Ірина Миколаївна Загладько, Аскольд Андрійович Дувіряк

Пуанкаре-інваріантність частково-редукованих моделей типу Юкави

Роботу отримано 26 травня 2011 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу компютерного моделювання багато-частинкових систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–11–04U

І.Загладько, А.Дувіряк

ПУАНКАРЕ-ІНВАРІАНТНІСТЬ ЧАСТКОВО-РЕДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ ТИПУ ЮКАВИ

ЛЬВІВ

УДК: 531/533; 530.145; 531.18; 539.12

PACS: 11.10.Ef, 11.10.Lm, 11.30.Cp

Пуанкаре-інваріантність частково-редукованих моделей типу Юкави

І.Загладько, А.Дувіряк

Анотація. Ми розглядаємо скалярну модель типу Юкави у формалізмі частково-редукованої теорії поля, в якій лагранжіан містить доданки, що відповідають вільним скалярним полям, і нелокальний член взаємодії струмів цих полів. В першому наближенні за константою взаємодії знайдено вирази для збережуваних величин в імпульсному представленні, що відповідають інваріантності системи щодо групи Лоренца. Проведено вторинне квантування системи. Показано, що разом з відомим раніше гамільтоніаном та імпульсом системи знайдені збережувані величини задовольняють комутаційні співвідношення групи Пуанкаре.

Poincaré-invariance of partially reduced Yukawa-like models

I.Zagladko, A.Duviryak

Abstract. We consider a scalar Yukawa-like model in the framework of partially reduced quantum field theory. The Lagrangian of the model consists of free scalar field terms and nonlocal current interaction term. Hamiltonian expressions for conserved quantities arose from a Lorentz-invariance of the model in the momentum representation have been found in the first-order coupling constant approximation. Canonical quantization of the system is performed. It is shown that the obtained conserved quantities and previously founded the Hamiltonian and the momentum of the system satisfy the commutational relations of the Poincaré group.

Подається в Journal of Physics A
Submitted to Journal of Physics A

1. Вступ

Формалізм частково редукованих лагранжіанів [1–4] у поєднанні з варіаційним методом квантової теорії поля [5] останнім часом використовується для опису релятивістичної задачі про зв'язані стани [6–9]. Ці методи дозволяють отримати релятивістичні хвильові рівняння та знайти спектри енергії для систем з різними типами взаємодій. Однак недослідженими залишаються деякі важливі питання, зокрема пуанкаре-інваріантність такого опису. У даній роботі це питання вивчається на прикладі порівняно простої теоретико-польової моделі типу Юкави, що використовувалась для опису сильних взаємодій, а також для вивчення особливостей квантування теоретико-польових систем.

Гамільтонізація редукованого лагранжіана, що містить член взаємодії з часовою нелокальністю, здійснюється за загальною схемою, розвиненою в роботах Льози та Вівеса [10] для нелокальних лагранжіанів в механіці. Процедура здійснюється методом послідовних наближень і приводить до втрати явної коваріантності [4]. Нековаріантність і наближеність опису можуть викликати (і викликають) сумніви у фізичній змістовності підходу, зокрема, в його релятивістичній інваріантності. Проте відомо, що коваріантність не є необхідною умовою пуанкаре-інваріантності системи, а саме остання має фізичний зміст і є необхідною умовою вірності результатів теорії.

В даній роботі розглянуто гамільтонове формулювання редукованої скалярної теоретико-польової моделі в першому наближенні за константою взаємодії і доводиться її пуанкаре-інваріантність. Для цього, на основі нетериних інтегралів руху, шляхом переходу до гамільтонового формалізму і подальшого квантування, побудовано десять генераторів групи Пуанкаре і показано, що в рамках даного наближення вони задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре.

Ми користуємося часоподібною метрикою Мінковського: $\|\eta_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(+,-,-,-)$, а також покладаємо $c = \hbar = 1$.

2. Редукований лагранжіан та збережувані величини

Модель, що розглядається, походить від скалярної моделі Юкави [4], яка описує динаміку двох комплексних скалярних полів $\phi_r(x)$ ($r = 1, 2$), та дійсного скалярного поля $\chi(x)$, що є посередником взаємодії.

Редукція поля $\chi(x)$ у вихідному лагранжіані моделі Юкави приводить до ефективного лагранжіану з нелокальним членом взаємодії струмів полів $\phi_r(x)$ через симетричну функцію Ґріна рівняння Кляйна-Ґордона [4]. Для загальності моделі функцію Ґріна замінимо довільним симетричним пуанкаре-інваріантним ядром $K(x-x') = K(x'-x)$.

Вихідним пунктом в нашій роботі є густина лагранжіана:

$$L = \sum_{r=1}^{2} L_r + \frac{1}{2}\int d^4x \rho(x) K(x-x')\rho(x'), \tag{1}$$

де

$$L_r = (\partial_\mu \phi_r^*)(\partial^\mu \phi_r) - m_r^2 \phi_r^* \phi_r, \qquad r = 1, 2, \tag{2}$$

$$\rho(x) = -\sum_{r=1}^{2} g_r \phi_r^* \phi_r. \tag{3}$$

Пуанкаре-інваріантність моделі Юкави дає такі збережувані величини, як 4-імпульс P^μ та 4-момент імпульсу $M^{\lambda\sigma}$.

Для лагранжіану (1) ці вирази були знайдені в [4]:

$$\begin{aligned} P^\mu(t) = \sum_{r=1}^{2} &\int d^3x T_r^{0\mu}(x)|_{x^0=t} \\ &- \eta^{0\mu}\int d^3x \int d^4x' \rho(x)K(x-x')\rho(x')|_{x^0=t} \\ -\frac{1}{2}\int dx^4 &\int d^4x' \Xi(x^0-t, x'^0-t)\rho(x)\{\partial^\nu K(x-x')\}\rho(x'), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} M^{\lambda\sigma}(t) = \sum_{r=1}^{2} &\int d^3x T_r^{0[\lambda}(x)x^{\sigma]}|_{x^0=t} \\ &- \int d^3x \int d^4x' \rho(x)\eta^{0[\lambda}x^{\sigma]}K(x-x')\rho(x')|_{x^0=t} \\ -\frac{1}{2}\int dx^4 &\int d^4x' \Xi(x^0-t, x'^0-t)\rho(x)\{\partial^{[\lambda} K(x-x')x^{\sigma]}\}\rho(x'). \end{aligned} \tag{5}$$

Тут $a^{[\mu}b^{\nu]} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$ та $\Xi(t,s) \equiv \Theta(t)\Theta(-s) - \Theta(-t)\Theta(s) = \frac{1}{2}(sign(t) - sign(s))$, де $\Theta(t)$ – сходинкова функція Гевісайда, а

$$T_r^{\mu\nu} = \{(\partial^\mu \phi_r^*)(\partial^\nu \phi_r) + (\partial^\nu \phi_r^*)(\partial^\mu \phi_r)\} - \eta^{\mu\nu} L_r \tag{6}$$

є тензором енергії-імпульсу для вільного поля $\phi_r(x)$.

Для зручності подальших розрахунків запишемо кожне комплексне поле через комбінацію дійсних полів $\phi_{r\alpha}(x)$ $(r = 1,2;\ \alpha = 1,2)$:

$$\phi_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{r1} + i\phi_{r2}), \quad \phi_r^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{r1} - i\phi_{r2}), \tag{7}$$

а для мульти-індексу $r\alpha$ будемо надалі вживати позначення a $(a = \overline{1,4})$. Тоді, наприклад,

$$\rho(x) = -\frac{1}{2}\sum_a g_a \phi_a^2(x). \tag{8}$$

В [4] було здійснено перехід до гамільтонового опису з допомогою процедури гамільтонізації нелокальних лагранжіанів [10]. Перехід здійснюється пертурбативно, використовуючи імпульсне представлення полів, що в першому наближенні має простий вигляд:

$$\phi_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{A=\pm} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_{a0}}} a_a^A(\mathbf{k}) e^{iAk_a\cdot x}, \quad a = 1, ..., 4, \tag{9}$$

де $k = \{k_{a0}, \mathbf{k}\}$, $k_{a0} = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}^2}$, $\mathbf{k} = \{k^i, i = 1,2,3\}$, а величини a_a^A – амплітуди нормальних мод полів, що при квантуванні стають операторами породження $(A = +)$ або знищення $(A = -)$ частинок.

Для генераторів часових трансляцій $H = P^0$ (гамільтоніану) та просторових трансляцій $\mathbf{P} = \{P^i;\ i = 1,2,3\}$ (імпульсу) в [4] були знайдені такі вирази:

$$H = H_{free} + H_{int}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_{free},$$

де

$$H_{free} = \frac{1}{2}\sum_a \sum_A \int d^3k\, k_{a0} a_a^A(\mathbf{k}) a_a^{-A}(\mathbf{k}), \tag{10}$$

$$\mathbf{P}_{free} = \frac{1}{2}\sum_a \sum_A \int d^3k\, \mathbf{k} a_a^A(\mathbf{k}) a_a^{-A}(\mathbf{k}), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} H_{int} = \frac{1}{2}\sum_{ab} \sum_{ABCD} &\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) \\ &\times a_a^A(\mathbf{k}) a_a^B(\mathbf{q}) a_b^C(\mathbf{u}) a_b^D(\mathbf{v}), \end{aligned} \tag{12}$$

і де

$$T_{ab}^{ABCD}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\frac{g_a g_b}{16(2\pi)^3} \frac{\delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v})}{\sqrt{k_{a0}q_{a0}u_{b0}v_{b0}}} \widetilde{K}(Ak_a + Bq_a), \tag{13}$$

$$\widetilde{K}(k) = \int d^4x\, e^{-ik\cdot x} K(x). \tag{14}$$

У виразах (10) та (11) можна здійснити підсумовування за A та записати їх так:

$$H_{free} = \sum_a \int d^3k\, k_{a0} a_a^+(\mathbf{k}) a_a^-(\mathbf{k}), \tag{15}$$

$$\mathbf{P}_{free} = \sum_a \int d^3k\, \mathbf{k} a_a^+(\mathbf{k}) a_a^-(\mathbf{k}). \tag{16}$$

Для подальшого дослідження пуанкаре-інваріантності даної системи генератори трансляцій H та $\mathbf{P}$ потрібно доповнити генераторами групи Лоренца, що становлять 4-момент імпульсу системи.

3. Момент імпульсу

Нульове наближення

Знайдемо спершу просторові компоненти моменту імпульсу в нульовому наближенні. Для цього в перший доданок виразу (5) підставимо тензор енергії-імпульсу для комплексних скалярних полів (6). Таким чином отримаємо вираз (тут $i, j = 1, 2, 3$):

$$M^{ij}_{(0)} = \sum_r \int d^3x \{\dot{\phi}_r{}^*(x^j \partial^i \phi_r - x^i \partial^j \phi_r) + \dot{\phi}_r(x^j \partial^i \phi_r^* - x^i \partial^j \phi_r^*)\}. \tag{17}$$

Перейшовши до дійсних полів (7), врахувавши (9) та перейменувавши індекси ($r\alpha \to a$), отримаємо компоненти вектора моменту імпульсу:

$$M^k_{(0)} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^k{}_{ij} M^{ij}_{(0)} = \frac{i}{2}\varepsilon^k{}_{ij} \sum_a \sum_A \int d^3k A a_a^A(\mathbf{k}) k^i \partial^j a_a^{-A}(\mathbf{k}), \quad k = 1, 2, 3, \tag{18}$$

а, здійснивши підсумовування за A,

$$M^k_{free} \equiv M^k_{(0)} = i\varepsilon^k{}_{ij} \sum_a \int d^3k\, a_a^+(\mathbf{k}) k^i \partial^j a_a^-(\mathbf{k}); \tag{19}$$

тут $\partial^i a(\mathbf{k}) = \partial a(\mathbf{k})/\partial k_i$ і т.д.

Перше наближення

Використовуючи вирази (5) та (6), запишемо першу поправку до моменту імпульсу:

$$M^{ij}_{(1)} = \int d^4x \int d^4x'\, \Xi(x^0, x'^0)\rho(x')K(x - x')[\partial^i \rho(x) x^j - \partial^j \rho(x) x^i]. \tag{20}$$

Далі, розклавши поля з допомогою формул (7) та врахувавши (8) і (9), маємо:

$$\begin{aligned} M^{ij}_{(1)} = 4i \sum_{ab} \sum_{ABCD} \int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, S^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) a_a^A(\mathbf{k}) a_a^B(\mathbf{q}) \\ \times \{u^j a_b^D(\mathbf{v}) \partial^i a_b^C(\mathbf{u}) - u^i a_b^D(\mathbf{v}) \partial^j a_b^C(\mathbf{u}) \\ + v^j a_b^C(\mathbf{u}) \partial^i a_b^D(\mathbf{v}) - v^i a_b^C(\mathbf{u}) \partial^j a_b^D(\mathbf{v})\}, \end{aligned} \tag{21}$$

де ядро

$$\begin{aligned} S^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{g_a g_b}{8(2\pi)^3} \frac{\delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v})}{\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}} \\ \times \mathcal{P} \frac{\widetilde{K}(Ak_a + Bq_a) - \widetilde{K}(Cu_b + Dv_b)}{Ak_{a0} + Bq_{a0} + Cu_{b0} + Dv_{b0}} \end{aligned} \tag{22}$$

було отримано в роботі [4][1].

4. Інтеграл центра мас

Нульове наближення

Як і у випадку моменту імпульсу, спершу знайдемо вираз для інтегралу центра мас (що відповідає чистим перетворенням Лоренца) у нульовому наближенні. Для цього у перший доданок виразу (5), в якому покладаємо $\lambda = 0$, $\mu = i$, підставимо вираз (6) для тензора енергії-імпульсу:

$$K^i_{(0)} \equiv M^{0i}_{(0)} = \sum_r \int d^3x\, \{2\dot{\phi}_r{}^* \dot{\phi}_r\, x^i - x^0(\dot{\phi}_r{}^* \partial^i \phi_r + \partial^i \phi_r^* \dot{\phi}_r)\}. \tag{23}$$

[1] Один з авторів (А.Дувіряк) просить вибачення за помилку, допущену в [4] у рівнянні (5.22), де замість множника 1/16 повинен бути множник 1/8.

Перейшовши до дійсних полів, після певних перетворень та підстановок матимемо:

$$K^i_{(0)} = \frac{i}{2}\sum_a\sum_A \int d^3k\, A a^A_a(\mathbf{k})\{k_{a0}\partial^i a^{-A}_a(\mathbf{k}) + \frac{k^i}{k_{a0}} a^{-A}_a(\mathbf{k})\}. \qquad (24)$$

Оскільки другий член міститиме однакові доданки з протилежними знаками, якщо здійснити в ньому підсумовування за A, лишиться тільки перший доданок:

$$K^i_{free} \equiv K^i_{(0)} = \frac{i}{2}\sum_a \int d^3k\, k_{a0} a^+_a(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial^i} a^-_a(\mathbf{k}), \qquad (25)$$

де $a \overleftrightarrow{\partial^i} b \equiv a\partial^i b - (\partial^i a) b$.

Перше наближення

Перше наближення інтегралу центра мас, згідно з формулою (5), після ряду обрахунків буде:

$$K^i_{(1)} = K^i_{int} + K^i_{nc},$$

де

$$K^i_{int} = -\frac{i}{2}\sum_{ab}\sum_{ABCD} A \int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, T^{CDAB}_{ba}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{k},\mathbf{q}) \times \{\partial^i a^A_a(\mathbf{k}) - \frac{k^i}{2k^2_{a0}} a^A_a(\mathbf{k})\} a^B_a(\mathbf{q}) a^C_b(\mathbf{u}) a^D_b(\mathbf{v}), \qquad (26)$$

$$K^i_{nc} = 4i\sum_{ab}\sum_{ABCD}\int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, S^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) a^A_a(\mathbf{k}) a^B_a(\mathbf{q}) \times \{u_{b0} a^D_b(\mathbf{v})\partial^i a^C_b(\mathbf{u}) + v_{b0} a^C_b(\mathbf{u})\partial^i a^D_b(\mathbf{v}) + \frac{a^D_b(\mathbf{v}) a^C_b(\mathbf{u})}{2}\left(\frac{u^i}{u_{b0}} - \frac{v^i}{v_{b0}}\right)\}. \qquad (27)$$

5. Заміна змінних. Канонічне квантування

Як показано в роботі [4], змінні a^+_a, a^-_a не є канонічними. Тому здійснюємо перехід до канонічних змінних $\underline{a}$, таких, щоб дужки Пуассона:

$$\{\underline{a}^+_a(\mathbf{k}), \underline{a}^-_b(\mathbf{q})\} = i\delta_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \qquad (28)$$

Ці змінні пов'язані з вихідним співвідношенням, знайденим в [4]:

$$a^A_a(\mathbf{k}) = \underline{a}^A_a(\mathbf{k}) + \frac{A}{2}\sum_b\sum_{BCD}\int d^3q\, d^3u\, d^3v\, S^{-ABCD}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v}) \times \underline{a}^B_a(\mathbf{q}) \underline{a}^C_b(\mathbf{u}) \underline{a}^D_b(\mathbf{v}) + o(g^2). \qquad (29)$$

Тоді, у нових змінних $\underline{a}$, вирази для моменту імпульсу та інтеграла центра інерції можна записати так:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbf{M}_{(0)}[a] + \mathbf{M}_{(1)}[a] &= \mathbf{M}_{free}[a] + \mathbf{M}_{nc}[a] = \mathbf{M}_{free}[\underline{a}] + o(g^2), \quad (30)\\ \mathbf{K} = \mathbf{K}_{(0)}[a] + \mathbf{K}_{(1)}[a] &= \mathbf{K}_{free}[a] + \mathbf{K}_{int}[a] + \mathbf{K}_{nc}[a]\\ &= \mathbf{K}_{free}[\underline{a}] + \mathbf{K}_{int}[\underline{a}] + o(g^2). \quad (31) \end{aligned}$$

Для зручності надалі писатимемо нову змінну без риски внизу, тобто перепозначимо: $\underline{a} \to a$. Тоді остаточні вирази для моменту імпульсу та інтеграла центра інерції в імпульсному представленні задаються формулами (19), (25) і (26). Разом із виразами (16), (15), (12) вони дають нам основні величини, що характеризують динаміку системи двох взаємодіючих скалярних полів.

Далі проведемо операцію вторинного квантування. Змінні a^+_a будуть тепер операторами породження частинок, а змінні a^-_a – операторами знищення. Для всіх виразів матиме місце нормальне впорядкування. А дужки Пуасона слід замінити на комутатори:

$$\{A, B\} \longrightarrow -i[A, B]. \qquad (32)$$

Для операторів $a^\pm$ справедливі такі комутаційні співвідношення:

$$[a^+_a(\mathbf{k}), a^+_b(\mathbf{q})] = [a^-_a(\mathbf{k}), a^-_b(\mathbf{q})] = 0, [a^-_a(\mathbf{k}), a^+_b(\mathbf{q})] = \delta_{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \qquad (33)$$

6. Пуанкаре-інваріантність

Щоб дізнатись, чи володіє система пуанкаре-інваріантністю, потрібно переконатись, що вищезнайдені оператори задовольняють алгебру Пуанкаре. Тобто, потрібно перевірити виконання наступних співвідношень [11]:

$$[P^i, H] = [P^i, H_{free}] + [P^i, H_{int}] = 0,$$

$$[M^i, H] = [M^i, H_{free}] + [M^i, H_{int}] = 0,$$

$$[P^i, P^j] = 0,\ [M^i, P^j] = i\varepsilon^{ij}{}_k P^k,\ [M^i, M^j] = i\varepsilon^{ij}{}_k M^k,$$

$$[M^i,K^j]=[M^i,K^j_{free}]+[M^i,K^j_{int}]=i\varepsilon^{ij}{}_kK^k,$$

$$[K^i,H]=[K^i_{free},H_{free}]+[K^i_{free},H_{int}]+[K^i_{int},H_{free}]+o(g^2)\simeq iP^i,$$

$$[K^i,P^j]=[K^i_{free},P^j]+[K^i_{int},P^j]=i\delta^{ij}H, \tag{34}$$

$$[K^i,K^j]=[K^i_{free},K^j_{free}]+[K^i_{free},K^j_{int}]+[K^i_{int},K^j_{free}]+o(g^2)\simeq -i\varepsilon^{ij}{}_kM^k.$$

Легко перевірити, що комутаційні співдношення для вільних полів виконуються. Тому покажемо обрахунки комутаторів в першому наближенні за константою взаємодії.

6.1. Обчислення комутаторів $[\mathbf{P},H_{int}],[\mathbf{M},H_{int}]$

Перш за все зробимо два зауваження, що стосуються обчислення усіх комутаторів із членами взаємодії. Перше – щодо нормального впорядкування добутків операторів народження і знищення. Легко зауважити, що на кожному кроці поданих нижче обрахунків нормальне впорядкування зберігається безвідносно то того, чи воно здійснено явно, чи ні. Тому надалі для спрощення викладок будемо вважати, що як вихідні члени взаємодії ґенераторів, так і результати комутування є нормально впорядкованими неявно. Друге зауваження – щодо поверхневих членів, що виникають в ході обчислень. Такі члени упускатимуться, оскільки вони дають нульову дію у просторі Фока.

Покажемо тут детально обчислення першого комутатора:

$$\begin{aligned}[\mathbf{P},H_{int}]=&\frac{1}{2}\sum_{abc}\sum_{ABCDF}\int d^3p\,d^3k\,d^3q\,d^3u\,d^3v\,T^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{v})\\&\times\mathbf{p}[a^+_c(\mathbf{p})a^-_c(\mathbf{p}),a^A_a(\mathbf{k})a^B_a(\mathbf{q})a^C_b(\mathbf{u})a^D_b(\mathbf{v})].\end{aligned}$$

Надалі для простоти позначень використовуватимемо індекси p, k,..., які включатимуть змінні інтеґрування $\mathbf{p}$, $\mathbf{k}$,... та індекси c, a,...: $a^+_c(\mathbf{p})\equiv a^+_p$,.... Послідовними перестановками добутку операторів $a^+_pa^-_p$ з операторами $a^A_k...a^D_v$, отримуємо:

$$\begin{aligned}[a^+_pa^-_p,a^A_ka^B_qa^C_ua^D_v]=&a^A_ka^B_qa^C_ua^D_p\delta(\mathbf{p}-\mathbf{v})D+a^A_ka^B_qa^C_pa^D_v\delta(\mathbf{p}-\mathbf{u})C\\&+a^A_ka^B_pa^C_ua^D_v\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})B+a^A_pa^B_qa^C_ua^D_v\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})A.\end{aligned}$$

Зазначимо, що δ-функції, які тут виникають, неявно містять також і символ Кронекера δ_{ca} або δ_{cb}. Надалі будемо вживати скорочені позначення: $\delta_{pk}\equiv\delta_{ca}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ і т.д.

Проінтегрувавши ці вирази і використавши основну властивість δ-функції, отримаємо:

$$\begin{aligned}&\int d^3p\,d^3k\,d^3q\,d^3u\,d^3v\,\mathbf{p}[a^+_pa^-_p,a^A_ka^B_qa^C_ua^D_v]\\&\qquad=\int d^3k\,d^3q\,d^3u\,d^3v\,(A\mathbf{k}+B\mathbf{q}+C\mathbf{u}+D\mathbf{v})a^A_ka^B_qa^C_ua^D_v.\end{aligned}$$

Враховуючи, що вираз (13) для T^{ABCD}_{ab} містить δ-функцію, маємо

$$\int d^3k\,d^3q\,d^3u\,d^3v\,(A\mathbf{k}+B\mathbf{q}+C\mathbf{u}+D\mathbf{v})\delta(A\mathbf{k}+B\mathbf{q}+C\mathbf{u}+D\mathbf{v})...=0,$$

де врахована така властивість δ-функції: $\int dx\,\delta(x)xf(x)=0$ для довільної $f(x)$, реґулярної в $x=0$. Отже:

$$[\mathbf{P},H_{int}]=0.$$

Другий комутатор обчислюється аналогічно. Проте, в ньому траплятимуться доданки, що містять похідну від δ-функції. В такому випадку диференціювання слід перекидати на один з операторів a (упускаючи поверхневі члени). Врешті отримуємо, що даний комутатор теж рівний нулю:

$$[\mathbf{M},H_{int}]=0.$$

6.2. Обчислення комутаторів $[H_{free},\mathbf{K}_{int}]$ та $[H_{int},\mathbf{K}_{free}]$

Оскільки вільно-польові ґенератори задовольняють алгебру Пуанкаре (34), залишається довести таку рівність:

$$[H_{free},\mathbf{K}_{int}]-[\mathbf{K}_{free},H_{int}]=0. \tag{35}$$

Для спрощення обрахунків ми вдалися до заміни позначень, перейшовши від операторів a до операторів b за допомогою співвідношення:

$$a^\pm_k=\sqrt{k_0}b^\pm_k. \tag{36}$$

В нових позначеннях:

$$H_{free}=\int d^3k\,k_0^2b^+_kb^-_k, \tag{37}$$

$$\mathbf{K}_{free}=\frac{i}{2}\int d^3k\,k_0^2b^+_k\overleftrightarrow{\nabla}b^-_k, \tag{38}$$

$$H_{int} = \sum_{ABCD} \int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, \Pi^{ABCD}_{kquv} b^A_k b^B_q b^C_u b^D_v, \tag{39}$$

$$\mathbf{K}_{int} = -i \sum_{ABCD} \int d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v\, D\Pi^{ABCD}_{kquv} b^A_k b^B_q b^C_u \nabla b^D_v \tag{40}$$

(інтегрування за $d^3k\, d^3q\, d^3u\, d^3v$ включає також підсумовування за індексами a, b, c, d, які в формулах явно не вказані). Тут Π^{ABCD}_{kquv} – подібне за структурою до означеного в попередніх пунктах ядра $T^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\begin{aligned} \Pi^{ABCD}_{kquv} &\equiv \Pi^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\sqrt{k_{a0} q_{a0} u_{b0} v_{b0}}\, T^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= -\frac{g_a g_b}{32(2\pi)^3} \delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v}) \widetilde{K}(Ak_a + Bq_a). \end{aligned} \tag{41}$$

Як і $T^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, це ядро, має корисні для подальших обчислень властивості симетрії:

$$\begin{gathered} \Pi^{ABCD}_{ab}(-\mathbf{k}, -\mathbf{q}, -\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \Pi^{-A-B-C-D}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Pi^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \Pi^{-A-BCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Pi^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{u}, -\mathbf{v}), \\ \Pi^{BACD}_{ab}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Pi^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \Pi^{AB-CD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, -\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Pi^{ABC-D}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \Pi^{ABCD}_{ab}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{gathered} \tag{42}$$

Якщо здійснити сумацію за *A, B, C, D* у виразах (39), (40) та використати деякі симетрійні властивості (42) ядра Π^{ABCD}_{kquv}, отримаємо:

$$\begin{aligned} H_{int} = \int d^3k ... d^3v\, \{ &\Pi^{----}_{kquv} b^-_k b^-_q b^-_u b^-_v \\ &+ 2(\Pi^{+---}_{kquv} + \Pi^{--+-}_{uvkq}) b^+_k b^-_q b^-_u b^-_v \\ &+ (\Pi^{++--}_{kquv} + \Pi^{--++}_{uvkq} + 4\Pi^{+-+-}_{kuqv}) b^+_k b^+_q b^-_u b^-_v \\ &+ 2(\Pi^{+++-}_{kquv} + \Pi^{+-++}_{uvkq}) b^+_k b^+_q b^+_u b^-_v \\ &+ \Pi^{++++}_{kquv} b^+_k b^+_q b^+_u b^+_v \}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{int} = i \int d^3k ... d^3v\, \{ &\Pi^{----}_{kquv} b^-_k b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v \\ &+ 2\Pi^{+---}_{kquv} b^+_k b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v + \Pi^{--+-}_{uvkq} b^+_k \nabla_q b^-_q b^-_u b^-_v - \Pi^{--+-}_{uvkq} \nabla_k b^+_k b^-_q b^-_u b^-_v \\ &+ (\Pi^{++--}_{kquv} + 2\Pi^{+-+-}_{kuqv}) b^+_k b^+_q b^-_u \nabla_v b^-_v - 2i\Pi^{+-+-}_{kuqv} b^+_k \nabla_q b^+_q b^-_u b^-_v \\ &- i\Pi^{--++}_{uvkq} \nabla_k b^+_k b^+_q b^-_u b^-_v \\ &+ \Pi^{+++-}_{kquv} b^+_k b^+_q b^+_u \nabla_v b^-_v - \Pi^{+++-}_{kquv} b^+_k b^+_q \nabla_u b^+_u b^-_v - 2\Pi^{+-++}_{uvkq} \nabla_k b^+_k b^+_q b^+_u b^-_v \\ &- \Pi^{++++}_{kquv} b^+_k b^+_q b^+_u \nabla_v b^+_v \}. \end{aligned} \tag{44}$$

Після цього рахуємо по черзі комутатори для доданків з фіксованою кількістю операторів породження та знищення. Обчислимо один з них.

Спочатку зауважимо, що:

$$[b^-_k, b^+_q] = \frac{\delta_{kq}}{q_0}, \;\; [\nabla_k b^-_k, b^+_q] = \frac{\nabla_k \delta_{kq}}{q_0}, \;\; [b^-_k, \nabla_q b^+_q] = \frac{\nabla_q \delta_{kq}}{k_0}. \tag{45}$$

Знайдемо комутатор H_{free} з першим рядком виразу для $\mathbf{K}_{int}$ (44):

$$\begin{aligned} &\int d^3p\, d^3k ... d^3v\, [p_0^2 b^+_p b^-_p, i\Pi^{----}_{kquv} b^-_k b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v] \\ &= i \int d^3p ... d^3v\, p_0^2 \Pi^{----}_{kquv} ([b^+_p, b^-_k] b^-_p b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v + [b^+_p, b^-_q] b^-_p b^-_k b^-_u \nabla_v b^-_v \\ &+ [b^+_p, b^-_u] b^-_p b^-_k b^-_q \nabla_v b^-_v + [b^+_p, \nabla_v b^-_v] b^-_p b^-_k b^-_q b^-_u) \\ &= i \int d^3p\, d^3k ... d^3v\, p_0^2 \Pi^{----}_{kquv} (-\frac{\delta_{pk}}{k_0} b^-_p b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v - \frac{\delta_{pq}}{q_0} b^-_p b^-_k b^-_u \nabla_v b^-_v \\ &- \frac{\delta_{pu}}{u_0} b^-_p b^-_k b^-_q \nabla_v b^-_v - \frac{\nabla_v \delta_{pv}}{p_0} b^-_p b^-_k b^-_q b^-_u) \\ &= -i \int d^3k ... d^3v\, \{\Pi^{----}_{kquv} (k_0 + q_0 + u_0) b^-_k b^-_q b^-_u \nabla_v b^-_v \\ &+ i v_0 \nabla_v \Pi^{----}_{kquv} b^-_k b^-_q b^-_u b^-_v\} \\ &= i \int d^3k ... d^3v\, \nabla_v \Pi^{----}_{kquv} (k_0 + q_0 + u_0 + v_0) b^-_k b^-_q b^-_u b^-_v. \end{aligned} \tag{46}$$

Комутатор $\mathbf{K}_{free}$ з першим рядком виразу для H_{int} (43):

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{2}\int d^3p...d^3v\,[p_0^2(b_p^+\nabla_p b_p^- - \nabla_p b_p^+ b_p^-), \Pi_{kquv}^{----} b_k^- b_q^- b_u^- b_v^-] \\
&= \frac{i}{2}\int d^3p...d^3v\, p_0^2 \Pi_{kquv}^{----}([b_p^+, b_k^-]\nabla_p b_p^- b_q^- b_u^- b_v^- + [b_p^+, b_q^-]\nabla_p b_p^- b_k^- b_u^- b_v^- \\
&+ [b_p^+, b_u^-]\nabla_p b_p^- b_k^- b_q^- b_v^- + [b_p^+, b_v^-]\nabla_p b_p^- b_k^- b_q^- b_u^- - [\nabla_p b_p^+, b_k^-] b_p^- b_q^- b_u^- b_v^- \\
&- [\nabla_p b_p^+, b_q^-] b_p^- b_k^- b_u^- b_v^- - [\nabla_p b_p^+, b_u^-] b_p^- b_k^- b_q^- b_v^- - [\nabla_p b_p^+, b_v^-] b_p^- b_k^- b_q^- b_u^-) \\
&= ... \\
&= i\int d^3k...d^3v\,(\nabla_k \Pi_{kquv}^{----} k_0 + \nabla_q \Pi_{kquv}^{----} q_0 + \nabla_u \Pi_{kquv}^{----} u_0 \\
&+ \nabla_v \Pi_{kquv}^{----} v_0) b_k^- b_q^- b_u^- b_v^- .
\end{aligned} \tag{47}
$$

Тепер потрібно показати, що різниця знайдених інтеґралів (46) та (47) дорівнює нулю. Виявляється, навіть більше: різниця підінтеґральних виразів рівна нулю, тобто:

$$
\begin{aligned}
(k_0 + q_0 + u_0 + v_0)\nabla_v \Pi_{kquv}^{----} - k_0 \nabla_k \Pi_{kquv}^{----} - q_0 \nabla_q \Pi_{kquv}^{----} \\
- u_0 \nabla_u \Pi_{kquv}^{----} - v_0 \nabla_v \Pi_{kquv}^{----} = 0.
\end{aligned} \tag{48}
$$

Щоб показати це, врахуємо структуру ядра (41), а саме, що

$$
\begin{aligned}
\Pi_{kquv}^{ABCD} \propto \delta(A\mathbf{k} + B\mathbf{q} + C\mathbf{u} + D\mathbf{v})\widetilde{K}(Ak + Bq), \\
\text{де} \quad \widetilde{K}(Ak + Bq) \equiv \widetilde{K}[(Ak + Bq)^2].
\end{aligned} \tag{49}
$$

Тоді легко переконатись у справедливості тотожності:

$$
k_0 \nabla_k \widetilde{K}(k \pm q) + q_0 \nabla_q \widetilde{K}(k \pm q) = 0. \tag{50}
$$

Розписуючи вираз у лівій частині (48), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&(k_0 + q_0 + u_0 + v_0)\nabla\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\widetilde{K}(k + q) \\
&- k_0 \nabla\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\widetilde{K}(k + q) - k_0 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\nabla_k \widetilde{K}(k + q) \\
&- q_0 \nabla\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\widetilde{K}(k + q) - q_0 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\nabla_q \widetilde{K}(k + q) \\
&- u_0 \nabla\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})\widetilde{K}(k + q) - v_0 \nabla\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= -\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{u} + \mathbf{v})(k_0 \nabla_k \widetilde{K}(k + q) + q_0 \nabla_q \widetilde{K}(k + q)) = 0,
\end{aligned}
$$

тобто рівність (48) справджується.

Аналогічно обчислюємо комутатори членів з іншим співвідношенням операторів народження і знищення. В результаті отримуємо виконання рівності (35).

6.3. Обчислення комутаторів $[P^i, K_{int}^j]$ та $[M^k, K_{int}^j]$

Обчислюючи ці комутатори, зручно скористатись спрощенням позначень, запропонованим в попередньому підрозділі. Тоді вираз для компонентів імпульсу матиме вигляд:

$$
P^i = \int d^3k\, p^i p_0 b_p^+ b_p^-,
$$

а вираз для компонентів моменту імпульсу:

$$
M^k = i\varepsilon^k_{\ ij} \sum_a \int d^3p\, p^i p_0 b_p^+ \partial^j b_p^- .
$$

В результаті нескладних обчислень першого комутатора, отримуємо:

$$
[P^i, K_{int}^j] = i\delta^{ij} H_{int}.
$$

Для другого комутатора потрібно довести, що:

$$
[M^k, K_{int}^l] = i\varepsilon^{kl}_{\ \ m} K_{int}^m. \tag{51}
$$

Покажемо, що рівність (51) виконується окремо для доданків виразу K_{int}^j (44) з даною кількістю операторів породження і знищення. Наприклад, для доданків, що містять тільки оператори знищення:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^k_{\ ij}\int d^3p\, p^i p_0 \Pi_{kqu\partial^l v}^{----}[b_p^+ \partial^j b_p^-, b_k^- b_q^- b_u^- b_v^-] \\
&= \varepsilon^k_{\ ij}\int d^3p\, p^i p_0 \partial_v^l \Pi_{kquv}^{----}(-\frac{\delta_{pk}}{k_0}\partial^j b_p^- b_q^- b_u^- b_v^- \\
&- \frac{\delta_{pq}}{q_0} b_k^- \partial^j b_p^- b_u^- b_v^- - -\frac{\delta_{pu}}{u_0} b_k^- b_q^- \partial^j b_p^- b_v^- - \frac{\delta_{pv}}{v_0} b_k^- b_q^- b_u^- \partial^j b_p^-) \\
&= -\varepsilon^k_{ij}\partial_v^l \Pi_{kquv}^{----}(k^i \partial^j b_k^- b_q^- b_u^- b_v^- + q^i b_k^- \partial^j b_q^- b_u^- b_v^- \\
&+ u^i b_k^- b_q^- \partial^j b_u^- b_v^- + v^i b_k^- b_q^- b_u^- \partial^j b_v^-).
\end{aligned}
$$

Перекинемо усі похідні з операторів на ядро і відкинемо неістотні поверхневі члени. Завдяки антисиметричності множника $\varepsilon^k_{\ ij}$ отримаємо простий вираз:

$$
\widehat{L}_k \partial_v^l \Pi_{kquv}^{----} b_k^- b_q^- b_u^- b_v^-, \tag{52}
$$

де $\widehat{L}^k \equiv \varepsilon^k_{\ ij}(k^i\partial_k^j + q^i\partial_q^j + u^i\partial_u^j + v^i\partial_v^j)$ – інфінітезимальний оператор повороту. Розпишемо:

$$
\widehat{L}^k \partial_v^l \Pi_{kquv}^{----} = \partial_v^l \widehat{L}_k \Pi_{kquv}^{----} + \left[\widehat{L}_k, \partial_v^l\right] \Pi_{kquv}^{----}.
$$

Перший доданок у правій частині рівний нулю, оскільки ядро є обертово-інваріантним. Обчисливши комутатор $\left[\widehat{L}^k, \partial_v^l\right] = -\varepsilon^k{}_{lj}\partial_v^j$, отримаємо шуканий вираз (52) як:

$$-\varepsilon_{ij}^k \partial_v^j \Pi_{kquv}^{----} b_k^- b_q^- b_u^- b_v^- .$$

Легко бачити, що він дає увесь внесок у праву частину рівності (51), який містить лише оператори знищення.

Далі аналогічно шукаються комутатори моменту імпульсу з іншими рядками виразу (44) для K_{int}^j (що містять і оператори народження). Зрештою отримуємо виконання рівності (51).

6.4. Обчислення комутаторів $[K_{free}^i, K_{int}^j]$ та $[K_{int}^i, K_{free}^j]$

Знайдемо $[K_{free}^i, K_{int}^j] + [K_{int}^i, K_{free}^j]$.

Скористаємось виразами для цих величин через оператори $b^\pm$ – (38) та (44), а також комутаційними співвідношеннями для цих операторів (45). Як і в деяких попередніх підрозділах, знайдемо спочатку комутатори з першим рядком виразу для інтегралу центра мас (44).

В ході нескладних обрахунків, подібних до обрахунку комутатора (51), дістанемо вираз:

$$\int d^3k ... d^3v \; \Big\{ (k_0 \partial_k^i \partial_v^j + q_0 \partial_q^i \partial_v^j + u_0 \partial_u^i \partial_v^j + v_0 \partial_v^i \partial_v^j \\ - k_0 \partial_k^j \partial_v^i - q_0 \partial_q^j \partial_v^i + u_0 \partial_u^j \partial_v^i - v_0 \partial_v^j \partial_v^i) \Pi_{kquv}^{----} \Big\} b_k^- b_q^- b_u^- b_v^- .$$

Врахувавши структуру ядра (49) та очевидні рівності:

$$\partial_k^i \partial_v^j \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \equiv \partial^i \partial^j \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \partial_k^j \partial_v^i \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

і т.д., отримаємо вираз:

$$\int d^3k \, d^3q \, d^3u \, d^3v \, (k_0 \partial_v^j \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \partial_k^i \tilde{K}(k+q) \\ + q_0 \partial_v^j \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \partial_q^i \tilde{K}(k+q) - k_0 \partial_v^i \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \partial_k^j \tilde{K}(k+q) \\ - q_0 \partial_v^i \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}) \partial_q^j \tilde{K}(k+q) b_k^- b_q^- b_u^- b_v^- ,$$

який рівний нулю в силу (50). Отже

$$[K_{free}^i, K_{int}^j] + [K_{int}^i, K_{free}^j] = 0.$$

7. Висновки

Ми розглянули скалярну модель типу Юкави у формалізмі частково редукованої теорії поля. У цьому формалізмі лаґранжіани є нелокальними у часі функціоналами, а перехід до гамільтонового формалізму є нетривіальною задачею. У попередній роботі [4] було запропоновано пертурбативну процедуру гамільтонізації та квантування моделі. Процедура приводить до втрати явної коваріантності опису. Чи втрачається при цьому релятивістична інваріантність моделі – питання залишалось відкритим.

Метою даної роботи було доведення пуанкаре-інваріантності квантового гамільтонового опису редукованої моделі типу Юкави. Для цього на основі знайдених раніше [4] нелокальних нетериних інтеґралів моменту імпульсу та центра інерції системи побудовано їх гамільтонові відповідники у першому наближенні за константою взаємодії g^2 та здійснено їх квантування. Для гарантування пуанкаре-інваріантності ці оператори разом з отриманими раніше [4] гамільтоніаном та імпульсом системи повинні задовольняти комутаційні співвідношення алгебри Пуанкаре, принаймні з точністю до g^2. Саме це продемонстровано у роботі.

В ході обрахунку комутаторів було зауважено, що наявність чи відсутність нормального впорядкування у виразах для ґенераторів не впливає на результат обчислення їх комутаторів. Навіть більше, комутаційні співвідношення зберігаються і в тому випадку, коли у канонічних ґенераторах враховувати лише члени взаємодії з даним фіксованим числом операторів народження і знищення (тобто, лише певні стрічки у виразах (43) і (44)). Останнє можна інтерпретувати так, що пуанкаре-інваріантність зберігається як у кожній задачі про зв'язані стани, так і в кожному каналі задачі розсіяння.

Розгляд більш реалістичних систем, таких як частково редукована спінорна електродинаміка, буде провадитись в наступних роботах.

Можна сподіватися, що пуанкаре-інваріантність зберігається і в вищих порядках за константою взаємодії, хоча справдити це дуже складно вже в 2-му наближенні.

Література

1. M. Barham and J. Darewych. *J. Phys. A* **31**, 3481 (1998).
2. J. Darewych. *Condens. Mat. Phys.* **3**, 633 (2000).
3. V. Shpytko and J. Darewych. *Phys. Rev. D* **64**, 045012 (2001).
4. A. Duviryak and J.W. Darewych. *J. Phys. A* **37**, 8365 (2004).

5. J.W. Darewych. *Ukr. Phys. J.* **41**, 41 (1996).
6. J.W. Darewych and A. Duviryak. *Phys. Rev. A* **66**, 032102 (2002).
7. A. G. Terekidi and J. W. Darewych. *J.Math.Phys.* **45**, 1474 (2004); *J.Math.Phys.* **46**, 032302 (2005).
8. M. Emami-Razavi and J.W. Darewych. *J. Phys. G* **31**, 1095 (2005); *J. Phys. G* **32**, 1171 (2006).
9. A. Duviryak and J.W. Darewych. *J. Phys. A* **43**, 485402 (2010).
10. J. Llosa and J. Vives. *J. Math. Phys.* **35**, 2856 (1994).
11. Р.П. Гайда. *Физ. элем. част. атом. ядра* **13**, №2, 427 (1982).

CONDENSED MATTER PHYSICS

The journal **Condensed Matter Physics** is founded in 1993 and published by Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

AIMS AND SCOPE: The journal **Condensed Matter Physics** contains research and review articles in the field of statistical mechanics and condensed matter theory. The main attention is paid to physics of solid, liquid and amorphous systems, phase equilibria and phase transitions, thermal, structural, electric, magnetic and optical properties of condensed matter. Condensed Matter Physics is published quarterly.

ABSTRACTED/INDEXED IN:

- Chemical Abstract Service, Current Contents/Physical, Chemical&Earth Sciences
- ISI Science Citation Index-Expanded, ISI Alrting Services
- INSPEC
- Elsevier Bibliographic Databases (EMBASE, EMNursing, Compendex, GEOBASE, Scopus)
- “Referativnyi Zhurnal”
- “Dzherelo”

CONTACT INFORMATION:
Institute for Condensed Matter Physics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
1 Svientsitskii Str., 79011 Lviv, Ukraine
Tel: +38(032)2760908; Fax: +38(032)2761978
E-mail: cmp@icmp.lviv.ua http://www.icmp.lviv.ua