

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-16-05U

А. Дувіряк

ЗАРЯДЖЕНИЙ РОТАТОР ЯК СИСТЕМА З В'ЯЗЯМИ

УДК: 531/533; 530.12: 531.18

PACS: 02.30.Hq, 03.30.+p, 03.50.De, 45.20.dc

Заряджений ротатор як система з в'язями

А. Дувіряк

Анотація. Розглядається рух зарядженого ротатора – одного заряду (або кількох), на який накладено жорстку в'язь (в'язі). Динаміка ротатора виводиться із рівняння Лоренца-Дірака, доповненого принципом Даламбера-Лагранжа, і приводить до неінтегровного нелінійного рівняння 2-го порядку щодо кутової швидкості. Досліджено динаміку ротатора. Показано, що лише одна фазова траєкторія – сепаратриса – має фізичний сенс, усі інші траєкторії описують необмежений розгін ротатора за скінченний час. Описано парадокс, що виникає при розгляді ротатора з кількома зарядами.

Charged rotator as a system with constraints

A. Duviryak

Abstract. It has been studied a motion of the charged rotator which is (are) a rigidly constrained one charge or few charges. A dynamics of the rotator is derived from the Lorentz-Dirac equation complemented by the d'Alembert-Largange principle. It leads to a non-integrable 2nd-order differential equation with respect to an angular velocity. A dynamics of the rotator is studied. It is shown that the only phase trajectory – the separatrix – makes a physical meaning, all other trajectories describe unlimited self-untwisting in a limiting time. It is described a paradox arising when considering the rotator with several charges.

Подається в УФЖ

Submitted to UJP

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Аскольд Андрійович Дувіряк

ЗАРЯДЖЕНИЙ РОТАТОР ЯК СИСТЕМА З В'ЯЗКАМИ

Роботу отримано 29 серпня 2016 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку відділом комп'ютерного моделювання багаточастинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

1. Вступ

При дослідженні релятивістичних систем взаємодіючих частинок виникають рівняння руху, що є сингулярно збуреними (щодо деякого малого параметру τ_0) диференціальними рівняннями з вищими похідними [1–6], або ще складнішими різницево- чи інтегрально-диференціальними рівняннями [7–9]. Загалом усі ці типи рівнянь мають розв'язки, які однозначно не визначаються початковими координатами та швидкостями, як у звичній механіці. Такі розв'язки вважаються нефізичними. В релятивістичній фізиці параметр τ_0 пропорційний до оберненої швидкості світла $1/c$ чи її деякого ступеня, а граничний перехід $c \rightarrow \infty$ означає можливість неперервного переходу до нерелятивістичної області. Щоб отримати рівняння руху, аналогічні до традиційних рівнянь механіки, здійснюють розклад за параметром τ_0 , а вищі похідні виключають за допомогою рівнянь руху нижчих наближень [3]. Отримані таким чином квазірелятивістичні рівняння руху гарантують існування та єдиність розв'язків відповідної задачі Коші, що вважаються фізичними. Однак, побудова квазірелятивістичних рівнянь руху є наближеною процедурою, що не охоплює сильно релятивістичну область, і не завжди можлива.

В низці робіт [3, 9–12] запропоновано серед усього класу розв'язків точно релятивістичних рівнянь руху відбирати лише такі, що є аналітичними за малим параметром τ_0 . Як правило, множину таких розв'язків можна параметризувати початковими координатами і швидкостями (або еквівалентним чином), і задача Коші для них має сенс.

Найпростішим прикладом релятивістичного сингулярно збуреного рівняння є рівняння Лоренца-Дірака для вільної частинки. У найнижчому нетривіальному наближенні за $1/c$ (де c – швидкість світла) воно має вигляд:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2q^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}, \quad (1.1)$$

де \mathbf{v} і $\dot{\mathbf{v}} \equiv d\mathbf{v}/dt$ – швидкість і прискорення частинки з масою m та зарядом q . Сила реакції випромінювання у правій частині рівняння (1.1) зникає у нерелятивістичній границі $c \rightarrow \infty$, у якій рівняння (1.1) описує рух за інерцією $m\dot{\mathbf{v}} = 0$.

Загальний розв'язок р-ня (1.1)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{C} \exp(t/\tau_0), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{C} \tau_0 \exp(t/\tau_0), \quad (1.3)$$

$$\text{де } \tau_0 = \frac{2q^2}{3mc^3} = \frac{2r_0}{3c}, \quad r_0 = \frac{q^2}{mc^2} \quad (1.4)$$

описує необмежений саморозгін частинки: він є неаналітичний за параметром τ_0 (або за $1/c$). Винятком є випадок $\mathbf{C} = 0$, коли розв'язок не залежить від τ_0 (і цим аналітичний за τ_0), і описує рівномірний рух за інерцією. Таким чином, умова $\mathbf{C} = 0$ виділяє серед усієї множини розв'язків (1.2), (1.3) фізично змістовну підмножину, параметризовану початковим положенням \mathbf{r}_0 та швидкістю \mathbf{v}_0 .

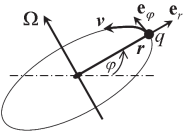
Критерій аналітичності застосовний і в тих випадках, коли на частинку окрім реакції випромінювання діє й інша сила, наприклад сила пружності, Лоренца тощо [13]. Але в деяких випадках цей критерій не працює – цілком або частково. Тут розглядається широко застосовний приклад ротатора – зарядженої частинки, що рухається під дією сил реакції в'язі та реакції випромінювання. Аналіз динаміки такої системи демонструє, що критерій аналітичності не забезпечує відбору лише фізично змістовних розв'язків.

2. Рівняння руху 1-зарядного ротатора

Обмежимо конфігураційний простір \mathbb{R}^3 з координатами $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ в'язями, що дозволяють частинці плаский коловий рух:

$$\mathbf{r}^2 \equiv r^2 = \text{const}, \quad z = 0. \quad (2.1)$$

Тоді у полярних координатах з одиничними ортами $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\varphi$ маємо таку кінематику:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r; & \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \equiv r\Omega\mathbf{e}_\varphi; \\ \dot{\mathbf{v}} &= -r\Omega^2\mathbf{e}_r + r\dot{\Omega}\mathbf{e}_\varphi; \\ \ddot{\mathbf{v}} &= -3r\Omega\dot{\Omega}\mathbf{e}_r + r(\ddot{\Omega} - \Omega^3)\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (2.2)$$


Підстановка цих величин в р-ня Лоренца-Дірака (1.1) дає редуковане рівняння для кутової швидкості Ω :

$$\dot{\Omega} = \tau_0(\ddot{\Omega} - \Omega^3), \quad (2.3)$$

яке в безрозмірних змінних $\tau = t/\tau_0$, $\omega = \tau_0\Omega$ не містить параметру:

$$\ddot{\omega} - \dot{\omega} - \omega^3 = 0. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) є інваріантне щодо часових трансляцій $t \rightarrow t + \lambda$. Крім цього, воно допускає варіаційне формулювання з лагранжіаном

$$L = \frac{1}{2}e^{-\tau}(\dot{\omega}^2 + \frac{1}{2}\omega^4). \quad (2.5)$$

Але оскільки при часових трансляціях лагранжіан (2.5) змінюється не на повну похідну (а на масштабний множник), то теорема Нетер не застосовна, і відповідний інтеграл руху невідомий.

Навіть більше, не зважаючи на простий вигляд, це нелінійне диференціальне рівняння 2-го порядку не є точно розв'язним. Щоб переконатися в цьому, здійснимо заміну незалежної змінної $\tau \rightarrow \theta = e^\tau$, що зводить р-ня (2.4) до вигляду:

$$\omega''(\theta) = \omega^3/\theta^2, \quad (2.6)$$

тобто рівняння типу Емдена-Фаулера $y'' = x^n y^m$. Показники $n = -2$, $m = 3$ не належать до множини інтегровних випадків таких р-нь [14].

Щоб скласти уявлення про загальну поведінку розв'язків р-ня (2.3) або (2.4), дослідимо їх асимптотичну поведінку при $t \rightarrow 0, \pm\infty$. Для цього спочатку розглянемо степеневі асимптотики.

Асимптотика при $t \rightarrow +\infty$:

$$\omega = A\tau^\alpha[1 + O(\tau^{-1})], \quad (2.7)$$

де A і α – шукані сталі. Підстановка виразу (2.7) в р-ня (2.4) приводить до рівняння

$$\begin{aligned} A\alpha(\alpha-1)\tau^{\alpha-2} - A\alpha\tau^{\alpha-1} - A^3\tau^{3\alpha} \\ = O(\tau^{\alpha-3}) + O(\tau^{\alpha-2}) + O(\tau^{3\alpha-1}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Перший член у лівій частині (л.ч.) є нехтувано малий у порівнянні з 2-м членом, якого можна компенсувати 3-м членом за умов

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 1 = 3\alpha \\ A\alpha + A^3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -1/2 \\ A^2 = 1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega(\tau) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}\tau}[1 + O(\tau^{-1})]. \quad (2.9)$$

В розмірних термінах ця асимптотика має вигляд:

$$\dot{\Omega} \sim -\tau_0\Omega^3 \Rightarrow \Omega(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\tau_0 t}}[1 + O(t^{-1})], \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.10)$$

де також вказано домінуючі члени р-ня (2.3), що її визначають.

Асимптотика при $t \rightarrow 0$:

$$\omega = B\tau^\beta[1 + O(\tau)], \quad (2.11)$$

де сталі B і β визначаються підстановкою виразу (2.11) в р-ня (2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta - 2 = 3\beta \\ B\beta(\beta-1) = B^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = -1 \\ B^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega(\tau) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\tau}[1 + O(\tau)]. \quad (2.12)$$

Оскільки р-ня (2.3) інваріантне щодо довільного часового зсуву $t \rightarrow t - t_1$, то шукана асимптотика в розмірних термінах набуває вигляду:

$$\ddot{\Omega} \sim \Omega^3 \Rightarrow \Omega(t) = \pm \frac{\sqrt{2}}{t - t_1} [1 + O(t - t_1)], \quad t \rightarrow t_1, \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Ця асимптотика описує необмежене саморозкручування за довільний наперед заданий скінченний час. Цікаво, що малий параметр τ_0 не входить ні у цей розв'язок, ні в наближене р-ня, котре його визначає.

Асимптотика при $t \rightarrow -\infty$. Рівняння (2.3) (чи (2.4)) не допускає такої степеневі асимптотики. Однак р-ня Емдена-Фаулера (2.6) має відповідну степеневу асимптотику:

$$\omega \sim C\theta = Ce^\tau, \quad \theta \rightarrow +0 \Leftrightarrow \tau \rightarrow -\infty. \quad (2.14)$$

В розмірних термінах отримаємо:

$$\dot{\Omega} \sim \tau_0 \ddot{\Omega} \Rightarrow \Omega(t) = C \exp(t/\tau_0)/\tau_0, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (2.15)$$

що узгоджується з відповідною асимптотикою (1.2) вихідного рівняння Лоренца-Дірака (1.1).

Повнішу картину отримаємо з фазового портрету.

3. Фазовий портрет ротатора

Рівняння 2-го порядку (2.4), інваріантне щодо часових трансляцій, можна розглядати як динамічну систему

$$\dot{\omega} = \varpi, \quad (3.1)$$

$$\dot{\varpi} = \varpi + \omega^3. \quad (3.2)$$

З них впливає рівняння Абеля для фазових траєкторій системи:

$$\frac{d\varpi}{d\omega} = 1 + \frac{\omega^3}{\varpi}. \quad (3.3)$$

Це рівняння неінтегровне, але з отриманих раніше асимптотичних розв'язків (2.9), (2.12), (2.14) можна отримати відповідні асимптотики фазових траєкторій:

$\tau \rightarrow +\infty$)

$$\omega \sim \pm(2\tau)^{-1/2} \rightarrow 0, \quad \varpi \sim \mp(2\tau)^{-3/2} \rightarrow 0 \Rightarrow \varpi \sim -\omega^3. \quad (3.4)$$

$\forall \tau_1 \quad \bar{\tau} \equiv \tau - \tau_1 \rightarrow 0$)

$$\omega \sim \pm\sqrt{2}/\bar{\tau} \rightarrow \pm\infty, \quad \varpi \sim \mp\sqrt{2}/\bar{\tau}^2 \rightarrow \mp\infty \Rightarrow \varpi \sim \mp\frac{\omega^2}{\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

$\tau \rightarrow -\infty$)

$$\omega \sim Ce^\tau \rightarrow 0, \quad \varpi \sim Ce^\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \varpi \sim \omega. \quad (3.6)$$

Система має нерухому точку ($\omega = 0, \varpi = 0$), що є нестійкою. Щоб переконатися в цьому, розглянемо таку функцію:

$$V(\omega, \varpi) = \omega(\varpi - \frac{1}{2}\omega) : \quad (3.7)$$

$$V(0, 0) = 0; \quad V(0 \leq \omega \leq 2\varpi) > 0; \quad \dot{V} = \varpi^2 + \omega^4 > 0. \quad (3.8)$$

Отже функція (3.7) – ф-я Ляпунова, а її властивості (3.8) в околі нерухомої точки (0,0) свідчать, що ця точка – нестійка [15].

На рис. 1 представлено фазовий портрет слабкорелятивістичного ротатора. Він ділиться на 4 сектори двома сепаратрисами – стійкою та нестійкою, що проходять через нерухому точку (0,0). В її околі стійка сепаратриса описується асимптотикою (3.4), а нестійка – асимптотикою (3.6). Протилежні, тобто нескінченні асимптотики цих сепаратрис, а також асимптотики усіх інших фазових траєкторій описуються р-нями (3.5), і досягаються за скінченний проміжок часу. Тому усі фазові траєкторії є нефізичними – за винятком сегменту стійкої сепаратриси в деякому околі нерухомої точки (0,0).

На перший погляд, фізичний сегмент стійкої сепаратриси описується асимптотичним розв'язком (3.4), що є неаналітичним за параметром τ_0 . Нефізичні ж асимптотики цієї сепаратриси та інших фазових траєкторій описуються розв'язками (3.5), що не залежать від τ_0 , і в цьому сенсі є аналітичними. Картина виглядає протилежною до тієї, що була у випадку вихідного рівняння Лоренца-Дірака (1.1): для зарядженого ротатора критерій аналітичності для відбору фізичних розв'язків не працює.

Насправді ж ситуація складніша. Асимптотичні формули (2.9), (2.10) добре описують фізичний сегмент стійкої сепаратриси, якщо $|\omega| \ll 1$, тобто $|\Omega| \ll 1/\tau_0$. За цієї умови формулу (2.10) можна розглядати як наближений розв'язок рівняння (2.3). Враховуючи часову однорідність цього рівняння, замінимо в (2.10) аргумент $t \rightarrow t - t_1$, і оберімо t_1 так, щоб виконувалася задача Коші:

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_0}{\sqrt{1 + 2\tau_0\Omega_0^2 t}}, \quad \Omega(0) = \Omega_0. \quad (3.9)$$

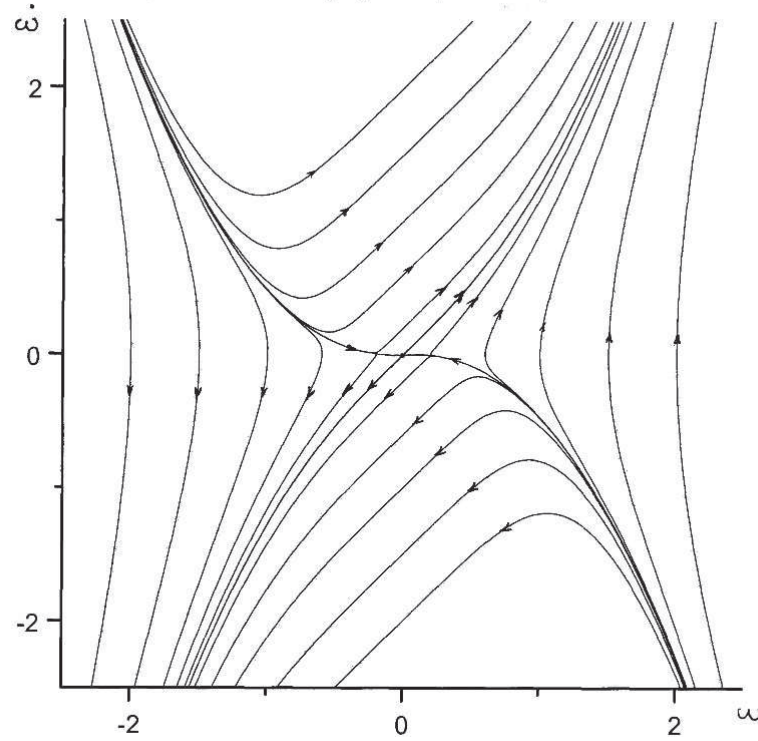


Рис. 1. Фазовий портрет слабкорелятивістичного ротатора.

Очевидно, що цей вираз аналітичний за τ_0 , причому $\Omega(t)|_{\tau_0 \rightarrow 0} \rightarrow \Omega_0$, як і очікується в нерелятивістичній границі.

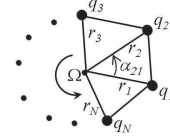
Що стосується незалежних від τ_0 нефізичних асимптотик (3.5), то вони застосовні за умови $|\omega| \gg 1$, тобто $|\Omega| \gg 1/\tau_0$. Ця умова не має скінченної для Ω границі при $\tau_0 \rightarrow 0$.

Новим у порівнянні з рівняннями Лоренца-Дірака та подібними релятивістичними системами є те, що одна фазова траєкторія зарядженого ротатора – стійка сепаратриса – містить як фізичну, так і нефізичні сегменти. Постає питання – де саме нефізичний сегмент переходить у фізичний, і в якій області має сенс задача Коші?

4. N -зарядний ротатор

Розглянемо тепер плоский (для простоти) ротатор, що містить N зарядів q_a ($a = 1, 2, \dots, N$) з масами m_a , поміщених на відстанях r_a від осі обертання (перпендикулярної до площини ротатора), і з'єднаних з віссю між собою жорсткими невагомими стрижнями – в'язями:

$$\begin{aligned} r_a^2 &\equiv r_a^2 = \text{const}, & (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 &\equiv r_{ab}^2 = \text{const}, \\ \Rightarrow \mathbf{r}_a &= r_a \mathbf{e}_r(\varphi + \alpha_{a1}), & \alpha_{a1} &= \text{const}, \\ \delta \mathbf{r}_a &= r_a \mathbf{e}_\varphi(\varphi + \alpha_{a1}) \delta \varphi, & a &= 1, 2, \dots, N, \\ \mathbf{v}_a &= r_a \mathbf{e}_\varphi(\varphi + \alpha_{a1}) \dot{\varphi} & \text{і т. д.} \end{aligned} \quad (4.1)$$



Ця кінематика, рівняння Лоренца-Дірака (1.1) для кожної частинки і принцип віртуальних переміщень Даламбера-Лагранжа:

$$\sum_a \left(m_a \dot{\mathbf{v}}_a - \frac{2q_a^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}_a \right) \cdot \delta \mathbf{r}_a = \left[I \dot{\Omega} - \frac{2}{3c^3} \sum_a \mathbf{d}_a^2 (\ddot{\Omega} - \Omega^3) \right] \delta \varphi = 0, \quad (4.2)$$

де $I = \sum_a m_a r_a^2$ – момент інерції системи, а $\mathbf{d}_a = q_a \mathbf{r}_a$ – дипольний момент a -ї частинки, приводить до рівняння руху ротатора (2.3), але з іншим параметром замість τ_0 :

$$\dot{\Omega} = T_0 (\ddot{\Omega} - \Omega^3), \quad \text{де } T_0 = \frac{2 \sum_a \mathbf{d}_a^2}{3c^3 I} = \frac{2 \sum_a q_a^2 r_a^2}{3c^3 \sum_a m_a r_a^2}. \quad (4.3)$$

Той факт, що у виразі для T_0 сумуються внески усіх зарядів незалежно від їх знаку, приводить до дивного висновку, що реакція випромінювання повинна гальмувати як заряджені, так і нейтральні тіла, що складаються з атомів.

Отриманий результат, очевидно, хибний, а помилка полягає в тому, що не враховано взаємодію зарядів між собою. Замість рівняння (4.2) слід записати таке:

$$\sum_a \left(m_a \dot{\mathbf{v}}_a - \frac{2q_a^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}_a - \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_{ab} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_a = 0, \quad (4.4)$$

де останній член, що містить сили міжчастинкової взаємодії \mathbf{F}_{ab} , можна представити так:

$$\sum_{a \neq b} \sum \mathbf{F}_{ab} \cdot \delta \mathbf{r}_a = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum [(\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba}) \cdot \delta \mathbf{r}_a + \mathbf{F}_{ab} \cdot \delta \mathbf{r}_{ab}]. \quad (4.5)$$

Якби міжчастинкові сили були центральними: $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba} \sim \mathbf{r}_{ab}$, то з цих рівностей, а також з наслідку в'язей $\mathbf{r}_{ab} \cdot \delta \mathbf{r}_{ab} = 0$ випливало б, що вираз (4.5) занулюється. Насправді ж, \mathbf{F}_{ab} – сили Лоренца

$$\mathbf{F}_{ab} = q_a \left[\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_a) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_a \times \mathbf{H}_b(\mathbf{r}_a) \right],$$

$$\text{де } \mathbf{E}_b = -\nabla \varphi_b - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_b}{\partial t}, \quad \mathbf{H}_b = \nabla \times \mathbf{A}_b,$$

пов'язані з потенціалами Ляенара-Віхерта зарядів ротатора:

$$\varphi_b = \frac{q_b}{R' - \frac{1}{c} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'_b} \Big|_{t'=t-R'/c}, \quad \mathbf{A}_b = \frac{q_b \mathbf{v}'_b}{R' - \frac{1}{c} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}'_b} \Big|_{t'=t-R'/c};$$

тут $R' \equiv |\mathbf{R}'|$, $\mathbf{R}' \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_b(t')$, а усі штриховані величини відносяться до запізненого моменту часу t' .

З точністю до $1/c^3$ вони мають наближений вираз:

$$\mathbf{F}_{ab} = q_a q_b \left\{ \frac{\mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^3} - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}_b}{r_{ab}} + \dots \right) + \frac{2\ddot{\mathbf{v}}_b}{3c^3} + \dots \right\}, \quad (4.6)$$

і не є центральними: $\mathbf{F}_{ab} \neq -\mathbf{F}_{ba}$. Тому замість (4.3) отримаємо

$$\left[I + \frac{1}{2c^2} (\dots) \right] \dot{\Omega} = \frac{2}{3c^3} \left\{ \sum_a q_a^2 r_a^2 + \sum_{a \neq b} q_a q_b r_a r_b \cos \alpha_{ab} \right\} (\ddot{\Omega} - \Omega^3). \quad (4.7)$$

Члени $\sim 1/c^2$ у лівій частині цього рівняння, породжені внесками $\sim 1/c^2$ у виразі сили (4.6), не є істотними в наближенні $1/c^3$, і їх можна упустити. Натомість вираз у фігурних дужках у правій частині (4.7) можна спростити до такого:

$$\left(\sum_a q_a r_a \cos \alpha_{a1} \right)^2 + \left(\sum_a q_a r_a \sin \alpha_{a1} \right)^2 = \left(\sum_a \mathbf{d}_a \right)^2 \equiv \mathbf{d}^2, \quad (4.8)$$

звівши його до квадрату повного дипольного моменту системи \mathbf{d} . Таким чином, рівняння (4.7) зводяться до вигляду (4.3) з іншим параметром замість T_0 :

$$T_0 \equiv \frac{2 \sum_a \mathbf{d}_a^2}{3c^3 I} \rightarrow \frac{2\mathbf{d}^2}{3c^3 I}, \quad (4.9)$$

тобто описують реакцію дипольного випромінювання.

5. Релятивістичний 1-зарядний ротатор

Запишемо точно релятивістичні рівняння Лоренца-Дірака:

$$m \frac{du^\mu}{ds} = \frac{2q^2}{3c^3} (\delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu) \frac{d^2 u^\nu}{ds^2}, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (5.1)$$

Тут власний час s пов'язаний з координатним часом $t = x^0/c$ так: $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} / c = dt / \gamma$, де $\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag}(+ - - -)$ – метрика Мінковського, а γ – лоренц-фактор, означений в р-ні (5.2). Компоненти одиничної 4-швидкості $u^\mu = (u^0, \mathbf{u})$ пов'язані з координатною швидкістю $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ і між собою так:

$$u^0 = \gamma \equiv 1 / \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = \sqrt{1 + \mathbf{u}^2}, \quad \mathbf{u} = \gamma \mathbf{v} / c \Rightarrow \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow u^\mu u_\mu \equiv u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1. \quad (5.3)$$

З врахуванням в'язей (2.1), (5.3) з 4-х р-нь (5.1) залишається одне:

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}}{\gamma} + w^3 = \frac{\dot{w}}{\sqrt{1 + \rho^2 w^2}} + w^3, \quad (5.4)$$

де введено змінну $w = |\mathbf{u}|/\rho$ та “параметр релятивізму” $\rho \equiv \frac{3}{2} r/r_0$.

За формальної умови $\rho \ll 1$ змінна w прямує до кутової швидкості: $w \rightarrow \omega$, а р-ня (5.4) зводиться до слабкорелятивістичного рівняння (2.4). Зокрема, при $\rho = 10^{-2}$ фазовий портрет рівняння (5.4) практично не відрізняється від поданого на рис. 1. Парадоксально, що у цих випадках $\rho \ll \rho_0$, тобто розмір ротатора повинен бути значно менший від класичного радіуса його заряду (зокрема, класичного радіуса електрона, якщо $q = e$). Такий ротатор неможливо фізично реалізувати.

Насправді, замість формальної умови $\rho \ll 1$ досить накласти обмеження $w \ll 1/\rho$. Тоді слабкорелятивістичній області відповідає деякий окіл точки (0,0) на релятивістичному фазовому портреті; див. рис. 2. Ця область сильно звужується при $\rho \gg 1$ (див. рис. 3), а р-ня (5.4) спрощується та інтегрується у квадратурах:

$$\ddot{w} = w^3 \quad \Rightarrow \quad \pm \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{2}w^4 + c_1}} = \tau - \tau_1. \quad (5.5)$$

Зауважимо, що у цьому ультрарелятивістичному випадку з'являється симетрія щодо часової інверсії $t \rightarrow -t$.

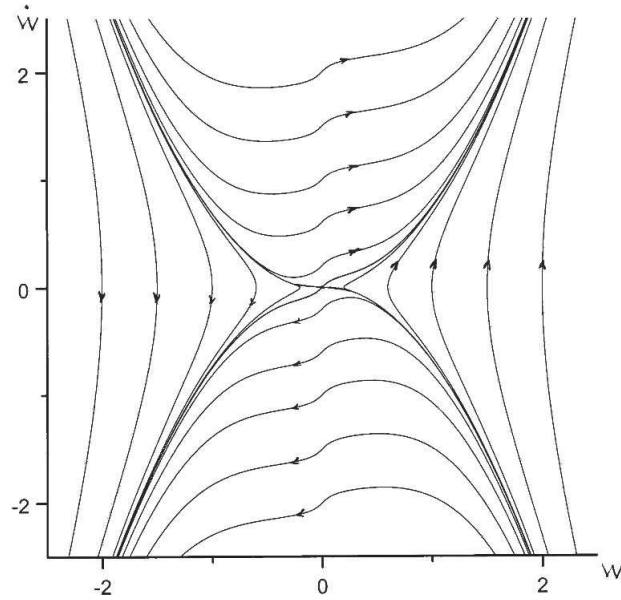


Рис. 2. Фазовий портрет релятивістичного ротатора: $\rho = 20$.

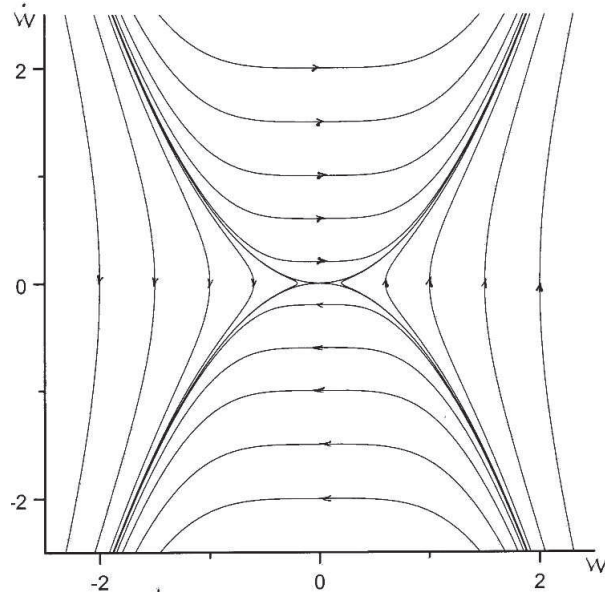


Рис. 3. Фазовий портрет ультрарелятивістичного ротатора: $\rho = 10^4$.

6. Висновки

Розглядено рух зарядженого ротатора - заряду, що може вільно рухатися вздовж кола. Опис динаміки ротатора отримано з рівняння Лоренца-Дірака, доповненого принципом Даламбера-Лагранжа. Ця динаміка описується нелінійним рівнянням 2-го порядку щодо кутової швидкості. У слабкорелятивістичному наближенні (з точністю до $1/c$) його можна звести до рівняння Емдена-Фаулера, яке не розв'язується у термінах відомих функцій. Досліджено асимптотики ρ -ня ротатора і побудовано його фазовий портрет. Він має одну нестійку нерухому точку, у якій перетинаються дві сепаратиси – стійка та нестійка.

На основі отриманих асимптотик побудовано множину наближених фізичних розв'язків слабкорелятивістичного рівняння ротатора, що відповідають стійкій сепаратисі і параметризується початковою кутовою швидкістю Ω_0 . Цей розв'язок описує поступове сповільнення ротатора, і тому може вважатися фізичним. Показано, що він є аналітичним за параметром $\tau_0 = \frac{2q^2}{3mc^3}$. Продовження цього розв'язку у минуле не залежить від τ_0 (і тому є аналітичним), але має нефізичну сингулярність при деякому скінченному t_1 . Розв'язок, що відповідає нестійкій сепаратисі, має таку ж особливість при деякому t_2 у майбутньому. Такий розв'язок описує необмежене саморозкручування ротатора за скінченний час. Наближені розв'язки, що відповідають усім іншим фазовим траєкторіям між сепаратисами, також не залежать від τ_0 , але мають особливості як у минулому, так і в майбутньому. Усі ці особливості виявляються і при числовому інтегруванні рівнянь руху.

Таким чином, критерій аналітичності розв'язків для даної системи (ротатора) не працює.

Формальний розгляд ротатора з кількома зарядами приводить до помилкового результату – занадто сильного гальмування, безвідносного до знаку і розміщення зарядів. Парадокс розв'язується врахуванням взаємодії зарядів між собою, що генерується потенціалами Льенара-Віхерта, і породжує нецентральні сили Лоренца (бо центральні сили повністю компенсувалися б в'язями).

Отримано та проаналізовано точно релятивістичне рівняння ротатора. Показано, що в ультрарелятивістичній границі це рівняння є симетричним щодо інверсії часу. Результати дослідження можуть бути корисними для розвитку нанотехнологій.

Подяки

Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом № 0116U005055.

Література

1. *Gaida, R. P.* Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics / R. P. Gaida, V. I. Tretyak // *Acta Phys. Pol. B.* – 1980. – V. 11, no. 7. – P. 502–522.
2. *Gaida, R. P.* Lagrangian classical relativistic mechanics of a system of directly interacting particles. i / R. P. Gaida, Y. B. Klyuchkovskii, V. I. Tretyak // *Theoretical and Mathematical Physics.* – 1980. – V. 44, no. 2. – P. 687–697.
3. *Gaida, R. P.* Lagrangian classical relativistic mechanics of a system of directly interacting particles. ii / R. P. Gaida, Y. B. Klyuchkovskii, V. I. Tretyak // *Theoretical and Mathematical Physics.* – 1980. – V. 45, no. 2. – P. 963–975.
4. *Gaida, R. P.* Quasirelativistic interacting particle systems / R. P. Gaida // *Fiz. Elem. Chastits At. Yadra (USSR).* – 1982. – T. 13, № 2. – С. 427–93.
5. *Gaida, R. P.* Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles / R. P. Gaida, Y. B. Kluchkovsky, V. I. Tretyak // *Constraint's Theory and Relativistic Dynamics* / Ed. by G. Longhi, L. Lusanna. – Singapore : World Scientific Publ., 1987. – P. 210–241.
6. *Yaremko, Y.* Radiation reaction in classical field theory: basics, concepts, methods / Y. Yaremko, V. Tretyak. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 436 p.
7. *В. Г. Писаренко.* Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейной теории поля / В. Г. Писаренко. – Киев : Наукова думка, 1974. – 463 с.
8. *Tretyak, V. I.* Forms of relativistic Lagrangian dynamics / V. I. Tretyak. – Kyiv : Naukova Dumka, 2011. – 280 с.
9. *Duviryak, A.* Quantization of almost-circular orbits in the Fokker action formalism / A. Duviryak // *European Physical Journal Plus.* – 2014. – V. 129, no. 12. – P. 267.
10. *Kerner, E. H.* Hamiltonian formulation of action-at-a-distance in electrodynamics / E. H. Kerner // *Journal of Mathematical Physics.* – 1962. – V. 3, no. 1. – P. 35–42.

11. *Staruszkiewicz, A.* On stability of a circular motion in the relativistic Kepler problem / A. Staruszkiewicz // *Acta Physica Polonica.* – 1968. – V. 33, no. 6. – P. 1007–1011.
12. *Staruszkiewicz, A.* On exact solutions of the relativistic two-particle problem / A. Staruszkiewicz // *Ann. der Physik.* – 1969. – V. 478, no. 1. – P. 66–70.
13. *Misner, C. W.* Classical charged particles: foundations of their theory / C. W. Misner, K. S. Thorn, J. A. Wheeler. – New York : Addison-Wesley, 1973.
14. *Polyanin, A. D.* Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2003. – 2nd Edition.
15. *Федорюк, М. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. И. Федорюк. – Москва : Наука, 1980. – 352 с.