Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–16–06U

І.Р. Юхновський, П.А. Глушак, М.В. Токарчук

ЛАНЦЮЖОК КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ ББГКІ, МЕТОД НЕРІВНОВАЖНОГО СТАТИСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ТА МЕТОД КОЛЕКТИВНИХ ЗМІННИХ В НЕРІВНОВАЖНІЙ СТАТИСТИЧНІЙ ТЕОРІЇ РІДИН

ЛЬВІВ

УДК: 536.75; 538.931

PACS: 05.20.Dd, 05.40.-a, 05.60.Cd

Ланцюжок кінетичних рівнянь ББГКІ, метод нерівноважного статистичного оператора та метод колективних змінних в нерівноважній статистичній теорії рідин

І.Р. Юхновський, П.А. Глушак, М.В. Токарчук

Анотація. Запропоновано ланцюжок кінетичних рівнянь для нерівноважних одночастинкової, двочастинкової і s-частинкових функцій розподілу частинок з урахуванням нелінійних гідродинамічних флуктуацій. Використовується метод нерівноважного статистичного оператора Зубарєва з проектуванням. Нелінійні флуктуації описуються нерівноважною функцією розподілу колективних змінних, що задовольняє узагальнене рівняння Фоккера-Планка. На основі методу колективних змінних запропоновано спосіб розрахунку нерівноважної структурної функції розподілу колективних змінних та їх гідродинамічних швидкостей (вище гаусового наближення) з розділеними вкладами від короткодіючих і далекодіючих взаємодій.

BBGKY chain of kinetic equations, non-equilibrium statistical operator method and collective variable method in the statistical theory of non-equilibrium liquids

I.R. Yukhnovskii, P.A. Hlushak, M.V. Tokarchuk

Abstract. A chain of kinetic equations for non-equilibrium one-particle, two-particle and s-particle distribution functions of particles which take into account nonlinear hydrodynamic fluctuations is proposed. The method of Zubarev non-equilibrium statistical operator with projection is used. Nonlinear fluctuations are described with non-equilibrium distribution function of collective variables that satisfies generalized Fokker-Planck equation. On the basis of the method of collective variables a scheme of calculation of non-equilibrium structural distribution function of collective variables and their hydrodynamic velocities (above Gaussian approximation) with separated contributions from short and long-range interactions is proposed.

Подається в Condensed Matter Physics
Submitted to Condensed Matter Physics

Ігор Рафаїлович Юхновський
Петро Андрійович Глушак
Михайло Васильович Токарчук

ЛАНЦЮЖОК КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ ББГКІ, МЕТОД НЕРІВНОВАЖНОГО СТАТИСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ТА МЕТОД КОЛЕКТИВНИХ ЗМІННИХ В НЕРІВНОВАЖНІЙ СТАТИСТИЧНІЙ ТЕОРІЇ РІДИН

Роботу отримано 31 серпня 2016 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом теорії м'якої речовини

Виготовлено при ІФКС НАН України

1. Вступ

Розвиток рівноважної і нерівноважної статистичної механіки класичних та квантових систем, який почався у 40-их роках після робіт М.М. Боголюбова [1] та [2–5] і продовжується у наш час, привів до суттєвого прогресу в теорії газів [6–36], рідин [7, 21–23, 27, 28, 37–75], плазми [19, 22, 42, 47, 57, 76–87]. У монографії [1], якій виповнюється **70** років, М.М. Боголюбов у строгій формі сформулював ідею про ієрархію часів релаксації в системі багатьох взаємодіючих частинок і скороченого числа параметрів опису еволюції системи, яка відіграла принципову роль у розвитку сучасних методів нерівноважної статистичної механіки для вивчення динаміки макроскопічних систем на кінетичній і гідродинамічній стадіях, виходячи із основних принципів статистичної механіки. Важливе значення для розвитку цього напрямку мали роботи Д.М. Зубарєва [88–90], Р. Цванцига [91–93], Б. Робертсона і К. Кавасакі, Дж. Гантона [94–96], С.В. Пелетмінського і О.Я. Яценко [97], Д.М. Зубарєва і В.П. Калашнікова [98–100]. Результати досліджень, виконаних у цьому напрямку, детально викладені у монографіях [42, 47, 63, 64, 67, 68, 72, 100–102] та оглядах [53, 56, 99]. Однак поряд з важливими досягнутими фундаментальними результатами в статистичній фізиці даних теорій, як і у інших областях сучасної фізики, існуює багато ще проблем, особливо, в теорії нерівноважних процесів. Зокрема, дослідження нелінійних кінетичних та гідродинамічних флуктуацій у густих газах, плазмі та рідинах, у явищах турбулентності, динаміці фазових переходів, хімічних реакціях, самоорганізаційних процесах залишаються актуальними як на кінетичному, так і гідродинамічному рівнях опису в статистичній теорії нерівноважних процесів [103–121]. Нерівноважні стани таких систем далекі від рівноваги і тому важливими є дослідження, з однієї сторони, процесів встановлення стаціонарних станів із характерними часами життя, з іншої — процесів релаксації до вже відомих нерівноважних станів, зокрема, які описуються в рамках молекулярної гідродинаміки [52, 122–124] у випадку рідин та густих газів. Важливо зазначити, що особливістю досліджень нерівноважних явищ у густих газах, рідинах, густій плазмі (пилова плазма) є узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів [125–129] та врахування характерних короткодіючих та далекодіючих взаємодій між частинками систем. Зокрема, нерівноважний процес фазового переходу газ-рідина характеризується нелінійними гідродинамічними флуктуаціями маси, імпульсу, енергії частинок, які описують колективну природу процесу і формують відповідно просторово-часову поведінку коефіцієнтів переносу в'язкості, теплопровідності, часових кореляційних функцій, зокрема динамічного структурного фактора. У той же час у колективній динаміці даних флуктуацій внаслідок гетерогенності, зароджуються краплі у газі (при переході із газової фази у рідину), чи бульбашки у рідині (при переході рідини у газ), формування яких має кінетичну природу, коли певна група частинок отримує внаслідок перерозподілу імпульсу і енергії в системі значне зменшення (у випадку крапель), чи збільшення (у випадку бульбашок) кінетичної енергії частинок. Частинки, які формують бульбашки чи краплі дифундують із своїх фаз у рідину (у газ), і навпаки. Вони різняться значеннями імпульсу, енергії та тиску у різних фазах. Всі ці особливості пов'язані із нерівноважними унарними, парними та s-частинковими функціями розподілу (що залежать від координат, імпульсу та часу), які задовольняють ланцюжку рівнянь ББГКІ. Тому побудова кінетичних рівнянь з врахуванням нелінійних гідродинамічних флуктуацій [21, 130–133] є важливою проблемою в теорії процесів переносу в густих газах, рідинах. Зокрема, ця проблема виникає при описі низькочастотних аномалій у кінетичних рівняннях та пов'язаних з ними «довгих хвостів» кореляційних функцій [23, 134, 135].

Головна трудність проблеми полягає у тому, що кінетика та гідродинаміка цих процесів є сильно пов'язані й повинні розглядатися одночасно. У роботах [125, 136, 137] був запропонований узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів у густих газах і рідинах на основі методу нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [63,64,67,68]. Зокрема, цей підхід був застосований для отримання з ланцюжка рівнянь ББГКІ кінетичного рівняння ревізованої теорії Енскога [137,138] для системи твердих сфер та кінетичного рівняння Енскога-Ландау для однокомпонентної системи заряджених твердих сфер. У роботі [125] було отримано узагальнені рівняння гідродинаміки для гідродинамічних змінних (густини числа частинок, їх імпульсу та густини повної енергії), що пов'язані з кінетичним рівнянням для нерівноважної одночастинкової функції розподілу. Пізніше [126, 128] ці рівняння використовувались для досліджень часових кореляційних функцій та спектру колективних збуджень для слабо нерівноважних процесів у рідинах. Очевидно, підхід [125,136,137] може бути застосований для опису як слабо так сильно нерівноважних систем.

У той же час для узгодженого опису кінетичних процесів та нелінійних гідродинамічних флуктуацій зручно переформулювати цю теорію таким чином, щоб отримати набір рівнянь для нерівноважної

одночастинкової функції розподілу та функціоналу розподілу гідродинамічних змінних — густин числа частинок, їх імпульсу та енергії. Ідея такого підходу була сформульована у роботах [139, 140]. Ми розвинемо даний підхід з метою узгодженого опису кінетичних та гідродинамічних процесів, які характеризуються нелінійними флуктуаціями, що важливо, зокрема для опису нерівноважних процесів фазових переходів газ-рідина.

У другому розділі отримаємо нерівноважний статистичний оператор нерівноважного стану системи, коли параметрами скороченого опису є нерівноважна одночастинкова функція розподілу частинок, нерівноважне середнє значення густини потенціальної енергії взаємодії і нерівноважна функція розподілу нелінійних гідродинамічних змінних густин маси, імпульсу та енергії. За допомогою нього побудуємо кінетичні рівняння для нерівноважних одно-, дво-, s-частинкових функцій розподілу частинок з врахуванням нелінійних гідродинамічних флуктуацій, нерівноважна функція розподілу яких задовольняє узагальненому рівнянню Фоккера-Планка.

У третьому розділі розглянемо один із способів розрахунку структурної функції розподілу гідродинамічних колективних змінних та їх гідродинамічних швидкостей (вище гаусового наближення), що входять в узагальнене рівняння Фоккера-Планка для нерівноважної функції розподілу гідродинамічних колективних змінних. При цьому будуть розділені вклади від короткодіючих і далекодіючих взаємодій між частинками. Це приведе до того, що короткодіючі взаємодії (модель твердих сфер) описуватимуться в координатному просторі, а далекодіючі — у просторі колективних змінних. Більше того, короткодіюча складова буде розглядається як базисна, якій відповідає ланцюжок рівнянь ББГКІ для моделі твердих сфер [127].

2. Нерівноважна функція розподілу та ланцюжок кінетичних рівнянь ББГКІ в методі нерівноважного статистичного оператора Зубарєва

Для узгодженого опису кінетичних та гідродинамічних флуктуацій у класичних густих газах та рідинах необхідний відбір параметрів скороченого опису одночастинкових і колективних процесів. В якості таких параметрів ми виберемо нерівноважну одночастинкову функцію розподілу $f_1(x;t) = \langle \hat{n}_1(x) \rangle^t$, нерівноважне середнє значення енергії взаємодії частинок $H^{int}(\mathbf{r},t) = \langle \hat{H}^{int}(\mathbf{r}) \rangle^t$ та нерівноважну функцію розподілу гідродинамічних змінних $f(a;t) = \langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t$,

$$\hat{n}_1(x) = \sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j) = \sum_{j=1}^{N}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_j) \tag{2.1}$$

— мікроскопічна фазова густина числа частинок, $x_j = (\mathbf{r}_j,\mathbf{p}_j)$ — координати та імпульси частинок фазового простору, N — повне число частинок системи в об'ємі V.

$$\hat{H}^{int}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq l=1}^{N}\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \tag{2.2}$$

— мікроскопічна густина потенціальної енергії взаємодії частинок системи. Мікроскопічний фазовий розподіл гідродинамічних змінних задається наступним чином:

$$\hat{f}(a) = \delta(\hat{a}-a) = \prod_{m=1}^{3}\prod_{\mathbf{k}}\delta(\hat{a}_{m\mathbf{k}}-a_{m\mathbf{k}}), \tag{2.3}$$

де $\hat{a}_{1\mathbf{k}} = \hat{n}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{2\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{3\mathbf{k}} = \hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}$ — Фур'є компоненти густин числа частинок, їх імпульсу та енергії:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \qquad \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{N}\mathbf{p}_j\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \tag{2.4}$$
$$\hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{N}\Big[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{l\neq j=1}^{N}\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|)\Big]\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j},$$

і $a_{m\mathbf{k}} = (n_{\mathbf{k}},\mathbf{J}_{\mathbf{k}},\varepsilon_{\mathbf{k}})$ — відповідні колективні змінні. $\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|) = \Phi(|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j|)$ — парний потенціал взаємодії між частинками. Середні значення $\langle\hat{n}_1(x)\rangle^t$, $\langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t$ і $\langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t$ розраховуються з нерівноважною функцією розподілу N-частинок $\varrho(x^N;t)$, $\langle\ldots\rangle^t = \int d\Gamma_N\ldots\varrho(x^N;t)$, що задовольняє рівнянню Ліувілля. У відповідності до ідеї скороченого опису нерівноважного стану ця функція є функціоналом:

$$\varrho(x^N;t) = \varrho\big(\ldots,f_1(x;t),\langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t,f(a;t),\ldots\big). \tag{2.5}$$

Для знаходження нерівноважної функції розподілу $\varrho(x^N;t)$ ми використаємо метод Зубарєва [140, 141], у якому загальний розв'язок рівняння Ліувілля з врахуванням процедури проектування може

бути поданий у вигляді:

$$\varrho(x^N;t) = \varrho_q(x^N;t) - \int_{-\infty}^{t}dt'\mathrm{e}^{\epsilon(t'-t)}T_q(t,t')\big(1-P_q(t')\big)iL_N\varrho_q(x^N;t'), \tag{2.6}$$

де $\epsilon\to+0$ після граничного термодинамічного переходу, що відбирає запізнюючі розв'язки рівняння Ліувілля з оператором iL_N. $T_q(t,t') = \exp_+(-\int_{t'}^{t}dt'(1-P_q(t'))iL_N)$ — узагальнений оператор еволюції у часі з врахуванням проектування Кавасакі-Гантона $P_q(t')$. Структура $P_q(t')$ залежить від квазірівноважної функції розподілу $\varrho_q(x^N;t)$, яка у методі Зубарєва знаходиться із екстремуму інформаційної ентропії при фіксованих значеннях параметрів скороченого опису (спостережуваних величин), у нашому випадку $f_1(x;t) = \langle\hat{n}_1(x)\rangle^t$, $\langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t$ та $f(a;t) = \langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t$, і збережені умови нормування

$$\int d\Gamma_N\varrho_q(x^N;t) = 1,\ d\Gamma_N = \frac{(dx)^N}{N!} = \frac{(dx_1,\ldots,dx_N)}{N!},\ dx = d\mathbf{r}d\mathbf{p}. \tag{2.7}$$

Тоді квазірівноважна функція розподілу може бути записана у вигляді:

$$\varrho_q(x^N;t) = \exp\Big[-\Phi(t) - \int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\hat{H}^{int}(\mathbf{r}) - \int dx\gamma(x;t)\hat{n}_1(x) - \int daF(a;t)\hat{f}(a)\Big], \tag{2.8}$$

де $da = \{dn_{\mathbf{k}}, d\mathbf{J}_{\mathbf{k}}, d\varepsilon_{\mathbf{k}}\}$. $\Phi(t)$ — функціонал Мас'є-Планка, який визначається із умови нормування квазірівноважної функції розподілу

$$\Phi(t) = \ln\int d\Gamma_N\exp\Big[-\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\hat{H}^{int}(\mathbf{r}) - \int dx\gamma(x;t)\hat{n}_1(x) - \int daF(a;t)\hat{f}(a)\Big].$$

$\gamma(x;t)$, $\beta(\mathbf{r};t)$ та $F(a;t)$ — множники Лагранжа, які знаходяться із умов самоузгодження:

$$f_1(x;t) = \langle\hat{n}_1(x)\rangle^t = \langle\hat{n}_1(x)\rangle^t_q, \quad \langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t_q, \tag{2.9}$$
$$f(a;t) = \langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t = \langle\delta(\hat{a}-a)\rangle^t_q,$$

де $\langle\ldots\rangle^t_q = \int d\Gamma_N\ldots\varrho_q(x^N;t)$. Для розкриття внутрішньої структури нерівноважної функції розподілу $\varrho(x^N;t)$ ми виключимо функцію

$F(a;t)$ в квазірівноважній функції розподілу, використавши умову самоузгодження (2.9). В результаті отримаємо:

$$\varrho_q(x^N;t)=\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big|_{a=\hat a}. \tag{2.10}$$

Тут

$$\begin{aligned} W(a;t)&=\int d\Gamma_N \mathrm{e}^{-\Phi(t)-\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\hat H^{int}(\mathbf{r})-\int dx\gamma(x;t)\hat n_1(x)}\hat f(a) \\ &=\int d\Gamma_N \varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\hat f(a) \end{aligned} \tag{2.11}$$

— нерівноважна структурна функція розподілу гідродинамічних змінних, яка є якобіяном переходу $\hat f(a)$ у простір колективних змінних $n_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{k}}$, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ з усередненням з квазірівноважною функцією розподілу

$$\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)=\exp\Big\{-\Phi(t)-\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\hat H^{int}(\mathbf{r})-\int dx\gamma(x;t)\hat n_1(x)\Big\}, \tag{2.12}$$

яка була побудована у роботах [125, 126, 128] при узгодженому описі кінетичних та гідродинамічних процесів систем взаємодіючих частинок. Квазірівноважній функції розподілу (2.10), відповідає ентропія Гібса

$$\begin{aligned} S(t)=-\langle\ln\varrho_q(x^N;t)\rangle_q^t&=\Phi(t)+\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\langle\hat H^{int}(\mathbf{r})\rangle^t \\ &+\int dx\gamma(x;t)\langle\hat n_1(x)\rangle^t+\int da f(a;t)\ln\frac{f(a;t)}{W(a;t)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

В комбінації із умовами самоузгодження (2.9), вона може застосовуватися як ентропія нерівноважного стану. У відповідності з (2.8) для отримання явної форми для нерівноважної функції розподілу необхідно виконати дію операторів Ліувілля і Кавасакі-Гантона на функцію $\varrho_q(x^N;t)$. Проекційний Кавасакі-Гантона відповідно до (2.10) має наступну структуру:

$$\begin{aligned} P_q(t)\varrho'&=\varrho_q(x^N;t)\int d\Gamma_N\varrho'+\int dx\frac{\partial\varrho_q(x^N;t)}{\partial\langle\hat n_1(x)\rangle^t} \\ &\times\Big[\int d\Gamma_N\hat n_1(x)\varrho'-\langle\hat n_1(x)\rangle^t\int d\Gamma_N\varrho'\Big]+\int d\mathbf{r}\frac{\partial\varrho_q(x^N;t)}{\partial\langle\hat H^{int}(\mathbf{r})\rangle^t} \\ &\times\Big[\int d\Gamma_N\hat H^{int}(\mathbf{r})\varrho'-\langle\hat H^{int}(\mathbf{r})\rangle^t\int d\Gamma_N\varrho'\Big] \\ &+\int da\frac{\partial\varrho_q(x^N;t)}{\partial(\frac{f(a;t)}{W(a;t)})}\frac{1}{W(a;t)}\Big[\int d\Gamma_N\hat f(a)\varrho'-f(a;t)\int d\Gamma_N\varrho'\Big] \\ &+\int dx\int da\frac{\partial\varrho_q(x^N;t)}{\partial(\frac{f(a;t)}{W(a;t)})}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\frac{\partial\ln W(a;t)}{\partial\langle\hat n_1(x)\rangle^t} \\ &\times\Big[\int d\Gamma_N\hat n_1(x)\varrho'-\langle\hat n_1(x)\rangle^t\int d\Gamma_N\varrho'\Big] \\ &+\int d\mathbf{r}\int da\frac{\partial\varrho_q(x^N;t)}{\partial(\frac{f(a;t)}{W(a;t)})}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\frac{\partial\ln W(a;t)}{\partial\langle\hat H^{int}(\mathbf{r})\rangle^t} \\ &\times\Big[\int d\Gamma_N\hat H^{int}(\mathbf{r})\varrho'-\langle\hat H^{int}(\mathbf{r})\rangle^t\int d\Gamma_N\varrho'\Big]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Насамперед, ми розкриємо дію оператора Ліувілля на квазірівноважну функцію розподілу (2.10), в результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} iL_N\varrho_q(x^N;t)&=-\int dx\gamma(x;t)\dot{\hat n}_1(x)\varrho_q(x^N;t) \\ &-\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\dot{\hat H}^{int}(\mathbf{r})\varrho_q(x^N;t) \\ &+\Big[iL_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big|_{a=\hat a}\Big]\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t), \end{aligned} \tag{2.15}$$

де $\dot{\hat n}_1(x)=iL_N\hat n_1(x)$, $\dot{\hat H}^{int}(\mathbf{r})=iL_N\hat H^{int}(\mathbf{r})$. Використавши співвідношення

$$\begin{aligned} iL_N\hat f(a)&=iL_N\hat f(n_{\mathbf{k}},\mathbf{J}_{\mathbf{k}},\varepsilon_{\mathbf{k}}) \\ &=\sum_{\mathbf{k}}\Big[\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\hat f(a)\dot{\hat n}_{\mathbf{k}}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\hat f(a)\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}+\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\hat f(a)\dot{\hat\varepsilon}_{\mathbf{k}}\Big], \end{aligned}$$

де $\dot{\hat n}_{\mathbf{k}}=iL_N\hat n_{\mathbf{k}}$, $\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}=iL_N\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}}$, $\dot{\hat\varepsilon}_{\mathbf{k}}=iL_N\hat\varepsilon_{\mathbf{k}}$, останній вираз у (2.15) можемо переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} &\Big[iL_N\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big|_{a=\hat a}\Big]\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t) \\ &=\int da\sum_{\mathbf{k}}\Big[\dot{\hat n}_{\mathbf{k}}W(a;t)\Big(\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big) \\ &+\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\Big(\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big)+\dot{\hat\varepsilon}_{\mathbf{k}}W(a;t)\Big(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big)\Big]\varrho_L(x^N;t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Тут ми ввели нову квазірівноважну функцію розподілу $\varrho_L(x^N,a;t)$ з мікроскопічним розподілом колективних змінних

$$\varrho_L(x^N,a;t)=\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\frac{\hat{f}(a)}{W(a;t)}. \tag{2.17}$$

Ця квазірівноважна функція розподілу зв'язана із $\varrho_q(x^N;t)$ співвідношенням:

$$\varrho_q(x^N;t)=\int da f(a;t)\varrho_L(x^N,a;t) \tag{2.18}$$

і є нормованою

$$\int d\Gamma_N\varrho_L(x^N;t)=1. \tag{2.19}$$

Використовуючи співвідношення (2.17), середні значення розраховані із квазірівноважною функцією розподілу можуть бути подані у формі:

$$\langle\ldots\rangle_q^t=\int da\langle\ldots\rangle_L^t f(a;t),\quad \langle\ldots\rangle_L^t=\int d\Gamma_N\ldots\varrho_L(x^N;t). \tag{2.20}$$

Тепер із врахуванням (2.16) і (2.17), ми можемо переписати результат дії оператора Ліувілля на $\varrho(x^N;t)$ як

$$\begin{aligned} iL_N\varrho_q(x^N;t)=&-\int da\int dx\gamma(x;t)\dot{\hat{n}}_1(x)\varrho_L(x^N,a;t)f(a;t)\\ &-\int da\int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\dot{\hat{H}}^{int}(\mathbf{r})\varrho_L(x^N,a;t)f(a;t)\\ &+\int da\sum_{\mathbf{k}}\Big[\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}+W(a;t)\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\\ &+\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}W(a;t)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t)}{W(a;t)}\Big]\varrho_L(x^N,a;t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Підставивши цей вираз у (2.6), ми отримаємо нерівноважну функцію розподілу у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varrho(x^N;t)=&\int da f(a;t)\varrho_L(x^N,a;t) \\ &+\int da\int d\mathbf{r}\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}T_q(t,t')\Big(1-P_q(t')\Big)\\ &\times\dot{\hat{H}}^{int}(\mathbf{r})\varrho_L(x^N;t)f(a;t')\beta(\mathbf{r};t')\\ &-\int da\int dx\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}T_q(t,t')\Big(1-P_q(t')\Big)\\ &\times\dot{\hat{n}}_1(x)\varrho_L(x^N,a;t')f(a;t')\gamma(x;t')\\ &-\int da\sum_{\mathbf{k}}\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}T_q(t,t')\Big(1-P_q(t')\Big)\\ &\times\Big[\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}W(a;t')\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}+W(a;t')\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\\ &+\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}W(a;t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}\Big]\varrho_L(x^N,a;t'), \end{aligned} \tag{2.22}$$

за допомогою якої отримаємо відповідні узагальнені рівняння переносу для параметрів скороченого опису:

$$\begin{aligned} &\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big]f_1(x;t)-\int dx'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Phi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}'}\Big]g_2(x,x';t)\\ &=-\int d\mathbf{r}'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nH}^{int}(x,\mathbf{r}',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t')\\ &-\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nn}(x,x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t')\\ &-\sum_{\mathbf{k}}\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\Big\{\phi_{nj}(x,\mathbf{k},a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\\ &+\phi_{n\varepsilon}(x,\mathbf{k},a;t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\Big\}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t=\langle\dot{\hat{H}}^{int}(\mathbf{r})\rangle_q^t \tag{2.24}$$

$$-\int d\mathbf{r}'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{HH}^{intint}(\mathbf{r},\mathbf{r}',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t')$$

$$\begin{aligned} &-\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{Hn}^{int}(\mathbf{r},x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t')\\ &-\sum_{\mathbf{k}}\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\Big\{\phi_{Hj}^{int}(\mathbf{r},\mathbf{k},a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\\ &+\phi_{H\varepsilon}^{int}(\mathbf{r},\mathbf{k},a;t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\Big\}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a;t) = \sum_{\mathbf{k}}\Big\{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}v_n(a;t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot \mathbf{v}_j(a;t) \tag{2.25}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}v_\varepsilon(a;t)\Big\}f(a;t)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\int d\mathbf{r}'\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{jH}^{int}(\mathbf{r}',\mathbf{k},a,a';t,t')$$

$$\times f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t') - \sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\int d\mathbf{r}'\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}$$

$$\times \phi_{\varepsilon H}^{int}(\mathbf{r}',\mathbf{k},a,a';t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t')$$

$$+\sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\int dx'\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{jn}(x',\mathbf{k},a,a';t,t')$$

$$\times f(a;t')\gamma(x';t') - \sum_{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\int dx'\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}$$

$$\times \phi_{\varepsilon n}(x',\mathbf{k},a,a';t,t')f(a;t')\gamma(x';t')$$

$$+\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\phi_{jj}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{q}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}$$

$$+\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{q}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}$$

$$+\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\Big\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\phi_{j\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{q}}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\phi_{\varepsilon j}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{q}}}\Big\}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}.$$

Узагальнені рівняння переносу (2.23)–(2.25) містять квазірівноважну парну функцію розподілу частинок $g_2(x,x';t)$:

$$g_2(x,x';t) = \int d\Gamma_{N-2}\varrho(x^N;t) = \langle\hat{n}_1(x)\hat{n}_1(x')\rangle^t \tag{2.26}$$

$$= \langle\hat{G}(x,x')\rangle^t = \int da g_2^L(x,x';a;t)f(a;t),$$

де $\hat{G}(x,x') = \hat{n}_1(x)\hat{n}_1(x')$, а $g_2^L(x,x';a;t) = \int d\Gamma_{N-2}\varrho_L(x^N;a;t)$ є L-парною квазірівноважною функцією розподілу частинок.

Узагальнені ядра переносу

$$\phi_{\alpha\beta}(t,t') = \langle I_\alpha(t)T_q(t,t')I_\beta(t')\rangle_L^{t'}, \quad \alpha,\beta = \{n,H,\mathbf{j},\varepsilon\}, \tag{2.27}$$

що входять у рівняння переносу, описують немарковські процеси і є нерівноважними кореляційними функціями, що побудовані на узагальнених потоках:

$$\hat{I}_n(x;t) = \big(1-P(t)\big)\dot{\hat{n}}_1(x), \qquad \hat{I}_{\mathbf{j}}(\mathbf{k};t) = \big(1-P(t)\big)\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}},$$

$$\hat{I}_H^{int}(\mathbf{r};t) = \big(1-P(t)\big)\dot{\hat{H}}^{int}(\mathbf{r}), \qquad \hat{I}_\varepsilon(\mathbf{k};t) = \big(1-P(t)\big)\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}. \tag{2.28}$$

$P(t)$ — узагальнений оператор Морі, що зв'язаний з проекційним оператором Кавасакі-Гантона $P_q(t)$ співвідношенням:

$$P_q(t)a(x)\varrho_q(x^N;t) = \varrho_q(x^N;t)P(t)a(x).$$

Важливо зазначити, що у (2.27) середні значення розраховуються з функцією розподілу $\varrho_L(x^N;t)$ (2.17), так що ядра переносу є функціями колективних змінних $a_{\mathbf{k}}$.

У рівнянні (2.25) функції $v_n(a;t)$, $v_j(a;t)$, $v_\varepsilon(a;t)$ — потоки у просторі колективних змінних і означені наступним чином:

$$v_n(a;t) = \int d\Gamma_N\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}\varrho_L(x^N,a;t) = \langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}\rangle_L^t,$$

$$v_j(a;t) = \int d\Gamma_N\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}\varrho_L(x^N,a;t) = \langle\dot{\hat{\mathbf{J}}}_{\mathbf{k}}\rangle_L^t, \tag{2.29}$$

$$v_\varepsilon(a;t) = \int d\Gamma_N\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}\varrho_L(x^N,a;t) = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}\rangle_L^t.$$

Представлена система рівнянь переносу забезпечує узгоджений опис кінетичних та гідродинамічних процесів у класичних рідинах і густих газах з врахуванням довгоживучих флуктуацій. Дана система рівнянь переносу (2.23)–(2.25) є незамкнута за параметрами Лагранжа $\beta(\mathbf{r};t)$, $\gamma(x;t)$, які визначаються із відповідних умов самоузгодження. З точки зору кінетичних процесів ми повинні доповнити дану систему рівнянь переносу кінетичним рівняння для $f_2(x,x';t)$, а отже і для $f_s(x^s;t)$, $s<N$:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_2(x,x';t) + iL_2f_2(x,x';t) - \int dx''(iL(13)+iL(23))f_3(x,x',x'';t)$$

$$= iL_2 \triangle f_2(x,x';t) - \int dx''(iL(13)+iL(23))\triangle f_3(x,x',x'';t)$$

$$+\int dx''\int da\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{Gn}(x,x',x'',a;t,t')f(a;t')\gamma(x'';t')$$

$$-\int d\mathbf{r}''\int da\int_{-\infty}^{t}dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{GH}^{int}(x,x',\mathbf{r}'',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}'';t')$$

$$
- \sum_{\mathbf{k}} \int da \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)} \Big\{ \phi_{Gj}(x,x',\mathbf{k},a;t,t') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{J_k}}
+ \phi_{G\varepsilon}(x,x',\mathbf{k},a;t,t') \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}} \Big\} \frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \tag{2.30}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t} f_s(x^s;t) + iL_s f_s(x^s;t) - \sum_j \frac{1}{s!} \int dx_{s+1} iL(j,s+1) f_{s+1}(x^s,x_{s+1};t)
$$
$$
= iL_s \triangle f_s(x^s;t) - \sum_j \frac{1}{s!} \int dx_{s+1} iL(j,s+1) \triangle f_{s+1}(x^s,x_{s+1};t)
+ \int dx'' \int da \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)} \phi_{G_s n}(x,x',x'',a;t,t') f(a;t') \gamma(x'';t')
- \int d\mathbf{r}'' \int da \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)} \phi^{int}_{G_s H}(x,x',\mathbf{r}'',a;t,t') f(a;t') \beta(\mathbf{r}'';t')
- \sum_{\mathbf{k}} \int da \int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)} \Big\{ \phi_{G_s j}(x,x',\mathbf{k},a;t,t') \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{J_k}}
+ \phi_{G_s \varepsilon}(x,x',\mathbf{k},a;t,t') \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}} \Big\} \frac{f(a;t')}{W(a;t')}, \tag{2.31}
$$

де

$$
\Delta f_2(x,x';t) = f_2(x,x';t) - g_2(x,x';t), \Delta f_s(x^s;t) = f_s(x^s;t) - g_s(x^s;t),
$$

$$
iL_2 = iL_0(1) + iL_0(2) + iL(1,2)
$$

— двочастинковий оператор Ліувілля,

$$
iL_0(1) = \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}
$$

— одночастинковий оператор Ліувілля,

$$
iL(1,2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \right]
$$

— потенціальна частина двочастинкового оператора Ліувілля.
iL_s — s-частинковий оператор Ліувілля,

$$
\hat{G}_s(x^s) = \hat{n}_1(x_1) \ldots \hat{n}_1(x_s),
$$

$$
g_s(x^s;t) = \langle \hat{G}_s(x^s) \rangle^t = \int da g_s^L(x^s;a;t) f(a;t),
$$

де

$$
g_s^L(x^s;a;t) = \int d\Gamma_N \hat{G}_s(x^s) \varrho_L(x^N;a;t),
$$

L — квазірівноважна функція розподілу s частинок. В результаті ми отримали систему рівнянь для нерівноважних одно-, дво-, s-частинкових функцій розподілу з врахуванням нелінійних гідродинамічних флуктуацій.

Рівняння (2.25) є типу рівняння Фоккера-Планка для нерівноважної функції розподілу колективних змінних з врахуванням кінетичних процесів. Ядро переносу $\phi_{nn}(x,x';t,t')$ описує дисипацію кінетичних процесів, відповідно, ядра $\phi_{nj}(x,\mathbf{k},a;t,t')$, $\phi_{n\varepsilon}(x,\mathbf{k},a;t,t')$, $\phi_{jn}(x,\mathbf{k},a;t,t')$, $\phi_{\varepsilon n}(x,\mathbf{k},a;t,t')$ описують дисипацію кореляцій між кінетичними та гідродинамічними процесами.

Для більш детального розкриття структури ядер переносу $\phi_{nn}(x;x',a;t,t')$, $\phi_{Gn}(x;x',x'',a;t,t')$, розглянемо дію оператора Ліувілля на $\hat{n}_1(x)$ та $\hat{G}(x,x')$:

$$
iL_N \hat{n}_1(x) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{1}{m} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},\mathbf{p}), \tag{2.32}
$$

$$
iL_N \hat{G}(x,x') = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{1}{m} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) \hat{n}_1(x') - \hat{n}_1(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \cdot \frac{1}{m} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}',\mathbf{p}')
+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) \hat{n}_1(x') + \hat{n}_1(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}',\mathbf{p}'), \tag{2.33}
$$

де

$$
\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_j) \tag{2.34}
$$

— мікроскопічна густина вектора імпульсу у просторі координат та імпульсів,

$$
\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \sum_{l \neq j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j} \Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_j) \tag{2.35}
$$

— мікроскопічна густина вектора сили у просторі координат та імпульсів.

Врахувавши дані розрахунки (2.32)–(2.35), для кінетичного ядра переносу отримаємо:

$$\phi_{nn}(x;x',a;t,t') = -\Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jj}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \tag{2.36}$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{Fj}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jF}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{FF}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\Big],$$

де

$$D_{jj}(x,x',a;t,t') = \int d\Gamma_N \hat{\mathbf{j}}(x)T_q(t,t')(1-P(t'))\hat{\mathbf{j}}(x')\rho_L(x^N;t'),$$

$$D_{FF}(x,x',a;t,t') = \int d\Gamma_N \hat{\mathbf{F}}(x)T_q(t,t')(1-P(t'))\hat{\mathbf{F}}(x')\rho_L(x^N;t')$$

— узагальнені коефіцієнти дифузії та тертя частинок у координатно-імпульсному просторі. Причому,

$$\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{p}' D_{jj}(x,x';t,t') = D_{jj}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t'),$$

$$\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{p}' D_{FF}(x,x';t,t') = D_{FF}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t')$$

коефіцієнтами узагальненої дифузії та тертя. Подібно отримаємо вираз для ядра переносу $\phi_{Gn}(x;x',x'';t,t')$:

$$\phi_{Gn}(x;x',x'',a;t,t') = -\Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jjn}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \tag{2.37}$$
$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jnj}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}''}$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{Fjn}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{Fnj}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}''}$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jFn}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jnF}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}''}$$
$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{FFn}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}$$
$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{FnF}(x,x',x'',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}''}\Big].$$

Важливо зазначити, що

$$\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nn}(x,x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t')$$

у рівнянні (2.23) з врахуванням (2.36) є узагальненим інтегралом зіткнення типу Фоккера-Планка в координатно-імпульсному просторі. Тобто, з врахуванням (2.26) і (2.36) кінетичне рівняння (2.23) можна подати у вигляді:

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Big]f_1(x;t) - \int dx'\int da\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Phi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \tag{2.38}$$
$$\times\Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\Big]g_2^l(x,x',a;t)f(a;t)$$
$$= -\int d\mathbf{r}'\int da\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nH}^{int}(x,\mathbf{r}',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t')$$
$$-\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jj}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\gamma(x';t')f(a;t')$$
$$+\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)}\Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{Fj}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$$
$$+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot D_{jF}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\cdot D_{FF}(x,x',a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\Big]\gamma(x';t')f(a;t')$$
$$-\sum_{\mathbf{k}}\int da\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\epsilon(t'-t)}\Big[\phi_{nj}(x,\mathbf{k},a;t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}_{\mathbf{k}}}$$
$$+\phi_{n\varepsilon}(x,\mathbf{k},a;t,t')\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}\Big]\frac{f(a;t')}{W(a;t')}.$$

У рівнянні (2.25) ядра переносу $\phi_{jj}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{j\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{\varepsilon j}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$ відповідно описують дисипативні процеси, що пов'язані з кореляціями між в'язкими і тепловими гідродинамічними процесами.

Система рівняння (2.23), (2.25), (2.30), (2.31) допускає два граничні випадки. По-перше для опису нерівноважних процесів в системі, коли можна не враховувати вклад нелінійних гідродинамічних флуктуацій, тоді ми отримаємо систему рівнянь узгодженого опису кінетики і гідродинаміки, яка була отримана у роботах [125,126,128]. Ця система має наступний вигляд:

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Big]f_1(x;t) - \int dx'\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\Phi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'}\Big]g_2(x,x';t)$$

$$= -\int d\mathbf{r}'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nH}^{int}(x,\mathbf{r}',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t') \tag{2.39}$$
$$-\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nn}(x,x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t'),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{H}^{int}(\mathbf{r})\rangle^t = \langle\dot{\hat{H}}^{int}(\mathbf{r})\rangle_q^t \tag{2.40}$$
$$-\int d\mathbf{r}'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{HH}^{intint}(\mathbf{r},\mathbf{r}',a;t,t')f(a;t')\beta(\mathbf{r}';t')$$
$$-\int dx'\int da\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{Hn}^{int}(\mathbf{r},x',a;t,t')f(a;t')\gamma(x';t').$$

Якщо ж у системі рівнянь (2.39), (2.40) ми не будемо враховувати вклад від потенціальної енергії взаємодії, що справедливо для розріджених газів, то отримаємо узагальнене кінетичне рівняння для нерівноважної одночастинкові функції розподілу частинок [51]:

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big]f_1(x;t)-\int dx'\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Phi(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \tag{2.41}$$
$$\times\Big[\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}-\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}'}\Big]g_2(x,x';t)=\int dx'\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\phi_{nn}(x,x';t,t')\gamma(x';t').$$

По-друге, якщо не враховувати кінетичні процеси і вклад середньої потенціальної енергії, то отримаємо узагальнене (немарковське) рівняння Фоккера-Планка для нерівноважної функції розподілу колективних змінних, яке може бути отримано методом проекційних операторів Цванцига чи методом Зубарєва [141]:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a;t)=\sum_{\mathbf{k}}\Big\{\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{k}}}v_n(a;t)+\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\mathbf{v}_j(a;t)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}v_\varepsilon(a;t)\Big\}f(a;t)$$
$$=\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\phi_{jj}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{q}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}$$
$$+\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{q}}}\frac{f(a;t')}{W(a;t')} \tag{2.42}$$
$$+\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\int da'\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\epsilon(t'-t)}\Big\{\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{k}}}\cdot\phi_{j\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{q}}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}\phi_{\varepsilon j}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{J}_{\mathbf{q}}}\Big\}\frac{f(a;t')}{W(a;t')}.$$

Однією із головних проблем для аналізу рівнянь переносу (2.23), (2.24), (2.25) і ядер переносу є розрахунок структурної функції $W(a;t)$ колективних змінних і гідродинамічних швидкостей $v_n(a;t)$, $v_j(a;t)$, $v_\varepsilon(a;t)$.

3. Розрахунок структурної функції $W(a;t)$ і гідродинамічних швидкостей $v_\alpha(a;t)$ методом колективних змінних

В теорії нелінійних флуктуацій Кавасакі [142] структурна функція апроксимується гаусовою залежністю від колективних змінних. У цьому випадку, як можна показати, гідродинамічні швидкості $v_\alpha(a;t)$, $\alpha=n,j,\varepsilon$ є лінійними функціями a. Інший шлях для отримання гідродинамічних величин $v_\alpha(a;t)$ на основі локальної термодинаміки був запропонований у роботі [141]. Отримані співвідношення справедливі, очевидно, при низьких частотах та для малих значень хвильового вектора, коли справедливі співвідношення локальної термодинаміки. Структурна функція $W(a;t)$ та гідродинамічні швидкості $v_\alpha(a;t)$ у випадку досліджень нелінійних гідродинамічних флуктуацій розраховувались у роботах [143, 145] з використанням методу колективних змінних [144]. Основна ідея цього підходу полягає у тому, що структурна функція $W(a;t)$ та гідродинамічні швидкості $v_\alpha(a;t)$ можуть бути розраховані у наближеннях вищих, ніж гаусове. У роботі [146] структурна функція $W(a;t)$ була розрахована з врахуванням кінетичних одночастинкових кореляцій.

Далі ми застосуємо метод колективних змінних [143–146] для розрахунку структурної функції $W(a;t)$ та гідродинамічних швидкостей $v_\alpha(a;t)$. Спочатку розрахуємо структурну функцію $W(a;t)$ для колективних змінних, однак ми розглянемо випадок, коли взаємодію між частинками на малих відстанях будемо описувати короткодіючим потенціалом взаємодії $\Phi^{sh}(|\mathbf{r}_{lj}|)$, зокрема потенціалом твердих сфер, а за межами дії його деяким далекодіючим потенціалом взаємодії $\Phi^{long}(|\mathbf{r}_{lj}|)$:

$$\Phi(|\mathbf{r}_{lj}|)=\Phi^{sh}(|\mathbf{r}_{lj}|)+\Phi^{long}(|\mathbf{r}_{lj}|).$$

Відповідно, в операторі Ліувілля виділимо короткодіючі і далекодіючі взаємодії між частинками:

$$iL_N=iL_N^0+\hat{T}_N+iL_N^{long},$$

де iL_N^0 — оператор Ліувілля N невзаємодіючих частинок, $\hat{T}_N$ — оператор розсіяння системи твердих сфер [127, 130, 133, 137], iL_N^{long} — потенціальна частина оператора Ліувілля з далекодіючим потенціалом взаємодії між частинками.

Далі застосуємо інтегральне представлення для δ — функції, тоді $\hat{f}(a)$ подамо у вигляді:

$$\hat{f}(a) = \int d\omega \exp\{-i\pi \sum_{l,\mathbf{k}} \omega_{l,\mathbf{k}}(\hat{a}_{l,\mathbf{k}} - a_{l,\mathbf{k}})\}, \quad l = n, j, \varepsilon. \tag{3.1}$$

Використавши кумулянтний розклад [145, 146] для $W(a;t)$, отримаємо:

$$W(a;t) = \int d\Gamma_N \varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\hat{f}(a) \tag{3.2}$$
$$= \int d\omega \exp\Big\{ - i\pi \sum_{l,\mathbf{k}} \omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}\Big\} \exp\Big\{\sum_{n\geq 3} D_n(\omega;t)\Big\},$$

де

$$\bar{a}_{l,\mathbf{k}} = a_{l,\mathbf{k}} - \langle \hat{a}_{l,\mathbf{k}}\rangle^t_{kin+sh}, \quad d\omega = \prod_{l,\mathbf{k}} d\omega^r_{l,\mathbf{k}} d\omega^s_{l,\mathbf{k}},$$
$$\omega_{l,\mathbf{k}} = \omega^r_{l,\mathbf{k}} - i\omega^s_{l,\mathbf{k}}, \quad \omega_{l,-\mathbf{k}} = \omega^*_{l,\mathbf{k}},$$

$$D_n(\omega;t) = \frac{(-i\pi)^n}{n!}\sum_{l_1,\ldots,l_n}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n} \mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\ldots\omega_{l_n,\mathbf{k}_n}, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t) = \langle \hat{a}_{l_1,\mathbf{k}_1},\ldots\hat{a}_{l_n,\mathbf{k}_n}\rangle^{t,c}_{kin-sh} \tag{3.4}$$

нерівноважні кумулянтні середні n-порядку, які розраховуються із квазірівноважною функцією розподілу $\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t)$ для моделі твердих сфер:

$$\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t) = \exp\big\{ - \Phi(t) - \int d\mathbf{r}\beta(\mathbf{r};t)\hat{H}^{sh}(\mathbf{r}) - \int dx\gamma(x;t)\hat{n}_1(x)\big\}. \tag{3.5}$$

Тут верхній індекс c означає кумулянтне середнє. Важливо зазначити, що у (3.2) ми розділили вклади від короткодіючих та

далекодіючих взаємодій. Короткодіючі взаємодії враховані у квазірівноважному розподілі (3.5) (який можна розглядати як базисний), а далекодіючі взаємодії подані через колективні змінні $\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}\big)$. Для подальшого розрахунку, структурну функцію $W(a;t)$ подамо у формі:

$$W(a;t) = \int d\omega \exp\Big\{ - i\pi \sum_{l,\mathbf{k}} \omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}} - \tag{3.6}$$
$$- \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}\Big\}$$
$$\times \Big(1 + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots + \frac{1}{n!}B^n + \ldots\Big),$$

де $B = \sum_{n\geq 3} D_n(\omega;t)$. Якщо в розкладі у ряд експоненти (3.6), тобто $\exp\{\sum_{n\geq 3} D_n(\omega;t)\}$, зберегти лише перший доданок, що рівний одиниці, то отримаємо наближення Гауса для $W(a;t)$:

$$W^G(a;t) = \int d\omega \exp\Big\{ i\pi \sum_{l,\mathbf{k}} \omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}} \tag{3.7}$$
$$- \sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}\Big\},$$

де $\mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)$ — матриця, елементами якої є нерівноважні кореляційні функції:

$$\mathfrak{M}_2(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t) = \begin{vmatrix} \langle\hat{n}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{n}\hat{\mathbf{J}}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{n}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ \langle\hat{\mathbf{J}}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{J}}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ \langle\hat{\varepsilon}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{J}}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \end{vmatrix}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \tag{3.8}$$

і, для прикладу, нерівноважне кумулянтне середнє густина-густина має вигляд:

$$\langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\hat{n}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} = \langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\hat{n}_{-\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh} - \langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh}\langle\hat{n}_{-\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh}. \tag{3.9}$$

Для проведення інтегрування за $d\omega$ у (3.7) необхідно привести вираз в експоненті до квадратичної діагональної форми за $\omega_{l,\mathbf{k}}$. У зв'язку з цим треба знайти власні значення матриці (3.8), розв'язавши

рівняння:
$$\det\big|\tilde{\mathfrak{M}}_2(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)-\tilde{E}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\big|=0, \tag{3.10}$$
$\tilde{E}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)$ — діагональна матриця. Далі, знайшовши власні значення $E_l(\mathbf{k};t)$, $l=1,2,3,4,5$, вираз (3.7) подамо у формі:
$$W^G(a;t)=\int d\tilde{\omega}\,\det\tilde{W}\,\exp\Big\{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\tilde{a}_{l\mathbf{k}}\tilde{\omega}_{l\mathbf{k}} \tag{3.11}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_l\sum_{\mathbf{k}}E_l(\mathbf{k};t)\tilde{\omega}_{l\mathbf{k}}\tilde{\omega}_{l,-\mathbf{k}}\Big\},$$
де нові змінні $\tilde{a}_{l\mathbf{k}}$, $\tilde{\omega}_{l\mathbf{k}}$ є зв'язані із старими змінними співвідношеннями:
$$\tilde{a}_{n\mathbf{k}}=\sum_l\bar{a}_{l\mathbf{k}}\omega_{ln},\quad \omega_{l\mathbf{k}}=\sum_{m=1}^{5}\omega_{lm}\tilde{\omega}_{m\mathbf{k}}.$$
ω_{lm} — елементи матриці
$$\tilde{W}=\begin{vmatrix}\omega_{11}&\omega_{12}&\omega_{13}&\omega_{14}&\omega_{15}\\ \omega_{21}&\omega_{22}&\omega_{23}&\omega_{24}&\omega_{25}\\ \omega_{31}&\omega_{32}&\omega_{33}&\omega_{34}&\omega_{35}\\ \omega_{41}&\omega_{42}&\omega_{43}&\omega_{44}&\omega_{45}\\ \omega_{51}&\omega_{52}&\omega_{53}&\omega_{54}&\omega_{55}\end{vmatrix}_{(\mathbf{k};t)}.$$

Підінтегральний вираз у (3.11) є квадратичною функцією $\tilde{\omega}_{n\mathbf{k}}$, тому, виконуючи інтегрування за $d\omega_{n\mathbf{k}}$, для структурної функції в гаусовому наближенні $W^G(a;t)$ отримаємо:
$$W^G(a;t)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{l,\mathbf{k}}E_l^{-1}(\mathbf{k};t)\tilde{a}_{l\mathbf{k}}\tilde{a}_{l,-\mathbf{k}} \tag{3.12}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big)\Big\}$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\ln\pi\,\det\tilde{E}(\mathbf{k};t)\Big\}\exp\Big\{\sum_{\mathbf{k}}\ln\det\tilde{W}(\mathbf{k};t)\Big\},$$
або через змінні $\bar{a}_{l\mathbf{k}}$:
$$W^G(a;t)=Z(t)\,\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{l,\mathbf{k}}\bar{E}_l(\mathbf{k};t)\bar{a}_{l\mathbf{k}}\bar{a}_{l,-\mathbf{k}} \tag{3.13}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big)\Big\},$$

де
$$\bar{E}_l(\mathbf{k};t)=\sum_{l'}\omega_{ll'}E_{l'}^{-1}(\mathbf{k};t)\omega_{l'l},$$
$$Z(t)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\ln\pi\,\det\tilde{E}(\mathbf{k};t)\Big\}\exp\Big\{\sum_{\mathbf{k}}\ln\det\tilde{W}(\mathbf{k};t)\Big\}.$$

Структурна функція $W^G(a;t)$ у гаусовому наближенні дає можливість розрахунку повної структурної функції (3.2) у вищих наближеннях за гаусовими моментами [145]:
$$W(a;t)=W^G(a;t)\exp\Big\{\sum_{n\geq 3}\langle\tilde{D}_n(a;t)\rangle_G\Big\}, \tag{3.14}$$
де $\langle\tilde{D}_n(a;t)\rangle_G$ наближено представимо так:
$$\langle\tilde{D}_3(a;t)\rangle_G=\langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G,$$
$$\langle\tilde{D}_4(a;t)\rangle_G=\langle\bar{D}_4(a;t)\rangle_G,$$
$$\langle\tilde{D}_6(a;t)\rangle_G=\langle\bar{D}_6(a;t)\rangle_G-\frac{1}{2}\langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G^2,$$
$$\langle\tilde{D}_8(a;t)\rangle_G=\langle\bar{D}_8(a;t)\rangle_G-\langle\bar{D}_3(a;t)\rangle_G\langle\bar{D}_5(a;t)\rangle_G-\frac{1}{2}\langle\bar{D}_4(a;t)\rangle_G^2,$$
$$\langle\tilde{D}_n(a;t)\rangle_G=\frac{1}{W^G(a;t)}\sum_{l_1,\ldots,l_n}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}\bar{\mathfrak{M}}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)\times$$
$$\frac{1}{(i\pi)^n}\frac{\delta^n}{\delta\bar{a}_{l_1,\mathbf{k}_1}\ldots\delta\bar{a}_{l_n,\mathbf{k}_n}}W^G(a;t)$$
— перенормовані n-ті нерівноважні кумулянтні середні для змінних $\bar{a}_{l\mathbf{k}}$ вищих порядків. Оскільки всі непарні гаусові моменти рівні нулю, то у виразі (3.14) залишаться лише парні степені за a.

Метод розрахунку структурної функції $W(a;t)$ може бути застосований для наближених розрахунків гідродинамічних швидкостей $v_\alpha(a;t)$. Відповідно до означення гідродинамічних швидкостей (2.29) представимо загальну формулу у вигляді:
$$v_{l,\mathbf{k}}(a;t)=\int d\Gamma_N\dot{\hat{a}}_{l,\mathbf{k}}\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\hat{f}(a) \tag{3.15}$$
і введемо функцію $W(a,\lambda;t)$:
$$W(a,\lambda;t)=\int d\Gamma_N\ \mathrm{e}^{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\lambda_{l,\mathbf{k}}\dot{\hat{a}}_{l,\mathbf{k}}}\ \varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\hat{f}(a), \tag{3.16}$$

так що

$$v_{l,\mathbf{k}}(a;t)=\frac{\partial}{\partial(-i\pi\lambda_{l,\mathbf{k}})}\ln W(a,\lambda;t)\Big|_{\lambda_{l,\mathbf{k}}=0}. \tag{3.17}$$

Ми розрахуємо функцію $W(a,\lambda;t)$, використавши отримані результати розрахунків структурної функції $W(a;t)$, тому перепишемо $W(a,\lambda;t)$ так:

$$W(a,\lambda;t)=\int d\Gamma_N\int d\omega\exp\Big\{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\lambda_{l,\mathbf{k}}\dot{\hat{a}}_{l,\mathbf{k}}\Big\} \tag{3.18}$$
$$\times\exp\Big\{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\omega_{l,\mathbf{k}}(\hat{a}_{l,\mathbf{k}}-a_{l,\mathbf{k}})\Big\}\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t).$$

Тепер приймемо до уваги усереднення (3.18) з $\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t)$, використавши кумулянтний розклад:

$$W(a,\lambda;t)=\int d\omega\exp\Big\{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}} \tag{3.19}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$+\sum_{n\geq 1}[D_n(\omega;t)+D_n(\lambda;t)+D_n(\omega,\lambda;t)]\Big\},$$

де

$$D_n(\omega;t)=\frac{(-i\pi)^n}{n!}\sum_{l_1,\ldots,l_n}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}\mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\ldots\omega_{l_n,\mathbf{k}_n},$$
$$D_n(\lambda;t)=\frac{(-i\pi)^n}{n!}\sum_{l_1,\ldots,l_n}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}\mathfrak{M}_n^{(1)l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)\lambda_{l_1,\mathbf{k}_1}\ldots\lambda_{l_n,\mathbf{k}_n},$$
$$D_n(\omega,\lambda;t)=\frac{(-i\pi)^n}{n!}\sum_{l_1,\ldots,l_n}\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}\mathfrak{M}_n^{(2)l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)$$
$$\times\,\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\ldots\omega_{l_{n-1},\mathbf{k}_{n-1}}\ldots\lambda_{l_n,\mathbf{k}_n},$$

у якому кумулянти мають таку структуру:

$$\mathfrak{M}_n^{l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)=\langle\hat{a}_{l_1,\mathbf{k}_1},\ldots\hat{a}_{l_n,\mathbf{k}_n}\rangle_{kin-sh}^{t,c},$$
$$\mathfrak{M}_n^{(1)l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)=\langle\dot{\hat{a}}_{l_1,\mathbf{k}_1},\ldots\dot{\hat{a}}_{l_n,\mathbf{k}_n}\rangle_{kin-sh}^{t,c},$$
$$\mathfrak{M}_n^{(2)l_1,\ldots,l_n}(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n;t)=n[(n-j)+(j-n+1)\delta_{l_1,\ldots,l_{n-1}}]$$
$$\times\langle\hat{a}_{l_1,\mathbf{k}_1},\ldots,\hat{a}_{l_{n-j},\mathbf{k}_{n-j}},\ldots,\dot{\hat{a}}_{l_{n-j+1},\mathbf{k}_{n-j+1}},\ldots,\dot{\hat{a}}_{l_n,\mathbf{k}_n}\rangle_{kin-sh}^{t,c}.$$

Розглянемо спочатку наближення Гауса для $W(a,\lambda;t)$, тобто в експоненті підінтегрального виразу залишимо лише доданки з $n=2$ лінійні по $\lambda_{l,\mathbf{k}}$:

$$W^G(a,\lambda;t)=\int d\omega\exp\Big\{i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}}-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\langle\dot{\hat{a}}_{l,\mathbf{k}}\rangle_{kin-hyd}^{t,c}\lambda_{l,\mathbf{k}}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big) \tag{3.20}$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\mathfrak{M}_2^{l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\mathfrak{M}_2^{(2)l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\lambda_{l_2,\mathbf{k}_2}\Big\}.$$

Приводячи цей вираз в експоненті за змінними $\omega_{l,\mathbf{k}}$ до діагональної квадратичної форми, подібно як для $W(a;t)$, після інтегрування за новими змінними $\bar{\omega}_{l,\mathbf{k}}$, отримаємо:

$$W^G(a,\lambda;t)=\int d\omega\exp\Big\{-i\pi\sum_{l,\mathbf{k}}\langle\dot{\hat{a}}_{l,\mathbf{k}}\rangle_{kin}^{t}\lambda_{l,\mathbf{k}} \tag{3.21}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}}\beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}}-n_{\mathbf{q}}\big)-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l,\mathbf{k}}E_l^{-1}(\mathbf{k};t)b_{l,\mathbf{k}}b_{l,-\mathbf{k}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\ln\pi\det\tilde{E}(\mathbf{k};t)+\sum_{\mathbf{k}}\ln\det\tilde{W}(\mathbf{k};t)\Big\},$$

де

$$b_{l,\mathbf{k}}=\sum_j\omega_{lj}\Big[\bar{a}_{j,\mathbf{k}}+\frac{i\pi}{2}\sum_{j'}\mathfrak{M}_2^{(2)j,j'}(\mathbf{k};t)\lambda_{j',\mathbf{k}}\Big],$$

і ω_{lj}, $\mathfrak{M}_2^{(2)j,j'}(\mathbf{k};t)$ і $E_l(\mathbf{k};t)$ є незалежні від $\lambda_{l,\mathbf{k}}$. Тут кумулянти $\mathfrak{M}_2^{(2)j,j'}(\mathbf{k};t)$ мають наступну структуру:

$$\mathfrak{M}_2^{(2)j,j'}(\mathbf{k};t)=\langle\dot{\hat{a}}_{j,\mathbf{k}}\hat{a}_{j',-\mathbf{k}}\rangle_{kin-sh}^{t}-\langle\dot{\hat{a}}_{j,\mathbf{k}}\rangle_{kin}^{t}\langle\hat{a}_{j',-\mathbf{k}}\rangle_{kin-sh}^{t}. \tag{3.22}$$

Тепер ми розрахуємо гідродинамічні швидкості $v_{l,\mathbf{k}}(a;t)$ в наближенні Гауса згідно формули:

$$v_{l,\mathbf{k}}(a;t)=\frac{\partial}{\partial(-i\pi\lambda_{l,\mathbf{k}})}\ln W^G(a,\lambda;t)\Big|_{\lambda_{l,\mathbf{k}}=0} \tag{3.23}$$
$$=\langle\dot{\hat{a}}_{j,\mathbf{k}}\rangle_{kin}^{t}-\frac{1}{2}\sum_{j,j'}E_l^{-1}(\mathbf{k};t)\omega_{jl}\omega_{j'l}\mathfrak{M}_2^{(2)j',l}(\mathbf{k};t)\bar{a}_{l,\mathbf{k}}.$$

Зокрема, розглянемо частковий випадок, коли можна розділити повздовжні і поперечні флуктуації для колективних змінних. Тобто, напрямок хвильового вектора $\mathbf{k}$ спрямуємо по осі $0z$, тоді отримуємо:

$$W^G(a;t) = \int d\omega \exp\{i\pi \sum_{l,\mathbf{k}} \omega_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l,\mathbf{k}} \tag{3.24}$$
$$-\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{k}} \beta_{-\mathbf{q}}(t)\nu(\mathbf{k})\big(n_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}n_{-\mathbf{k}} - n_{\mathbf{q}}\big)$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{3}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathfrak{M}_2^{\parallel,l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}$$
$$-\frac{\pi^2}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{4}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \mathfrak{M}_2^{\parallel,\perp,l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)\omega_{l_1,\mathbf{k}_1}\omega_{l_2,\mathbf{k}_2}\},$$

де $\mathfrak{M}_2^{\parallel,l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)$ — елементи матриці нерівноважних кореляційних функцій повздовжніх флуктуацій:

$$\mathfrak{M}_2^{\parallel}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t) = \left|\begin{matrix} \langle\hat{n}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{n}\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{n}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ \langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ \langle\hat{\varepsilon}\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \end{matrix}\right|_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}, \tag{3.25}$$

$\mathfrak{M}_2^{\perp l_1,l_2}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t)$ — елементи матриці нерівноважних кореляційних функцій поперечних та поперечно-повздовжніх флуктуацій

$$\mathfrak{M}_2^{\parallel,\perp}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;t) = \tag{3.26}$$
$$\left|\begin{matrix} 0 & \langle\hat{n}\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{n}\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\rangle^c_{kin-sh} & 0 \\ \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\hat{n}\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\hat{\varepsilon}\rangle^c_{kin-sh} \\ 0 & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_x\rangle^c_{kin-sh} & \langle\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{J}}^{\perp}_y\rangle^c_{kin-sh} & 0 \end{matrix}\right|_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}.$$

У цьому випадку гідродинамічні швидкості у гаусовому наближені мають наступний вигляд:

$$v^{\parallel G}_{n\mathbf{k}}(a;t) = \langle\dot{\hat{n}}_{\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh} + E_1^{-1}(\mathbf{k};t)(\omega_{11}\bar{n}_{\mathbf{k}} + \omega_{21}\bar{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}} + \omega_{31}\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}})\Omega_n(\mathbf{k};t),$$
$$v^{\parallel G}_{J\mathbf{k}}(a;t) = \langle\dot{\hat{\mathbf{J}}}^{\parallel}_{\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh} + E_2^{-1}(\mathbf{k};t)(\omega_{12}\bar{n}_{\mathbf{k}} + \omega_{22}\bar{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}} + \omega_{32}\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}})\Omega_J(\mathbf{k};t),$$
$$v^{\parallel G}_{\varepsilon\mathbf{k}}(a;t) = \langle\dot{\hat{\varepsilon}}_{\mathbf{k}}\rangle^t_{kin-sh} + E_3^{-1}(\mathbf{k};t)(\omega_{13}\bar{n}_{\mathbf{k}} + \omega_{23}\bar{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}} + \omega_{33}\bar{\varepsilon}_{\mathbf{k}})\Omega_\varepsilon(\mathbf{k};t), \tag{3.27}$$

де

$$\Omega_n(\mathbf{k};t) = \omega_{11}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{n}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{21}\langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{n}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{31}\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{n}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh},$$
$$\Omega_J(\mathbf{k};t) = \omega_{12}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\mathbf{J}}}^{\parallel}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{22}\langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\mathbf{J}}}^{\parallel}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{32}\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\mathbf{J}}}^{\parallel}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh},$$
$$\Omega_\varepsilon(\mathbf{k};t) = \omega_{13}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\varepsilon}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{23}\langle\hat{\mathbf{J}}^{\parallel}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\varepsilon}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh} + \omega_{33}\langle\hat{\varepsilon}_{\mathbf{k}}\dot{\hat{\varepsilon}}_{-\mathbf{k}}\rangle^{t,c}_{kin-sh}, \tag{3.28}$$

і ω_{lj} елементами матриці $\tilde{W}(\mathbf{k};t)$. Як можна бачити, швидкості (3.27) у наближенні Гауса для $W^G(a,\lambda;t)$ є лінійними функціями колективних змінних $n_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{J}_{\mathbf{k}}$, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$. Важливо, що якщо не враховувати кінетичні процеси коли $\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t) = 1$, то $\langle\ldots\rangle^t_{kin-sh} \to \langle\ldots\rangle_0$ є усереднення з мікроскопічним ансамблем $W(a)$; в цьому випадку вирази (3.27) для гідродинамічних швидкостей повністю відтворюють результати статті [145], у якій досліджувались нелінійні гідродинамічні флуктуації у простих рідинах.

4. Висновки

Використавши метод нерівновнажного статистичного оператора Зубарєва, ми отримали модифікований ланцюжок кінетичних рівнянь ББГКІ з врахуванням нелінійних гідродинамічних флуктуацій для системи взаємодіючих частинок, які описуються нерівноважною функцією розподілу колективних змінних, що задовольняє узагальнене рівняння Фоккера-Планка. Розділення вкладів від короткодіючих і далекодіючих взаємодій між частинками привело до того, що короткодіючі взаємодії (модель твердих сфер) описуються в координатному просторі, а далекодіючі — у просторі колективних змінних. При цьому, короткодіюча складова розглядається як базисна з розподілом $\varrho_q^{kin-sh}(x^N;t)$, якій відповідає ланцюжок рівнянь ББГКІ для моделі твердих сфер [127].

Застосований метод колективних змінних [138, 143, 145] дав можливість розрахувати у вищих наближеннях ніж гаусове структурну функцію та гідродинамічні швидкості колективних змінних. Зокрема, у наступному наближенні за гаусове, виходячи із (3.19) гідродинамічні швидкості (3.27) будуть пропорційні $\bar{a}_{l,\mathbf{k}}\bar{a}_{l',\mathbf{k}}$, а ядра переносу у рівнянні Фоккера-Планка будуть кореляційними функціями четвертого порядку за змінними $\hat{a}_{l,\mathbf{k}}$. Важливо зазначити, що у наближені Гауса для $\tilde{W}^G(\mathbf{k};t)$, $v^G_{l,\mathbf{k}}(a;t)$ рівняння Фоккера-Планка приводить до рівнянь переносу для $\langle\hat{a}_{l,\mathbf{k}}\rangle^t$ за структурою як у випадку молекулярної гідродинаміки [122, 123] тільки усереднення здійснюється за допомогою $\varrho_L(x^N,a;t)=\varrho_q^{kin-hyd}(x^N;t)\frac{\hat{f}(a)}{W^G(a;t)}$. Запропонований підхід дає можливість вийти за рамки наближення Гауса для $\tilde{W}(\mathbf{k};t)$, $v_{l,\mathbf{k}}(a;t)$, а отже і для ядер переносу у рівнянні Фоккера-Планка. Це дає можливість отримати систему рівнянь для $\langle\hat{a}_{l,\mathbf{k}}\rangle^t$ нелінійного типу. Важливо зазначити, що кінетичне рівняння (2.38) містить узагальнений інтеграл типу Фоккера-Планка з узагальненими коефіцієнтами дифузії та тертя частинок у фазовому просторі $(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, де область зміни $|\mathbf{r}|$ обмежена значеннями $|\mathbf{k}|^{-1}_{hydr}$, що відповідають колективним нелінійним гідродинамічним процесам. Це означає, що в областях обмежених $|\mathbf{k}|^{-1}_{hydr}$ процеси описуються узагальненими коефіцієнтами дифузії і тертя, а при малих $|\mathbf{k}|^{-1}_{hydr}$ описуються узагальненими коефіцієнтами в'язкості, теплопровідності і перехресними коефіцієнтами $\phi_{jj}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{j\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{\varepsilon j}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{k},\mathbf{q},a,a';t,t')$. Кореляції між цими областями переносу описуються перехресними ядрами, які присутні як у кінетичному рівнянні, так і у рівнянні Фоккера-Планка: $\phi_{nj}(x,\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{n\varepsilon}(x,\mathbf{q},a,a';t,t')$, $\phi_{\varepsilon n}(\mathbf{k},x',a,a';t,t')$, $\phi_{jn}(\mathbf{k},x',a,a';t,t')$, розрахунок яких є дуже важливим, оскільки вони описують перехресні кореляції між кінетичними і гідродинамічними процесами.

Література

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1946; Избран. труд. в трех томах, Киев, Наукова думка, 1970, Т. 2; Bogolubov N.N. Problems of a dynamical theory in statistical physics. In: Studies in statistical mechanics, vol. 1. Eds. J. de Boer and G.E.Uhlenbeck. Amsterdam, North-Holland, 1962.
2. Born M., Green H.S.., A general kinetic theory of liquids. Cambridge University Press, Cambridge, 1949.
3. Kirkwood J.K., Chem. Phys., 1946, **14**, 1946, 180.
4. Kirkwood J.K., J. Chem. Phys., 1947, **15**, 72.
5. Yvon J. La théorie des fluids et l'équation d'etat: actualités scientificues et industrielles. Hermann and Cie, Paris, 1935.
6. Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, Издат. иностран. лит., М., 1960.; Chapman S., Cowling T.G., The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge University Press, Cambridge,1952.
7. Green H.S., The Molecular Theory of Gases, North Holland, Amsterdam, 1952.
8. Cohen E.G.D., Physica, 1962, **28**, 1045.

9. Cohen E.G.D., J. Math. Phys., 1963, **4**, 183.
10. Пригожын И., Неравновесная статистическая механика, Мир, Москва, 1964.
11. Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, Мир, Москва, 1965.
12. Гуров К.П., Основания кинетической теории, Наука, Москва, 1966.
13. Власов А.А., Статистические функции распределения, Наука, Москва, 1966.
14. Силин В.П., Введение в кинетическую теорию газов, Наука, Москва, 1971.
15. Зубарев Д.Н., Новиков М.Ю., Теор. мат. физ., 1972, **13**, 406.
16. Zubarev D.N., Novikov M.Yu., Fortsc. Physik, 1973, **21**, 703.
17. Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, Мир, Москва, 1974; Liboff R.L. Introduction to the Theory of Kinetic Equations, John Willey and Sons, New York, 1969.
18. Боголюбов Н.Н., Теор. мат. физ., 1975, **24**, 242.
19. Климонтович Ю.Л., Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной пламзы, Наука, Москва, 1975; Klimontovich Yu.L., Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas, Pergamon Press, New York, 1982.
20. Ферцигер Дж., Капер Г., Математическая теория процессов переноса в газах, Мир, Москва, 1976; Ferziger J.H., Kaper H.G., Mathematical Theory of Transport Processes in Gases, North-Holland, Amsterdam, 1972.
21. Боголюбов Н.Н., Физ. элемент. частиц и атомного ядра, 1978, **9**, No. 4, 501.
22. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П., Физическая кинетика, Наука, Москва, 1979.
23. Резибуа П., Де Ленер М., Классическая ктнетическая теория жидкостей и газов, Мир, Москва, 1980; Résibois P., de Leener M., Classical Kinetic Theory of Fluids, John Willey and Sons, Amsterdam, 1977.
24. Петрина Д.Я., Герасименко В.И., Усп. мат. наук, 1983, **38**, вып. 5(233), 3.
25. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н.(мл.), Введение в квантовую статистическую механику, Наука, Москва, 1984.
26. Петрина Д.Я., Герасименко В.И., Малышев П.В., Математические основы классической статистической механики, Наукова думка, Киев, 1985.
27. Неравновесные явления: Уравнения Больцмана, под ред. Дж.

Л. Лебовица и Е.У. Монтролла, Мир, Москва, 1986.
28. Рудяк В.Я., Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях, Наука, Новосибирск, 1987.
29. Петрина Д.Я., Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова, 1989, **191**, 192.
30. Жданов В.М.,Алиевский М.Я., Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах, Наука, Моска, 1989.
31. Шелест А.В., Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений, Наука, Москва, 1990.
32. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petryna D. Ya. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations, Kluwer. Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1997.
33. Веденяпин В.В., Кинетические уравнения Больцмана и Власова, Физматлит, Москва, 2001.
34. Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O., J. Phys. A: Math. Gen., 2004, **37**, 9861.
35. Gerasimenko V.I., Gapyak I.V., Kinet. Relat. Models, 2012, **5**, 459.
36. Трушечкин Ф.С., Труды МИАН, 2014, **258**, 264.
37. Фишер И.З., Статистическая теория жидкостей, Физматизд., Москва, 1961.
38. Kadanoff L.P., Martin P.C., Ann. Phys., 1963, **24**, 419.
39. Де Гроот С., Мазур П., Неравновесная термодинамика, Мир, Москва, 1964.
40. Толубинский Е.В., Теория процессов переноса, Наукова думка, Киев, 1969.
41. Физика простых жидкостей. Статистическая теория, под ред. Г. Темперли и др., Мир, Москва, 1971.
42. Зубарев Д.Н., Неравновесная статистическая термодинамика, Наука, Москва, 1971.
43. Сергеев М.В., Теор. мат. физ., 1974, **21**, 402.
44. Forster D., Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symetry, and Correlation Functions, W. A. Benjamin, Advanced Book Program, London, 1975.
45. Mountain R.D. Generalized Hydrodynamics, Adv. In Mol. Relaxation Process, 1976, **9**, 225.
46. Тищенко С.В., Теор. мат. физ., 1976, **26**, 96.
47. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В., Методы статистической физики, Наука, Москва, 1977.
48. Крокстон К., Физика жидкого состояния. Статистическое введение, Мир, Москва, 1978.
49. Балеску Р., Равновесная и наравновесная статистическая механика, том 2, Мир, Москва, 1978.

50. Марч Н., Тоси М., Движение атомов жидкости, Металлургия, Москва, 1980.
51. Boon J., Yip S., Molecular Hydrodynamics, McGraw-Hill Inc., New-York, 1980.
52. Динамические свойства твердых тел и жидкостей. Исследования методом рассеяния нейтронов, под ред. С. Лавси, Т. Шпрингер, Мир, Москва, 1980.
53. Зубарев Д.Н., Современные методы статистической теории неравновесных процессов, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, ВИНИТИ, Москва, 1980, **157**, 131.
54. Zubarev D.N., Morozov V.G., Physica A, 1983, **120**, 411.
55. Церковников Ю.А., Теор. мат. физ., 1985, **63**, 440.
56. Зубарев Д.Н., Церковников Ю.А., Метод двухвременных температурных функций Грина в равновесной и неравновесной статистической механике. Труды Математического института АН СССР, Наука, Москва, 1986, том 175, вып. 3, с. 134-177.
57. Гречаный О.А., Стохастическая теория необратимых процессов, Наукова думка, Киев, 1989.
58. Репке Г., Неравновесная статистическая механика, Мир, Москва, 1990.
59. Климонтович Ю.Л., Турбулентное движение и сруктура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем, Наука, Москва, 1990.
60. Кайзер Дж., Статистическая термодинамика неравновесных процессов, Мир, Москва, 1990.
61. Гетце В., Фазовые переходы жидкость-стекло, Наука, Москва, 1992.
62. Balucani U., Zoppi M., Dynamics of the Liquid State, Clarendon Press, Oxford, 1994.
63. Zubarev D.N., Morozov V.G., Rёpke G., Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, vol.1, Akademie, Berlin, 1996.
64. Zubarev D.N., Morozov V.G., Rёpke G. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, vol.2, Akademie, Berlin, 1996.
65. Balescu R., Statistical dynamics Matter: Out of Equilibrium, Imperial Coll. Press, London, 1997.
66. Zwanzig R., Nonequilibrium statistical mechanics, Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
67. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов, том 1, Физматлит, Москва, 2002.
68. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика

неравновесных процессов, том 2, Физматлит, Москва, 2002.
69. March N.H., Tosi M.P., Introduction to liquid state physics, World Scien. Publ. Co. Pte. Ltd, 2002.
70. Mazenko G., Nonequilibrium statistical mechanics, Wiley-VCH Verlag GmbH. Co. KGaA, 2006.
71. Hansen J.-P., McDonald I.R., Theory of simple liquids, 3rd ed., Academic Press, London, 2006.
72. Ковалевский М.Ю., Пелетминский С.В., Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов, Физматлит, Москва, 2006.
73. Evans D., Morriss G., Statistical Mechanics of Nonequilibrium Liquids, Cambridge Univer. Press., Cambridge, 2008.
74. Церковников Ю.А., Статистическая механика. Избранные труды,(Ред.-сост. Ю.Г. Рудой), Янус-К, Москва, 2010.
75. Das S.P., Statistical Physics of liquids at Freezinq and Beyond, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.
76. Климонтович Ю.Л., Статистическая теория электромагнитных процессов в плазме, Гзд. МГУ, Москва, 1964.
77. Балеску Р., Статистическая механика заряженных частиц, Мир, Москва, 1967.
78. Эккер Г., Теория полностью ионизированной плазмы, Мир, Москва, 1974.
79. Ситенко А.Г., Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме, Наукова думка, Киев, 1977.
80. Климонтович Ю.Л., Кинетическая теория электромагнитных процессов, Наука, Москва, 1980.
81. Климонтович Ю.Л., Вильгельсон Х., Загородний А.Г., Якименко И.П., Статистическая теория плазменно-молекулярных ограниченных систем, Гзд. МГУ, Москва, 1990.
82. Ситенко О.Г., Мальнєв В.М., Основи теорії плазми, Наукова думка, Київ, 1994.
83. Bonitz M., Quantum kinetic theory, B.G. Teubner Stuttgart-Leipzig, 1998.
84. Klimontovich Y.L., Kremp D., and Kraeft W.D., Advances in Chemistry and Physics, Wiley, New York, 2007. - p. 175-253.
85. Bonitz M., Henning C., Block D., Report Progr. Phys., 2010, **73**, 066501.
86. Röpke G., Nonequilibrium statistical thermodynamics, Wiley-VCH, Verlag CmbH Co KGaA, 2013.
87. Bonitz M., Lopez J., Becker K., Thomsen H., Complex plasmas. Scientific Challenges and Technological Opportunities. Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics, vol. 82, 2014.

88. Зубарев Д.Н., Докл. АН СССР, Сер. физ., 1961, **140**, No 1, 92.
89. Зубарев Д.Н., Докл. АН СССР, Сер. физ., 1965, **164**, No 3, 537.
90. Зубарев Д.Н., Теор. мат. физ., 1970, **3**, 276.
91. Zwanzig R., J Chem. Phys., 1960, **33**, 1338.
92. Zwanzig R., Phys. Rev., 1961, **124**, 983.
93. Zwanzig R., Physica, 1964, **30**, 1109.
94. Robertson B., Phys. Rev., 1967, **144**, 151.
95. Robertson B., Phys. Rev., 1967, **160**, 175.
96. Kawasaki K., Gunton J.D., Phys. Rev. A, 1973, **8**, 2048.
97. Пелетминский С.В., Яценко А.А., К квантовой теории кинетических и релаксационных процессов, Журн. экспер. и теор. физ., 1967, **53**, 1327.
98. Зубарев Д.Н., Калашников В.П., Теор. мат. физ., 1970, **3**, 126.
99. Зубарев Д.Н., Неравновесный статистический оператор как обобщение распределения Гиббса на неравновесный случай.- Киев.- 1992.- 23с.-(Препринт-ИФКС-92-7Р).
100. Ляпилин И.И., Калашников В.П., Неравновесный статистический оператор и его приложения к кинетике парамагнитных явлений в проводящих кристаллах, УрО РАН, Екатеренбург, 2008.
101. Костробій П.П., Токарчук М.В., Маркович Б.М., Ігнатюк В.В., Гнатів Б.В., Реакційно-дифузійні процеси в системах «метал-газ», НУ «Львівська політехніка», Львів, 2009.
102. Хамзин А.А., Нигматулин Р.Р., Метод неравновесного сатистического оператора и его приложение к кинетике изинговских магнетиков. Учебное пособие, Казанский унив., Казань, 2011.
103. Yoshida K., Arimitsu T., J. Phys. A: Math. Theor., 2013, **46**, 335501.
104. Valente P.C., Vassilicos J.C., arXiv: 1307.5898v.1 [physics: flu-dyn], 2013,; arXiv: 1307.5901v.1 [physics: flu-dyn], 2013.
105. Tokuyama M., Physica A, 2014, **395**, 31.
106. Mendoza-Mendez P., Lopez-Flores L., Vizcarra-Redon A., Sanchez-Diaz L.F., Medina-Noyola M., Physica A, 2014, **394**, 1.
107. Du Jiulin, Physica A, 2012, **391**, 1718.
108. Lang S., Schilling R., Krakoviack V., Franosch T., Phys. Rev. E, 2012, **86**, 021502.
109. Guo Ran, Du Jiulin, Physica A, 2014, **406**, 281.
110. Boon J.P., Lutsko J.F., Lutsko C., Phys.Rev. E, 2012, **85**, 0211126.
111. Mazenko G.F., Phys.Rev. E, 2010, **81**, 061102.
112. Mazenko G.F., Phys.Rev. E, 2011, **83**, 041125.

113. Das S.P., Mazenko G.F., J. Stat. Phys., 2013, **152**, 159.
114. Kostrobij P., Tokarchuk R., Tokarchuk M., Markiv B., Conden. Matter Phys., 2014, **17**, 33005.
115. Hlushak P.A., Tokarchuk M.V., Conden. Matter Phys., 2014, **17**, 23606.
116. Silva C.A.B., Vasconcellos A.R., Ramos J.G., Luzzi R., J. Stat. Phys., (2011), **143**, 1020.
117. Silva C.A.B., Ramos J.G., Vasconcellos A.R., Luzzi R., Nonlinear higher-order hydrodynamics: Unification of kinetic and hydrodynamic within a nonequilibrium statistical ensemble formalism. arXiv: 1210.7280 [physics. flu-dyn], 2012.
118. Tsytovich V.N., de Andelis U., Phys. Plasmas, (2004), **11**, 496.
119. Olemskoi A.I., Theory of structure transformations in nonequilibrium condensed matter, Horizons in World Physics Series, Vol. 231, NOVA Science Publishers, New York, 1999.
120. Frank T.D., Nonlinear Fokker-Planck Equations. Fundamentals and Applications, Springer, 2004.
121. Markiv B., Tokarchuk R., Kostrobij P., Tokarchuk M., Physica A, 2011, **390**, 85.
122. Мрыглод И.М., Токарчук М.В., Вопр. атом. науки и техн., 1992, No 3(24), 134.
123. Mryglod I.M., Omelyan I.P., Tokarchuk M.V., Mol. Phys., 1995, **84**, 235.
124. Markiv B.B., Omelyan I.P., Tokarchuk M.V., Phys. Rev. E, 2010, **82**, 041202.
125. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В., Теор. мат. физ., 1993, **96**, 325.
126. Tokarchuk M.V., Omelyan I.P., Kobryn A.E., Condens. Matter Phys., 1998, **1**, No. 4(16), 687.
127. Kobryn A.E., Omelyan I.P., Tokarchuk M.V., J. Stat. Phys., 1998, **92**, 973.
128. Markiv B., Omelyan I., Tokarchuk M.V., J. Stat. Phys., 2014, **155**, 843.
129. Markiv B., Tokarchuk M., Phys. Plasmas, 2014, **21**, 023707.
130. Dorfman J.R., Physica A, 1981, **106**, 77.
131. Климонтович Ю.Л., Теор. мат. физ., 1992, **92**, 312.
132. Klimontovich Yu.L., Phys. Lett. A, 1992, **170**, 434.
133. Cohen E.G.D., Physica A, 1993, **194**, 229.
134. Schnyder S.K., Hofling F., Franosch T., Voigtmann Th., J Phys.: Conden. Matter, 2011, **23**, 234121.
135. Franosch T., J Phys. A: Math. Theor., 2014, **47**, 325004.

136. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Теор. мат. физ., 1984, **60**, 270.
137. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Омелян И.П., Токарчук М.В., Теор. мат. физ., 1991, **87**, 113.
138. Kobryn A.E., Morozov V.G., Omelyan I.P., Tokarchuk M.V. Physica A, 1996, **230**, 189.
139. Зубарев Д.Н., Морозов В.Г. Неравновесные статистические ансамбли в кинетической теории и гидродинамики. В кн.: Научные труды Математического института им. В.А. Стеклова, 1989, том 191, с. 140-151.
140. Morozov V.G., Kobryn A.E., Tokarchuk M.V., Cond. Matt. Phys., 1994, **4**, 117.
141. Zubarev D.N., Morozov V.G., Physia A, 1983, **120**, 411.
142. Kawasaki K., Phase transition and ritial phenomena., 1976, vol. 5A, p. 165-411.
143. Зубарев Д.Н., Теор. мат. физ., **53**, 93.
144. Юхновский И.Р., Головко М.Ф., Статистическая теория классичеких равновесных систем, Наукова думка, Киев, 1980.
145. Ідзик І.М., Ігнатюк В.В., Токарчук М.В., Укр. фіз. журн., 1996, **41**, 1017.
146. Hlushak P., Tokarchuk M.V., Physica A, 2016, **443**, 231.