

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-03-21U

М.П.Козловський, І.В.Пилюк, О.О.Притула

ПОВЕДІНКА ТРИВИМІРНОГО МАГНЕТИКА ПОБЛИЗУ
КРИТИЧНОЇ ТОЧКИ ЗА НАЯВНОСТІ ЗОВНІШНЬОГО
ПОЛЯ

УДК: 536.75; 538.9; 548:537.621; 538.955-405

PACS: 05.50.+q, 05.70.Ce, 64.60.Fr, 75.10.Hk

Поведінка тривимірного магнетика поблизу критичної точки за наявності зовнішнього поля

М.П.Козловський, І.В.Пилюк, О.О.Притула

Анотація. Досліджена поведінка тривимірного магнетика з однокомпонентним параметром порядку поблизу критичної точки у випадку наявності постійного зовнішнього поля. Розглянуті області температур вищих та нижчих за T_c (T_c - температура фазового переходу при відсутності поля). Показано, що при слабких значеннях поля поведінка системи описується виключно температурною змінною, а для випадку сильних полів роль температурної змінної не є домінуючою. Для кожної з цих областей отримані відповідні вирази для вільної енергії системи, сприйнятливості та інших характеристик в околі критичної точки.

Behaviour of a three-dimensional magnet near the critical point in the presence of an external field

М.Р.Kozlovskii, I.V.Pylyuk, O.O.Prytula

Abstract. The behaviour of a three-dimensional magnet with a one-component order parameter near the critical point in the presence of the constant external field is investigated. The high-temperature and low-temperature regions in the vicinity of T_c (T_c - the phase transition temperature in the absence of an external field) are considered. It is shown, that in the small fields the system behaviour is described by the temperature variable only, but in the case of the large fields the role of the temperature variable is not dominant. The respond expressions for the free energy, susceptibility and other characteristics of the system in the vicinity of the critical point are obtained for every of these regions.

Дана робота є продовженням циклу робіт [1–3], присвячених вивченню впливу зовнішнього поля на критичну поведінку ґраткових спінових систем. При описі критичних властивостей основну роль відіграють далекосяжні кореляції між частинками [4] і для їх опису доцільно використовувати негаусові розподіли флуктуацій параметра порядку [5]. Саме такий підхід дозволив знайти основні характеристики тривимірних статистичних систем поблизу точки фазового переходу при відсутності поля, не використовуючи асимптотичних рядів теорії збурень, які виникають при використанні гаусових розподілів [6].

При проведенні розрахунків будемо використовувати найпростішу нетривіальну модель фазового переходу, яка описується гамільтоніаном

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{l}, \mathbf{j} \in \Lambda} \Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}}) \sigma_{\mathbf{l}} \sigma_{\mathbf{j}} - h \sum_{\mathbf{l} \in \Lambda} \sigma_{\mathbf{l}}, \quad (1)$$

де потенціал взаємодії $\Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}})$ є додатньою функцією і залежить лише від віддалі між частинками $r_{\mathbf{l}\mathbf{j}} = |\mathbf{r}_{\mathbf{l}} - \mathbf{r}_{\mathbf{j}}|$, які розташовані у N вузлах простої кубічної ґратки із періодом c . Величини $\sigma_{\mathbf{l}}$ є операторами z -компоненти спіна і мають власні значення ± 1 , h - нормоване магнітне поле. Сумування здійснюється в об'ємі періодичності ($V = N \cdot c^3$)

$$\Lambda = \{\mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z) | l_i = cn_i; n_i = 1, 2, \dots, N_i, i = x, y, z\} \quad (2)$$

із циклічними граничними умовами.

Зазвичай, за потенціал взаємодії $\Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}})$ вибирають деяку короткосяжну функцію віддалі. Так, для потенціалу взаємодії найближчих сусідів функція $\Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}})$ рівна J , коли $r_{\mathbf{l}\mathbf{j}} = 1$ та обертається в нуль для всіх інших значень $r_{\mathbf{l}\mathbf{j}}$. Він спрощеним чином відображає реальну ситуацію, оскільки не беруться до уваги взаємодії між частинками, які перебувають на віддальях $r_{\mathbf{l}\mathbf{j}} > 1$, зокрема взаємодії з другими, третіми і т.д. сусідами. Звичайно, для більшості фізичних систем має місце швидке спадання взаємодії із ростом $r_{\mathbf{l}\mathbf{j}}$, однак вона завжди відмінна від нуля. Дещо виправити цю ситуацію можна, використовуючи в якості $\Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}})$ експонентно спадну функцію віддалі

$$\Phi(r_{\mathbf{l}\mathbf{j}}) = A \exp(-r_{\mathbf{l}\mathbf{j}}/b). \quad (3)$$

Тут A, b - деякі постійні величини. Фур'є-образ (3) має вигляд

$$\Phi(k) = \Phi(0) (1 + b^2 k^2)^{-2}, \quad (4)$$

де постійна $\Phi(0)$ пов'язана із мікроскопічними параметрами системи:

$$\Phi(0) = A 8\pi (b/c)^3. \quad (5)$$

Хвильовий вектор \mathbf{k} змінюється в межах першої зони Бріллоуена

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) | k_i = -\frac{\pi}{c} + \frac{2\pi n_i}{cN_i}; \right. \\ \left. n_i = 1, 2, \dots, N_i, i = x, y, z \right\}. \quad (6)$$

Великомасштабні флуктуації відповідають малим значенням хвильових векторів. У зв'язку з цим обмежимося в подальшому розгляді наближеним виразом для (4):

$$\Phi(k) = \begin{cases} \Phi(0)(1 - 2b^2 k^2), & \mathbf{k} \in \mathcal{B}_0, \\ \Phi_0 = \Phi(0)\bar{\Phi}, & \mathbf{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0, \end{cases} \quad (7)$$

де $\bar{\Phi}$ - деяка постійна величина. Така модифікація моделі (1) передбачає, що великі значення хвильового вектора не є особливо суттєвими при розрахунку її критичних характеристик.

Область значень хвильового вектора \mathcal{B}_0 у виразі (7) задається наступним чином:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) | k_i = -\frac{\pi}{c_0} + \frac{2\pi n_i}{c_0 N_{0i}}; \right. \\ \left. n_i = 1, 2, \dots, N_{0i}, i = x, y, z \right\}, \quad (8)$$

де $c_0 = cs_0$, s_0 - деякий параметр моделі ($s_0 \geq 1$), $N_0 = N_{0x}N_{0y}N_{0z}$, $N_{0i} = s_0^{-d} N$. Вимірність простору $d = 3$. Значення параметра s_0 залежить від вигляду фур'є-образу потенціалу кожної конкретної задачі. Так, для потенціалу взаємодії найближчих сусідів $s_0 > 2$, оскільки лише для таких значень s_0 можна вести мову про параболічну апроксимацію потенціалу $\Phi(k)$.

1. Загальні положення

В роботах [1–3] була запропонована методика розрахунку вільної енергії модельної ґраткової системи однокомпонентних спінів поблизу критичної точки за наявності поля. Функціонал статистичної суми моделі (1) з потенціалом (7) може бути записаний у вигляді N_0 -кратного інтегралу за колективними змінними [1, 6]:

$$Z = Z_0 j_0 e^{\bar{a}_0 N_0} \int (d\eta)^{N_0} \exp \left[-a_1 \sqrt{N_0} \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}_0} d(\mathbf{k}) \eta_{\mathbf{k}} \eta_{-\mathbf{k}} - \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{a_3}{3!} N_0^{-1/2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3} - \\ & -\frac{a_4}{4!} N_0^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \end{aligned} \right\}. \quad (1.1)$$

Тут $j_0 = \sqrt{2}^{N_0-1}$ - якобіан переходу від змінних $\omega_{\mathbf{k}}$ до ω_1 ,

$$Z_0 = 2^N (ch(h'))^N \exp\left(\frac{1}{2} \beta \Phi_0 N\right), \quad (1.2)$$

де $h' = \beta h$ - приведенне поле, $\beta = 1/(kT)$ - обернена температура. Для величини $d(k)$ маємо вираз

$$\begin{aligned} d(k) &= \tilde{a}_2 - \beta \Phi(0) + 2b^2 \beta \Phi(0) k^2, \\ \tilde{a}_2 &= a_2 + \beta \Phi_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Коефіцієнти a_l розраховані в [1, 3]. Наближені вирази для цих коефіцієнтів представляються у вигляді рівностей

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi \mathcal{M}_2) - \frac{1}{4} (a')^2 - \frac{3}{4} g(1 - a'^2), \\ a_1 &= -\frac{1}{2} a' \mu_2 (1 - 3g), \\ a_2 &= \frac{1}{2} \mu_2^2 \left[1 - 3g \left(1 - \frac{1}{2} a'^2 \right) \right], \\ a_3 &= -\frac{3}{2} \mu_2^3 a' g, \quad a_4 = \frac{3}{2} \mu_2^4 g. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тут введені позначення

$$\begin{aligned} a' &= s_0^{d/2} \mathcal{M}_1 \mu_2, \quad \mu_2 = (2/\mathcal{M}_2)^{1/2}, \\ g &= \frac{1}{6} s_0^{-d} (-\mathcal{M}_4) / \mathcal{M}_2^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для кумулянтів $\mathcal{M}_n(h')$ маємо відомі вирази [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \ln chh', \quad \mathcal{M}_1 = thh', \\ \mathcal{M}_2 &= 1 - \mathcal{M}_1^2, \quad \mathcal{M}_3 = -2\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1, \\ \mathcal{M}_4 &= -2\mathcal{M}_2^2 + 4\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Метою даної роботи є поетапне інтегрування виразу (1.1) за колективними змінними $\eta_{\mathbf{k}}$, починаючи із змінних $\eta_{\mathbf{k}}$, хвильові вектори яких близькі до значення $B_0 = B/s_0$ ($B = \pi/c$ - границя півзони Бріллюена), і приведення його до однократного інтегралу за змінною η_0 . Ця змінна є макроскопічною величиною в тому сенсі, що її середнє значення визначає параметр порядку системи.

В наближених підходах вважається, що вже на початковому етапі із (1.1) можна виділити вклад такого типу і представити статистичну суму у вигляді

$$Z' = Z'_0 \int d\eta_0 e^{-a_1 \sqrt{N_0} \eta_0 - \frac{1}{2} d'(0) \eta_0^2 - \frac{a'_3}{\sqrt{N_0}} \eta_0^3 - \frac{a'_4}{N_0} \eta_0^4},$$

де a'_3 та a'_4 - деякі постійні коефіцієнти. Тоді $d'(0) = \alpha(T - T_c)$ і подальші розрахунки призведуть до “класичних” значень критичних показників. Однак таке наближення недостатнє. Необхідно здійснювати поетапне “виключення” з розгляду змінних $\eta_{\mathbf{k}}$. При цьому відбувається перенормування температурної (та польової) залежності величин a_1 , $d'(0)$, a'_3 та a'_4 і в результаті приходимо до мікроскопічного опису характеристик моделі поблизу критичної точки.

Використовуючи метод поетапного розрахунку статистичної суми (1.1), приходимо до виразу [1, 3]

$$Z = Z_0 Q_0 Q_1 \dots Q_{n_p} j_{n_p+1} \left[Q(P^{(n_p)}) \right]^{N_{n_p+1}} I_{n_p+1}. \quad (1.7)$$

Для величин, які входять в (1.7), маємо співвідношення [1]

$$\begin{aligned} Q_0^{1/N_0} &= e^{\tilde{a}_0} Q(d), \\ Q(d) &= \left(\frac{24}{a_4} \right)^{1/4} \gamma_1 \left[1 - \gamma h_2^{(0)} + \frac{3}{8} \gamma (h_3^{(0)})^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Тут

$$\gamma = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \approx 0.337989, \quad \gamma_1 = \pi \sqrt{2} \left(2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right)^{-1} \approx 1.8128.$$

Аргументи $h_2^{(0)}$ та $h_3^{(0)}$ записуються у вигляді

$$h_2^{(0)} = \sqrt{6}(r_0 + q) a_4^{-1/2}; \quad h_3^{(0)} = h_{30} a_3 a_4^{-3/4}, \quad (1.9)$$

де

$$r_0 = \tilde{a}_2 - \beta \Phi(0), \quad h_{30} = 24^{3/4}/6, \quad (1.10)$$

$$q = \bar{q}\beta\Phi(0), \quad \bar{q} = \pi^2 \left(\frac{b}{c}\right)^2 s_0^{-2}(1+s^{-2}).$$

Парціальна статистична сума n -ої блочної структури задається виразом

$$Q_n = \left[Q(P^{(n-1)})Q(d_n) \right]^{N_n}, \quad (1.11)$$

де

$$N_n = N_0 s^{-3n},$$

$$Q(d_n) = \left(\frac{24}{a_4^{(n)}} \right)^{1/4} K_0(h_2^{(n)}, h_3^{(n)}), \quad (1.12)$$

$$K_n(h_2^{(n)}, h_3^{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\left(-h_2^{(n)}x^2 - h_3^{(n)}x^3 - x^4\right) dx,$$

а для аргументів $h_2^{(n)}$ та $h_3^{(n)}$ введені позначення

$$h_2^{(n)} = \sqrt{6}d_n(B_{n+1}, B_n)(a_4^{(n)})^{-1/2},$$

$$h_3^{(n)} = h_{30}a_3^{(n)}(a_4^{(n)})^{-3/4}. \quad (1.13)$$

Тут

$$d_n(B_{n+1}, B_n) = a_2^{(n)} - \beta\Phi(0) + q_n,$$

$$q_n = qs^{-2n}.$$

Коефіцієнти $a_l^{(n)}$ з допомогою рекурентних співвідношень [1] пов'язані із їхніми початковими значеннями a_l . Для $Q(P^{(n-1)})$ має місце вираз, аналогічний до $Q(d_n)$, який приведений в [2]. Наближені формули для них мають вигляд (див. [2])

$$Q(d_n) = \left(24/a_4^{(n)}\right)^{1/4} \gamma_1 \left[1 - \gamma h_2^{(n)} + \frac{3}{8}\gamma(h_3^{(n)})^2\right],$$

$$Q(P^{(n-1)}) = (2\pi\gamma)^{-1/2} G'_{00} \left(\frac{a_4^{(n-1)}}{24}\right)^{1/4} \times$$

$$\times \exp\left(-H_{22}(h_3^{(n-1)})^2\right) \left(1 + H_{211}h_2^{(n-1)}\right), \quad (1.14)$$

де коефіцієнти є наступними:

$$G'_{00} = 1 - \frac{3}{4}s^{-d}G_0,$$

$$G_0 = \frac{12\gamma^2 - 1}{24\gamma^2} \approx 0.1353, \quad H_{22} = s^d(32\gamma)^{-1},$$

$$H_{211} = -\frac{1}{2}t_2 - \frac{3}{4}s^{-d}G_0G_2(G'_{00})^{-1},$$

$$t_2 = \gamma - \frac{1}{4\gamma} \approx -0.4017, \quad G_2 = \frac{1}{2\gamma} - 2\gamma + 4\gamma \frac{6\gamma^2 - 1}{12\gamma^2 - 1} \approx -0.3435.$$

Величина $j_{n_p+1} = \sqrt{2}^{N_{n_p+1}-1}$, а параметр s визначає швидкість росту ефективних блочних ґраток і відповідає параметру ренормалізаційної групи. Для I_{n_p+1} отримуємо

$$I_{n_p+1} = \int (d\eta)^{N_{n_p+1}} \exp \left[-\tilde{a}_1^{(n_p+1)} N_{n_p+1}^{1/2} \eta_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}_p} d_{n_p+1}(\mathbf{k}) \eta_{\mathbf{k}} \eta_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{3!} a_3^{(n_p+1)} N_{n_p+1}^{-1/2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_p}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3} - \frac{1}{4!} a_4^{(n_p+1)} N_{n_p+1}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_p}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \right]. \quad (1.15)$$

Область значень хвильових векторів \mathcal{B}_p знаходимо із

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_n} + \frac{2\pi n_i}{c_n N_{n_i}}; \right.$$

$$\left. n_i = 1, 2, \dots, N_{n_i}, i = x, y, z \right\}$$

при $n = n_p + 1$. Тут $c_n = c_0 s^n$, $s \geq 1$, $N_{nx} N_{ny} N_{nz} = N_n$.

Для коефіцієнта $d_{n_p+1}(\mathbf{k})$ із (1.15) маємо

$$d_{n_p+1}(\mathbf{k}) = d_{n_p+1}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2,$$

$$d_{n_p+1}(0) = a_2^{(n_p+1)} - \beta\Phi(0). \quad (1.16)$$

Від коефіцієнтів $a_l^{(n)}$ зручно перейти до величин w_n , r_n , v_n , u_n з допомогою рівнянь

$$\tilde{a}_1^{(n)} = s^{-n}w_n, \quad d_n(0) = s^{-2n}r_n,$$

$$a_3^{(n)} = s^{-3n}v_n, \quad a_4^{(n)} = s^{-4n}u_n. \quad (1.17)$$

Перенормовані коефіцієнти w_n , r_n , v_n та u_n задовільняють наступним співвідношенням [1,2], які є розв'язками лінеаризованих поблизу фіксованої точки рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} w_n &= -c_{h1}\mathcal{M}_1(h')E_1^n - c_{h2}\mathcal{M}_1(h')T_{13}^{(0)}\left(\varphi_0^{1/2}\beta\Phi(0)\right)^{-1}E_3^n, \\ r_n &= r^* + c_{k1}^{(0)}\beta\Phi(0)\tau E_2^n + c_{k2}T_{24}^{(0)}\varphi_0^{-1/2}(\beta\Phi(0))^{-1}E_4^n, \\ v_n &= -c_{h2}\mathcal{M}_1(h')E_3^n, \\ u_n &= u^* + c_{k1}^{(0)}(\beta\Phi(0))^2T_{42}^{(0)}\varphi_0^{1/2}\tau E_2^n + c_{k2}E_4^n. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Тут введена величина

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c},$$

де T_c - температура фазового переходу при $h = 0$. Величини r^* та u^* визначають координати фіксованої точки:

$$\begin{aligned} r^* &= -f_0\beta\Phi(0), \quad u^* = \varphi_0(\beta\Phi(0))^2, \\ f_0 &= \bar{q}, \quad \varphi_0^{1/2} = f_{00}^{-1}\bar{q}(1 - s^{-2}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тут

$$f_{00} = (1 - 3G_0s^{-3})(\gamma\sqrt{24})^{-1}.$$

Величини E_l є власними значеннями матриці \mathcal{R} ренормгрупового перетворення

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} - w^* \\ r_{n+1} - r^* \\ v_{n+1} - v^* \\ u_{n+1} - u^* \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} w_n - w^* \\ r_n - r^* \\ v_n - v^* \\ u_n - u^* \end{pmatrix},$$

де $w^* = v^* = 0$. Вони мають вигляд [1]

$$E_1 = s^{(d+2)/2}, \quad E_3 = s^{(d-2)/2}, \quad (1.20)$$

$$E_{2,4} = \frac{1}{2} \left\{ R_{22} + R_{44} \pm [(R_{22} - R_{44})^2 + 4R_{24}R_{42}]^{1/2} \right\}.$$

Лише одне із власних значень E_l менше за одиницю, а решта більші за неї. Для деякого фіксованого значення параметра $s = s^*$, де $s^* = 3.3783$, знаходимо (для такого значення $h_2^* = 0$)

$$E_1 = 20.977, \quad E_3 = 1.838,$$

$$E_2 = 7.374, \quad E_4 = 0.397.$$

Коефіцієнти c_{h1} та c_{h2} визначаються згідно співвідношень [2]

$$\begin{aligned} c_{h1} &= s_0^{d/2}\mathcal{M}_{20}/\mathcal{M}_2, \quad \mathcal{M}_{20} = 1 - 3g - 6gT_{13}^{(0)}\left(\varphi_0^{1/2}\beta\Phi(0)\right)^{-1}/\mathcal{M}_2 \\ c_{h2} &= s_0^{-d/2}(-\mathcal{M}_4)/\mathcal{M}_2^4. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для c_{kl} справедливі вирази

$$\begin{aligned} c_{k1} &= c_{k1}^{(0)}\beta\Phi(0), \\ c_{k1}^{(0)} &= V_2 \left[1 - f_0 - T_{24}^{(0)}u_0\varphi_0^{-1/2}(\beta\Phi(0))^{-2} - T_{24}^{(0)}\varphi_0^{1/2} \right], \\ c_{k2} &= V_2 \left[u_0 - \varphi_0(\beta\Phi(0))^2 - T_{42}^{(0)}\varphi_0^{1/2}\beta\Phi(0)(r_0 + f_0\beta\Phi(0)) \right], \\ V_2 &= [1 + (E_2 - R_{22})^2(R_{24}R_{42})^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Матричні елементи R_{ij} розраховані в [1]. Постійні величини $T_{km}^{(0)}$, які є комбінаціями $R_{km}^{(0)} = R_{km}(u^*)^{-(k-m)/4}$ та E_m , при $s = s^*$ приймають значення [2]

$$T_{13}^{(0)} = -0.655, \quad T_{24}^{(0)} = -0.535, \quad T_{42}^{(0)} = 0.177.$$

Звернемо увагу на поведінку величин $h_2^{(n)}$ та $h_3^{(n)}$ поблизу критичної точки. Кожна з них при $n < n_p$ приймає малі значення. В цьому легко переконатися, використовуючи явні розв'язки рекурентних співвідношень (1.18). Маємо

$$\begin{aligned} h_2^{(n)} &= h_{22} \left[c_{k1}^{(0)}\tau E_2^n - \frac{1}{2}\varphi_0^{-1/2}T_{42}^{(0)}(c_{k1}^{(0)}\tau E_2^n)^2 \right], \\ h_3^{(n)} &= h_{32}\mathcal{M}_1(h')E_3^n(1 - h_{34}c_{k1}^{(0)}\tau E_2^n), \end{aligned} \quad (1.23)$$

де

$$h_{22} = (6/\varphi_0)^{1/2}, \quad h_{32} = -h_{30}c_{h2}(u^*)^{-3/4}, \quad h_{34} = \frac{3}{4}T_{42}^{(0)}\varphi_0^{-1/2}.$$

Для всіх значень $n < n_p$, де n_p визначається із умови

$$c_{k1}^{(0)}\tau E_2^{n_p+1} = f_0, \quad (1.24)$$

знаходимо, що $h_2^{(n)} \ll 1$. Аналогічна нерівність має місце для $h_3^{(n)}$, оскільки $\mathcal{M}_1(h') \sim h' \ll 1$. Тому для всіх $n < n_p$ величини Q_n із (1.11)

можна зобразити у вигляді розкладів за степенями $h_2^{(n)}$ та $h_3^{(n)}$ і, використовуючи (1.23), розрахувати їх явні вирази. Для значень $n > n_p$ величини типу I_{n_p+1} із (1.15) розраховуються із використанням гаусової міри. Це пов'язане з тим, що коефіцієнти $a_3^{(n)}$ та $a_4^{(n)}$ починають швидко зменшуватися (в порівнянні із $d_n(k)$) із збільшенням номера n .

2. Визначення областей сильних та слабких значень поля

Розрахунок критичної поведінки спінової моделі в зовнішньому полі в значній мірі залежить від траєкторії руху системи до критичної точки. Ми розглядаємо випадок, коли величини τ та h прямують до нуля одночасно. При цьому швидкість їхнього руху до нуля може бути різною. В роботах [2,3,6] була вивчена критична поведінка моделі тривимірного однокомпонентного магнетика в деяких граничних випадках. Зокрема, в [6] детально досліджена критична поведінка такої моделі для випадку $h = 0$. Отримані явні аналітичні вирази для ряду термодинамічних функцій при температурах вищих та нижчих за T_c . Інший граничний випадок, який відповідає $T = T_c$ та $h \neq 0$, досліджений в [2]. Знайдена поведінка середнього спінового моменту та сприйнятливості системи поблизу критичної точки як функцій поля. В роботі [3] було встановлено існування граничного поля \tilde{h}_c , при якому роль температурної змінної $\tilde{\tau}$ та значення поля \tilde{h} є рівнозначними при знаходженні критичних характеристик системи. При цьому величина граничного поля \tilde{h}_c пов'язана з відносною температурою $\tilde{\tau}$ співвідношенням

$$\tilde{h}_c = \tilde{\tau}^{p_0}, \quad (2.1)$$

де показник p_0 є універсальною величиною:

$$p_0 = \frac{d+2}{2}\nu. \quad (2.2)$$

Тут ν - критичний показник кореляційної довжини. Для скорочення запису введене позначення

$$\tilde{\tau} = \tau c_{k_1}^{(0)} / f_0, \quad (2.3)$$

а також

$$\tilde{h} = h' / f_0, \quad h' = \beta h. \quad (2.4)$$

Постійні величини $c_{k_1}^{(0)}$ та f_0 означені в (1.22), (1.19) та (1.10). Значення показника p_0 із (2.1) було отримане в [3] із умови рівності величин ділянок критичного режиму за температурою та полем. При цьому

$$n_p = m_\tau = n_h. \quad (2.5)$$

Величина m_τ характеризує температурну точку виходу системи із критичного режиму [6]. Для температур, вищих за T_c , одержуємо

$$m_\tau = -\frac{\ln \tilde{\tau}}{\ln E_2} - 1. \quad (2.6)$$

В області $T < T_c$ величина m_τ для зручності позначається через μ_τ . Тоді

$$\mu_\tau = -\frac{\ln \tilde{\tau}_1}{\ln E_2} - 1, \quad (2.7)$$

де введене позначення

$$\tilde{\tau}_1 = -\tilde{\tau}. \quad (2.8)$$

Точка виходу системи із критичного режиму n_h за польовою змінною має вигляд [2]

$$n_h = -\frac{\ln \tilde{h}}{\ln E_1} - 1. \quad (2.9)$$

На рис. 1 приведена діаграма навколокритичних областей, які визначаються різними шляхами прямування системи до критичної точки ($\tilde{\tau} = 0, \tilde{h} = 0$). Крива 1 відповідає граничному полю (2.1).

В загальному випадку розміри ділянок критичного режиму за полем і температурою є різні за величиною. При цьому рівність (2.5) не виконується і можливі дві ситуації. Для першої з них маємо

$$n_h > m_\tau. \quad (2.10)$$

У випадку виконання (2.10) величина ділянки критичного режиму за полем перевищує величину критичного режиму за температурою. Це відповідає наступному співвідношенню між величинами \tilde{h} та $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{h} = \tilde{\tau}^{p_0(1+\Delta)}, \quad (2.11)$$

причому $\Delta > 0$. Показник Δ визначає шлях прямування системи до критичної точки.

В границі $\Delta \rightarrow \infty$ приходимо до випадку $h = 0$, який описаний в [6]. Приймаючи до уваги (2.6) та (2.9), із (2.11) знаходимо

$$n_h = m_\tau(1 + \Delta) + \Delta. \quad (2.12)$$

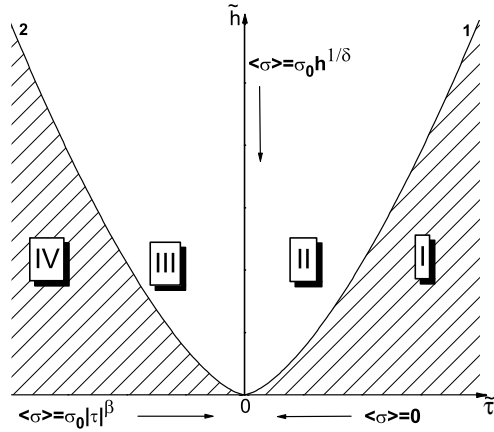


Рис. 1. Схематичне зображення областей можливого місцезнаходження траекторій системи при прямуванні її до критичної точки. Криві 1 та 2 відповідають граничному значенню поля при $T > T_c$ та $T < T_c$ відповідно. Області I та IV відповідають слабким полям при $T > T_c$ та $T < T_c$, а області II і III характеризуються сильними значеннями полів.

Друга ситуація відповідає співвідношенню величин n_h та m_τ , при якому величина ділянки критичного режиму за температурою перевищує аналогічну ділянку за полем, тобто

$$m_\tau > n_h. \quad (2.13)$$

Це описується співвідношенням (2.11), у якому

$$-1 < \Delta < 0. \quad (2.14)$$

Якщо розглянути границю $\Delta \rightarrow -1$, то отримуємо випадок постійного зовнішнього поля для будь-яких значень $\tilde{\tau}$:

$$h = \text{const}. \quad (2.15)$$

Умови (2.10) та (2.13) передбачають різний спосіб розрахунку вільної енергії системи. Розглянемо спочатку випадок $n_h > m_\tau$ (або $n_h > \mu_\tau$ при $T < T_c$), що відповідає області слабких полів.

3. Вільна енергія системи поблизу критичної точки при слабких полях у випадку $T > T_c$

Обчислимо вільну енергію системи спінів, коли зовнішнє поле зменшується по мірі наближення температури до T_c за законом (2.11). Використаємо вираз (1.7), у якому покладемо

$$n_p = m_\tau = -\frac{\ln \tilde{\tau}}{\ln E_2} - 1. \quad (3.1)$$

Відповідно до результатів роботи [3] представимо вільну енергію системи поблизу критичної точки у вигляді декількох доданків:

$$F = F_0 + F_{\text{КР}} + F_{\text{ПО}} + F_I, \quad (3.2)$$

де

$$F_0 = -kTN \left(\ln 2 + \ln chh' + \frac{1}{2}\beta\Phi(0)\bar{\Phi} \right). \quad (3.3)$$

Для доданку $F_{\text{КР}}$ маємо

$$F_{\text{КР}} = -kT \ln Q_0 + F'_{\text{КР}}. \quad (3.4)$$

На основі (1.8) знаходимо наближений вираз для $\ln Q_0$ в області малих значень τ та h :

$$\ln Q_0 = N_0 \left(e''_{c0} + e''_{c1}\tilde{\tau} + e''_{c2T}\tilde{\tau}^2 + e''_{c2}\tilde{h}^2 \right). \quad (3.5)$$

Для коефіцієнтів e''_{c1} , e''_{c2T} справедливі формули

$$\begin{aligned} e''_{c0} &= \frac{1}{4} \ln(12s_0^d) + \ln \gamma_1 - \gamma h_{2c}^{(0)} - \frac{1}{2} \left[\ln(2\pi) + \frac{1}{2}s_0^{-d} \right], \\ e''_{c1} &= -\gamma h_{21}^{(0)} f_0 / c_{k1}^{(0)}, \quad e''_{c2T} = -\gamma f_0^2 h_{22}^{(0)} / (c_{k1}^{(0)})^2, \\ e''_{c2} &= \frac{3}{8} \gamma f_0^2 \left(h_{3h}^{(0)} \right)^2 - \gamma f_0^2 h_{2h}^{(0)} + f_0^2 \left(1 + \frac{1}{2}s_0^{-d} - \frac{1}{2}s_0^d \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

При цьому ми скористалися з представлення аргументів $h_2^{(0)}$ та $h_3^{(0)}$ у вигляді рядів за степенями величин τ та h' :

$$\begin{aligned} h_2^{(0)} &= h_{2c}^{(0)} + h_{21}^{(0)}\tau + h_{22}^{(0)}\tau^2 + h_{2h}^{(0)}(h')^2, \\ h_3^{(0)} &= h_{3h}^{(0)}h', \end{aligned} \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} h_{2c}^{(0)} &= \sqrt{3}s_0^{d/2} [1 - s_0^{-d} + \beta_c \Phi_0 - \beta_c \Phi(0)(1 - \bar{q})], \\ h_{21}^{(0)} &= \sqrt{3}s_0^{d/2} [\beta_c \Phi(0)(1 - \bar{q}) - \beta_c \Phi_0], \quad h_{22}^{(0)} = -h_{21}^{(0)}, \\ h_{2h}^{(0)} &= \sqrt{3}s_0^{d/2} (2 + s_0^{-d}), \\ h_{3h}^{(0)} &= (2s_0^d)^{1/4} h_{30}. \end{aligned}$$

Таким чином, перший доданок правої частини рівності (3.4) включає лише цілі степені величин $\tilde{\tau}$ та \tilde{h} .

Величина $F'_{\text{КР}}$ із (3.4) виражається через парціальні статистичні суми Q_n із (1.7):

$$F'_{\text{КР}} = -kT \sum_{n=1}^{n_p} \ln Q_n. \quad (3.8)$$

Для величин Q_n має місце співвідношення (1.11), де $Q(P^{(n-1)})$ та $Q(d_n)$ задовільняють загальним співвідношенням типу (1.12). Однак, для всіх $n < m_\tau$ величини $h_2^{(n)}$ та $h_3^{(n)}$ є малими і тому при обчисленні Q_n можна скористатися наближеними виразами для $Q(P^{(n-1)})$, $Q(d_n)$ (див. (1.14)). Отримуємо наступний вираз [2]:

$$\begin{aligned} \ln Q_n &= N_n \left[H_{20} + H_{21} h_2^{(n-1)} - \gamma h_2^{(n)} - H_{22} (h_3^{(n-1)})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \gamma (h_3^{(n)})^2 \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

де

$$\begin{aligned} H_{20} &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi\gamma) + \ln \left(1 - \frac{3}{4} G_0 s^{-d} \right) + \ln(s\gamma_1), \\ H_{21} &= -\frac{1}{2} t_2 - \frac{3}{4} G_0 G_2 s^{-d} (G'_{00})^{-1} - \frac{1}{4} (G_2 - 2t_2), \\ H_{22} &= s^d (32\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги рівності (1.23) та вираз (3.9), для $F'_{\text{КР}}$ знаходимо

$$F'_{\text{КР}} = F_{\text{КР}}^{(0)} + F_{\text{КР},2} + F_{\text{КР},3}. \quad (3.10)$$

Явні вирази для кожного із доданків правої частини рівності (3.10) приведені в [3]. Так, $F_{\text{КР}}^{(0)}$ задається співвідношенням

$$F_{\text{КР}}^{(0)} = -kTN_0 (F_{10} s^{-3} - F_{10} s^{-3(n_p+1)}),$$

де

$$F_{10} = H_{20} (1 - s^{-3})^{-1}. \quad (3.11)$$

Для $F_{\text{КР},2}$ одержуємо

$$\begin{aligned} F_{\text{КР},2} &= -kTN_0 \{ F_{11} s^{-3} E_2 \tilde{\tau} + F_{12} s^{-3} E_2^2 \tilde{\tau}^2 - \\ &\quad - [F_{11} \tilde{\tau} E_2^{n_p+1} + F_{12} (\tilde{\tau} E_2^{n_p+1})^2] s^{-3(n_p+1)} \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тут введені позначення

$$F_{11} = h_{22} f_0 \left(\frac{H_{21}}{E_2} - \gamma \right) (1 - s^{-3} E_2)^{-1},$$

$$F_{12} = h_{22} \frac{T_{42}^{(0)}}{2} \varphi_0^{-1/2} f_0^2 \left(\gamma - \frac{H_{21}}{E_2^2} \right) (1 - s^{-3} E_2^2)^{-1}.$$

Для величини $F_{\text{КР},3}$ знаходимо

$$\begin{aligned} F_{\text{КР},3} &= -kTN_0 \{ F_{13} s^{-3} E_3^2 \tilde{h}^2 + F_{14} s^{-3} E_3^2 E_2 \tilde{\tau} \tilde{h}^2 - \\ &\quad - [F_{13} \tilde{h}^2 E_3^{2(n_p+1)} + F_{14} \tilde{h}^2 E_3^{2(n_p+1)} \tilde{\tau} E_2^{n_p+1}] s^{-3(n_p+1)} \}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де

$$F_{13} = h_{32}^2 f_0^2 \left(\frac{3}{8} \gamma - \frac{H_{22}}{E_3^2} \right) (1 - s^{-3} E_3^2)^{-1},$$

$$F_{14} = 2h_{32}^2 f_0^3 \left(\frac{H_{22}}{E_2 E_3^2} - \frac{3}{8} \gamma \right) h_{34} (1 - s^{-3} E_2 E_3^2)^{-1}. \quad (3.14)$$

Вищевказані доданки із врахуванням рівності (3.1) матимуть вигляд

$$F_{\text{КР}}^{(0)} = -kTN_0 (F_{10} s^{-3} - F_{10} \tilde{\tau}^{3\nu}),$$

$$F_{\text{КР},2} = -kTN_0 (F_{11} s^{-3} E_2 \tilde{\tau} + F_{12} s^{-3} E_2^2 \tilde{\tau}^2 - F_{22} \tilde{\tau}^{3\nu}),$$

$$F_{\text{КР},3} = -kTN_0 F_{13} s^{-3} E_3^2 \tilde{h}^2. \quad (3.15)$$

Тут

$$F_{22} = F_{11} + F_{12}. \quad (3.16)$$

При записі перших двох формул із (3.15) ми скористалися із співвідношень

$$\begin{aligned} s^{-3(m_\tau+1)} &= \tilde{\tau}^{3\nu}, \\ \tilde{\tau} E_2^{m_\tau+1} &= 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

які легко отримати із (3.1) та формули для критичного показника кореляційної довжини [6]

$$\nu = \frac{\ln s}{\ln E_2}.$$

Обчислюючи $F_{\text{КР},3}$, зауважимо, що має місце ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} \tilde{h}E_3^{m_\tau+1} &= \tilde{h}E_1^{m_\tau+1} \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{m_\tau+1} = E_1^{m_\tau-n_h} \left(\frac{s^{\frac{d-2}{2}}}{s^{\frac{d+2}{2}}}\right)^{m_\tau+1} = \\ &= \tilde{\tau}p_0\Delta s^{-2(m_\tau+1)} = \tilde{\tau}p_0\Delta+2\nu. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Внаслідок цього третій та четвертий доданки із (3.13) є зникаюче малими і в подальших розрахунках їх не братимемо до уваги. Нехтуватимемо завдяки малості вищого порядку і другим доданком в (3.13).

Таким чином, для $F'_{\text{КР}}$ відповідно до (3.10) та (3.15) знаходимо вираз ($\tau > 0$)

$$F'_{\text{КР}} = -kTN_0 \left(f_{\text{CR}}^{(0)} + f_{\text{CR}}^{(1)}\tilde{\tau} + f_{\text{CR}}^{(2)}\tilde{\tau}^2 + f_{\text{CR}}^{(3)}\tilde{h}^2 + e_{4p}\tilde{\tau}^{3\nu} \right).$$

Для коефіцієнтів маємо

$$\begin{aligned} f_{\text{CR}}^{(0)} &= F_{10}s^{-3}, & f_{\text{CR}}^{(1)} &= F_{11}s^{-3}E_2, \\ f_{\text{CR}}^{(2)} &= F_{12}s^{-3}E_2^2, & f_{\text{CR}}^{(3)} &= F_{13}s^{-3}E_3^2, \\ e_{4p} &= -F_{10} - F_{22}. \end{aligned}$$

Враховуючи (3.4), (3.5) та вираз для $F'_{\text{КР}}$, отримуємо

$$F_{\text{КР}} = -kTNs_0^{-3} \left(e_{0p} + e_{1p}\tilde{\tau} + e_{2p}\tilde{\tau}^2 + e_{3p}\tilde{h}^2 + e_{4p}\tilde{\tau}^{3\nu} \right), \quad (3.19)$$

де

$$\begin{aligned} e_{0p} &= f_{\text{CR}}^{(0)} + e''_{c0}, & e_{1p} &= f_{\text{CR}}^{(1)} + e''_{c1}, \\ e_{2p} &= f_{\text{CR}}^{(2)} + e''_{c2T}, & e_{3p} &= f_{\text{CR}}^{(3)} + e''_{c2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для розрахунку подальших вкладів до вільної енергії (3.2) скористаємося із виразу для статистичної суми (1.7). Як відомо [6, 7], при обчисленні виразу для вільної енергії при $T > T_c$ у випадку $h = 0$ слід виділяти так звану перехідну область (ПО). Випадок слабких

полів ($\tilde{h} < \tilde{h}_c$) при $T > T_c$ також передбачає виділення ПО. Для цього статистичну суму (1.7) зобразимо у вигляді

$$Z = Z_0 Z_{\text{КР}} Z_{m_\tau+1} Z_p I_{m_\tau+2}, \quad (3.21)$$

де Z_0 означено в (1.2), а

$$Z_{\text{КР}} = Q_0 \prod_{n=1}^{m_\tau} Q_n. \quad (3.22)$$

Тут Q_n - парціальна статистична сума n -ої блочної структури (1.11). Відповідний до (3.22) вклад до вільної енергії поблизу критичної точки задається виразом (3.19). Також маємо

$$\begin{aligned} Z_{m_\tau+1} &= Q_{m_\tau+1} = \left[Q(P^{(m_\tau)}) Q(d_{m_\tau+1}) \right]^{N_{m_\tau+1}}, \\ Z_p &= \sqrt{2}^{N_{m_\tau+2}-1} \left[Q(P^{(m_\tau+1)}) \right]^{N_{m_\tau+2}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

а $I_{m_\tau+2}$ задовільняє співвідношенню

$$\begin{aligned} I_{m_\tau+2} &= \int (d\rho)^{N_{m_\tau+2}} \exp \left(N^{1/2} a_{1m} \tilde{h} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}_{m_\tau+2}} \bar{d}(k) \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} a_3^{(m_\tau+2)} N_{m_\tau+2}^{-1/2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{m_\tau+2}}} \rho_{\mathbf{k}_1} \dots \rho_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} a_4^{(m_\tau+2)} N_{m_\tau+2}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{m_\tau+2}}} \rho_{\mathbf{k}_1} \dots \rho_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для скорочення запису тут введені позначення

$$\begin{aligned} a_{1m} &= f_0 \mathcal{M}_{20} / \mathcal{M}_2, \\ \bar{d}(k) &= \bar{d}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2, \\ \bar{d}(0) &= d_{m_\tau+2}(0) = s^{-2(m_\tau+2)} r_{m_\tau+2}, \\ r_{m_\tau+2} &= f_0 \beta \Phi(0) (E_2 - 1), \\ a_3^{(m_\tau+2)} &= s^{-3(m_\tau+2)} v_{m_\tau+2}, \\ a_4^{(m_\tau+2)} &= s^{-4(m_\tau+2)} u_{m_\tau+2}, \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} v_{m_\tau+2} &= -c_{h_2} \mathcal{M}(h') E_3^{m_\tau+2}, \\ u_{m_\tau+2} &= u^* \left(1 + f_0 E_2 T_{42}^{(0)} \varphi_0^{-1/2} \right). \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги ці рівності, легко бачити, що коефіцієнт $a_3^{(m_\tau+2)}$ є зникаюче малим в порівнянні з $\bar{d}(0)$ та $a_4^{(m_\tau+2)}$. В подальших обчисленнях будемо покладати його рівним нулеві. Важливою обставиною є додатність коефіцієнта $\bar{d}(0)$, оскільки $E_2 > 1$.

Розрахуємо вклади до вільної енергії системи від виразів (3.23) та (3.24). Підкреслимо, що величини $h_2^{(m_\tau)}$ та $h_3^{(m_\tau)}$ приймають малі значення, а $h_2^{(m_\tau+1)}$ є більше за одиницю. Так, при $s_0 = 2$ та $b/c = 0.3$ маємо

$$\begin{aligned} h_2^{(m_\tau)} &= 0.216, \\ h_2^{(m_\tau+1)} &= 1.511. \end{aligned} \quad (3.25)$$

У зв'язку із малістю $h_2^{(m_\tau)}$, $h_3^{(m_\tau)}$ будемо використовувати наближену формулу

$$\begin{aligned} \ln Q(P^{(m_\tau)}) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi\gamma) + \ln \left(1 - \frac{3}{4} G_0 s^{-d} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \ln(u_{m_\tau}/24) - m_\tau \ln s + H_{211} h_2^{(m_\tau)}. \end{aligned}$$

Однак величина $Q(d_{m_\tau+1})$ залежить від аргумента $h_2^{(m_\tau+1)}$, який задається співвідношенням

$$h_2^{(m_\tau+1)} = h_{22} f_0 \left(1 - \frac{1}{2} T_{42}^{(0)} f_0 \varphi_0^{-1/2} \right)$$

і не є малим (див.(3.25)). Це не дозволяє використати для $Q(d_{m_\tau+1})$ наближену формулу (розклад за степенями величин $h_2^{(m_\tau+1)}$, $h_3^{(m_\tau+1)}$). Тому слід скористатися із загального виразу:

$$\ln Q(d_{m_\tau+1}) = \frac{1}{4} \ln \frac{24}{a_4^{(m_\tau+1)}} + \ln I(h_2^{(m_\tau+1)}),$$

де

$$\begin{aligned} a_4^{(m_\tau+1)} &= u_{m_\tau+1} s^{-4(m_\tau+1)}, \\ I(h_2^{(m_\tau+1)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-h_2^{(m_\tau+1)} x^2 - h_3^{(m_\tau+1)} x^3 - x^4 \right]. \end{aligned}$$

Тут $h_3^{(m_\tau+1)} \ll 1$ і відповідним доданком в показнику експоненти підінтегрального виразу можна знехтувати.

Обчислимо вираз для

$$F_{m_\tau+1} = -kT \ln Z_{m_\tau+1}. \quad (3.26)$$

Маємо

$$\begin{aligned} F_{m_\tau+1} &= -kT N_{m_\tau+1} \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi\gamma) + \ln \left(1 - \frac{3}{4} G_0 s^{-d} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{4} \ln u_{m_\tau} - m_\tau \ln s + H_{211} h_2^{(m_\tau)} - \frac{1}{4} \ln u_{m_\tau+1} + \\ &\left. + (m_\tau + 1) \ln s + \ln I(h_2^{(m_\tau+1)}) \right]. \end{aligned}$$

Для величин u_{m_τ} та $u_{m_\tau+1}$ відповідно до (1.18), (3.17) справедливі вирази

$$\begin{aligned} u_{m_\tau} &= u^* \left(1 + f_0 \varphi_0^{-1/2} T_{42}^{(0)} E_2^{-1} \right), \\ u_{m_\tau+1} &= u^* \left(1 + f_0 \varphi_0^{-1/2} T_{42}^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$H'_{20} = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\gamma) + \ln \left(1 - \frac{3}{4} G_0 s^{-d} \right) + \ln s.$$

Зауважимо, що

$$H'_{20} = H_{20} - \ln \gamma_1,$$

де H_{20} визначене в (3.9). Тоді отримуємо

$$F_{m_\tau+1} = -kT N_0 f_{mp} \tilde{\tau}^{3\nu}. \quad (3.27)$$

Тут

$$f_{mp} = H'_{20} + \frac{1}{4} \ln \frac{u_{m_\tau}}{u_{m_\tau+1}} + H_{211} h_2^{(m_\tau)} + \ln I(h_2^{(m_\tau+1)}). \quad (3.28)$$

Обчислимо вклад до вільної енергії $F_p = -kT \ln Z_p$. Маємо

$$F_p = -kT N_{m_\tau+2} \left[\frac{1}{2} \ln 2 + \ln Q(P^{(m_\tau+1)}) \right]. \quad (3.29)$$

Із результатів роботи [2] маємо

$$Q(P^{(m_\tau+1)}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{P_2^{(m_\tau+1)}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iG_h^{(m_\tau+1)} x - x^2 - G_{m_\tau+1} x^4} dx,$$

де

$$P_2^{(m_\tau+1)} = \left(\frac{24}{a_4^{(m_\tau+1)}} \right)^{1/2} \left[M_2^{(m_\tau+1)} - (M_1^{(m_\tau+1)})^2 \right],$$

$$M_l^{(m_\tau+1)} = K_l(h_2^{(m_\tau+1)}, h_3^{(m_\tau+1)}) / K_0(h_2^{(m_\tau+1)}, h_3^{(m_\tau+1)}),$$

$$K_l(h_2^{(m_\tau+1)}, h_3^{(m_\tau+1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \exp(-h_2^{(m_\tau+1)} x^2 - h_3^{(m_\tau+1)} x^3 - x^4) dx.$$

Оскільки $h_3^{(m_\tau+1)} \ll h_2^{(m_\tau+1)}$, тому надалі при розрахунку будемо покладати $h_3^{(m_\tau+1)} = 0$, що приведе до рівностей

$$M_{2l+1}^{(m_\tau+1)} = 0, \quad K_{2l+1}^{(m_\tau+1)} = 0.$$

Величина $G_h^{(m_\tau+1)}$ пропорційна до $M_1^{(m_\tau+1)}$ (див. [2]), а тому також обертається в нуль. Для $G_{m_\tau+1}$ справедливий наступний вираз [2, 3]:

$$G_{m_\tau+1} = \frac{1}{6} s^{-d} \left[3 - M_4^{(m_\tau+1)} (M_2^{(m_\tau+1)})^{-2} \right].$$

Приймаючи до уваги записані вище рівності, знаходимо

$$Q(P^{(m_\tau+1)}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2} \left(\frac{a_4^{(m_\tau+1)}}{24} \right)^{1/4} (M_2^{(m_\tau+1)})^{-1/2} I_G,$$

$$I_G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - G_{m_\tau+1} x^4} dx.$$

Вклад до вільної енергії F_p із (3.29) набуває вигляду

$$F_p = -kTN_0 s^{-3(m_\tau+2)} [f_{p2} - (m_\tau + 1) \ln s], \quad (3.30)$$

де

$$f_{p2} = -\ln \pi - \frac{1}{4} \ln 24 + \frac{1}{4} \ln u_{m_\tau+1} - \frac{1}{2} \ln \mathcal{M}_2^{(m_\tau+1)} + \ln I_G. \quad (3.31)$$

Обчислені вище внески до вільної енергії $F_{m_\tau+1}$ (3.27) та F_p (3.30) формують третій доданок із (3.2) $F_{\text{ПО}} = F_{m_\tau+1} + F_p$, пов'язаний із перехідною областю. Розрахуємо тепер вклад до вільної енергії від множника $I_{m_\tau+2}$ із (3.21). Маємо

$$F_I = -kT \ln I_{m_\tau+2}.$$

Як видно із (3.25) величина $h_2^{(m_\tau+1)}$ є суттєво більшою за $h_2^{(m_\tau)}$. Це ж стосується і наступних значень $h_2^{(m_\tau+2)}$ і т.д. Тому при розрахунку (3.24) за базисний вибираємо гаусовий розподіл. В нульовому наближенні одержуємо

$$I_{m_\tau+2} = \int (d\rho)^{N_{m_\tau+2}} e^{a_{1m} N^{1/2} \tilde{h} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_{m_\tau+2}} \bar{d}(k) \rho_k \rho_{-k}}.$$

Інтегрування за змінними ρ_k із $k \neq 0$ дає результат

$$I_{m_\tau+2} = I_{m_\tau+2}^{(0)} \prod_{k \neq 0}^{B_{m_\tau+2}} (\pi / \bar{d}(k))^{1/2}. \quad (3.32)$$

Тут

$$I_{m_\tau+2}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_0 e^{a_{m1} N^{1/2} \tilde{h} \rho_0 - \frac{1}{2} \bar{d}(0) \rho_0^2}.$$

Представивши $I_{m_\tau+2}^{(0)}$ у вигляді

$$I_{m_\tau+2}^{(0)} = \left(\frac{2}{\bar{d}(0)} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{a_p^2 x - x^2},$$

де

$$a_p^2 = N^{1/2} \tilde{h} s^{m_\tau+1} a_{mp},$$

$$a_{mp} = \frac{\mathcal{M}_{20}}{\mathcal{M}_2} f_0 s (2/r_{m_\tau+2})^{1/2},$$

знаходимо

$$I_{m_\tau+2}^{(0)} = \left(\frac{2\pi}{\bar{d}(0)} \right)^{1/2} \exp(a_p^4/4) = \left(\frac{2\pi}{\bar{d}(0)} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4} a_{mp}^2 N \tilde{h}^2 \tilde{\tau}^{-2\nu} \right).$$

Отже, величина $I_{m_\tau+2}$ із (3.32) задається виразом

$$I_{m_\tau+2} = \sqrt{2} \exp\left(l_{11T} N \tilde{h}^2 \tilde{\tau}^{-2\nu} \right) \prod_{k=0}^{B_{m_\tau+2}} (\pi / \bar{d}(k))^{1/2}. \quad (3.33)$$

Тут

$$l_{11T} = \frac{1}{4} a_{mp}^2. \quad (3.34)$$

Вклад до вільної енергії від (3.33) записується у вигляді

$$F_I = -\frac{1}{2} kT N_{m_\tau+2} \ln \pi + \frac{1}{2} kT \sum_{k=0}^{B_{m_\tau+2}} \ln \bar{d}(k) -$$

$$-kTNl_{11T}\tilde{h}^2\tilde{\tau}^{-2\nu}. \quad (3.35)$$

Спосіб розрахунку другого доданку із (3.35) подібний до описаного в [2, 3]. В результаті отримуємо

$$F_I = -kTN_0s^{-3}\tilde{\tau}^{3\nu} \left(\frac{1}{2} \ln \pi + (m_\tau + 2) \ln s - \frac{1}{2} I_0'' \right) - kTNl_{11T}\tilde{h}^2\tilde{\tau}^{-2\nu}.$$

Для I_0'' маємо

$$I_0'' = \ln(D'_0 + D'_1) - \frac{2}{3} + 2\frac{D'_0}{D'_1} - 2 \left(\frac{D'_0}{D'_1} \right)^{3/2} \arctg \left(\frac{D'_1}{D'_0} \right)^{1/2},$$

де

$$D'_0 = \beta\Phi(0)f_0[E_2 - 1], \quad D'_1 = 2\beta\Phi(0)b^2B_0^2.$$

Сумарна вільна енергія відповідно до (3.21) набуває вигляду:

$$F = F_0 + F_{\text{KP}} + F_{m_\tau+1} + F_p + F_I. \quad (3.36)$$

Приймаючи до уваги обчислені вище вирази, знаходимо

$$F = -kTN \left[\ln chh' + l_0 + l_{10T}\tilde{\tau}^{3\nu} + l_{2T}\tilde{h}^2 + l_{3T}\tilde{\tau} + l_{4T}\tilde{\tau}^2 + l_{11T}\tilde{h}^2\tilde{\tau}^{-2\nu} \right]. \quad (3.37)$$

Відмітимо, що останній доданок в F_p (3.30) компенсується відповідним доданком із виразу для F_I . Коефіцієнт l_{11T} приведений в (3.34), а для інших коефіцієнтів маємо

$$\begin{aligned} l_0 &= \ln 2 + \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi} + s_0^{-3}e_{0p}, \\ l_{10T} &= s_0^{-3} \left[e_{4p} + f_{mp} + s^{-3} \left(f_{p2} + \frac{1}{2} \ln \pi + \ln s - \frac{1}{2} I_0'' \right) \right], \\ l_{2T} &= s_0^{-3}e_{3p}, \quad l_{3T} = s_0^{-3}e_{1p} - \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0/c_{k1}^{(0)}, \\ l_{4T} &= s_0^{-3}e_{2p} + \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0^2/(c_{k1}^{(0)})^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Вираз (3.37) описує вільну енергію ґраткової системи спінів в слабкому зовнішньому полі ($\tilde{h} < \tilde{h}_c$, де граничне поле \tilde{h}_c визначене в (2.1)). Він справедливий для всіх $T > T_c$ поблизу критичної точки.

Перетворимо останній доданок виразу (3.37). Враховуючи (2.11), його можна записати у вигляді

$$F_\eta = -kTNl_{11T}\tilde{\tau}^{d\nu+(d+2)\Delta\nu}, \quad (3.39)$$

або

$$F_\eta = -kTNl_{11T}\tilde{h}^{\eta\Delta}. \quad (3.40)$$

Тут

$$\eta\Delta = \frac{2d + 2(d+2)\Delta}{d + 2 + (d+2)\Delta}. \quad (3.41)$$

Слід зауважити, що вираз (3.40) відповідає системі з умовою (2.11). Тут закладається залежність величини поля від температури. Ця умова дозволяє вибрати область слабких полів, однак передбачає зменшення поля при наближенні до критичної точки.

Доданки вільної енергії (3.39) або (3.40) дозволяють визначити особливості поведінки системи поблизу критичної точки за наявності поля. Перший з них дає можливість знайти значення параметра Δ , при якому показник степеня величини $\tilde{\tau}$ перевищує число два. Показник степеня $\tilde{\tau}$ рівний числу два при Δ' , що задовільняє наступні рівності:

$$d\nu + (d+2)\Delta'\nu = 2, \quad \Delta' = \frac{2 - d\nu}{(d+2)\nu}. \quad (3.42)$$

Для всіх $\Delta > \Delta'$ друга похідна величини F_η за температурою прямує до нуля при $\tilde{\tau} \rightarrow 0$. Однак, в області значень

$$0 \leq \Delta < \Delta'$$

вона буде прямувати до безмежності при наближенні до критичної точки. Тому шлях прямування до критичної точки між траєкторіями

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= \tilde{\tau}^{p_0(1+\Delta')}, \\ \tilde{h}_c &= \tilde{\tau}^{p_0} \end{aligned}$$

визначає деяку перехідну область, де вплив доданків типу (3.39) буде суттєвим. Доданки вільної енергії типу (3.40) дозволяють визначити сприйнятливості системи в напрямку кривої (2.11). Зауважимо, що для $\eta\Delta$ мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \eta\Delta = \frac{2d}{d+2}, \quad \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \eta\Delta = 2. \quad (3.43)$$

Розрахуємо величину

$$\sigma_+ = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}.$$

Будемо використовувати в якості F вираз (3.37), де останній доданок має вигляд (3.40). Отримуємо

$$\sigma_+ = \text{th } h' + 2l_{2T}f_0^{-2}h' + \eta_{\Delta}l_{11T}f_0^{-1}\tilde{h}^{1/\delta_{\Delta}}, \quad (3.44)$$

де

$$\delta_{\Delta} = \frac{d+2+(d+2)\Delta}{d-2+(d+2)\Delta}. \quad (3.45)$$

У випадку $\Delta = 0$ маємо $\delta_0 = 5$, а при $\Delta \rightarrow \infty$ знаходимо $\delta_{\infty} = 1$.

Вираз (3.44) обертається в нуль при прямуванні до критичної точки. Швидкість прямування до нуля величини σ_+ залежить від величини Δ , тобто траєкторії руху. При $\Delta = 0$ (випадок $\tilde{h} = \tilde{h}_c$) маємо

$$\sigma_+ = \frac{2d}{d+2}l_{11T}f_0^{-1}\tilde{h}^{1/\delta_0}. \quad (3.46)$$

По мірі збільшення параметра Δ амплітуда σ_+ дещо зростає (див. (3.43), (3.44)), а величина δ_{Δ} прямує до одиниці. Границя $\Delta \rightarrow \infty$ відповідає відсутності магнітного поля, $h' = f_0 \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \tilde{\tau}^{p_0(1+\Delta)} = 0$, і величина σ_+ тоді стає рівною нулю. Залежність δ_{Δ} від параметра Δ зображена на рис. 2.

Знайдемо величину

$$\chi_+ = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2}.$$

Використовуючи (3.37), одержуємо

$$\chi_+ = \beta \left[\mathcal{M}_2(h') + 2l_{2T}f_0^{-2} + \chi_{01}\tilde{h}^{\eta_{\Delta}-2} \right], \quad (3.47)$$

де $\mathcal{M}_2(h')$ - кумулянт другого порядку ($h' = \beta h$),

$$\chi_{01} = \eta_{\Delta}(\eta_{\Delta} - 1)l_{11T}f_0^{-2}.$$

Для показника $\eta_{\Delta} - 2$ можемо записати

$$\eta_{\Delta} - 2 = -\frac{4}{(d+2)(1+\Delta)}. \quad (3.48)$$

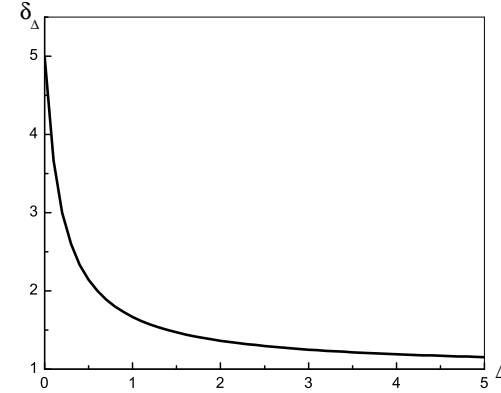


Рис. 2. Залежність величини δ_{Δ} (3.45) від параметра Δ при $d = 3$.

Приймаючи до уваги (2.11), знаходимо

$$\tilde{h}^{\eta_{\Delta}-2} = \tilde{\tau}^{-\frac{4}{(d+2)(1+\Delta)}\frac{d+2}{2}\nu(1+\Delta)} = \tilde{\tau}^{-2\nu}.$$

Отже, асимптотика виразу (3.47) за температурою не залежить від параметра Δ і для довільної траєкторії руху до критичної точки при слабких полях ($\tilde{h} \leq \tilde{h}_c$) сприйнятливість системи має вигляд

$$\chi_+ = \beta \left[\chi_0 + \chi_{01}\tilde{\tau}^{-\gamma} \right]. \quad (3.49)$$

Тут $\gamma = 2\nu$, а

$$\chi_0 = \mathcal{M}_2(h') + 2l_{2T}f_0^{-2}.$$

4. Критична поведінка системи при слабких полях для випадку $T < T_c$

Виконаємо розрахунок вільної енергії системи в низькотемпературній області для випадку слабких полів. Як і раніше вважатимемо, що накладене на систему поле зменшується по мірі наближення до критичної точки за законом

$$\tilde{h} = \tilde{\tau}_1^{p_0(1+\Delta)}, \quad (4.1)$$

де $\Delta \geq 0$. Для зручності обчислень введена величина

$$\tilde{\tau}_1 = -\tilde{\tau} = \frac{T_c - T}{T_c} \frac{c_{k1}^{(0)}}{f_0},$$

яка є додатною при $T < T_c$. Щоб не використовувати нових позначень для випадку температур $T < T_c$, будемо ставити хвилюнку над відповідними величинами. Якщо ці величини задовільняють однаковим виразам при $T > T_c$ та $T < T_c$, то зберігатимемо позначення, як і для $T > T_c$, без хвилюнки.

Вільну енергію при $T < T_c$ відповідно до (1.7) можемо представити як суму наступних складових:

$$\tilde{F} = F_0 + \tilde{F}_{\text{КР}} + \tilde{F}_p + \tilde{F}_I. \quad (4.2)$$

Величина F_0 визначена в (3.3),

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\text{КР}} &= -kT \ln Q_0 + \tilde{F}'_{\text{КР}}, \\ \tilde{F}'_{\text{КР}} &= -kT \sum_{n=1}^{\mu_\tau} \ln Q_n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Точка виходу системи із ділянки критичного режиму при $T < T_c$ означена в (2.7). Для \tilde{F}_p маємо

$$\tilde{F}_p = -kT N_0 s^{-3(\mu_\tau+1)} \left[\frac{1}{2} \ln 2 + \ln Q(P^{(\mu_\tau)}) \right], \quad (4.4)$$

а для \tilde{F}_I справедливий вираз

$$\tilde{F}_I = -kT \ln I_{\mu_\tau+1}. \quad (4.5)$$

Тут $I_{\mu_\tau+1}$ представляється у вигляді

$$\begin{aligned} I_{\mu_\tau+1} &= \int (d\eta)^{N_{\mu_\tau+1}} \exp \left\{ -\tilde{a}_1^{(\mu_\tau+1)} N_{\mu_\tau+1}^{1/2} \eta_0 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{B}_{\mu_\tau+1}} d_{\mu_\tau+1}(k) \eta_k \eta_{-k} - \frac{1}{3!} a_3^{(\mu_\tau+1)} N_{\mu_\tau+1}^{-1/2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{\mu_\tau+1}}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4!} a_4^{(\mu_\tau+1)} N_{\mu_\tau+1}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{\mu_\tau+1}}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Обчислимо окремо доданки із (4.2). Приймаючи до уваги схему розрахунку вільної енергії для випадку $T > T_c$, а також отримані в [3] результати, можна записати

$$\tilde{F}_{\text{КР}} = -kT N_0 \left(e_{0p} + e_{1p} \tilde{\tau} + e_{2p} \tilde{\tau}^2 + e_{3p} \tilde{h}^2 + \tilde{e}_{4p} \tilde{\tau}_1^{3\nu} \right). \quad (4.7)$$

Коефіцієнти e_{lp} цього виразу співпадають із відповідними коефіцієнтами (3.20), а для \tilde{e}_{4p} маємо

$$\tilde{e}_{4p} = -F_{10} - \tilde{F}_{22}, \quad \tilde{F}_{22} = -F_{11} + F_{12}, \quad (4.8)$$

де F_{10} , F_{11} , F_{12} такі ж, як і при $T > T_c$.

Розрахунок \tilde{F}_p передбачає обчислення величини $\ln Q(P^{(\mu_\tau)})$, яка відповідно до (1.14) задається співвідношенням

$$\ln Q(P^{(\mu_\tau)}) = f'_{p0} + \frac{1}{4} \ln a_4^{(\mu_\tau)} + H_{211} h_2^{(\mu_\tau)}. \quad (4.9)$$

Тут знехтувано малою величиною $h_3^{(\mu_\tau)}$, а для інших величин маємо вирази

$$f'_{p0} = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\gamma) - \frac{1}{4} \ln 24 + \ln \left(1 - \frac{3}{4} G_0 s^{-d} \right), \quad (4.10)$$

$$a_4^{(\mu_\tau)} = s^{-4\mu_\tau} u_{\mu_\tau}, \quad u_{\mu_\tau} = u^* \left(1 - f_0 \varphi_0^{-1/2} T_{42}^{(0)} E_2^{-1} \right),$$

$$h_2^{(\mu_\tau)} = -h_{22} f_0 E_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} T_{42}^{(0)} f_0 \varphi_0^{-1/2} E_2^{-1} \right).$$

Отже, відповідно до (4.4), отримуємо

$$\tilde{F}_p = -kT N_0 \tilde{\tau}_1^{3\nu} \left[\tilde{f}_{p1} - \mu_\tau \ln s \right], \quad (4.11)$$

де

$$\tilde{f}_{p1} = f_{p0} + H_{211} h_2^{(\mu_\tau)} + \frac{1}{4} \ln u_{\mu_\tau}, \quad (4.12)$$

$$f_{p0} = f'_{p0} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Знайдемо вираз для \tilde{F}_I із (4.5). Для цього розглянемо більш детально величину $I_{\mu_\tau+1}$. Зауважимо, що

$$\tilde{a}_1^{(\mu_\tau+1)} = s^{-(\mu_\tau+1)} w_{\mu_\tau+1},$$

$$\begin{aligned}
d_{\mu_\tau+1}(k) &= d_{\mu_\tau+1}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2, \\
d_{\mu_\tau+1}(0) &= s^{-2(\mu_\tau+1)}r_{\mu_\tau+1}, \\
a_3^{(\mu_\tau+1)} &= s^{-3(\mu_\tau+1)}v_{\mu_\tau+1}, \\
a_4^{(\mu_\tau+1)} &= s^{-4(\mu_\tau+1)}u_{\mu_\tau+1}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Для області температур $T < T_c$ маємо

$$\begin{aligned}
w_{\mu_\tau+1} &= -c_{h1}f_0\tilde{\tau}_1^{p_0\Delta}, \quad r_{\mu_\tau+1} = -2f_0\beta\Phi(0), \\
v_{\mu_\tau+1} &= -c_{h2}f_0\left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{\mu_\tau+1}\tilde{\tau}_1^{p_0\Delta}, \\
u_{\mu_\tau+1} &= u^*\left(1 - f_0\varphi_0^{-1/2}T_{42}^{(0)}\right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Оскільки $E_3 < E_1$, а величина μ_τ приймає великі значення, то маємо

$$v_{\mu_\tau+1} = 0, \quad a_3^{(\mu_\tau+1)} = 0.$$

Відмітимо також, що

$$-a_1^{(\mu_\tau+1)}N_{\mu_\tau+1}^{1/2} = N^{1/2}a_{1m}\tilde{h}, \tag{4.15}$$

де величина a_{1m} означена вище при розгляді високотемпературної області. Тому $I_{\mu_\tau+1}$ задовільняє наступному виразу:

$$\begin{aligned}
I_{\mu_\tau+1} &= \int (d\eta)^{N_{\mu_\tau+1}} \exp\left(N^{1/2}a_{1m}\tilde{h}\eta_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{B}_{\mu_\tau+1}} d_{\mu_\tau+1}(k)\times\right. \\
&\times \left.\eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{4!}a_4^{(\mu_\tau+1)}N_{\mu_\tau+1}^{-1}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i\in\mathcal{B}_{\mu_\tau+1}}} \eta_{\mathbf{k}_1}\dots\eta_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_1+\dots+\mathbf{k}_4}\right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Для розрахунку (4.16) виконуємо заміну змінних

$$\eta_{\mathbf{k}} = \rho_{\mathbf{k}} + \tilde{\sigma}\sqrt{N}\delta_{\mathbf{k}}, \tag{4.17}$$

змістивши величину η_0 на деяку макроскопічну величину. В результаті знаходимо

$$I_{\mu_\tau+1} = \exp[E_0(\tilde{\sigma})] \int (d\rho)^{N_{\mu_\tau+1}} \exp\left[\tilde{A}_0N^{1/2}\rho_0 -$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{B}_{\mu_\tau+1}} \tilde{d}(k)\rho_{\mathbf{k}}\rho_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{3!}\tilde{b}N_{\mu_\tau+1}^{-1/2}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i\in\mathcal{B}_{\mu_\tau+1}}} \rho_{\mathbf{k}_1}\dots\rho_{\mathbf{k}_3}\delta_{\mathbf{k}_1+\dots+\mathbf{k}_3} - \\
&-\frac{1}{4!}a_4^{(\mu_\tau+1)}N_{\mu_\tau+1}^{-1}\sum_{\substack{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i\in\mathcal{B}_{\mu_\tau+1}}} \rho_{\mathbf{k}_1}\dots\rho_{\mathbf{k}_4}\delta_{\mathbf{k}_1+\dots+\mathbf{k}_4} \Big].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Тут

$$\begin{aligned}
E_0(\tilde{\sigma}) &= N\left[a_{1m}\tilde{h}\tilde{\sigma} + f_0\beta\Phi(0)\tilde{\tau}_1^{2\nu}\tilde{\sigma}^2 - \right. \\
&\left. - \frac{1}{24}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\tau}_1^{3\nu}\tilde{\sigma}^4\right].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Для перенормованих коефіцієнтів виразу (4.18) маємо

$$\tilde{A}_0 = a_{1m}\tilde{h} + 2\beta\Phi(0)f_0\tilde{\tau}_1^{2\nu}\tilde{\sigma} - \frac{1}{6}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\tau}_1^{3\nu}\tilde{\sigma}^3,$$

$$\tilde{d}(k) = \tilde{d}(0) + 2\beta\Phi(0)b^2k^2,$$

$$\tilde{d}(0) = -2f_0\beta\Phi(0)\tilde{\tau}_1^{2\nu} + \frac{1}{2}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\tau}_1^{3\nu}\tilde{\sigma}^2,$$

$$\tilde{b} = u_{\mu_\tau+1}s_0^{3/2}\tilde{\tau}_1^{p_0}\tilde{\sigma}. \tag{4.20}$$

Величину зміщення $\tilde{\sigma}$ визначаємо із умови

$$\frac{\partial E_0(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} = 0.$$

Отримуємо рівняння

$$a_{1m}\tilde{h} + 2\beta\Phi(0)f_0\tilde{\tau}_1^{2\nu}\tilde{\sigma} = \frac{1}{6}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\tau}_1^{3\nu}\tilde{\sigma}^3. \tag{4.21}$$

Розв'язок (4.21) шукатимемо у вигляді

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0\tilde{\tau}_1^{\nu/2}. \tag{4.22}$$

Підстановка (4.22) в (4.21) приводить до рівняння

$$a_{1m}\tilde{h} = \left(-2\beta\Phi(0)f_0\tilde{\sigma}_0 + \frac{1}{6}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\sigma}_0^3\right)\tilde{\tau}_1^{p_0}. \tag{4.23}$$

Для добутку $\tilde{h}\tilde{\tau}_1^{-p_0}$ із врахуванням (4.1) знаходимо

$$\tilde{h}\tilde{\tau}_1^{-\frac{5\nu}{2}} = \tilde{\tau}_1^{p_0}\Delta.$$

В області слабких полів ($\Delta > 0$) ліва частина рівності (4.23) обертається в нуль при прямуванні до критичної точки. Отже, крім тривіального розв'язку $\tilde{\sigma}_0 = 0$, маємо

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{12f_0\beta\Phi(0)}{u_{\mu_\tau+1}} s_0^{-3}. \quad (4.24)$$

Рівняння (4.23) можна записати у вигляді

$$a_{1m}\tilde{h} = \left(-2f_0\beta\Phi(0)\tilde{\sigma}_0 + \frac{1}{6}u_{\mu_\tau+1}s_0^3\tilde{\sigma}_0^3 \right) \tilde{h}_c.$$

У випадку слабких полів $\tilde{h} \ll \tilde{h}_c$ при $T < T_c$ завжди існуватиме ненульовий розв'язок для $\tilde{\sigma}_0$, що є свідченням існування спонтанного спінового моменту. Поведінка $\tilde{\sigma}$ повністю визначається температурною змінною $\tilde{\tau}_1$. Надалі будемо вважати $\tilde{h} \ll \tilde{h}_c$ і приймати до уваги справедливий в нульовому наближенні розв'язок (4.24).

Використаємо (4.22), (4.24) для обчислення коефіцієнтів (4.20). Зокрема, будемо мати

$$\tilde{A}_0 = a_{1m}\tilde{h}. \quad (4.25)$$

Для інших коефіцієнтів (4.20) знаходимо

$$\begin{aligned} \tilde{d}(0) &= 4f_0\beta\Phi(0)\tilde{\tau}_1^{2\nu}, \\ \tilde{b} &= u_{\mu_\tau+1}s_0^{3/2}\tilde{\sigma}_0\tilde{\tau}_1^{3\nu}, \\ a_4^{(\mu_\tau+1)} &= u_{\mu_\tau+1}\tilde{\tau}_1^{4\nu}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Величина $E_0(\tilde{\sigma})$ із (4.19) набуває вигляду

$$E_0(\tilde{\sigma}) = N \left[a_{1m}\tilde{h}\tilde{\sigma} + \tilde{E}_{00}\tilde{\tau}_1^{3\nu} \right], \quad (4.27)$$

де

$$\tilde{E}_{00} = \frac{1}{2}f_0\beta\Phi(0)\tilde{\sigma}_0^2. \quad (4.28)$$

Для розрахунку $I_{\mu_\tau+1}$ (4.18) скористаємося гаусовим наближенням. Нехтуючи доданками, пропорційними малим коефіцієнтам \tilde{b} та $a_4^{(\mu_\tau+1)}$, приходимо до наступного результату:

$$I_{\mu_\tau+1} = \exp[E_0(\tilde{\sigma})] \prod_{k \neq 0}^{B_{\mu_\tau+1}} \left(\pi/\tilde{d}(k) \right)^{1/2} I_{\mu_\tau+1}^{(0)}, \quad (4.29)$$

де

$$I_{\mu_\tau+1}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_0 \exp \left[a_{1m}N^{1/2}\tilde{h}\rho_0 - \frac{1}{2}\tilde{d}(0)\rho_0^2 \right].$$

Результат інтегрування за змінною ρ_0 має вигляд

$$I_{\mu_\tau+1}^{(0)} = \left(2\pi/\tilde{d}(0) \right)^{1/2} \exp \left(l_{11\mu}N\tilde{h}^2\tilde{\tau}_1^{-2\nu} \right). \quad (4.30)$$

Тут

$$l_{11\mu} = \frac{1}{8} \left(\frac{\mathcal{M}_{20}}{\mathcal{M}_2} \right)^2 f_0/\beta\Phi(0). \quad (4.31)$$

Повний вираз для $I_{\mu_\tau+1}$ задається співвідношенням

$$I_{\mu_\tau+1} = \sqrt{2} \exp[E_0(\tilde{\sigma})] \exp \left(N\tilde{h}^2 l_{11\mu}\tilde{\tau}_1^{-2\nu} \right) \prod_{k=0}^{B_{\mu_\tau+1}} \left(\pi/\tilde{d}(k) \right)^{1/2}. \quad (4.32)$$

Відповідно до (4.5), знаходимо

$$\tilde{F}_I = -kTE_0(\tilde{\sigma}) - \frac{1}{2}kTN_0 \ln \pi\tilde{\tau}_1^{3\nu} - kTNl_{11\mu}\tilde{h}^2\tilde{\tau}_1^{-2\nu} + kTNE_{03}. \quad (4.33)$$

Тут

$$E_{03} = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{B_{\mu_\tau+1}} \ln \tilde{d}(k). \quad (4.34)$$

Розрахунок (4.34) проводимо з врахуванням (4.20), аналогічно випадку $T > T_c$. Отримуємо

$$E_{03} = \frac{1}{2}s_0^{-3}\tilde{I}_0\tilde{\tau}_1^{3\nu}, \quad (4.35)$$

де

$$\tilde{I}_0 = I'_0 - 2(\mu_\tau + 1) \ln s, \quad (4.36)$$

$$I'_0 = \ln(D_{0\mu} + D_{1\mu}) - \frac{2}{3} + 2\frac{D_{0\mu}}{D_{1\mu}} - 2 \left(\frac{D_{0\mu}}{D_{1\mu}} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{D_{1\mu}}{D_{0\mu}} \right)^{1/2}.$$

Тут

$$D_{0\mu} = 4f_0\beta\Phi(0), \quad D_{1\mu} = 2\beta\Phi(0)s_0^{-2}\pi^2(b/c)^2.$$

Приймаючи до уваги явний вигляд величини $E_0(\tilde{\sigma})$ із (4.27) та вираз (4.35), для \tilde{F}_I можемо записати

$$\tilde{F}_I = -kTN \left[\left(\tilde{E}_{02} + s_0^{-3}(\ln s - \frac{1}{2}I'_0) \right) \tilde{\tau}_1^{3\nu} + a_{1m}\tilde{h}\tilde{\sigma} + l_{11\mu}\tilde{h}^2\tilde{\tau}_1^{-2\nu} \right] -$$

$$-kTNs_0^{-3}\tilde{\tau}_1^{3\nu}\mu_\tau \ln s, \quad (4.37)$$

де

$$\tilde{E}_{02} = \tilde{E}_{00} + \tilde{E}_{01}, \quad \tilde{E}_{01} = \frac{1}{2}s_0^{-3} \ln \pi.$$

Останній доданок із (4.37) компенсується відповідним йому членом в (4.11).

Запишемо відповідно до (4.2) повний вираз для вільної енергії системи поблизу критичної точки при $T < T_c$. Підсумовуючи вклади (3.3), (4.7), (4.11) та (4.37), знаходимо

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & -kTN \left[\ln 2 + \ln ch(h') + \frac{1}{2}\beta\Phi(0)\bar{\Phi} \right] - \\ & -kTN \left[s_0^{-3}e_{0p} + s_0^{-3}e_{1p}\tilde{\tau} + s_0^{-3}e_{2p}\tilde{\tau}^2 + s_0^{-3}e_{3p}\tilde{h}^2 + \tilde{e}_{4p}s_0^{-3}\tilde{\tau}_1^{3\nu} \right] - \\ & -kTN \left[\tilde{\tau}_1^{3\nu} (\tilde{f}_{p1}s_0^{-3} + \tilde{E}_{022}) + l_{11\mu}\tilde{h}^2\tilde{\tau}_1^{-2\nu} + a_{1m}\tilde{h}\tilde{\sigma} \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

де

$$\tilde{E}_{022} = \tilde{E}_{02} + s_0^{-3} \left(\ln s - \frac{1}{2}I'_0 \right).$$

Остаточний запис (4.38) має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & -kTN \left[\ln chh' + l_0 + l_{1m}\tilde{\tau}_1^{3\nu} + a_{1m}\tilde{h}\tilde{\sigma} + \right. \\ & \left. + l_{2m}\tilde{h}^2 + l_{3m}\tilde{\tau} + l_{4m}\tilde{\tau}^2 + l_{11\mu}\tilde{h}^2\tilde{\tau}_1^{-2\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Тут введені позначення

$$l_{1m} = \tilde{E}_{022} + s_0^{-3}(\tilde{e}_{4p} + \tilde{f}_{p1}), \quad l_{2m} = s_0^{-3}e_{3p}, \quad (4.40)$$

$$l_{3m} = s_0^{-3}e_{1p} - \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0/c_{k1}^{(0)}, \quad l_{4m} = s_0^{-3}e_{2p} + \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0^2/(c_{k1}^{(0)})^2.$$

Величина l_0 задана в (3.38), а коефіцієнт $l_{11\mu}$ - в (4.31).

Вираз (4.39) відповідає вільній енергії системи поблизу критичної точки в слабких полях при температурах $T < T_c$.

Як і у випадку $T > T_c$, знайдемо величину

$$\sigma_- = -\frac{1}{N} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial h}.$$

Виходячи із (4.39), отримуємо вираз

$$\sigma_- = \text{th } h' + 2l_{2m}f_0^{-2}h' + a_{1m}\tilde{\sigma}f_0^{-1} + \eta_\Delta l_{11\mu}f_0^{-1}\tilde{h}^{1/\delta_\Delta}, \quad (4.41)$$

який відрізняється від аналогічного виразу при $T > T_c$ (3.44) наявністю доданку

$$a_{1m}\tilde{\sigma}f_0^{-1} = a_{1m}\sigma_0\tilde{\tau}_1^{\nu/2}f_0^{-1}. \quad (4.42)$$

При цьому $l_{2m} = l_{2T}$ (див. (3.38)), однак $l_{11\mu}$ із (4.41) суттєво менше від l_{11T} із (3.44). Маємо

$$l_{11T} = \left(\frac{\mathcal{M}_{20}}{\mathcal{M}_2} \right)^2 f_0 \frac{s^2}{2(E_2 - 1)\beta\Phi(0)}, \quad (4.43)$$

$$l_{11\mu} = \left(\frac{\mathcal{M}_{20}}{\mathcal{M}_2} \right)^2 f_0 \frac{1}{8\beta\Phi(0)}.$$

Відношення

$$\frac{l_{11T}}{l_{11\mu}} = \frac{4s^2}{E_2 - 1} \quad (4.44)$$

є універсальною величиною. Як і для σ_+ при $T > T_c$, малі поля ($\Delta \rightarrow \infty$) приводять до лінійної польової залежності σ_- , а поля, близькі до граничного значення \tilde{h}_c ($\Delta = 0$), дають $\sigma_- \sim \tilde{h}^{1/5}$.

Розрахуємо величину

$$\chi_- = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial h^2}.$$

Отримуємо

$$\chi_- = \beta \left[\mathcal{M}_2(h') + 2l_{2m}f_0^{-2} + \chi_{02}\tilde{h}^{\eta_\Delta - 2} \right], \quad (4.45)$$

де

$$\chi_{02} = \eta_\Delta(\eta_\Delta - 1)l_{11\mu}f_0^{-2}. \quad (4.46)$$

Показник $\eta_\Delta - 2$ визначений в (3.48) і для всіх значень Δ приймає від'ємні значення. Тому величина χ_- буде прямувати до безмежності у випадку $h \rightarrow 0$.

Приймаючи до уваги (4.1), легко бачити, що температурна залежність величини χ_- , яка визначає поведінку χ_- при $\tilde{\tau} \rightarrow 0$, має вигляд

$$\chi_- \approx \beta\chi_{02}\tilde{\tau}_1^{-\gamma}, \quad (4.47)$$

де, як і при $T > T_c$,

$$\gamma = 1.219. \quad (4.48)$$

Відношення величин χ_+ (3.47) та χ_- (4.45) при $h \rightarrow 0$ визначається в основному їх сингулярними складовими і відповідно до (4.44) рівне

$$\frac{\chi_+}{\chi_-} \approx \frac{l_{11T}}{l_{11\mu}} = 7.16. \quad (4.49)$$

5. Область сильних полів, $T > T_c$

Розглянемо траєкторії прямування системи до критичної точки, які знаходяться в областях II та III на рис. 1. У випадку сильних полів і при $T > T_c$ поле пов'язане із відносною температурою співвідношенням

$$\tilde{h} = \tilde{\tau}^{p_0(1-\Delta_1)}, \quad (5.1)$$

де $0 < \Delta_1 < 1$. В подальших обчисленнях будемо використовувати співвідношення (2.6) та (2.9). При виконанні умови (5.1) знаходимо

$$n_h = m_\tau - \Delta_1(m_\tau + 1). \quad (5.2)$$

Порівнюючи (5.2) із відповідним співвідношенням (2.12), яке має місце для випадку слабких полів, виявляємо суттєву різницю. Якщо для слабких полів виконується (2.10), то для випадку сильних полів справедлива нерівність

$$n_h < m_\tau. \quad (5.3)$$

Це означає, що величина n_p із (3.8) має ототожнюватися із n_h , а не з m_τ (як це мало місце для випадку слабких полів):

$$n_p = n_h = -\frac{\ln \tilde{h}}{\ln E_1} - 1. \quad (5.4)$$

Розрахуємо вільну енергію системи для випадку $T > T_c$ при великих значеннях поля. Маємо

$$F_h = F_0 + F_{\text{КР},h} + F_{p,h} + F_{I,h}. \quad (5.5)$$

Величина F_0 задана в (3.3). Вираз для $F_{\text{КР},h}$ за своєю структурою співпадає з (3.4), тобто

$$F_{\text{КР},h} = -kT \ln Q_0 + F'_{\text{КР},h}, \quad (5.6)$$

де, однак,

$$F'_{\text{КР},h} = F_{\text{КР},h}^{(0)} + F_{\text{КР},2h} + F_{\text{КР},3h}. \quad (5.7)$$

Перший доданок правої частини рівності (5.7) обчислюється згідно наступної формули:

$$F_{\text{КР},h}^{(0)} = -kTN_0 \left(F_{10}s^{-3} - F_{10}\tilde{h}^{6/5} \right), \quad (5.8)$$

де F_{10} приведено в (3.11).

При розрахунку $F_{\text{КР},2h}$ скористаємось виразом (3.12), де покладемо $n_p = n_h$. Легко бачити, що

$$\tilde{\tau} E_2^{n_h+1} = E_2^{-(m_\tau+1)\Delta_1} = \tilde{\tau}^{\Delta_1} = \tilde{h}^{\Delta_1}, \quad (5.9)$$

де

$$\Delta_{11} = \frac{\Delta_1}{p_0(1-\Delta_1)}. \quad (5.10)$$

Величина Δ_{11} змінюється в межах

$$0 < \Delta_{11} < \infty.$$

Приймаючи до уваги (5.9) та рівність $s^{-(n_h+1)} = \tilde{h}^{6/5}$, із (3.12) одержуємо

$$F_{\text{КР},2h} = -kTN_0 \left[F_{11}s^{-3} E_2 \tilde{\tau} + F_{12}s^{-3} E_2^2 \tilde{\tau}^2 - \left(F_{11} + F_{12}\tilde{h}^{\Delta_{11}} \right) \tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}} \right]. \quad (5.11)$$

Як видно, показник степеня величини \tilde{h} збільшується. Існує таке значення $\Delta_{11}^{(0)} = 4/5$, при якому величина $6/5 + \Delta_{11}^{(0)}$ рівна числу два. При цьому

$$\Delta_1^{(0)} = 2\nu(1+2\nu)^{-1}. \quad (5.12)$$

Для всіх $\Delta_1 > \Delta_1^{(0)}$ доданки вільної енергії типу $A \cdot \tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}}$ не будуть приводити до розбіжних вкладів сприйнятливості системи, тобто до особливостей сприйнятливості.

Знайдемо вираз для $F_{\text{КР},3h}$ відповідно до (3.13). Зауважимо, що

$$\tilde{h} E_3^{n_h+1} = \tilde{h}^{4/5}. \quad (5.13)$$

Тому два останні доданки в (3.13) є малими і їх не будемо приймати до розгляду. Це ж стосується і другого доданку в (3.13). В результаті знаходимо

$$F_{\text{КР},3h} = -kTN_0 F_{13} s^{-3} E_2^2 \tilde{h}^2, \quad (5.14)$$

де коефіцієнт F_{13} приведений в (3.14).

З врахуванням (5.8), (5.11) та (5.14) для $F'_{\text{КР},h}$ із (5.7) отримуємо вираз

$$F'_{\text{КР},h} = -kTN_0 \left(f_{\text{CR}}^{(0)} + f_{\text{CR}}^{(1)} \tilde{\tau} + f_{\text{CR}}^{(2)} \tilde{\tau}^2 + f_{\text{CR}}^{(3)} \tilde{\tau}^2 - F_{10}\tilde{h}^{6/5} - F_{11}\tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}} - F_{12}\tilde{h}^{6/5+2\Delta_{11}} \right), \quad (5.15)$$

за допомогою якого можна згідно (5.6) записати повне представлення для $F_{\text{КР},h}$.

Виконаємо розрахунок величини

$$F_{p,h} = -kTN_{n_h+1} \left[\frac{1}{2} \ln 2 + \ln Q(P^{(n_h)}) \right] \quad (5.16)$$

із (5.5). Для останнього доданку (5.16) маємо

$$\ln Q(P^{(n_h)}) = f'_{p0} + \frac{1}{4} \ln a_4^{(n_h)} + H_{211} h_2^{(n_h)}. \quad (5.17)$$

Тут величина f'_{p0} обчислена нами вище в (4.10), а $a_4^{(n_h)}$ задовільняє співвідношенню

$$a_4^{(n_h)} = s^{-4n_h} u_{n_h}, \quad (5.18)$$

де

$$u_{n_h} = u^* \left(1 + c_{k1}^{(0)} T_{42}^{(0)} \varphi_0^{-1/2} \tilde{\tau} E_2^{n_h} \right). \quad (5.19)$$

Використовуючи (5.9), знаходимо, що останній доданок в (5.19), пропорційний $E_2^{-1} \tilde{h} \Delta^{11}$, є зникаюче малим для всіх $\Delta_1 > 0$, а тому

$$u_{n_h} = u^*. \quad (5.20)$$

Подібним чином можна перекопатися, що $h_2^{(n_h)} = h_2^* = 0$. Враховуючи отримані вище співвідношення, приходимо до наступного виразу:

$$F_{p,h} = -kTN_0 [f_{p1c} - n_h \ln s] \tilde{h}^{6/5}. \quad (5.21)$$

Тут

$$f_{p1c} = f_{p0} + \frac{1}{4} \ln u^*. \quad (5.22)$$

Знайдемо величину $F_{I,h}$ із (5.5), яка записується у вигляді

$$F_{I,h} = -kT \ln I_{n_h+1}, \quad (5.23)$$

де

$$I_{n_h+1} = \int (d\rho)^{N_{n_h+1}} \exp \left\{ -\tilde{a}_1^{(n_h+1)} N_{n_h+1}^{1/2} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}_{n_h+1}} d_{n_h+1}(\mathbf{k}) \times \right. \\ \left. \times \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{4!} a_4^{(n_h+1)} N_{n_h+1}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{n_h+1}}} \rho_{\mathbf{k}_1} \dots \rho_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \right\}. \quad (5.24)$$

Коефіцієнти, що входять в (5.24), задаються виразами

$$\tilde{a}_1^{(n_h+1)} = -c_{h1} f_0 \tilde{h}^{2/5}, \\ d_{n_h+1}(0) = -f_0 \beta \Phi(0) \tilde{h}^{4/5} \left(1 - \tilde{\tau} \tilde{h}^{-\frac{1}{p_0}} \right), \\ a_4^{(n_h+1)} = \varphi_0 (\beta \Phi(0))^2 \tilde{h}^{8/5} \left(1 + T_{42}^{(0)} f_0 \varphi_0^{-1/2} \tilde{\tau} \tilde{h}^{-\frac{1}{p_0}} \right). \quad (5.25)$$

Тут f_0, φ_0 характеризують координати фіксованої точки рекурентних співвідношень (див. (1.19)), а величина c_{h1} приведена в (1.21). Відмітимо, що має місце рівність

$$-\tilde{a}_1^{(n_h+1)} N_{n_h+1}^{1/2} = a_{1m} N^{1/2} \tilde{h}, \quad (5.26)$$

де коефіцієнт a_{1m} вводиться вище при записі $I_{m\tau+2}$ (3.24).

Виконаємо в (5.24) заміну змінних

$$\rho_{\mathbf{k}} = \eta_{\mathbf{k}} + \sigma_h \sqrt{N} \delta_{\mathbf{k}}. \quad (5.27)$$

В результаті отримаємо

$$I_{n_h+1} = \exp[E_0(\sigma_h)] \int (d\eta)^{N_{n_h+1}} \exp \left[A_0 \sqrt{N} \eta_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{B}_{n_h+1}} d_h(\mathbf{k}) \eta_{\mathbf{k}} \eta_{-\mathbf{k}} - \frac{1}{3!} b_h N_{n_h+1}^{-1/2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{n_h+1}}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4!} a_h N_{n_h+1}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4 \\ \mathbf{k}_i \in \mathcal{B}_{n_h+1}}} \eta_{\mathbf{k}_1} \dots \eta_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_4} \right]. \quad (5.28)$$

Тут введене позначення

$$E_0(\sigma_h) = N \left[a_{1m} \sigma_h \tilde{h} - \frac{1}{2} d_{n_h+1}(0) \sigma_h^2 - \frac{a_4^{(n_h+1)}}{24} \sigma_h^4 \frac{N}{N_{n_h+1}} \right], \quad (5.29)$$

а перенормовані коефіцієнти визначаються згідно формул

$$A_0 = a_{1m} \tilde{h} - d_{n_h+1}(0) \sigma_h - \frac{1}{6} a_4^{(n_h+1)} \sigma_h^3 N / N_{n_h+1}, \\ d_h(\mathbf{k}) = d_h(0) + 2\beta \Phi(0) b^2 k^2,$$

$$\begin{aligned}
d_h(0) &= d_{n_h+1}(0) + \frac{1}{2}\sigma_h^2 a_4^{(n_h+1)} N/N_{n_h+1}, \\
b_h &= \sigma_h a_4^{(n_h+1)} (N/N_{n_h+1})^{1/2}, \\
a_h &= a_4^{(n_h+1)}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Величину зміщення σ_h шукаємо із рівняння

$$\frac{\partial E_0(\sigma_h)}{\partial \sigma_h} = 0. \tag{5.31}$$

На основі (5.31) та (5.29) отримуємо рівняння

$$a_{1m}\tilde{h} - d_{n_h+1}(0)\sigma_h - \frac{1}{6}a_4^{(n_h+1)}\sigma_h^3(N/N_{n_h+1}) = 0. \tag{5.32}$$

Приймаючи до уваги (5.25), бачимо, що в рівнянні (5.32) будуть присутні члени, пропорційні $\tilde{\tau}\tilde{h}^{-1/p_0}$. Надалі будемо розглядати випадок полів, набагато більших за величину граничного поля ($\tilde{h} \gg \tilde{h}_c$). Тоді $\tilde{\tau}\tilde{h}^{-1/p_0} \ll 1$ і цими членами у рівнянні та подальших розрахунках будемо нехтувати. Представляючи розв'язок у вигляді

$$\sigma_h = \sigma_0 \tilde{h}^{1/\delta}, \tag{5.33}$$

де

$$\delta = \frac{d+2}{d-2}, \tag{5.34}$$

одержуємо наступне рівняння для величини σ_0 :

$$\tilde{h} \left(a_{1m} + f_0\beta\Phi(0)\sigma_0 - \frac{1}{6}\varphi_0(\beta\Phi(0))^2\sigma_0^3s_0^3 \right) = 0. \tag{5.35}$$

Таке ж рівняння для величини σ_0 було отримане і розв'язане в [2]. Величина σ_0 є порядку одиниці і незначно змінюється при зміні початкових параметрів задачі s_0 та b/c . Обчисливши величину σ_h , можемо знайти вирази для коефіцієнтів (5.30). Будемо мати

$$A_0 = 0,$$

$$d_h(0) = D_g f_0 \beta \Phi(0) \tilde{h}^{4/5}, \tag{5.36}$$

де

$$D_g = \frac{1}{2}\sigma_0^2 s_0^3 \varphi_0 f_0^{-1} \beta \Phi(0) - 1, \tag{5.37}$$

а також

$$b_h = \varphi_0 (\beta \Phi(0))^2 s_0^{3/2} \sigma_0 \tilde{h}^{6/5},$$

$$a_h = \varphi_0 (\beta \Phi(0))^2 \tilde{h}^{8/5}. \tag{5.38}$$

Величину $E_0(\sigma_h)$ (5.29) із врахуванням рівностей (5.25) та (5.33) перепишемо у вигляді

$$E_0(\sigma_h) = N E_{00} \tilde{h}^{6/5}, \tag{5.39}$$

де

$$E_{00} = a_{1m}\sigma_0 + \frac{1}{2}f_0\beta\Phi(0)\sigma_0^2 - \frac{1}{24}s_0^3\varphi_0(\beta\Phi(0))^2\sigma_0^4. \tag{5.40}$$

Коефіцієнт $d_h(0)$ додатний і приймає великі значення. Тому розрахунок виразу (5.28) здійснюватимемо на основі гаусового розподілу флуктуацій. В нульовому наближенні приходимо до результату:

$$I_{n_h+1} = \sqrt{2} \exp[E_0(\sigma_h)] \prod_{k=0}^{B_{n_h+1}} (\pi/d_h(k))^{1/2}. \tag{5.41}$$

Для вкладу у вільну енергію $F_{I,h}$ із (5.5) маємо

$$F_{I,h} = -kT \ln I_{n_h+1}. \tag{5.42}$$

Підставляючи в (5.42) вираз (5.41), отримуємо

$$F_{I,h} = -kTN E_{02} \tilde{h}^{6/5} + kTN E_{03}, \tag{5.43}$$

де

$$E_{02} = E_{00} + \frac{1}{2}s_0^{-3} \ln \pi,$$

$$E_{03} = \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{B_{n_h+1}} \ln d_h(k). \tag{5.44}$$

Явний вираз для E_{03} знаходимо відповідно до методики, використаної в [2]:

$$E_{03} = \frac{1}{2}s_0^{-3}\tilde{h}^{6/5}I_0, \tag{5.45}$$

де

$$I_0 = -2(n_h + 1) \ln s + I'_0. \tag{5.46}$$

Тут

$$I'_0 = \ln(D_0 + D_1) - \frac{2}{3} + 2\frac{D_0}{D_1} - 2\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^{3/2} \arctg\left(\frac{D_1}{D_0}\right)^{1/2}, \tag{5.47}$$

причому

$$D_0 = \frac{1}{2}s_0^3\sigma_0^2\varphi_0(\beta\Phi(0))^2 - f_0\beta\Phi(0),$$

$$D_1 = 2\beta\Phi(0)s_0^{-2}\pi^2(b/c)^2. \quad (5.48)$$

Остаточний вираз для величини $F_{I,h}$ задається формулою

$$F_{I,h} = -kTN\tilde{E}_{02}\tilde{h}^{6/5} - kTN_0\tilde{h}^{6/5}n_h \ln s, \quad (5.49)$$

де

$$\tilde{E}_{02} = E_{02} + s_0^{-3} \left(\ln s - \frac{1}{2}I'_0 \right). \quad (5.50)$$

Загальний вираз для вільної енергії системи поблизу критичної точки при сильних полях у випадку $T > T_c$ має вигляд

$$F_h = -kTN \left[\ln \operatorname{ch} h' + l_0 + l_1\tilde{h}^{6/5} + l_{11}^{(+)}\tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}} + \right. \\ \left. + l_{12}\tilde{h}^{6/5+2\Delta_{11}} + l_2\tilde{h}^2 + l_3\tilde{\tau} + l_4\tilde{\tau}^2 \right], \quad (5.51)$$

де показник Δ_{11} приведений в (5.10), а

$$l_0 = \ln 2 + \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi} + s_0^{-3}e_{0p}, \\ l_1 = \tilde{E}_{02} + s_0^{-3}(f_{p1c} - F_{10}), \\ l_{11}^{(+)} = -s_0^{-3}F_{11}, \quad l_{12} = -s_0^{-3}F_{12}, \quad (5.52) \\ l_2 = s_0^{-3}e_{3p}, \quad l_3 = s_0^{-3}e_{1p} - \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0/c_{k1}^{(0)}, \\ l_4 = s_0^{-3}e_{2p} + \frac{1}{2}\beta_c\Phi(0)\bar{\Phi}f_0^2/(c_{k1}^{(0)})^2.$$

Подібно до випадку слабких полів розрахуємо величину

$$\sigma_+^{(h)} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F_h}{\partial h}.$$

Враховуючи (5.51), будемо мати

$$\sigma_+^{(h)} = \operatorname{th} h' + \frac{6}{5}l_1f_0^{-6/5}h'^{1/\delta} + \left(\frac{6}{5} + \Delta_{11} \right) l_{11}^{(+)}f_0^{-6/5-\Delta_{11}}h'^{\frac{1}{5}+\Delta_{11}} + \\ + \left(\frac{6}{5} + 2\Delta_{11} \right) l_{12}f_0^{-6/5-2\Delta_{11}}h'^{\frac{1}{5}+2\Delta_{11}} + 2l_2f_0^{-2}h'. \quad (5.53)$$

У випадку $\Delta_1 \rightarrow 1$ (тоді $\Delta_{11} \rightarrow \infty$) цей результат відповідає аналогічній формулі роботи [2]. Для іншого граничного випадку $\Delta_1 = 0$

(тоді $\Delta_{11} = 0$) (5.53) зводиться до відповідного виразу, який отриманий в роботі [3].

Знайдемо сприйнятливості системи

$$\chi_+^{(h)} = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 F_h}{\partial h^2}.$$

Використовуючи (5.51), знаходимо

$$\chi_+^{(h)} = \beta \left[\mathcal{M}_2(h') + 2l_2f_0^{-2} + \chi_{01}^{(h)}\tilde{h}^{\eta_0-2} + \chi_{02}^{(h)}\tilde{h}^{\eta_0-2+\Delta_{11}} + \right. \\ \left. + \chi_{03}^{(h)}\tilde{h}^{\eta_0-2+2\Delta_{11}} \right]. \quad (5.54)$$

Тут

$$\eta_0 = \frac{2d}{d+2}, \\ \chi_{01}^{(h)} = \eta_0(\eta_0 - 1)l_1f_0^{-2}, \\ \chi_{02}^{(h)} = (\eta_0 + \Delta_{11})(\eta_0 + \Delta_{11} - 1)l_{11}^{(+)}f_0^{-2}, \\ \chi_{03}^{(h)} = (\eta_0 + 2\Delta_{11})(\eta_0 + 2\Delta_{11} - 1)l_{12}f_0^{-2}. \quad (5.55)$$

Формула (5.54) при $\Delta_1 \rightarrow 1$ відповідає результату роботи [2], а при $\Delta_1 = 0$ – роботи [3].

6. Область сильних полів, $T < T_c$

Подібно до розділу 5 розглянемо випадок $T < T_c$. Як і в розділі 4, будемо використовувати величину $\tilde{\tau}_1 = -\tilde{\tau}$. Для \tilde{h} вважатимемо, що має місце рівність

$$\tilde{h} = \tilde{\tau}_1^{p_0(1-\Delta_1)}. \quad (6.1)$$

Величина n_h , яка характеризує точку виходу системи із критичного режиму флуктуацій у випадку сильних полів має вигляд (2.9). Порівнюючи величини ділянок критичного режиму за температурою і полем, знаходимо

$$n_h = \mu_\tau - \Delta_1(\mu_\tau + 1), \quad (6.2)$$

де $0 < \Delta_1 < 1$, а для μ_τ має місце співвідношення (2.7). Приходимо до висновку, що

$$n_h < \mu_\tau,$$

а отже, має місце співвідношення $n_p = n_h$. Саме таку мову ми використовували в розділі 5 для розрахунку вільної енергії.

Представимо вільну енергію для випадку $T < T_c$ у вигляді

$$\tilde{F}_h = F_0 + \tilde{F}_{\text{КР},h} + \tilde{F}_{p,h} + \tilde{F}_{I,h}. \quad (6.3)$$

Тут F_0 співпадає із (3.3). Для $\tilde{F}_{\text{КР},h}$ маємо вирази (5.6), (5.7). Вираз для величини $F_{\text{КР},h}^{(0)}$ (5.8) справедливий як при $T > T_c$, так і у випадку $T < T_c$. При обчисленні $\tilde{F}_{\text{КР},2h}$ слід зауважити, що

$$\tilde{\tau} E_2^{n_p+1} = -\tilde{\tau}_1 E_2^{n_h+1} = -\tilde{\tau}_1^{\Delta_1} = -\tilde{h}^{\Delta_{11}}, \quad (6.4)$$

де Δ_{11} означено в (5.10). Тому, на відміну від (5.11), для $\tilde{F}_{\text{КР},2h}$ отримуємо вираз

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\text{КР},2h} = & -kTN_0 [F_{11}s^{-3}E_2\tilde{\tau} + F_{12}s^{-3}E_2^2\tilde{\tau}^2 + \\ & + (F_{11} - F_{12}\tilde{h}^{\Delta_{11}})\tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}}]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Отже, величина $\tilde{F}_{\text{КР},h}$ матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\text{КР},h} = & -kTN_0 [e_{0p} + e_{1p}\tilde{\tau} + e_{2p}\tilde{\tau}^2 + e_{3p}\tilde{h}^2 - \\ & - F_{10}\tilde{h}^{6/5} + F_{11}\tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}} - F_{12}\tilde{h}^{6/5+2\Delta_{11}}]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Порівнюючи цей вираз з відповідним йому виразом при $T > T_c$, бачимо, що їхня відмінність пов'язана із знаком доданку біля коефіцієнта F_{11} :

$$F_{\Delta}^{(\pm)} = \pm kTN_0 F_{11} \tilde{h}^{6/5+\Delta_{11}}. \quad (6.7)$$

Знак “+” відповідає вкладу до вільної енергії (пов'язаної із ділянкою критичного режиму) при $T > T_c$, а знак “-” – при $T < T_c$.

Вираз $\tilde{F}_{p,h}$ співпадає із аналогічним йому виразом (5.21) при $T > T_c$. Не змінюється також вираз для $\tilde{F}_{I,h}$. Він, як і у випадку $T > T_c$, задається формулою (5.49).

Таким чином, вільна енергія системи при $T < T_c$ для великих значень поля поблизу критичної точки має вигляд (5.51), де коефіцієнт $l_{11}^{(+)}$ повинен бути замінений на $l_{11}^{(-)}$, для якого маємо

$$l_{11}^{(-)} = -l_{11}^{(+)}. \quad (6.8)$$

Література

1. Козловський М.П. Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку тривимірного магнетика. I. Рекурентні співвідношення. - Львів, 2002. - 43 с. - (Препринт / НАН України. ІФКС; ICMP-02-31U).
2. Козловський М.П. Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку тривимірного магнетика. II. Вільна енергія для випадку $T = T_c$. - Львів, 2002. - 26 с. - (Препринт / НАН України. ІФКС; ICMP-02-32U).
3. Козловський М.П. Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку тривимірного магнетика. III. Вільна енергія для випадку граничного значення поля ($h \neq 0$ та $\tau \neq 0$). - Львів, 2003. - 35 с. - (Препринт / НАН України. ІФКС; ICMP-03-13U).
4. Ма Ш. Современная теория критических явлений. - М.: Мир, 1980. - 298 с.
5. Юхновский И.Р. Фазовые переходы второго рода. Метод коллективных переменных. - Киев: Наукова думка, 1985. - 224 с.
6. Юхновський І.Р., Козловський М.П., Пилиук І.В. Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах. - Львів: Євровіт, 2001. - 592с.
7. Yukhnovskii I.R., Kozlovskii M.P., Pylyuk I.V. Thermodynamics of three-dimensional Ising-like systems in the higher non-Gaussian approximation: Computational method and dependence on microscopic parameters // Phys. Rev. B. - 2002. - **66**, N 13. - 134410 (18 pages).

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Михайло Павлович Козловський
Ігор Васильович Пилюк
Орест Олегович Притула

ПОВЕДІНКА ТРИВИМІРНОГО МАГНЕТИКА ПОБЛИЗУ КРИТИЧНОЇ
ТОЧКИ ЗА НАЯВНОСТІ ЗОВНІШНЬОГО ПОЛЯ

Роботу отримано 11 листопада 2003 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТеКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені