Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Ірина Миколаївна Згладько
Аскольд Андрійович Дувіряк

УНІТАРНІСТЬ МАТРИЦІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ МОДЕЛІ ТИПУ ЮКАВИ У ФОРМАЛІЗМІ ЧАСТКОВО РЕДУКОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Роботу отримано 29 грудня 2011 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу комп'ютерного моделювання багаточастинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–11–20U

І.Згладько, А.Дувіряк

УНІТАРНІСТЬ МАТРИЦІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ МОДЕЛІ ТИПУ ЮКАВИ У ФОРМАЛІЗМІ ЧАСТКОВО РЕДУКОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

ЛЬВІВ

УДК: 531/533; 530.145; 531.18; 539.12

PACS: 11.10.Ef, 11.10.Lm

Унітарність матриці розсіяння для моделі типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля

І.Загладько, А.Дувіряк

Анотація. Робота стосується проблеми побудови унітарної матриці розсіяння, що виникає у випадку нелокальної теорії поля. Для моделі типу Юкави, переформульваної раніше у рамках формалізму частково редукованої теорії поля, знайдено вираз для S-матриці у найнижчому, квадратичному за константою взаємодії, наближенні. Безпосередніми обрахунками доведено унітарність цього оператора.

Unitarity of scattering matrix for Yukawa-like models in partially reduced field theory

I.Zagladko, A.Duviryak

Abstract. This paper is devoted to a construction problem of unitary scattering matrix that arises in the case of nonlocal field theory. For Yukawa-like model, reformulated before in partially reduced field theory, the expression for S-matrix in the lowest (quadratic) coupling constant approximation is found. Unitarity of this operator is proved by direct calculation.

Подається в International Journal of Modern Physics A
Submitted to International Journal of Modern Physics A

1. Вступ

Ще в літературі 60-х років велась дискусія щодо послідовності нелокальної квантової теорії поля [1,2]. Основними причинами недовіри до неї була відкрита проблема причинності, а також труднощі при побудові унітарної матриці розсіяння в такій теорії.

Пошуки розв'язання цих проблем привели тогочасних науковців до висновку, що упішність результатів залежить від вдалого формулювання та опису теорії (вона повинна формулюватись в евклідовій метриці; на форм-фактор повинні бути накладені певні умови) [3].

Щодо матриці розсіяння, то були запропоновані нові способи її побудови. Наприклад, Блохінцев [1, 4] пропонує будувати не безпосередньо матрицю розсіяння, а так званий оператор фази, ермітовість якого забезпечить унітарність S-матриці. Про саму матрицю розсіяння він каже, що її побудова може виявитись в деяких випадках надто складною, а перевірка унітарності тим паче.

В нашій роботі зроблено спробу дослідити вищезазначену проблему для моделі типу Юкави, про яку йшлося в попередньому препринті авторів [5] та роботі [6]. Ця модель описує динаміку двох комплексних скалярних полів і розглядається у формалізмі частково редукованої теорії поля, в якому модель формулюється за допомогою нелокального лаґранжіану. У роботах [5,6] було знайдено збережувані величини для цієї системи (енергія, імпульс, момент імпульсу та інтеграл центра мас) в основному, квадратичному наближенні за константою взаємодії, та в [5] показано, що при такому розгляді вона володіє пуанкаре-інваріантністю.

У другому розділі ми здійснюємо побудову матриці розсіяння на базі гамільтонового опису моделі за стандартним алгоритмом, відомим з квантової механіки [7], шляхом переходу до представлення взаємодії. Це можливо завдяки тому, що у даному наближенні ніяких розбіжностей і, отже, проблем перенормування не виникає. Унітарність знайденого виразу показуємо в розділі 3 препринту, доводячи ермітовість оператора фази. Деякі деталі цього обчислення наведено у Додатку.

2. Вираз для матриці розсіяння

Нагадаємо вигляд гамільтоніану частково редукованої моделі Юкави у квадратичному наближенні за константами взаємодії g_a, де індекс a нумерує сорти полів [5]:

$$H = H_{free} + H_{int},$$

де

$$H_{free} = \sum_a \int d^3k\, k_{a0} a_a^+(\mathbf{k}) a_a^-(\mathbf{k}), \tag{1}$$

$$H_{int} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\sum_{A,B,C,D=\pm}\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) \times : a_a^A(\mathbf{k}) a_a^B(\mathbf{q}) a_b^C(\mathbf{u}) a_b^D(\mathbf{v}) :, \tag{2}$$

$$T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{g_a g_b}{16(2\pi)^3}\frac{\delta(A\mathbf{k}+B\mathbf{q}+C\mathbf{u}+D\mathbf{v})}{\sqrt{k_{a0}q_{a0}u_{b0}v_{b0}}}\widetilde{K}(Ak_a+Bq_a),$$

$$\widetilde{K}(k) = \int d^4x\, e^{-ikx} K(x), \qquad k_{a0} = \sqrt{k^2+m^2}.$$

Ці величини подані у представленні Шредінґера, в якому польові оператори $a_a^\pm(\mathbf{k}) \equiv a_a^\pm(\mathbf{k}, t=0)$. Перейдемо тепер до представлення взаємодії. Для цього запишемо рівняння Гайзенберґа для операторів народження та знищення частинок відносно вільно-польового гамільтоніану:

$$i\dot{a}_a^A(\mathbf{k},t) = [a_a^A(\mathbf{k},t), H_{free}].$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо

$$a_a^A(\mathbf{k},t) \equiv e^{iH_{free}t} a_a^A(\mathbf{k}) e^{-iH_{free}t} = e^{-iAk_{a0}t} a_a^A(\mathbf{k}).$$

Використавши ці вирази для обчислення гамільтоніану взаємодії, отримаємо:

$$H_{int}(t) \equiv e^{iH_{free}t} H_{int} e^{-iH_{free}t} = \frac{1}{2}\sum_{ab}\sum_{ABCD}\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) \times e^{-i(Ak_{a0}+Bq_{a0}+Cu_{b0}+Dv_{b0})t} : a_a^A(\mathbf{k}) a_a^B(\mathbf{q}) a_b^C(\mathbf{u}) a_b^D(\mathbf{v}) : .$$

Побудуємо квантово-механічний оператор еволюції [7] в лінійному наближенні:

$$S(t,t_0) = \mathrm{T}e^{-i\int_{t_0}^{t} dt' H_{int}(t')} \simeq 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' H_{int}(t');$$

тут T-хронологічне впорядкування.

Адіабатична матриця розсіяння:

$$S = \lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(\infty,-\infty) \equiv \lim_{\alpha\to 0}\mathrm{T}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\alpha|t|} H_{int}(t')} \simeq 1 - i\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\alpha|t|} H_{int}(t').$$

Підставивши сюди попередній вираз, взявши границю та виконавши інтегрування $H_{int}(t')$, отримаємо остаточний вираз для матриці розсіяння:

$$S = 1 + \frac{i}{2}\sum_{ab}\sum_{ABCD}\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, \frac{g_a g_b}{16(2\pi)^3}\frac{\delta^{(4)}(Ak_a+Bq_a+Cu_b+Dv_b)}{\sqrt{k_{a0}q_{a0}u_{b0}v_{b0}}} \times \widetilde{K}(Ak_a+Bq_a) : a_a^A(\mathbf{k}) a_a^B(\mathbf{q}) a_b^C(\mathbf{u}) a_b^D(\mathbf{v}) : . \tag{3}$$

3. Доведення унітарності

Тепер потрібно показати, що в даному наближенні S (3) є унітарним оператором, тобто, що виконується умова:

$$SS^+ \approx 1 + o(g^4).$$

Оператор матриці розсіяння можна записати:

$$S = I + iF, \tag{4}$$

де F називається оператором переходу. В даному наближенні він збігається з оператором фази (за Блохінцевим; [1]). Згідно з (4), S буде унітарним оператором, якщо F буде ермітовим: $F = F^+$.

Покажемо, що так справді є. Спершу перейдемо для зручності до вже знайомих з роботи [5] операторів b:

$$b_{ak}^A = \sqrt{k_{a0}}\, a_{ak}^A;$$

тут ми вживаємо спрощені позначення: $a_{ak}^A \equiv a_a^A(\mathbf{k})$. Тоді

$$F = \frac{1}{2}\sum_{ab}\sum_{ABCD}\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, Q_{kquv}^{ABCD} : b_{ak}^A b_{aq}^B b_{bu}^C b_{bv}^D :, \tag{5}$$

де $Q_{kquv}^{ABCD} = \delta(Ak_{a0}+Bq_{a0}+Cu_{b0}+Dv_{b0})\Pi_{kquv}^{ABCD}$ можна виразити через введене в [5] ядро Π_{kquv}^{ABCD}:

$$\Pi_{kquv}^{ABCD} = \Pi_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{g_a g_b}{4(4\pi)^3}\delta(A\mathbf{k}+B\mathbf{q}+C\mathbf{u}+D\mathbf{v})\widetilde{K}(Ak_a+Bq_a)$$

із властивостями:

$$\Pi_{ab}^{ABCD}(-\mathbf{k},-\mathbf{q},-\mathbf{u},-\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{-A-B-C-D}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad (6)$$

$$\Pi_{ab}^{-A-BCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},-\mathbf{u},-\mathbf{v}),$$
$$\Pi_{ab}^{BACD}(\mathbf{q},\mathbf{k},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}), \quad (7)$$
$$\Pi_{ab}^{AB-CD}(\mathbf{k},\mathbf{q},-\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{ABC-D}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},-\mathbf{v}) = \Pi_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

На відміну від Π_{kquv}^{ABCD}, ядро Q_{kquv}^{ABCD} задовольняє лише властивості (6) та (7).

Здійснивши сумацію за A, B, C, D в (5), отримаємо:

$$\begin{aligned}F = \sum_{ab} \int d^3k \ldots d^3v \ :\{ & Q_{kquv}^{----} b_{ak}^- b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- \\ & + 2Q_{kquv}^{+---} b_{ak}^+ b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- + 2Q_{uvkq}^{--+-} b_{bk}^+ b_{bq}^- b_{au}^- b_{av}^- \\ & + Q_{kquv}^{++--} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^- b_{bv}^- + Q_{uvkq}^{--++} b_{bk}^+ b_{bq}^+ b_{au}^- b_{av}^- + 4Q_{kuqv}^{+-+-} b_{ak}^+ b_{bq}^+ b_{au}^- b_{bv}^- \\ & + 2Q_{kquv}^{+++-} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^- + 2Q_{uvkq}^{+-++} b_{bk}^+ b_{bq}^+ b_{au}^+ b_{av}^- \\ & + Q_{kquv}^{++++} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^+ \} : .\end{aligned} \quad (8)$$

Ермітовість доводиться окремо для певних груп доданків цього виразу: першого та останнього рядків, другого та четвертого, окремо для двох перших доданків у третьому рядку і окремо можна показати ермітовість третього доданка в цьому рядку.

Для прикладу в Додатку подано доведення ермітовості суми першого та останнього рядків, а також другого та четвертого.

Зрештою отримуємо, що F ермітів, а це свідчить про унітарність матриці розсіяння.

Додаток

Розглянемо суму першого та останнього рядків виразу (8) та спряжемо її ермітово:

$$\begin{aligned}(Q_{kquv}^{----} : b_{ak}^- b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- : + Q_{kquv}^{++++} : b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^+ :)^+ \\ = Q_{kquv}^{----} : b_{bv}^+ b_{bu}^+ b_{aq}^+ b_{ak}^+ : + Q_{kquv}^{++++} : b_{bv}^- b_{bu}^- b_{aq}^- b_{ak}^- :\end{aligned}$$

В ядрах Q змінимо всі знаки ABCD на протилежні, згідно з властивістю (6). А оператори b впорядкуємо за індексами k, q, u, v користуючись тим,

що вони стоять під знаком нормального впорядкування. Отримаємо вираз

$$Q_{kquv}^{++++} : b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^+ : + Q_{kquv}^{----} : b_{ak}^- b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- :$$

що збігається із вихідним. Тобто сума першого і останнього рядків виразу (8) має властивість ермітовості.

Для суми другого та четвертого рядків доведення ермітовості матиме деякі особливості. Спряжемо цю суму (відразу винісши двійку за дужки та не вказуючи нормального впорядкування явно, щоб не загромаджувати записи):

$$\begin{aligned}(Q_{kquv}^{+---} b_{ak}^+ b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- + Q_{uvkq}^{--+-} b_{bk}^+ b_{bq}^- b_{au}^- b_{av}^- \\ + Q_{kquv}^{+++-} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^- + Q_{uvkq}^{+-++} b_{bk}^+ b_{bq}^+ b_{au}^+ b_{av}^-)^+ \\ = Q_{kquv}^{+---} b_{bv}^+ b_{bu}^+ b_{aq}^+ b_{ak}^- + Q_{uvkq}^{--+-} b_{av}^+ b_{au}^+ b_{bq}^+ b_{bk}^- \\ + Q_{kquv}^{+++-} b_{bv}^+ b_{bu}^- b_{aq}^- b_{ak}^- + Q_{uvkq}^{+-++} b_{av}^+ b_{au}^- b_{bq}^- b_{bk}^- .\end{aligned} \quad (9)$$

Змінимо всі знаки в ядрах Q на протилежні, згідно з властивістю (6). Отримаємо:

$$\begin{aligned}Q_{kquv}^{-+++} b_{bv}^+ b_{bu}^+ b_{aq}^+ b_{ak}^- + Q_{uvkq}^{++-+} b_{av}^+ b_{au}^+ b_{bq}^+ b_{bk}^- \\ + Q_{kquv}^{---+} b_{bv}^+ b_{bu}^- b_{aq}^- b_{ak}^- + Q_{uvkq}^{-+--} b_{av}^+ b_{au}^- b_{bq}^- b_{bk}^- .\end{aligned}$$

Зробимо у всіх доданках перейменування індексів k на v, u на q, що не вплине на результат інтеґрування цих доданків. Будемо мати:

$$\begin{aligned}Q_{vuqk}^{-+++} b_{bk}^+ b_{bq}^+ b_{au}^+ b_{av}^- + Q_{qkvu}^{++-+} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^- \\ + Q_{vuqk}^{---+} b_{bk}^+ b_{bq}^- b_{au}^- b_{av}^- + Q_{qkvu}^{-+--} b_{ak}^+ b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- .\end{aligned}$$

Скориставшись властивістю (7) ядра Q, отримаємо:

$$\begin{aligned}Q_{uvkq}^{+-++} b_{bk}^+ b_{bq}^+ b_{au}^+ b_{av}^- + Q_{kquv}^{+++-} b_{ak}^+ b_{aq}^+ b_{bu}^+ b_{bv}^- \\ + Q_{uvkq}^{--+-} b_{bk}^+ b_{bq}^- b_{au}^- b_{av}^- + Q_{kquv}^{+---} b_{ak}^+ b_{aq}^- b_{bu}^- b_{bv}^- .\end{aligned}$$

Бачимо, що отримали ті самі доданки, що й у сумі (9). Тобто вона теж виявилась самоспряженою.

Цілком аналогічно доводиться ермітовість інших сум рядків виразу (8).

4. Висновки

Завданням роботи було здійснити подальший розвиток формалізму частково редукованої теорії поля, який має істотно нелокальний характер. В попередніх роботах в рамках цього формалізму вивчалася модель типу Юкави, що описує динаміку двох взаємодіючих скалярних комплексних полів. Був побудований її гамільтонів опис в квадратичному наближенні за константою взаємодії [6], доведено пуанкаре-інваріантнісь моделі [5], та виведено на цій основі релятивістичні хвильові рівняння на зв'язані стани [6].

В даній роботі здійснені явна побудова та доведення унітарності матриці розсіяння (3) частково редукованої моделі типу Юкави, що поширює її область застосування на задачі розсіяння. Крім того, результат важливий для доведення послідовності і самоузгодженості формалізму, що по суті належить до класу нелокальних теорій поля.

Література

1. D.I. Blokhintsev and G.I. Kolerov. *Il nuovo cimento A* **44**, N. 4, pp. 974-983 (1966)
2. Д.А. Киржниц. *Успехи физических наук* **90**, вып. 1, сс. 129-142 (1966)
3. Г.В. Ефимов. *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **35**, вып. 5 сс.1116-1160 (2004)
4. Д.И. Блохинцев. *Пространство и время в микромире*. М.: Наука, 1982
5. І. Загладько, А. Дувіряк. *Пуанкаре-інваріантність частково-редукованих моделей типу Юкави* // Львів: ІФКС НАН України, 2011. - 16 с. - (Препринт / НАН України, ІФКС; ICMP-11-04U)
6. A. Duviryak, J.W. Darewych *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, pp. 8365-8381 (2004)
7. А.С. Шварц. *Метематические основы квантовой теории поля*. М.: Атомиздат, 1975

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alrting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2760908; Fax: +38(032)2761978
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua   http://www.icmp.lviv.ua