

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Юрій Михайлович Козловський

УЗАГАЛЬНЕНИЙ КООРДИНАТНО-ЧАСТОТНИЙ РОЗПОДІЛ:  
ДРОБОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Роботу отримано 26 грудня 2006 р.

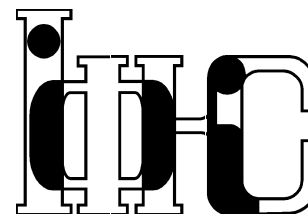
Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу статистичної теорії  
конденсованих систем

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені

Національна академія наук України



ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-06-27U

Ю.М. Козловський

УЗАГАЛЬНЕНИЙ КООРДИНАТНО-ЧАСТОТНИЙ  
РОЗПОДІЛ:  
ДРОБОВЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

ЛЬВІВ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 03.65.Bz, 42.30.K, 42.30.V, 42.79, 42.25.F, 42.50.Dv, 52.25.Fi

### Узагальнений координатно-частотний розподіл: дробове представлення

Ю.М. Козловський

**Анотація.** В роботі запропоновано узагальнений координатно-частотний розподіл, частковими випадками якого є функція невизначеності та розподіл Вігнера. Досліджено основні властивості узагальненого розподілу, зокрема знайдено умову нормування, кроскореляційне представлення та обернене перетворення. Шляхом аналітичних розрахунків отримано вираз для узагальненого розподілу гаусового сигналу. Запропоновано схему відновлення розподілу інтенсивності сигналу за узагальненим розподілом. Вперше введено дробове представлення узагальненого розподілу та показано, що такому перетворенню відповідає поворот на інформаційній діаграмі. Приведено чисельні розрахунки узагальненого розподілу гаусового сигналу при різних значеннях узагальненого параметра та параметра дробового фур'є-перетворення.

### Generalized coordinate-frequency distribution: fractional representation

Yu.M. Kozlovskii

**Abstract.** Generalized coordinate-frequency distribution is proposed and it is shown that Wigner distribution function and ambiguity function are only particular cases of generalized distribution. Main properties of generalized distribution such as normalization condition, cross-correlation representation and inverse transform are investigated. Generalized gaussian distribution is analytically obtained. The scheme of signal intensity distribution reconstruction by generalized distribution is proposed. Fractional representation of generalized distribution was carried out. The results of numerical calculations of gaussian signal distribution in the fractional Fourier transform domain are presented.

## 1. Вступ

На сьогоднішній день системи формування зображень представляють собою значний інтерес для спеціалістів, що працюють в галузі оптичної обробки інформації. Виявлення нових властивостей та закономірностей в існуючих, а також теоретичне обґрунтування побудови принципово нових оптичних систем такого класу є однією з найбільш актуальних проблем сучасної оптики. Добре відомо, що для опису оптичних систем необхідно використовувати відомості з різних галузей математики, зокрема таких розділів як лінійна алгебра, функціональний аналіз та інтегральні перетворення. Серед відомих інтегральних перетворень, які використовуються в оптиці, перетворення Фур'є знайшло широке застосування в різноманітних галузях науки і техніки. В оптичних системах формування зображень перетворення Фур'є відіграє фундаментальну роль, так як воно дозволяє аналітично пов'язати вхідне та вихідне зображення. Крім теорії формування оптичних зображень перетворення Фур'є з успіхом застосовується і в інших областях оптики, таких як оптична обробка інформації, оптична фільтрація, голографія та інші. В 1993-1994 рр., А. Ломан, Д. Мендловік та Х. Озактас почали активно використовувати дробове фур'є-перетворення в оптиці, як узагальнення до звичайного перетворення Фур'є. Це дозволило розвинути існуючі концепції та виявити нові можливості опису формування зображень в оптичних системах. В більшості робіт, що були присвячені дослідженню властивостей дробового фур'є-перетворення використовувався апарат лінійних інтегральних перетворень, а також функція розподілу Вігнера [1]. На основі методології дробового фур'є-перетворення були сформульовані нові принципи та методи обробки оптичних зображень [2]. На даний час інтенсивно розвиваються дослідження умов реалізації дробового фур'є-перетворення в оптичних системах, проте практичне використання цього перетворення в реальних оптичних системах знаходиться на початковій стадії [3-5]. Поряд із узагальненням перетворення Фур'є можна здійснити узагальнення функції розподілу Вігнера з використанням деякого додаткового параметра. Зміна цього параметра приводить до побудови множини узагальнених розподілів, які в часткових випадках переходять в добре відомі розподіли Вігнера та Вейля [6].

## 2. Координатно-частотні характеристики двох сигналів

В ряді робіт Чоунтасіса з співавторами [6]- [8] введено узагальнену функцію Вігнера, яка пов'язана з використанням звичайної функції розподілу Вігнера. З огляду на широкі можливості використання функції невизначеності в теорії оптичної обробки інформації в даній роботі пропонується метод побудови узагальненого координатно-частотного розподілу з використанням функції Вейля (невизначеності). Розглянемо детально властивість репрезентативності розподілів, яка полягає в відновленні вхідного сигналу за розподілом. Нехай задано два сигнали з координатами  $x_1$  та  $x_2$  та просторовими частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  відповідно. Нас цікавить як пов'язані між собою координатна та частотна структура цих сигналів. Тобто необхідно встановити співвідношення між чотирма змінними  $x_1, x_2, \omega_1$  та  $\omega_2$ . В роботі [9] показано, що замість вказаних вище координат можна використати чотири узагальнені координати сигналів

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, & \omega &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\ x_0 &= x_1 - x_2, & \omega_0 &= \omega_1 - \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, що при такій заміні змінних ніяка інформація не втрачається і не додається. Ми можемо виразити також вихідні координати через узагальнені

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x + x_0}{2}, & \omega_1 &= \frac{2\omega + \omega_2}{2}, \\ x_2 &= \frac{2x - x_0}{2}, & \omega_2 &= \frac{2\omega - \omega_2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Розглянемо детально фізичний зміст координат (1), причому маємо справу з двома парами взаоспрямжених координат  $(x, \omega)$  та  $(x_0, \omega_0)$ , кожна з яких має свої особливості.

### 2.1. Функція невизначеності та “швидка різниця”

Координати “швидкої різниці”  $(x_0, \omega_0)$ , це координати, які тотожно перетворюються в нуль коли  $f_1(x) = f_2(x)$ , тобто коли сигнали ідентичні за всіма координатами. У випадку коли обидва сигнали зсунуті

по координаті чи по частоті відповідні координати “швидкої різниці” стають відмінними від нуля та вказують ці зсуви. В координатах “швидкої різниці”  $(x_0, \omega_0)$  задається функція невизначеності [12]

*координатне представлення*

$$\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) = \int f_1\left(x + \frac{x_0}{2}\right) f_2^*\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \exp(-i\omega_0 x) dx. \quad (3)$$

Перевага використання функції невизначеності полягає в тому, що при  $f_1(x) = f_2(x)$  розподіл (3) переписується наступним чином

$$\mathcal{A}_{f f^*}(0; \omega_0) = \int f(x) f^*(x) \exp(-i\omega_0 x) dx, \quad (4)$$

звідки безпосередньо відновлюється розподіл інтенсивності вхідного сигналу

$$|f(x)|^2 = \int \mathcal{A}_{f f^*}(0; \omega_0) \exp(i\omega_0 x) d\omega_0. \quad (5)$$

Таким чином використання функції невизначеності дозволяє повністю відновити розподіл вхідного сигналу.

### 2.2. Розподіл Вігнера та “повільні середні”

Розподіл Вігнера є одним з найбільш вживаних координатно-частотних розподілів, які використовуються у просторово-частотному аналізі [1, 2]. На відміну від функції невизначеності розподіл Вігнера задається в координатах  $(x, \omega)$  тобто “повільних середніх”, це координати, які ідентичні по частоті  $\omega$  та координаті  $x$  коли  $f_1(x) = f_2(x)$ . За означенням розподіл Вігнера в координатному представленні записується наступним чином

$$\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x; \omega) = \int f_1\left(x + \frac{x_0}{2}\right) f_2^*\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \exp(-i\omega x_0) dx_0. \quad (6)$$

Легко бачити, що при виконанні умови  $f_1(x) = f_2(x)$  розподіл інтенсивності вхідного сигналу відновлюється за маргінальним розподілом, а саме

$$|f(x)|^2 = \int \mathcal{W}_{f f^*}(x; \omega) d\omega. \quad (7)$$

В подальших розрахунках будемо використовувати схему відновлення (5), оскільки саме вона є простішою в плані математичної реалізації.

### 3. Дробове фур'є-перетворення

Апарат фур'є-перетворення вже довгі роки з успіхом застосовується при аналізі процесів, що відбуваються в оптичних системах обробки інформації. Методологія фур'є оптики дозволяє працювати не лише з сигналом  $f(x)$ , а й з його фур'є-образом

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx = \hat{\mathcal{F}}[f(x)], \quad (8)$$

що в багатьох випадках має принципові переваги. З розвитком теорії оптичних систем апарат звичайного фур'є-перетворення потребував подальшого розвитку, оскільки збільшувався клас систем, який не міг бути описаний з його допомогою. В зв'язку з цим в оптиці все частіше використовувалося дробове фур'є-перетворення як узагальнення звичайного фур'є-перетворення з параметром порядку  $\varphi$ .

Принципово новим моментом використання дробового фур'є-перетворення був той факт, що поряд з відомими значеннями функції  $f(x)$  та її фур'є-образу  $F(\omega)$  став можливий аналіз перерозподілу між вхідним сигналом та його фур'є-образом, шляхом зміни параметра  $\varphi$ .

Дробове фур'є-перетворення вперше запропоновано для задач квантової механіки [10]. За означенням Ломана дробове фур'є-перетворення оптичного сигналу  $f(x)$  записується в формі інтегрального перетворення [1]

$$u_p(x) = \frac{i \exp(i\varphi)}{\sin \varphi} \times \int f(x_1) \exp\left(i \frac{k}{2d_0 \operatorname{tg} \varphi} [x^2 + x_1^2]\right) \exp\left(-i \frac{k x x_1}{d_0 \sin \varphi}\right) dx_1, \quad (9)$$

де  $k = 2\pi/\lambda$  - хвильове число,  $\varphi = p\pi/2$ ,  $p$  - порядок дробового фур'є-перетворення,  $d_0$  - лінійна константа. При  $p = 1$  дане перетворення вироджується в повне фур'є-перетворення.

#### 3.1. Розподіл дробового фур'є-перетворення

Фундаментальною властивістю дробового фур'є-перетворення є поворот розподілу вхідного сигналу на інформаційній діаграмі [1, 4].

Про фундаментальність цього факту свідчить наявність такого повороту як у випадку використання функції розподілу Вігнера [1], так і у випадку використання функції невизначеності [4]. Тобто незалежно від вибору форми розподілу на інформаційній діаграмі відбувається поворот розподілу вхідного сигналу на кут пропорційний до параметра дробового фур'є-перетворення  $\varphi$ , а саме

$$\mathcal{A}_{u_p u_p^*}(x_0; \omega_0) = \mathcal{A}_{f f^*} \left( q \cos \varphi x_0 \frac{d_0}{k} \sin \varphi \omega_0; \frac{k}{d_0} \sin \varphi x_0 + \cos \varphi \omega_0 \right). \quad (10)$$

На основі формули (10) приходимо до важливого висновку, що дробовому фур'є-перетворенню відповідає лінійне перетворення на інформаційній діаграмі спряжених різницевих координат  $(x_0; \omega_0)$  розподілу вхідного сигналу  $f(x)$ , яке описується матрицею

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{d_0}{k} \sin \varphi \\ \frac{k}{d_0} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Дана матриця описує поворот у від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою) розподілу вхідного сигналу на кут  $\varphi = p\pi/2$ , пропорційний параметру  $p$ .

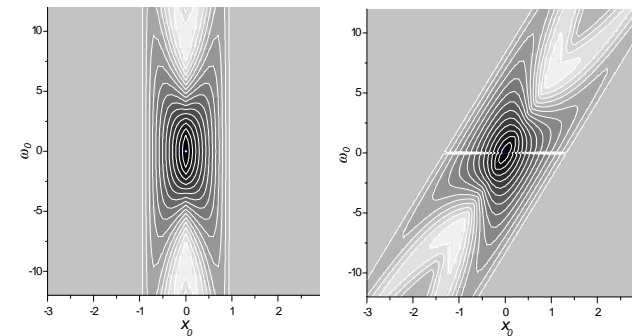


Рис. 1. Поворот розподілу прямокутного імпульсу при дробовому фур'є-перетворенні - *зліва* -  $p = 0$ , *справа* -  $p = 0,5$ .

На рис. 1 показані розподіл прямокутного імпульсу (зліва) і, відповідно, розрахований розподіл дробового фур'є-перетворення пря-

мокутного імпульсу (справа). Як видно, на інформаційній діаграмі розподіл вихідного сигналу повертається і одночасно деформується [4].

## 4. Узагальнений координатно-частотний розподіл

### 4.1. Методи узагальнення розподілів

Розподіл Вігнера та функція невизначеності знайшли широке застосування в просторово-частотному аналізі та зокрема в оптичних системах обробки інформації. Вибір того чи іншого розподілу залежить від сформульованих завдань. Хоча використання функції невизначеності передбачає суттєво простіші розрахунки при відновленні розподілу інтенсивності вхідного сигналу, більшість авторів в своїх роботах все ж використовують розподіл Вігнера. Логічним кроком в цьому напрямку була робота Чоунтасіса з співавторами [6] в якій введено узагальнену функцію Вігнера. Вищезгадана робота [6] є виконана в рамках квантової механіки, що ставить під питання можливість її використання в класичних системах в тому вигляді в якому вона є отримана в роботі. Тому виникає запитання відносно побудови класичного аналізу. З іншого боку, як було показано в попередньому параграфі у випадку використання функції невизначеності відновлення миттєвої енергії (інтенсивності) сигналу є суттєво простішим, тому доцільно запропонувати спосіб відновлення розподілу інтенсивності сигналу на основі використання узагальненої функції невизначеності. Особливість використання такого підходу полягає в тому, що відновлений розподіл інтенсивності сигналу реєструється експериментально в оптичних системах. Загальна ідея роботи полягає в тому, щоб побудувати деякий координатно-частотний розподіл на основі функції невизначеності, який дозволив би використовувати узагальнене ядро і частковими випадками якого були би розподіл Вігнера та функція невизначеності. Розглянемо шлях побудови узагальненого координатно-частотного розподілу. В роботах [13–16] було детально досліджено властивості оператора  $U(x, p, \pi)$ . Чоунтасісом [6] було запропоновано використання узагальненого оператора, з метою отримання узагальненої функції розподілу Вігнера, яка суттєво розширює можливості просторово-частотного аналізу.

$$U(x, p, \theta) = D(2x, 2p)V(\theta), \quad (12)$$

де

$$D(x, p) = \exp(ip\hat{x} - ix\hat{p}) \quad (13)$$

- оператор зміщення.  $V(\theta)$  - оператор дробового фур'є-перетворення,  $\theta$  - параметр, який може змінюватися від нуля до  $\pi$ . Якщо обчислити шпур такого оператора в граничних випадках ми отримуємо при  $\theta = \pi$  - розподіл Вігнера, при  $\theta = 0$  - функцію невизначеності. Один з часткових результатів отриманих в даній роботі записується наступним чином

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\theta(x; p) &= \frac{2}{\pi} \int \int d\alpha d\beta \tilde{W}(\alpha, \beta) \\ &\times \text{Tr}[U(x - \alpha, p - \beta; \theta)] \exp[i(2\alpha p - 2\beta x)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Використовуючи ці результати ми спробуємо ввести узагальнений координатно-частотний розподіл, на основі функції невизначеності, який в порівнянні з узагальненим розподілом Вігнера буде мати ряд переваг.

### 4.2. Введення узагальненого координатно-частотного розподілу

В ряді попередніх робіт [6, 7] знайдено представлення узагальненого розподілу (14) з використанням в підінтегральному виразі розподілу Вігнера. Взнявши до уваги результати робіт [6–8, 13, 16] та виконавши ряд математичних перетворень отримаємо вираз для узагальненого координатно-частотного розподілу на основі функції невизначеності  $\mathcal{A}(x_0; \omega_0)$  із (3)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0) \\ &\exp\{i[2x_0 p - 2\omega_0 x]\} \exp\left\{-i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)}\right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Константа  $C_t$  та параметр узагальненого розподілу визначаються співвідношеннями

$$C_t = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - \exp i\theta}, \quad t = \frac{\theta}{\pi}. \quad (16)$$

Використовуючи означення функції невизначеності (3) отримуємо явний вигляд узагальненого координатно-частотного розподілу двох сигналів  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \\ &\exp \{i [2x_0 p - 2\omega_0 x]\} \exp \left\{ -i \frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)} \right\} \\ &\int f_1 \left( z + \frac{x_0}{2} \right) f_2^* \left( z - \frac{x_0}{2} \right) \exp(-i\omega_0 z) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Вираз (17) є узагальненням звичайного координатно-частотного розподілу. Його граничними випадками є функція невизначеності (3) при значенні параметра  $t = 0$  та розподіл Вігнера (6) при значенні параметра  $t = 1$ . Таким чином, на альтернативу двом відомим розподілам (3) та (6) ми отримуємо цілу множину розподілів кожному з яких відповідає певному значенню параметра  $t$ . Введення узагальненого координатно-частотного розподілу (17) вирішує дві важливі проблеми. Перша з них це проблема вибору форми представлення. Зникає необхідність обирати той чи інший розподіл з яким краще працювати при вирішенні конкретної задачі. Друга перевага використання узагальненого розподілу (17) полягає в тому, що поряд з відомими граничними випадками (розподіл Вігнера при  $t = 1$  та функція невизначеності при  $t = 0$ ) з'являється ціла множина нових розподілів при  $t \neq 0$ , які потребують детального дослідження. З огляду на широке застосування граничних випадків для опису різних фізичних систем, є всі підстави стверджувати, що в множині розподілів  $t \neq 0$  також знайдуться розподіли, які матимуть визначену фізичну інтерпретацію.

### 4.3. Властивості узагальненого координатно-частотного розподілу

Для подальшого дослідження узагальненого координатно-частотного розподілу необхідно дослідити основні його властивості, зокрема, з'ясувати факт наявності оберненого перетворення та знайти умову нормування.

#### 4.3.1. Обернене перетворення

Знаходження оберненого перетворення до узагальненого координатно-частотного розподілу представляє особливий інтерес при відновленні розподілу інтенсивності сигналу. Задача полягає в тому, щоб виразити функцію невизначеності  $\mathcal{A}_{f f^*}(x_0; \omega_0)$  через узагальнений

розподіл  $\mathcal{A}_{f f^*}^{(t)}(x; p)$ . Для цього необхідно розглянути комплексно-спряжене ядро та скористатись властивостями дельта-функції Дірака. В результаті ми отримуємо наступний вираз

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x'_0; \omega'_0) &= \int \int dx dp \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) \\ &\exp \left\{ -i [2x'_0 p - 2\omega'_0 x] \right\} \exp \left\{ i \frac{(x - x'_0)^2 + (p - \omega'_0)^2}{\tan(\theta/2)} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином формула (18) встановлює зворотній зв'язок між функцією невизначеності  $\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}(x_0; \omega_0)$  та узагальненим координатно-частотним розподілом  $\mathcal{A}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p)$ . Це відкриває можливість відновлення розподілу інтенсивності сигналу за узагальненим розподілом, що не було встановлено при використанні узагальненого розподілу Вігнера.

#### 4.3.2. Крос-кореляційне представлення узагальненого координатно-частотного розподілу

Іноді зручно працювати не з функцією невизначеності в чистому вигляді, а з так званою крос-кореляційною функцією. Тому введемо позначення крос-кореляційної функції сигналів  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$

$$F(z, x_0) = f_1 \left( z + \frac{x_0}{2} \right) f_2^* \left( z - \frac{x_0}{2} \right), \quad (19)$$

та для простоти математичних перетворень використаємо наступні позначення

$$\tau = -\frac{1}{\tan(\theta/2)}, \quad \theta = [0.. -\pi]. \quad (20)$$

Оскільки  $F(z, x_0)$  не залежить від  $\omega_0$  за цією змінною виконаємо інтегрування. Отже вираз для узагальненого розподілу (17) ми можемо переписати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 dz \\ &\times \exp \{i [2x_0 p + \tau^2(x - x_0)^2]\} F(z, x_0) I(x, p, z), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$I(x, p, z) = \exp \{i\tau^2 p^2\} \times \int d\omega_0 \exp \{-i[z + 2x + 2\tau^2 p]\} \exp \{i\tau^2 \omega_0^2\}. \quad (22)$$

Вираз такого типу є фур'є-перетворенням функції Френеля [11], тому після нескладних перетворень вираз (22) можна переписати в явному вигляді

$$I(x, p, z) = \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \exp \{-ip[z + 2x]\} \exp \left\{-i\frac{1}{4\tau^2}[z + 2x]\right\}. \quad (23)$$

Підставивши отриманий результат в формулу (21) отримуємо наступний загальний вираз, що описує узагальнений координатно-частотний розподіл в крос-кореляційному представленні

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2}^{(t)}(x; p) &= C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \\ &\times \exp \{i[2x_0 p + \tau^2(x - x_0)^2]\} \\ &\times \exp \{-ip[z + 2x]\} \exp \left\{-i\frac{1}{4\tau^2}[z + 2x]^2\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Представлення (24) є вигідним для використання у випадку коли важко порахувати аналітично явний вигляд узагальненого розподілу. В загальному випадку перевага цього представлення полягає в зведенні загальної формули (17) до двохкратного інтегралу, що суттєво спрощує як аналітичні так і чисельні обрахунки.

#### 4.3.3. Умова нормування

Умову нормування узагальненого координатно-частотного розподілу будемо вибирати таким чином, щоб повна енергія система була рівна одиниці. Якщо спільну функцію координати та частоти проінтегрувати як за координатою так і за частотою ми повинні отримати імовірність знаходження системи в одному із станів, яка рівна одиниці. Виконавши інтегрування виразу (24) за  $p$  отримуємо наступний результат

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_1 f_2}^{(t)}(x) &= C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \exp \{i\tau^2[x - x_0^2]\} \\ &\times \exp \left\{-i\frac{1}{4\tau^2}[z + 2x]^2\right\} \delta(z + 2x - 2x_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Якщо проінтегрувати вираз (25) за координатою  $x$  то отримуємо наступну умову нормування для узагальненого координатно-частотного розподілу

$$\mathcal{A}_{f f^*}^{(t)} = C_t \frac{\sqrt{\pi i}}{\tau} \int \int dx_0 dz F(z, x_0) \exp \left\{-i\tau^2 \frac{z^2}{4}\right\} \exp \left\{-i\frac{x_0^2}{\tau^2}\right\}. \quad (26)$$

Формули (25) та (26) можна детально дослідити шляхом інтегрування за однією із змінних  $x_0$  чи  $z$ .

### 5. Узагальнений координатно-частотний розподіл: дробове представлення

Використання узагальненого координатно-частотного розподілу представляє особливий інтерес при поєднанні його з концепцією дробового фур'є-перетворення. Вивчення дробового представлення узагальненого координатно-частотного розподілу представляє інтерес з точки зору відновлення вхідного сигналу. Як і дробове фур'є-перетворення узагальнений координатно-частотний розподіл характеризується поворотом вхідного сигналу на інформаційній діаграмі спряжених координат  $(x, p)$  пропорційно до параметра  $t$ . Таким чином концепції узагальненого розподілу та дробового фур'є-перетворення можуть бути успішно поєднані. Добре відомо, що дробовому перетворенню відповідає поворот на інформаційній діаграмі, що описується формулою (10). Взавши до уваги той факт, що в підінтегральному виразі формули (15) маємо функцію невизначеності отримуємо наступну формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{u_p u_p^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \\ &\exp \{i[2x_0 p - 2\omega_0 x]\} \exp \left\{-i\frac{(x - x_0)^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)}\right\} \\ &\mathcal{A}_{f_1 f_2^*} \left( \cos \varphi x_0 - \frac{d_0}{k} \sin \varphi \omega_0; \frac{k}{d_0} \sin \varphi x_0 + \cos \varphi \omega_0 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здійснимо заміну змінних

$$\begin{aligned}x'_0 &= x_0 \cos \phi - \omega_0 \sin \phi, \\ \omega'_0 &= x_0 \sin \phi + \omega_0 \cos \phi.\end{aligned}\quad (28)$$

Зворотній перехід до змінних  $(x_0, \omega_0)$  здійснюється наступним чином

$$\begin{aligned}x_0 &= x'_0 \cos \phi + \omega'_0 \sin \phi, \\ \omega_0 &= \omega'_0 \cos \phi - x'_0 \sin \phi.\end{aligned}\quad (29)$$

Такий перехід від змінних  $(x_0, \omega_0)$  до  $(x'_0, \omega'_0)$  характеризується якобіаном переходу рівним одиниці, а узагальнений розподіл після низки математичних перетворень в дробовому представленні описується наступною формулою

$$\begin{aligned}A_{u_p u_p^*}^{(t)}(x; p) &= C_t \int \int dx_0 d\omega_0 \\ &\exp \{i [2x_0(x \sin \phi + p \cos \phi) - 2\omega_0(x \cos \phi - p \sin \phi)]\} \\ &\exp \left\{ -i \frac{(x \cos \phi - p \sin \phi - x_0)^2 + (x \sin \phi + p \cos \phi - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)} \right\} \\ &\int f_1 \left( z + \frac{x_0}{2} \right) f_2^* \left( z - \frac{x_0}{2} \right) \exp(-i\omega_0 z) dz.\end{aligned}\quad (30)$$

Формула (30) описує узагальнений координатно-частотний розподіл в дробовому представленні. З даної форми представлення легко бачити, що у випадку використання узагальненого розподілу в процесі дробового фур'є-перетворення відбувається поворот на інформаційній діаграмі спряжених координат  $(x, p)$  не лише за параметром розподілу  $t$ , а й за параметром дробового перетворення  $\varphi$ , а саме

$$A_{u_p u_p^*}^{(t)}(x; p) = A_{f_1 f_2^*}^{(t)}(x \cos \phi - p \sin \phi; x \sin \phi + p \cos \phi). \quad (31)$$

Таким чином легко бачити, що узагальнений розподіл в дробовому представленні характеризується двома параметрами: за формою представлення розподілу  $t$ , та параметром дробового фур'є-перетворення  $\varphi$ , кожен з яких відповідає повороту на інформаційній діаграмі

спряжених координат  $(x, p)$ . Отже ми маємо справу з узагальненим поворотом, який залежить від співвідношення параметрів  $t$  та  $\varphi$ . Параметр  $t$  дозволяє нам вибрати форму представлення розподілу чи власне розподіл з яким вигідніше працювати. При  $t = 0$  ми переходимо до функції невизначеності, При  $t = 1$  ми отримуємо розподіл Вігнера. Між цими двома граничними випадками є ціла множина розподілів кожен з яких відповідає певному значенню  $t$  з проміжку  $t = (0..1)$ . Детальне вивчення властивостей цих розподілів є предметом подальшого дослідження.

## 6. Розрахунок узагальненого координатно-частотного розподілу Гауса

Розрахуємо узагальнений координатно-частотний розподіл у випадку гаусового сигналу, який записується як

$$g(x) = \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} x^2 \right). \quad (32)$$

В граничному випадку  $t = 0, \varphi = 0$  (функція невизначеності) розподіл гаусового сигналу записується наступним чином

$$A_{gg^*}(x_0; \omega_0) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{1}{4} \left[ \frac{x_0^2}{\sigma^2} + \omega_0^2 \sigma^2 \right] \right). \quad (33)$$

Узагальнений розподіл гаусового сигналу отримуємо шляхом підстановки в формулу (17) явного вигляду функції гауса (32). Такий узагальнений розподіл має наступний вигляд

$$\begin{aligned}A_{gg^*}^{(t)}(x; p) &= \\ &= C_t \exp \left( -i \frac{x^2}{\tan(\theta/2)} \right) \exp \left( -i \frac{p^2}{\tan(\theta/2)} \right) E(x, p),\end{aligned}\quad (34)$$

де

$$E(x, p) = E_{x_0}(x, p) E_{\omega_0}(x, p), \quad (35)$$

$$\begin{aligned}E_{x_0}(x, p) &= \int dx_0 \exp \left( -\frac{1}{4} \frac{x_0^2}{\sigma^2} \right) \\ &\times \exp \left( 2x_0 i \left[ 2x_0 p + \frac{2x_0 x}{\tan(\theta/2)} - \frac{x_0^2}{\tan(\theta/2)} \right] - \frac{x_0^2}{\tan(\theta/2)} \right),\end{aligned}\quad (36)$$



$$E_{\omega_0}(x, p) = \int d\omega_0 \exp\left(-\frac{1}{4}x_0^2\sigma^2\right) \times \exp\left(2x_0i\left[-2\omega_0x + \frac{2\omega_0p}{\tan(\theta/2)} - \frac{\omega_0^2}{\tan(\theta/2)}\right] - \frac{x_0^2}{\tan(\theta/2)}\right) \quad (37)$$

Після нескладних математичних перетворень отримуємо узагальнений розподіл гаусового сигналу

$$A_{gg^*}^{(t)}(x; p) = C_t \exp\left(-i\frac{p^2 + x^2}{\tan(\theta/2)}\right) E_{x_0}(x, p) E_{\omega_0}(x, p). \quad (38)$$

Легко бачити, що в граничному випадку  $t = 0$  ми аналітично отримуємо відомий результат (33). Детальне дослідження узагальненого гаусового розподілу подано в наступному розділі.

## 7. Чисельні результати розрахунку узагальненого координатно-частотного розподілу Гауса

Перед початком аналізу зробимо невелику ремарку відносно методів обчислення. Їх можливо проводити двома незалежними способами. Першим спосіб полягає в безпосередньому обчисленні узагальненого розподілу за формулою (17) для визначеної функції. Другий спосіб полягає в аналітичному обчисленні узагальненого розподілу для цієї функції (якщо це можливо). В загальному випадку обидва підходи повинні давати ті ж результати. У випадку розподілу Гауса змінні розділяються і ми отримуємо аналітичні результати. З точки зору правильності вибору методів чисельного розрахунку доцільно порівняти чисельні та аналітичні результати. У випадку Гауса вони збігаються з великою точністю, тому ми не будемо зупинятися на їх порівнянні.

Тепер повернемося до аналізу отриманих чисельних результатів. На рис. 2 приведений вигляд узагальненого розподілу Гауса при різних значеннях параметра узагальненого розподілу  $t$ . Параметр  $t$  фактично вказує на форму представлення розподілу в граничних випадках це розподіл Вігнера при  $t = 1$  (рис. 2f) та функція невизначеності при  $t = 0$  (рис. 2a). Як видно з рисунку (рис. 2) між цими двома граничними випадками існує множина розподілів  $t = [0..1]$  (рис. 2b-2e), які по-суті є новими та потребують детального дослідження. Слід відмітити той факт, що перехід від функції невизначе-

ності до розподілу Вігнера формується як поворот на інформаційній діаграмі спряжених координат  $(x, p)$ .

На рис. 3 представлені дані розрахунку узагальненого Гаусового розподілу в площині  $x = 0$ , що дозволяє нам дослідити формування уявної частини. Звідси видно, що в граничних випадках уявна частина рівна нулеві, що добре відомо з класичної теорії.

Рисунки 4-6 демонструють поворот узагальненого розподілу при дробовому фур'є-перетворенні. Фактично формування повороту розподілу відбувається за рахунок комплексного впливу двох параметрів  $t$  та  $\varphi$ . На рисунках 7-8 представлені дані в площині  $x = 0$ .

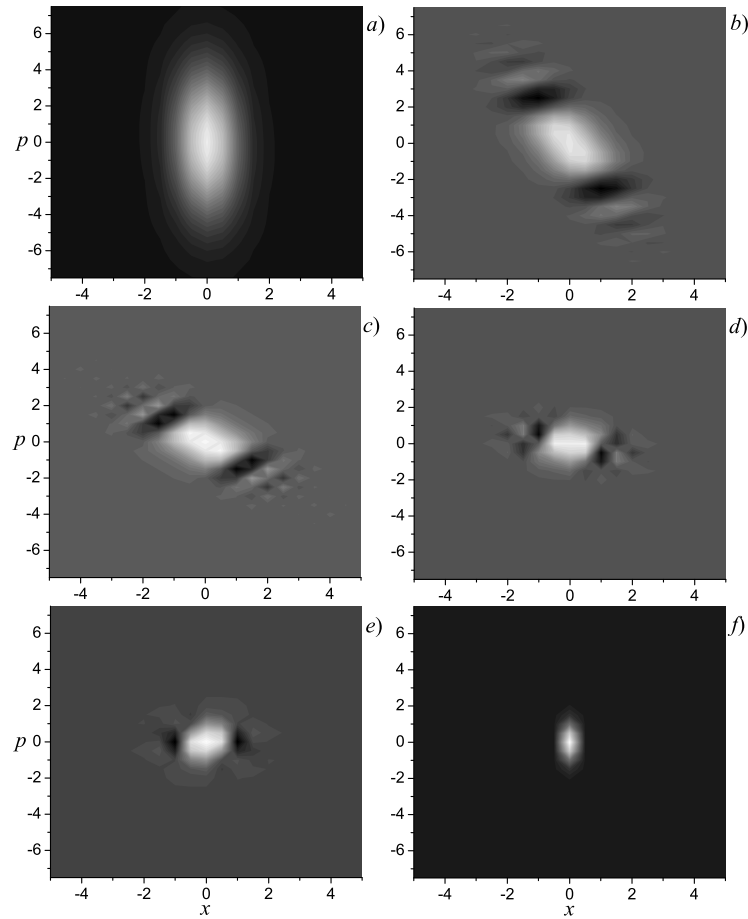


Рис. 2. Узагальнений розподіл Гауса при різних значеннях параметра узагальненого розподілу  $t$  (дійсна частина). Випадок а) відповідає значенню  $t = 0$ ; б) -  $t = 0,25$ ; в) -  $t = 0,5$ ; д) -  $t = 0,75$ ; е) -  $t = 0,85$ ; ф) -  $t = 1$ .

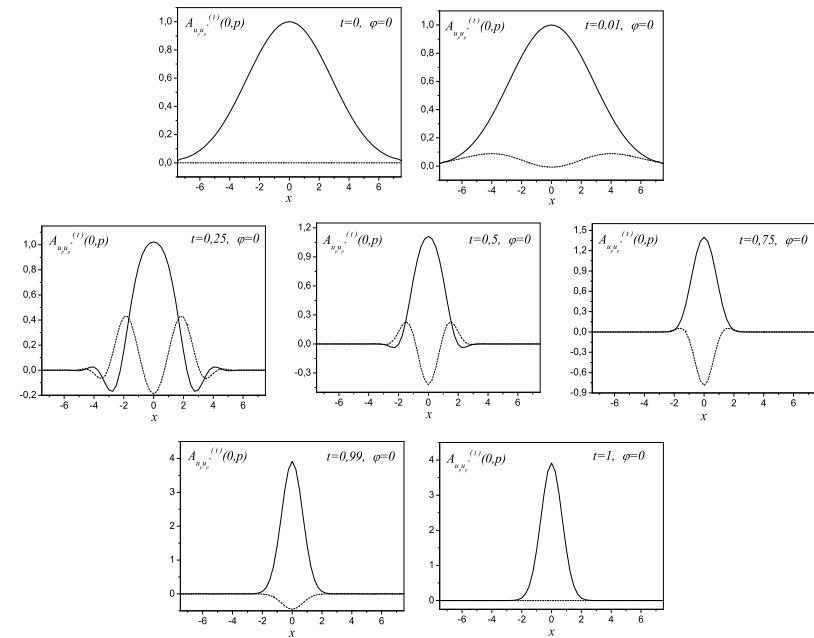


Рис. 3. Узагальнений розподіл Гауса в площині  $x = 0$  при різних значеннях параметра узагальненого розподілу  $t$ , суцільна лінія - дійсна частина, штрихована лінія - уявна частина.

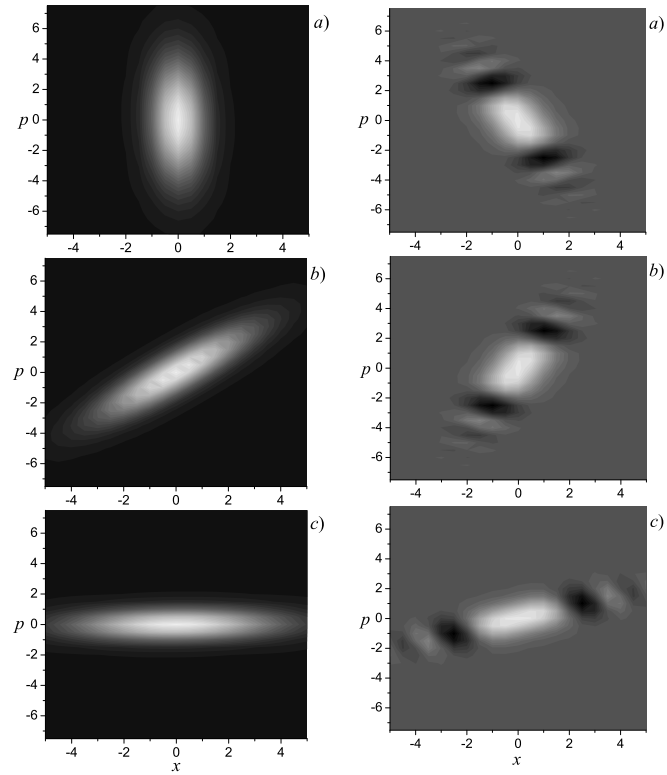


Рис. 4. Узагальнений розподіл Гауса в фрактальному представленні (дійсна частина) при різних значеннях параметра дробового фур'є-перетворення а) -  $\varphi = 0^0$ ; б) -  $\varphi = 45^0$ ; в) -  $\varphi = 90^0$ ,  $t = 0.01$  - зліва та  $t = 0.25$  - справа.

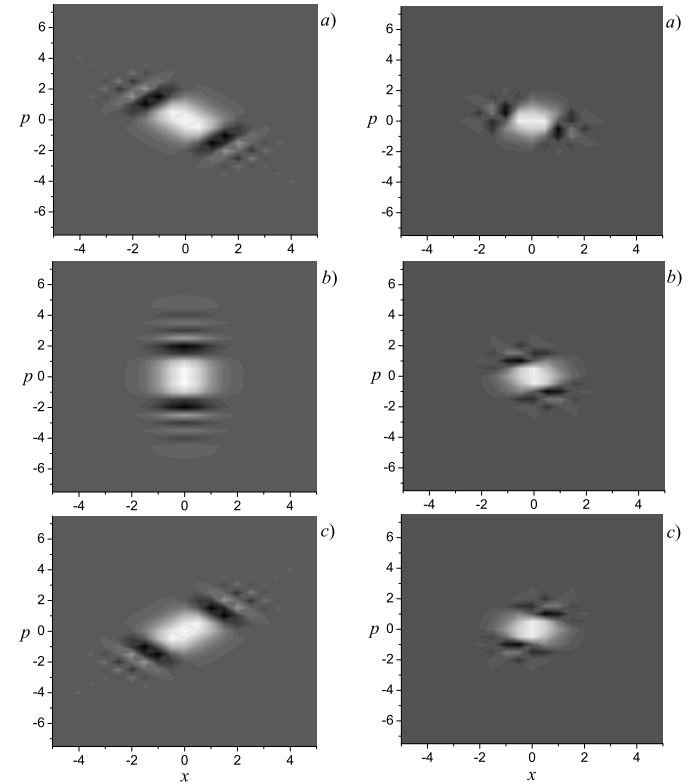


Рис. 5. Узагальнений розподіл Гауса в фрактальному представленні (дійсна частина) при різних значеннях параметра дробового фур'є-перетворення а) -  $\varphi = 0^0$ ; б) -  $\varphi = 45^0$ ; в) -  $\varphi = 90^0$ ,  $t = 0.5$  - зліва та  $t = 0.75$  - справа.

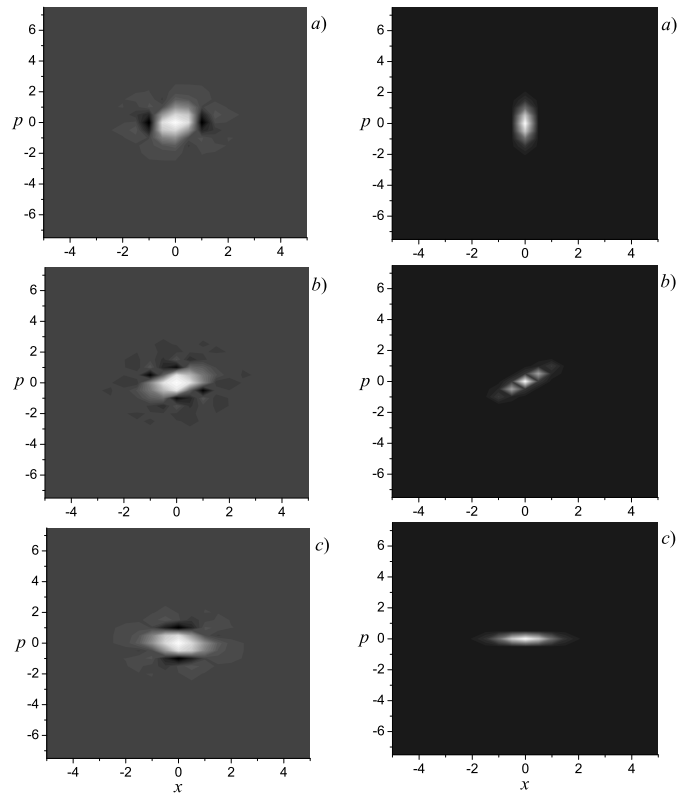


Рис. 6. Узагальнений розподіл Гауса в фрактальному представленні (дійсна частина) при різних значеннях параметра дробового фур'є-перетворення а) -  $\varphi = 0^0$ ; б) -  $\varphi = 45^0$ ; в) -  $\varphi = 90^0$ ,  $t = 0.85$  - зліва та  $t = 0.99$  - справа.

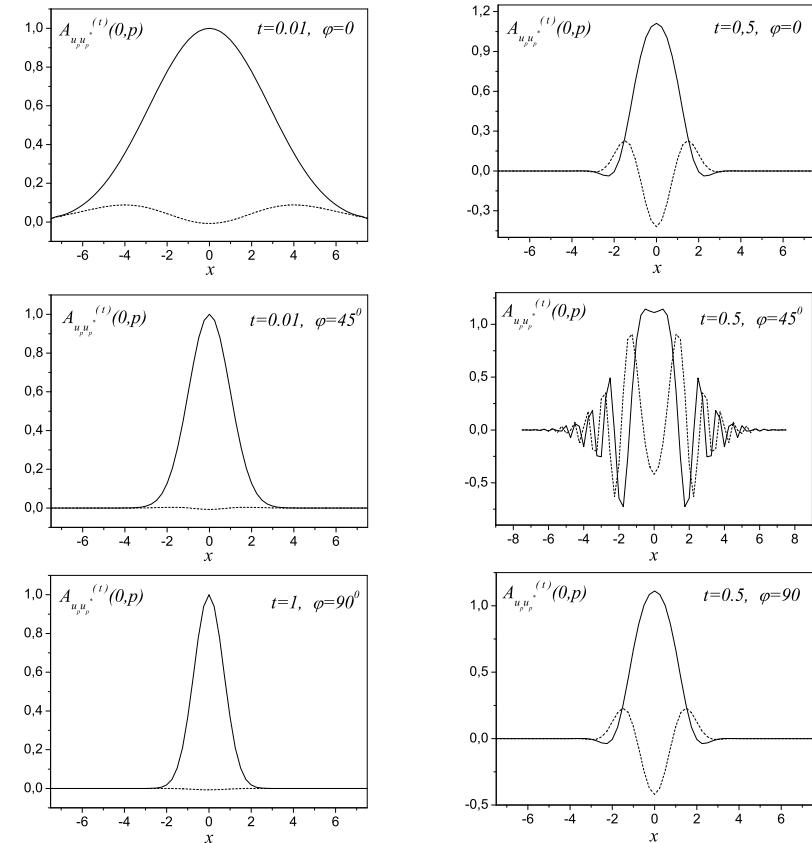


Рис. 7. Узагальнений розподіл Гауса в фрактальному представленні у площині  $x = 0$  при різних значеннях параметра дробового фур'є-перетворення а) -  $\varphi = 0^0$ ; б) -  $\varphi = 45^0$ ; в) -  $\varphi = 90^0$ ,  $t = 0.01$  - зліва та  $t = 0.5$  - справа, суцільна лінія - дійсна частина, штрихована лінія - уявна частина.

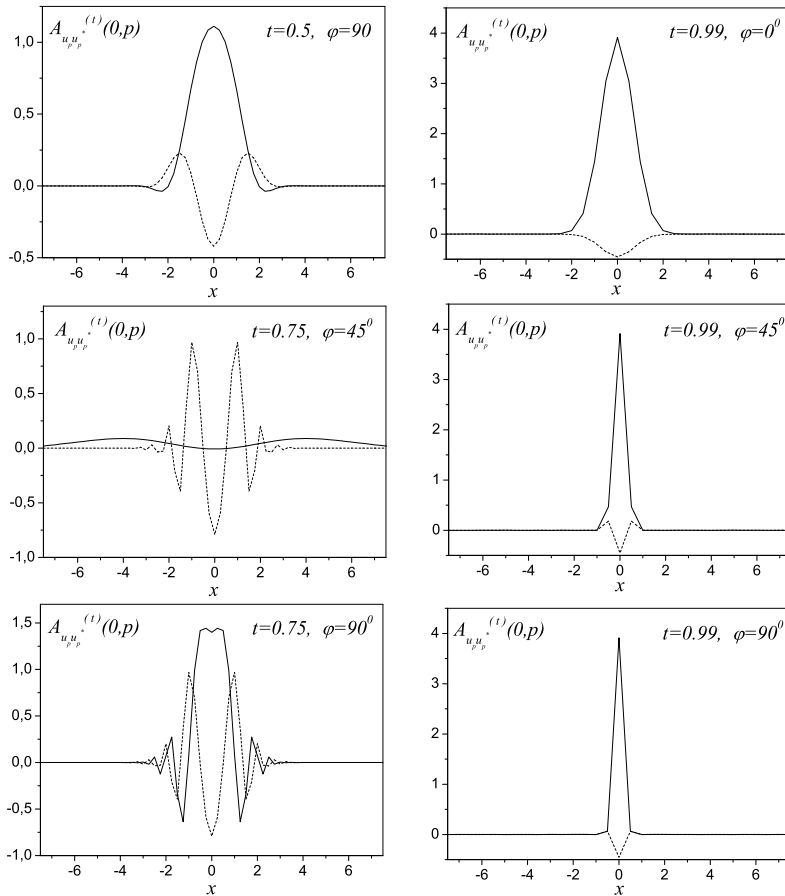


Рис. 8. Узагальнений розподіл Гауса в фрактальному представленні у площині  $x = 0$  при різних значеннях параметра дробового фур'є-перетворення  $\varphi$ ,  $t = 0.75$  - зліва та  $t = 0.99$  - справа, суцільна лінія - дійсна частина, штрихована лінія - уявна частина.

## 8. Відновлення зображень за узагальненим координатно-частотним розподілом

Основною властивістю будь-якого координатно-частотного розподілу є його репрезентативність, тобто можливість відновлення розподілу інтенсивності сигналу за розподілом. Такі властивості є добре відомими для функції невизначеності та розподілу Вігнера. У випадку використання узагальненого розподілу пропонується відновлення розподілу інтенсивності сигналу наступним чином. Згідно означення оберненого перетворення (18) ми отримуємо рівність в якій з одного боку є функція невизначеності, а з іншого боку певну залежність від узагальненого розподілу. Отже з функції невизначеності при  $x_0 = 0$  ми отримуємо наступний переріз

$$A_{ff^*}(0; \omega'_0) = C_t \int \int dx dp A_{ff^*}^{(t)}(x; p) \times \exp\{i2\omega'_0 x\} \exp\left\{i \frac{x^2 + (p - \omega'_0)^2}{\tan(\theta/2)}\right\}. \quad (39)$$

Виконавши обернене фур'є-перетворення [4, 12] отримуємо наступну схему відновлення розподілу інтенсивності сигналу за узагальненим розподілом

$$|f(z)|^2 = C_t \int \int \int dx dp d\omega_0 A_{ff^*}^{(t)}(x; p) \times \exp\{i\omega_0 z\} \exp\{i2\omega_0 x\} \exp\left\{i \frac{x^2 + (p - \omega_0)^2}{\tan(\theta/2)}\right\}. \quad (40)$$

Таким чином, використання узагальненого координатно-частотного розподілу передбачає відновлення розподілу інтенсивності сигналу за розподілом. Детальний аналіз механізму відновлення інтенсивності сигналу є предметом подальших досліджень.

## 9. Висновки

Як логічне продовження дослідження властивостей дробового фур'є-перетворення в роботі представлено узагальнений координатно-частотний розподіл та його дробове представлення. Показано, що граничними випадками такого розподілу є функція невизначеності

та розподіл Вігнера. Досліджено область між цими двома граничними випадками та встановлено неперервний зв'язок між функцією невизначеності та розподілом Вігнера, як поворот на інформаційній діаграмі спряжених координат. В роботі введено дробове представлення узагальненого розподілу та запропоновано розглядати його як універсальну форму просторово-частотного розподілу координати та частоти. Теоретичні та аналітичні результати підтверджені чисельними розрахунками у випадку розподілу Гауса. Основною перевагою використання узагальненого розподілу в порівнянні з іншими подібними узагальненнями є можливість відновлення розподілу інтенсивності сигналу за розподілом.

**Подяка** Автор висловлює щирю подяку професору Козловському М. П., доктору фіз.-мат. наук Шовгенюку М. В. та кандидату фіз.-мат. наук Крохмальському Т. Є. за цінні поради та плідні наукові дискусії під час виконання цієї роботи. Окрема подяка Національній академії наук України за надання гранту, в рамках фінансової підтримки якого була здійснена ця робота.

## Література

1. Lohmann A.W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // J. Opt. Soc. Am. A. - 1993. - vol 10. - No 10. - P.2181-2186.
2. Ozaktas H.M., Kutay M.A., Zalevsky Z. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing // John Wiley & Sons. 2000. 500 p.
3. Kozlovskii Yu.M. Generalized fractional Fourier transform and optical systems // Ukr.J.Phys.Opt. - 2003 vol.3 - P.124-134.
4. Шовгенюк М.В., Козловський Ю.М. Дробове фур'є-перетворення оптичних сигналів. Препринт ICMP-01-05U, 2001, 40 с.
5. Шовгенюк М. В., Козловський Ю. М. Самоподібність спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // Доповіді НАН України. - 2000. - No.6. - С.92-97.
6. Chountasis S., Vourdas A. and Bendjaballah C. Fractional Fourier operators and generalized Wigner functions // Phys. Rev. A Vol. 60, № 5, 1999, P. 3467-3473.
7. Chountasis S., Vourdas A. Weyl functions and their use in the study of quantum interference // Phys. Rev. A Vol. 58, № 2, 1998, P. 848-855.
8. Chountasis S., Vourdas A. Weyl and Wigner functions in an extended

- phase-space formalism* // Phys. Rev. A Vol. 58, № 3, 1998, P. 1794-1798.
9. Сы X. X., Колфилд Дж. X. Взаимное время-частотное содержание двух сигналов // ТИИЭР, 1984, т.72, No 7 с.173-180.
  10. Namias V. The Fractional Order Fourier transform and its Application to Quantum Mechanics // J. Instr. Maths Applies. - 1980. - vol 25. - P.241-265.
  11. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
  12. Шовгенюк М.В. Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції. Препринт ІФКС-92-25У, 1992, 40 с.
  13. Roy S. and Singh V. Generalized coherent states and the uncertainty principle // Phys. Rev. D Vol. 25, № 12, 1982, P. 3413-3416.
  14. Royer A. Wigner function in Liouville space: A canonical formalism // Phys. Rev. A Vol. 43, № 1, 1991, P. 44-56.
  15. Royer A. Wigner function as the expectation value of a parity operator // Phys. Rev. A Vol. 15, № 2, 1977, P. 449-450.
  16. Bishop R. Displaced and squeezed parity operators: Its role in classical mappings of quantum theories. // Phys. Rev. A Vol. 50, № 6, 1994, P. 4488-4501.