDITOR IN CHIEF: Ihor Yukhnovskii.

EDITORIAL BOARD: T. Arimitsu, *Tsukuba*; J.-P. Badiali, *Paris*; B. Berche, *Nancy*; T. Bryk (Associate Editor), *Lviv*; J.-M. Caillol, *Orsay*; C. von Ferber, *Coventry*; R. Folk, *Linz*; L.E. Gonzalez, *Valladolid*; D. Henderson, *Provo*; F. Hirata, *Okazaki*; Yu. Holovatch (Associate Editor), *Lviv*; M. Holovko (Associate Editor), *Lviv*; O. Ivankiv (Managing Editor), *Lviv*; Ja. Ilnytskyi (Assistant Editor), *Lviv*; N. Jakse, *Grenoble*; W. Janke, *Leipzig*; J. Jedrzejewski, *Wroclaw*; Yu. Kalyuzhnyi, *Lviv*; R. Kenna, *Coventry*; M. Korynevskii, *Lviv*; Yu. Kozitsky, *Lublin*; M. Kozlovskii, *Lviv*; O. Lavrentovich, *Kent*; M. Lebovka, *Kyiv*; R. Lemanski, *Wroclaw*; R. Levitskii, *Lviv*; V. Loktev, *Kyiv*; E. Lomba, *Madrid*; O. Makhanets, *Chernivtsi*; V. Morozov, *Moscow*; I. Mryglod (Associate Editor), *Lviv*; O. Patsahan (Assistant Editor), *Lviv*; O. Pizio, *Mexico*; N. Plakida, *Dubna*; G. Ruocco, *Rome*; A. Seitsonen, *Zürich*; S. Sharapov, *Kyiv*; Ya. Shchur, *Lviv*; A. Shvaika (Associate Editor), *Lviv*; S. Sokołowski, *Lublin*; I. Stasyuk (Associate Editor), *Lviv*; J. Strečka, *Košice*; S. Thurner, *Vienna*; M. Tokarchuk, *Lviv*; I. Vakarchuk, *Lviv*; V. Vlachy, *Ljubljana*; A. Zagorodny, *Kyiv*

CONTACT INFORMATION:

Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2761978; Fax: +38(032)2761158
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua <http://www.icmp.lviv.ua>