

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP-02-31U

М.П.Козловський

ВПЛИВ ЗОВНІШНЬОГО ПОЛЯ НА КРИТИЧНУ
ПОВЕДІНКУ ТРИВИМІРНОГО МАГНЕТИКА. РЕКУРЕНТНІ
СПІВВІДНОШЕННЯ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 05.60.+w, 05.70.Ln, 05.20.Dd, 52.25.Dg, 52.25.Fi

Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку тривимірного магнетика. Рекурентні співвідношення

М.П.Козловський

Анотація. Запропонований метод розрахунку статистичної суми граткової моделі магнетика в зовнішньому полі поблизу критичної точки. Знайдені рекурентні співвідношення та їхній явний розв'язок поблизу фіксованої точки. Показано, що залежність від температури термодинамічних функцій поблизу критичної точки, коли спрямувати величину поля до нуля, співпадає з результатами, отриманими в методі колективних змінних. Розрахована температура фазового переходу (при $h = 0$) та знайдена її залежність від параметрів потенціалу взаємодії.

Influence of an external field on the critical behaviour of the three-dimensional magnet. Recurrence relations

M.P.Kozlovskii

Abstract. The method of calculation of partition function of the lattice model for the magnet in the external field near critical point (CP) is proposed. The recurrence relations and their explicit solution near the critical point are founded. It is shown, that dependence on temperature of thermodynamic functions near CP, when the field value come down to zero, is in the good agreement with previous results, which were obtained by the collective variable method. The phase transition temperature (when $h=0$) is calculated and dependence on parameters of interaction potential is founded.

Вступ

Певний прогрес теоретичного опису фазових переходів на мікроскопічному рівні пов'язаний з використанням методу колективних змінних (КЗ) [1]. Цей метод дозволяє ефективно врахувати колективні ефекти, які відіграють основну роль поблизу точки фазового переходу. Застосування методу КЗ до опису критичної поведінки однокомпонентної тривимірної моделі магнетика [2] наглядно продемонстрував свою ефективність. Для тривимірної ізінгоподібної системи знайдені явні вирази для температури фазового переходу T_c , термодинамічних функцій поблизу T_c , встановлено їхній зв'язок з мікроскопічними параметрами системи. Нез'ясованим, однак, залишається питання про вплив зовнішнього поля на критичну поведінку згаданої вище системи. Дослідження виразів для вільної енергії та інших термодинамічних функцій, зокрема теплоємності, як і поведінки параметра порядку поблизу T_c при прямуванні до нуля зовнішнього поля представляє як теоретичний так і практичний інтерес. Критична точка однокомпонентного магнетика визначається двома параметрами: температурою фазового переходу T_c та нульовим значенням зовнішнього магнітного поля h . У випадку $h = 0$ критична поведінка цієї системи вивчена достатньо добре. Зокрема в [2] запропоновано опис такої системи на мікроскопічному рівні. Відомі деякі характеристики однокомпонентного магнетика у випадку $T = T_c$ при прямуванні до нуля зовнішнього поля h . Нез'ясованим до даного часу питанням є опис критичної поведінки магнітної системи у випадку коли $T \rightarrow T_c$ та $h \rightarrow 0$, однак $T \neq T_c$ та $h \neq 0$. Вирішення цього питання є нетривіальним, оскільки навіть для двовимірної моделі Ізінга не знайдено точного розв'язку, коли треба провести розрахунок її характеристик при відмінному від нуля зовнішньому полі.

В даній роботі на мікроскопічному рівні запропонований наближений метод розрахунку основних характеристик тривимірної однокомпонентної моделі поблизу точки фазового переходу. В основі цього методу є запропонована в [2] мікроскопічна теорія фазових переходів, побудована з використанням методу колективних змінних. Введення у розгляд зовнішнього поля з необхідністю приводить до узагальнення опису критичної поведінки не змінюючи при цьому основних ідей та процедур, описаних в [1,2].

Властивості простих магнітних систем та ряду інших об'єктів статистичної фізики достатньо добре описуються тривимірною моделлю

Ізінга. Гамільтоніан цієї моделі має вигляд

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{l}\vec{j}} \Phi(r_{\vec{l}\vec{j}}) \sigma_{\vec{l}} \sigma_{\vec{j}} - h \sum_{\vec{l}} \sigma_{\vec{l}}, \quad (1)$$

де $\Phi(r_{\vec{l}\vec{j}})$ - потенціал взаємодії частинок, які розміщені у вузлах \vec{l} та \vec{j} кристалічної ґратки, $r_{\vec{l}\vec{j}} = |\vec{r}_{\vec{l}} - \vec{r}_{\vec{j}}|$ - віддаль між вузлами, $h = \mu_B \mathcal{H}$ - приведене зовнішнє поле. Змінна $\sigma_{\vec{l}}$ приймає значення ± 1 . Для простоти вважатимемо, що маємо просту кубічну ґратку з періодом c . При проведенні подальших розрахунків приймемо, що взаємодія між частинками описується експонентно-спадною функцією віддалі

$$\Phi(r_{\vec{l}\vec{j}}) = A \cdot \exp(-r_{\vec{l}\vec{j}}/b). \quad (2)$$

Тут A - деяка постійна, b - ефективний радіус взаємодії. В представленні КЗ $\rho_{\vec{k}}$ вираз для статистичної суми системи (1) записується у вигляді [2]

$$Z = \int \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \beta \Phi(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right) J_h(\rho) (d\rho)^N. \quad (3)$$

Сумування в (3) відбувається за хвильовими векторами \vec{k} , що належать до першої зони Бріллюена:

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c} + \frac{2\pi}{c} \frac{n_i}{N_i}; \right. \\ \left. n_i = 1, 2, \dots, N_i; i = x, y, z \right\}. \quad (4)$$

Тут $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ - загальне число частинок. До виразу (3) входить обернена температура $\beta = 1/k_B T$, фур'є-образ потенціалу взаємодії $\Phi(k)$ та якобіан переходу $J(\rho)$ від множини індивідуальних координат колективних змінних. При наявності зовнішнього поля h він має вигляд

$$J_h(\rho) = Sp \left[e^{\beta h \sum_{\vec{l}} \sigma_{\vec{l}}} J(\rho - \hat{\rho}) \right],$$

де для оператора переходу $J(\rho - \hat{\rho})$ маємо [1]

$$J(\rho - \hat{\rho}) = \int \exp \left[2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \omega_{\vec{k}}(\rho_{\vec{k}} - \hat{\rho}_{\vec{k}}) \right] (d\omega)^N. \quad (5)$$

Інтегрування в (5) відбувається за N змінними $\omega_0, \omega_{\vec{k}}^c, \omega_{\vec{k}}^s$ ($k > 0$), які приймають дійсні значення

$$(d\omega)^N = d\omega_0 \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}} d\omega_{\vec{k}}^c d\omega_{\vec{k}}^s.$$

Штрих біля знаку добутку означає, що $k > 0$.

Оператори $\hat{\rho}_{\vec{k}}$ мають вигляд

$$\hat{\rho}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{l} \in \Lambda} \sigma_{\vec{l}} e^{-i\vec{k}\vec{l}}.$$

Сумування тут здійснюється в об'ємі періодичності ($V = N \cdot c^3$)

$$\Lambda = \left\{ \vec{l} = (l_x, l_y, l_z) | l_i = c \cdot n_i; n_i = 1, 2, \dots, N_i; i = x, y, z \right\} \quad (6)$$

із циклічними граничними умовами.

Явний вигляд якобіану переходу отримуємо в результаті операції сумування Sp за власними значеннями $\sigma_{\vec{l}} = \pm 1$ та виконання інтегрування за змінними $\omega_{\vec{k}}$ в (5). Приходимо до відомого результату

$$J_h(\rho) = \prod_{\vec{l} \in \Lambda} [\delta(\rho_{\vec{l}} + 1) \exp(-\beta h) + \delta(\rho_{\vec{l}} - 1) \exp(\beta h)], \quad (7)$$

де введені вузлові колективні змінні

$$\rho_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \rho_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{l}}. \quad (8)$$

Елемент об'єму в просторі КЗ $\rho_{\vec{k}}$ та вузлових змінних $\rho_{\vec{l}}$ пов'язані між собою співвідношенням

$$d\rho_0 \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}} d\rho_{\vec{k}}^c d\rho_{\vec{k}}^s = j^{-1} \prod_{\vec{l} \in \Lambda} d\rho_{\vec{l}}, \quad (9)$$

де якобіан переходу j має вигляд

$$j = \sqrt{2}^{N-1}. \quad (10)$$

При переході від змінних $\omega_{\vec{k}}$ до $\omega_{\vec{l}}$ маємо

$$d\omega_0 \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}} d\omega_{\vec{k}}^c d\omega_{\vec{k}}^s = j \prod_{\vec{l} \in \Lambda} d\omega_{\vec{l}}, \quad (11)$$

причому

$$\omega_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \omega_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{l}}. \quad (12)$$

Розрахунок статистичної суми (3), вільної енергії та інших термодинамічних функцій пов'язаний з виконанням певних наближень. Це зумовлено тією обставиною, що (3) можна умовно розділити на дві частини. При цьому енергетична частина

$$\exp \left(\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \beta \Phi(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right)$$

діагональна в просторі КЗ змінних $\rho_{\vec{k}}$, а ентропійні вклади, пов'язані з "якобіаном" переходу (7), діагоналізуються в просторі вузлових колективних змінних $\rho_{\vec{l}}$.

На сьогодні не розвинутий математичний апарат, який би дозволив провести точне обчислення (3). Зазвичай використовуються наближені методи розрахунку. Одним із таких підходів є метод, розвинутий в [2], який ґрунтується на використанні негаусових розподілів флуктуацій. Це принципово важливо поблизу точки фазового переходу другого роду. Особливістю цього методу є використання так званого проміжного інтегрування [1]. Саме це дозволяє в аналітичному вигляді отримати вираз для статистичної суми поблизу критичної точки. В даній роботі йдеться про узагальнення методу запропонованого в [1,2] на випадок наявності зовнішнього поля. При цьому в системі завжди існуватиме відмінний від нуля параметр порядку. Однак становить інтерес поведінка термодинамічних функцій поблизу точки фазового переходу, коли $h \rightarrow 0$, $T \rightarrow T_c$, однак $h \neq 0$ та $T \neq T_c$.

1. Представлення статистичної суми

Запишемо функціональне представлення статистичної суми моделі (1), яке зручно використовувати для подальшого розрахунку термодинамічних функцій поблизу точки фазового переходу. Будемо виходити із виразу (3), для якого справедливо (7). Фур'є-образ потенціалу взаємодії ($\Phi(k)$), що входить до складу (3), відповідно до (2) має вигляд [1]

$$\Phi(k) = \Phi(0)(1 + b^2 k^2)^{-2}, \quad (1.1)$$

де для $\Phi(0)$ маємо

$$\Phi(0) = A \cdot 8\pi(b/c)^3. \quad (1.2)$$

Нас цікавитиме довгохвильова границя $\Phi(k)$, оскільки критична поведінка визначається далекосяжними кореляціями. У зв'язку з цим використовуємо для фур'є-образу потенціалу наступне наближення

$$\Phi(k) = \begin{cases} \Phi(0)(1 - 2b^2k^2), & \vec{k} \in \mathcal{B}_0 \\ \Phi_0 = \Phi(0)\bar{\Phi}, & \vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

яке відповідає параболічній апроксимації (1.1) для малих значень хвильових векторів, та усередненню залежності від \vec{k} фур'є-образу (1.1) для значень хвильових векторів, близьких до границі зони Бріллюена. При вивченні універсальних характеристик моделі (1), як критичні показники, величина Φ_0 не відіграє жодної ролі і її можна покласти рівною нулеві. Значення Φ_0 суттєві, однак, при розрахунках неуніверсальних величин, зокрема температури фазового переходу [3]. Визначення "малих" значень хвильового вектора умовне і залежить від вигляду потенціалу взаємодії. Для експонентно-спадного потенціалу (2) область \mathcal{B}_0 , де має місце параболічна апроксимація (1.3), має вигляд

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_0} + \frac{2\pi}{c_0} \frac{n_i}{N_{0i}}; \right. \\ \left. n_i = 1, 2, \dots, N_{0i}, i = x, y, z \right\}, \quad (1.4)$$

де $N_{0x}N_{0y}N_{0z} = N_0$, $N_0 = N \cdot s_0^{-d}$, причому $s_0 \geq 1$. Параметр s_0 визначає величину періоду деякої ефективної блочної ґратки

$$c_0 = c \cdot s_0.$$

Для кожного конкретного вигляду потенціалу взаємодії (обмінна взаємодія, взаємодія найближчих сусідів, ...) параметр s_0 визначається по-різному, однак має виконуватися умова, щоб в області значень $\vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0$ залежність $\Phi(k)$ від хвильового вектора була максимально слабкою. В будь-якому випадку, можна вважати, що розглядається критична поведінка моделі із потенціалом (1.3), який в свою чергу пов'язаний з експонентно-спадним характером взаємодії між частинками системи.

Відповідно до (1.3) маємо

$$\sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \beta \Phi(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\beta \Phi(k) - \beta \Phi_0) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} + \beta \Phi_0 \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}}.$$

Запишемо тотожне перетворення

$$\exp \left(\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right) = \\ = \int (d\eta)^{N_0} \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \int (d\omega)^{N_0} \exp \left[2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \omega_{\vec{k}} (\eta_{\vec{k}} - \rho_{\vec{k}}) \right].$$

В результаті, статистична сума (3) запишеться у вигляді

$$Z = \int (d\rho)^N (d\eta)^{N_0} (d\omega)^{N_0} \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \\ e^{2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \omega_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}}} \exp \left[-2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \omega_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta \Phi_0 \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}} \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right] J_h(\rho). \quad (1.5)$$

Як і раніше (див. (9), (11)) маємо

$$(d\eta)^{N_0} = d\eta_0 \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} d\eta_{\vec{k}}^c d\eta_{\vec{k}}^s = j_0^{-1} \prod_{\vec{l} \in \Lambda_0} d\eta_{\vec{l}} \\ (d\omega)^{N_0} = d\omega_0 \prod_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} d\omega_{\vec{k}}^c d\omega_{\vec{k}}^s = j_0 \prod_{\vec{l} \in \Lambda_0} d\omega_{\vec{l}}, \quad (1.6)$$

де $j_0 = \sqrt{2}^{N_0-1}$. Тут \vec{l} приймає значення в об'ємі періодичності ($V = N_0 c_0^3$)

$$\Lambda_0 = \left\{ \vec{l} = (l_x, l_y, l_z) \mid l_i = c_0 n_i; n_i = 1, 2, \dots, N_{0i}; i = x, y, z \right\} \quad (1.7)$$

із циклічними граничними умовами.

Записане в (1.5) представлення для статистичної суми дозволяє виконати інтегрування за змінними $\rho_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}$. Для цього слід перейти до вузлових КЗ $\rho_{\vec{l}}$ (9). Однак, перш ніж виконати інтегрування, введемо змінні $\bar{\omega}_{\vec{k}}$, для яких $\vec{k} \in \mathcal{B}$

$$\bar{\omega}_{\vec{k}} = \begin{cases} \omega_{\vec{k}}, & \vec{k} \in \mathcal{B}_0 \\ 0, & \vec{k} \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Використовуючи (1.8), запишемо частину виразу (1.5), пов'язану з інтегруванням за N змінними $\rho_{\vec{k}}$. Маємо

$$\prod_{\vec{l} \in \Lambda} \int \exp(-2\pi i \bar{\omega}_{\vec{l}} \rho_{\vec{l}} + \frac{1}{2} \beta \Phi_0 \rho_{\vec{l}}^2) [e^{-\beta h} \delta(\rho_{\vec{l}} + 1) + e^{+\beta h} \delta(\rho_{\vec{l}} - 1)] (d\rho_{\vec{l}}),$$

де для $\bar{\omega}_{\vec{l}}$ справедливе співвідношення (12).

Виконавши в (1.5) інтегрування за змінними $\rho_{\vec{l}}$ отримуємо

$$Z = 2^N e^{\frac{1}{2} \beta \Phi_0 N} \int (d\eta)^{N_0} (d\omega)^{N_0} \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \exp \left(2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \eta_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \right) Z(\bar{\omega}), \quad (1.9)$$

де

$$Z(\bar{\omega}) = ch \sum_{\vec{l} \in \Lambda} (-2\pi i \bar{\omega}_{\vec{l}} + \beta h). \quad (1.10)$$

Величину $\bar{\omega}_{\vec{l}}$ слід розуміти відповідно до рівності (12). Скористаємося кумулянтним розкладом для $ch(\dots)$. Відповідно до [1] маємо

$$ch(-2\pi i \bar{\omega}_{\vec{l}} + h') = \exp \sum_{n \geq 0} D_n(\bar{\omega}_{\vec{l}}), \quad (1.11)$$

де $h' = \beta h$. Для величин $D_n(\bar{\omega}_{\vec{l}})$ знаходимо

$$D_n(\bar{\omega}_{\vec{l}}) = \frac{(-2\pi i)^n}{n!} \mathcal{M}_n(h') \bar{\omega}_{\vec{l}}^n, \quad (1.12)$$

де кумулянти $\mathcal{M}_n(h')$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0(h') &= \ln ch(h'); & \mathcal{M}_1(h') &= th(h') \equiv x; \\ \mathcal{M}_2(h') &= 1 - x^2 \equiv y; \\ \mathcal{M}_3(h') &= -2xy; \\ \mathcal{M}_4(h') &= -2y^2 + 4x^2y; \\ \mathcal{M}_5(h') &= 16xy^2 - 8x^3y; \\ \mathcal{M}_6(h') &= 16y^2 - 88x^2y^2 + 16x^4y. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Запишемо в явному вигляді вираз для $Z(\bar{\omega})$, скориставшись (12) та (1.13). Маємо

$$Z(\bar{\omega}) = \exp \left\{ \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(-2\pi i)^n}{n!} N^{1-n/2} \mathcal{M}_n(h') \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}}} \bar{\omega}_{\vec{k}_1} \dots \bar{\omega}_{\vec{k}_n} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n} \right] \right\}. \quad (1.14)$$

Сумування за хвильовими векторами в (1.14) відбувається для $\vec{k} \in \mathcal{B}$. Однак змінні $\bar{\omega}_{\vec{k}}$ відповідно до (1.8) відмінні від нуля лише для $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$. Тому насправді суми в (1.14) слід виконувати лише для $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$. При цьому змінимо символ Кронекера $\delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n}$, де $\vec{k} \in \mathcal{B}$, на символ Кронекера $\delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n}$, який відноситься до множини хвильових векторів $\vec{k} \in \mathcal{B}_0$.

Відповідно до приведених вище міркувань, вираз для статистичної суми (1.9) записується у вигляді

$$Z = 2^N \exp \left(\frac{1}{2} \beta \Phi_0 N \right) e^{N \cdot \mathcal{M}_0} \int (d\eta)^{N_0} (d\omega)^{N_0} \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} + 2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \eta_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \right] \times \exp \left[\sum_{n=1}^{n_0} \frac{(-2\pi i)^n}{n!} s_0^{d(1-n/2)} N_0^{d(1-n/2)} \mathcal{M}_n(h') \times \right]$$

$$\left[\sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \omega_{\vec{k}_1}^- \dots \omega_{\vec{k}_n}^- \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n}^- \right]. \quad (1.15)$$

Величина n_0 визначає число доданків в показнику експоненти (1.15) і задає тим самим наближення, в якому проводяться розрахунки. Тим самим визначається тип "моделі". Випадок $n_0 = 2$ відповідає гаусовому наближенню. При цьому величина $\mathcal{M}_2(h')$ є додатною при всіх значеннях h і тим самим забезпечує збіжність інтегралів за змінними $\omega_{\vec{k}}^-$ при довільних значеннях поля. Зі збільшенням числа n_0 ($n_0 = 4, 6, 8, \dots$) ускладнюється тип моделі ρ^{n_0} . Для проведення точного розрахунку необхідно спрямувати n_0 до безмежності. Однак, при конкретних розрахунках n_0 вибирається скінченним. Важливо, що при малих значеннях h всі $\mathcal{M}_{2n}(h)$ мають такий знак, який забезпечує збіжність інтегралів за змінною $\omega_{\vec{k}}^-$ в (1.15). Це означає, що при виборі моделі ρ^{n_0} можемо використовувати довільні значення $n_0 = 2(n+2)$.

Виявляється, що при зростанні поля кумулянти $\mathcal{M}_{2n}(h)$ при $n \geq 2$ змінюють знак (див. додаток 1), що є свідченням нестійкості моделі ρ^{2n} . Зокрема, модель ρ^4 є стійкою для значень $h' \in (-h'_c, h'_c)$, де

$$h'_c = 0,658. \quad (1.16)$$

Якщо знайти значення магнітного поля, яке відповідає (1.16), то виявляється, що

$$\mathcal{H}_c \approx h' \cdot T_c 10^6 \left[\frac{a}{M} \right] \approx h' T_c \cdot 10^4 \text{ ерст.}$$

Тут T_c безрозмірне число, яке рівне значенню абсолютної температури фазового переходу $10^2 \div 10^3$. Отже

$$H_c \approx h' \cdot (10^6 \div 10^7) \text{ ерст.}$$

Зокрема, поле насичення намагніченості для заліза рівне

$$H_{Fe} = 1.99 \cdot 10^4 \text{ ерст.}$$

Це відповідає значенню

$$h_{Fe} \approx 0.01.$$

Отже, значення $h' = 0.1$ відповідає дуже сильним полям і модель ρ^4 може бути застосовною до дослідження критичної поведінки широкого кола реальних об'єктів.

Базове представлення статистичної суми моделі (1) знайдемо із (1.15), виконавши в ньому інтегрування за змінними $\omega_{\vec{k}}^-$. Для цього перейдемо до вузлових змінних $\omega_{\vec{l}}$. Відповідно до (1.6) маємо

$$Z = Z_0 \cdot j_0 \int (d\eta)^{N_0} \exp \left[\frac{1}{2} \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} (\Phi(k) - \Phi_0) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right] \times \\ \times \prod_{\vec{l} \in \Lambda_0} I_l(\eta_{\vec{l}}), \quad (1.17)$$

де

$$Z_0 = 2^N \exp \left[\frac{1}{2} \beta \Phi_0 N \right] e^{N \mathcal{M}_0}, \quad (1.18)$$

а для $I_l(\eta_{\vec{l}})$ маємо вираз

$$I_l(\eta_{\vec{l}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{\vec{l}} e^{2\pi i \eta_{\vec{l}} \omega_{\vec{l}}} \exp \left[-2\pi i \mathcal{M}_1 s_0^{d/2} \omega_{\vec{l}} - \right. \\ \left. - \frac{(2\pi)^2}{2} \mathcal{M}_2 \omega_{\vec{l}}^2 + \frac{(2\pi)^3}{3!} i \mathcal{M}_3 s_0^{-d/2} \omega_{\vec{l}}^3 + \frac{(2\pi)^4}{4!} \mathcal{M}_4 s_0^{-d} \omega_{\vec{l}}^4 \right]. \quad (1.19)$$

Слід зауважити, що тут кумулянти \mathcal{M}_n є функціями поля h ,

$$\eta_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \eta_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{l}}, \quad \omega_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \omega_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{l}}. \quad (1.20)$$

Для зручності розрахунків виконаємо в (1.19) заміну змінних

$$\omega_{\vec{l}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\mathcal{M}_2} \right)^{1/2} \nu_{\vec{l}}.$$

Тоді

$$I_l(\eta_{\vec{l}}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{\mathcal{M}_2} \right)^{1/2} J_l(\eta), \\ J_l(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu_2 \eta_{\vec{l}} \nu_{\vec{l}}} \exp \left(-ia' \nu_{\vec{l}} + ib' \nu_{\vec{l}}^3 - \nu_{\vec{l}}^2 - g \nu_{\vec{l}}^4 \right) d\nu_{\vec{l}}, \quad (1.21)$$

де введені позначення:

$$a' = s_0^{d/2} \mathcal{M}_1(h') \mu_2; \quad \mu_2 = \left(\frac{2}{\mathcal{M}_2(h')} \right)^{1/2}; \\ b' = s_0^{-d/2} \frac{1}{6} \mathcal{M}_3(h') \mu_2^3; \quad g = -s_0^{-d} \frac{1}{6} \mathcal{M}_4(h') / \mathcal{M}_2^2(h'). \quad (1.22)$$

Виконаємо в (1.21) інтегрування за змінними $\nu_{\vec{l}}$ і зобразимо результат розрахунку у вигляді

$$K_l(\eta_{\vec{l}}) = e^{a_0} \exp \left(- \sum_{n=1}^4 \frac{a_n}{n!} \eta_{\vec{l}}^n \right). \quad (1.23)$$

Коефіцієнти a_n знаходимо із системи рівнянь

$$\frac{\partial^n J_l(\eta_{\vec{l}})}{\partial \eta_{\vec{l}}^n} /_{\eta_{\vec{l}}=0} = \frac{\partial^n K_l(\eta_{\vec{l}})}{\partial \eta_{\vec{l}}^n} /_{\eta_{\vec{l}}=0}. \quad (1.24)$$

Маємо:

$$\begin{aligned} \exp(a_0) &= L_0, \\ a_1 &= -ie^{-a_0} \mu_2 L_1, \\ a_2 &= a_1^2 + e^{-a_0} \mu_2^2 L_2, \\ a_3 &= 3a_1 a_2 - a_1^3 + ie^{-a_0} \mu_2^3 L_3, \\ a_4 &= 4a_1 a_3 + 3a_2^2 - 6a_1^3 a_2 + a_1^4 - e^{-a_0} \mu_2^4 L_4, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де

$$L_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \nu^n \exp(-ia'\nu + ib'\nu^3 - \nu^2 - g\nu^4). \quad (1.26)$$

Слід зауважити, що величини L_1 та L_3 пропорційні до i , тому всі коефіцієнти a_n - дійсні величини. Їхні значення можуть бути обчислені для довільного значення $h'(h' < h'_c)$.

Виконаємо наближений розрахунок коефіцієнтів a_n . Для цього використаємо наближення першого непарного кумулянта. Вважати-мемо, що вплив непарних кумулянтів $\mathcal{M}_{2l+1}(h')$ є несуттєвим при $l \geq 1$. При розрахунках до уваги приймається лише перший непарний кумулянт $\mathcal{M}_1(h')$. Отже, при такому розгляді $b' = 0$. Зауважимо, що $b'/a' \sim s_0^{-d}$ і зменшується з ростом s_0 .

Виконуючи розрахунок коефіцієнтів a_n в наближенні першого непарного кумулянта, які надалі будемо позначати через a'_n , отримуємо:

$$\begin{aligned} e^{a'_0} &= e^{-a'^2/4} \sqrt{\pi} \left[1 - \frac{3}{4} g(1 - a'^2) \right], \\ a'_1 &= -\frac{a'}{2} \mu_2 (1 - 3g), \\ a'_2 &= \frac{1}{2} \mu_2^2 \left(1 - 3g \left(1 - \frac{a'^2}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_3 &= -\frac{3}{2} \mu_2^3 a' g, \\ a'_4 &= \frac{3}{2} \mu_2^4 g. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тут використана методика розрахунку із [4]. Статистична сума записується у вигляді

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 j_0 e^{\tilde{a}_0 N_0} \int (d\eta)^{N_0} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} d(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} - \right. \\ &\quad \left. - a_1 \sqrt{N_0} \eta_0 - \frac{1}{3!} \frac{a_3}{\sqrt{N_0}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} \frac{a_4}{N_0} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right], \end{aligned} \quad (1.28)$$

де

$$\begin{aligned} e^{\tilde{a}_0} &= \frac{\mu_2}{2\pi} e^{a_0} = (2\pi \mathcal{M}_2)^{-1/2} e^{-a'^2/4} \left[1 - \frac{3}{4} g(1 - a'^2) \right], \\ d(k) &= \tilde{a}_2 - \beta \Phi(0) + 2\beta \Phi(0) b^2 k^2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

а для коефіцієнта \tilde{a}_2 маємо

$$\tilde{a}_2 = a_2 + \beta \Phi_0. \quad (1.30)$$

Вираз (1.28) є початковим для поетапного розрахунку вільної енергії моделі Ізінга поблизу точки фазового переходу. На відміну від робіт [1-4] тут явним чином присутнє зовнішнє поле, яке є причиною появи непарних степенів змінної $\eta_{\vec{k}}$ в показнику експоненти. Коефіцієнти (a_1, a_3, \dots) при непарних степенях $\eta_{\vec{k}}$ пропорційні до поля і обертаються в нуль в границі $h \rightarrow 0$.

2. Спосіб розрахунку статистичної суми

Проведемо поетапний розрахунок статистичної суми (1.28), починаючи інтегрувати за змінними $\eta_{\vec{k}}$, для яких хвильові вектори \vec{k} близькі до їх максимальних значень B_0 , та закінчуючи інтегруванням за змінними $\eta_{\vec{k}}$ із $|\vec{k}| \rightarrow 0$. Скористаємося для цього методом обчислень, що був запропонований в [1].

Введемо зону Бріллюена

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_1} + \frac{2\pi}{c_1} \frac{n_i}{N_{1i}}; \right. \\ \left. n_i = 1, 2, \dots, N_{1i}, i = x, y, z \right\}, \quad (2.1)$$

для якої $c_1 = c_0 s$, $s \geq 1$, $N_{1x} N_{1y} N_{1z} = N_1$, $N_1 = N_0 s^{-d}$. N_1 число вузлів блочної ґратки, причому $N_1 = N_0 s^{-d}$. Подібним чином визначимо блочну ґратку з періодом $c_2 = c_0 \cdot s^2$, $c_3 = c_0 s^3, \dots, c_n = c_0 s^n$, які містять відповідно $N_2 = N_0 s^{-2d}$, $N_3 = N_0 s^{-3d}, \dots, N_n = N_0 s^{-3n}$ вузлів. При цьому параметр s регулює величину росту блочних структур. Відповідно до (2.1) вводимо об'єм періодичності

$$\Lambda_n = \left\{ \vec{l} = (l_x, l_y, l_z) \mid l_i = c_n \cdot n_i; n_i = 1, 2, \dots, N_{ni}, i = x, y, z \right\}, \quad (2.2)$$

де $N_n = N_{nx} N_{ny} N_{nz}$.

Відповідно до [2] виділяємо в (1.28) змінні $\eta_{\vec{k}}$ із $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$, та усереднюємо для цих значень хвильового вектора величину $\Phi(k)$. Тоді

$$\beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \Phi(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} = \beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \Phi(k) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} + \beta \Phi(B_0, B_1) \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1} \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}}.$$

Тут $\Phi(B_0, B_1)$ середнє значення потенціалу $\Phi(k)$ для $\vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1$. Для середньоарифметичного усереднення маємо

$$\Phi(B_0, B_1) = \frac{1}{2} [\Phi(B_0) + \Phi(B_1)]. \quad (2.3)$$

В результаті таких перетворень статистична сума запишеться у вигляді

$$Z = Z_0 j_0 e^{\tilde{a}_0 N_0} \int (d\rho)^{N_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} (d(k) - d(B_0 B_1)) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right] \\ \int (d\nu)^{N_1} \exp \left(-2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} - a_1 \sqrt{N_0} \rho_0 \right) \int (d\eta)^{N_0} \\ e^{2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} d(B_0, B_1) \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{3!} \frac{a_3}{\sqrt{N_0}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \\ & -\frac{1}{4!} \frac{a_4}{N_0} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \eta_{\vec{k}_1} \dots \eta_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \end{aligned} \right). \quad (2.4)$$

Тут

$$d(B_0, B_1) = \tilde{a}_2 - \beta \Phi(B_0, B_1) = d(0) + q, \quad (2.5)$$

де для q маємо:

$$q = \bar{q} \beta \Phi(0), \quad \bar{q} = b^2 \frac{\pi^2}{c^2} s_0^{-2} (1 + s^{-2}). \quad (2.6)$$

Множина N_1 змінних $\nu_{\vec{k}}$ ($\nu_0, \nu_{\vec{k}}^c, \nu_{\vec{k}}^s$) задає проміжне інтегрування. Введення останнього дозволяє виконати інтегрування в (2.4) за N_0 змінними $\eta_{\vec{k}}$. Для цього переходимо до вузлових змінних

$$\eta_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \eta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{l}}$$

з якобіаном переходу j_0^{-1} , який скорочується з відповідним множителем в (2.4), та введемо величину

$$\bar{\nu}_{\vec{l}} = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \bar{\nu}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{l}}, \quad (2.7)$$

де

$$\bar{\nu}_{\vec{k}} = \begin{cases} \nu_{\vec{k}}, & \vec{k} \in \mathcal{B}_1 \\ 0, & \vec{k} \in \mathcal{B}_0 \setminus \mathcal{B}_1 \end{cases}.$$

Результат інтегрування запишеться у вигляді

$$Z = Z_0 e^{\tilde{a}_0 N_0} \int (d\rho)^{N_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} [d(k) - d(B_0, B_1)] \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right\} \\ e^{-a_1 \sqrt{N_0} \rho_0} \int (d\nu)^{N_1} e^{-2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}}} \prod_{\vec{l} \in \Lambda_0} J(\bar{\nu}_{\vec{l}}), \quad (2.8)$$

де для $J(\bar{\nu}_l)$ маємо

$$J(\bar{\nu}_l) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_l e^{2\pi i \bar{\nu}_l \eta_l} \times \exp \left[-\frac{1}{2} d(B_0, B_1) \eta_l^2 - \frac{a_3}{3!} \eta_l^3 - \frac{a_4}{4!} \eta_l^4 \right]. \quad (2.9)$$

Для коефіцієнтів a_n можна використати наближені аналітичні вирази (1.27). Ці коефіцієнти можна також розраховувати без використання таких наближень, скориставшись формулами:

$$\begin{aligned} e^{a_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - gx^4} \cos(ax - bx^3), \\ a_1 &= -\mu_2 e^{-a_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \sin(ax - bx^3) e^{-x^2 - gx^4}, \\ a_2 &= a_1^2 + \mu_2^2 e^{-a_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^2 \cos(ax - bx^3) e^{-x^2 - gx^4}, \\ a_3 &= 3a_1 a_2 - a_1^3 + \mu_2^3 e^{-a_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^3 \sin(ax - bx^3) e^{-x^2 - gx^4}, \\ a_4 &= 4a_1 a_3 + 3a_2^2 - 6a_1^2 a_2 + a_1^4 - \\ &\quad - \mu_2^4 e^{-a_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^4 \cos(ax - bx^3) e^{-x^2 - gx^4}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де величини μ_2 , a та b приведені в (1.22). Формули (2.10) легко узагальнюються на випадок моделей вищого порядку ρ^6 , ρ^8 і т.д., шляхом доповнення аргумента A функцій $\sin A$ (чи $\cos A$), а також показника експоненти доданками типу $-fx^6 - kx^8 + \dots$ (див. [4]).

Для проведення подальших розрахунків зручно виконати в (2.9) заміну змінних [3]

$$\eta_l = \left(\frac{24}{a_4} \right)^{1/4} x.$$

Тоді для $J(\bar{\nu}_l)$ знаходимо

$$J(\bar{\nu}_l) = \left(\frac{24}{a_4} \right)^{1/4} T(\bar{\nu}_l), \quad (2.11)$$

де

$$T(\bar{\nu}_l) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\pi i \bar{\nu}_l x (24/a_4)^{1/4}} e^{-h_2 x^2 - h_3 x^3 - x^4}. \quad (2.12)$$

Тут

$$h_2 = \sqrt{6} \frac{d(B_0, B_1)}{\sqrt{a_4}}; \quad h_3 = h_{30} \frac{a_3}{(a_4)^{3/4}}, \quad h_{30} = \frac{(24)^{3/4}}{6}. \quad (2.13)$$

Зобразимо величину $T(\bar{\nu}_l)$ у вигляді

$$T_s(\bar{\nu}_l) = \exp \left(- \sum_{n=0}^4 \frac{S_n}{n!} \bar{\nu}_l^n \right). \quad (2.14)$$

Коефіцієнти S_n розраховуємо подібно до того, як це робилося при обчисленні коефіцієнтів a_n із (1.23). Маємо систему рівнянь

$$\left. \frac{\partial^n T(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^n} \right|_{\bar{\nu}_l=0} = \left. \frac{\partial^n T_s(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^n} \right|_{\bar{\nu}_l=0}. \quad (2.15)$$

Ліва частина (2.15) має вигляд

$$\frac{\partial^n T(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^n} = (2\pi i)^n \left(\frac{24}{a_4} \right)^{n/4} K_n(h_2, h_3), \quad (2.16)$$

де для $K(h_2, h_3)$ маємо

$$K_n(h_2, h_3) = \int dx x^n e^{-h_2 x^2 - h_3 x^3 - x^4}. \quad (2.17)$$

Для похідних від правої частини (2.15) знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l} &= e^{-S_0} (-S_1), \\ \frac{\partial^2 T_s(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^2} &= e^{-S_0} (-S_2 + S_1^2), \\ \frac{\partial^3 T_s(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^3} &= e^{-S_0} (-S_3 + 3S_1 S_2 - S_1^3), \\ \frac{\partial^4 T_s(\bar{\nu}_l)}{\partial \bar{\nu}_l^4} &= e^{-S_0} (-S_4 + 4S_1 S_3 + 3S_2^2 - 6S_1^2 S_2 + S_1^4), \end{aligned} \quad (2.18)$$

де

$$e^{-S_0} = \int dx \exp(-h_2 x^2 - h_3 x^3 - x^4). \quad (2.19)$$

Як було показано в [2,4] величина h_2 є малою, коли температура прямує до T_c . Аргумент h_3 є пропорційний до поля h і також є малим,

коли ми наближаємося до точки фазового переходу. Приймаючи це до уваги отримуємо наближений вираз для (2.19)

$$e^{-S_0} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\Gamma(3/4)} \left(1 - \gamma h_2 + \frac{3}{8}\gamma h_3^2\right), \quad (2.20)$$

де $\gamma = (\Gamma(\frac{3}{4}))^2 / \pi\sqrt{2} \approx 0.337989$. Тут і надалі ми не будемо приймати до уваги доданків, пропорційних до h_2^n із $n \geq 2$, та h_3^n із $l \geq 3$, оскільки вони стають несуттєвими при наближенні до точки фазового переходу.

Для коефіцієнтів S_n із (2.14) відповідно до (2.15) знаходимо

$$\begin{aligned} S_1 &= -2\pi i \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/4} e^{S_0} K_1(h_2, h_3), \\ S_2 &= S_1^2 + (2\pi)^2 \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/2} e^{S_0} K_2(h_2, h_3), \\ S_3 &= 3S_1 S_2 - S_1^3 + (2\pi)^3 i \left(\frac{24}{a_4}\right)^{3/4} e^{S_0} K_3(h_2, h_3), \\ S_4 &= 4S_1 S_3 + 3S_2^2 - 6S_1^2 S_2 + S_1^4 - (2\pi)^4 \frac{24}{a_4} e^{S_0} K_4(h_2, h_3). \end{aligned} \quad (2.21)$$

В наближенні малих h_2 та h_3 маємо:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi i \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/4} \frac{1}{4} h_3 (1 + \gamma h_2), \\ S_2 &= (2\pi)^2 \gamma \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/2} \left(1 + \left(\gamma - \frac{1}{4\gamma}\right) h_2\right), \\ S_3 &= -(2\pi)^3 i \left(\frac{24}{a_4}\right)^{3/4} \frac{3(1 - 4\gamma^2)}{16} h_2 h_3, \\ S_4 &= (2\pi)^4 \frac{6}{a_4} (12\gamma^2 - 1) (1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3^2), \end{aligned} \quad (2.22)$$

де введені позначення

$$\gamma_2 = 4\gamma \frac{6\gamma^2 - 1}{12\gamma^2 - 1} \approx -1,1468 \quad \gamma_3 = -\frac{3\gamma}{12\gamma^2 - 1} = -2.7342.$$

Для спрощення розрахунків будемо використовувати для (2.22) лінійне наближення. При цьому нехтуватимемо доданками, пропорційними до h_3^2 та $h_2 h_3$.

Статистична сума після здійснення інтегрування в (2.8) за змінними $\eta_{\vec{k}}$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 \int (d\rho)^{N_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} [d(k) - d(B_0, B_1)] \right. \\ &\quad \left. \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - a_1 \sqrt{N_0} \rho_0 \right] \int (d\nu)^{N_1} \exp \left[-2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} \right] \\ &\quad \exp \left[-\sum_{\vec{l} \in \Lambda_0} S_1 \bar{\nu}_{\vec{l}} - \frac{1}{2} S_2 \sum_{\vec{l} \in \Lambda_0} \bar{\nu}_{\vec{l}}^2 - \frac{1}{4!} S_4 \sum_{\vec{l} \in \Lambda_0} \bar{\nu}_{\vec{l}}^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тут

$$\begin{aligned} Q_0 &= [e^{\bar{a}_0} Q(d)]^{N_0}, \\ Q(d) &= \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/4} \cdot K_0(h_2, h_3). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Наближений вигляд $Q(d)$ наступний

$$Q(d) = \left(\frac{24}{a_4}\right)^{1/4} \gamma_1 \left(1 - \gamma h_2 + \frac{3}{8}\gamma h_3^2\right), \quad (2.25)$$

де

$$\gamma_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\Gamma(3/4)} \approx 1.8128. \quad (2.26)$$

Скориставшись (2.7), отримуємо

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 (d\rho)^{N_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} [d(k) - d(B_0, B_1)] \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} \right. \\ &\quad \left. - a_1 \sqrt{N_0} \rho_0 \right\} \int (d\nu)^{N_1} \exp \left\{ -2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \rho_{\vec{k}} - S_1 \sqrt{N_0} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} S_2 \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} \nu_{-\vec{k}} - \frac{1}{4!} S_4 \frac{1}{N_0} \sum_{\substack{\vec{k}_1 \dots \vec{k}_4 \\ k_i \in \mathcal{B}_1}} \nu_{\vec{k}_1} \dots \nu_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Завершальний етап розрахунку полягає в виконанні інтегрування за N_1 змінними $\nu_{\vec{k}}$. Для цього переходимо в (2.27) до вузлових змінних

$$\nu_{\vec{m}} = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} \nu_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{m}}$$

і виконуємо інтегрування. Маємо

$$Z = Z_0 Q_0 \int (d\rho)^{N_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} [d(k) - d(B_0, B_1)] \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - a_1 \sqrt{N_0} \rho_0 \right\} \prod_{\vec{m} \in \Lambda_1} L_m(\rho), \quad (2.28)$$

де

$$L_m(\rho) = \int d\nu_{\vec{m}} \exp \left(-2\pi i \nu_{\vec{m}} \rho_{\vec{m}} - 2\pi i P_1 \nu_{\vec{m}} - \frac{(2\pi)^2}{2} P_2 \nu_{\vec{m}}^2 - \frac{(2\pi)^4}{4!} P_4 \nu_{\vec{m}}^4 \right), \quad (2.29)$$

де

$$\begin{aligned} P_1 &= s^{d/2} \frac{1}{4} \left(\frac{24}{a_4} \right)^{1/4} h_3, \\ P_2 &= \gamma \left(\frac{24}{a_4} \right)^{1/2} (1 + t_2 h_2), \\ P_4 &= s^{-d} \frac{6}{a_4} (12\gamma^2 - 1)(1 + \gamma_2 h_2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

де

$$t_2 = \gamma - \frac{1}{4\gamma} = -0.4017.$$

Виконаємо в (2.29) заміну змінних

$$\nu_{\vec{m}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{P_2} \right)^{1/2} x.$$

Тоді для $L_m(\rho)$ знаходимо

$$L_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{P_2} \right)^{1/2} \tilde{R}_m(\rho), \quad (2.31)$$

де

$$\tilde{R}_m(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-ix\rho_m \left(\frac{2}{P_2} \right)^{1/2} - iG_h x - x^2 - Gx^4 \right], \quad (2.32)$$

де

$$G = \frac{1}{6} \frac{P_4}{P_2^2}; \quad G_h = P_1 \left(\frac{2}{P_2} \right)^{1/2}. \quad (2.33)$$

Використовуючи (2.30), знаходимо

$$\begin{aligned} G &= s^{-d} G_0 (1 + G_2 h_2), \\ G_h &= s^{d/2} \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{1/2} h_3, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{12\gamma^2 - 1}{24\gamma^2} \approx 0.1353; \\ G_2 &= \gamma_2 - 2\gamma + \frac{1}{2\gamma} \approx -0.3435. \end{aligned}$$

Зобразимо (2.32) у вигляді

$$L_m(\rho) = \exp \left(- \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} a_n^{(1)} \rho_{\vec{m}}^n \right). \quad (2.35)$$

Із системи типу (1.24) знайдемо коефіцієнти $a_n^{(1)}$. Із (2.32) маємо

$$\frac{\partial^n R_m(\rho)}{\partial \rho_{\vec{m}}^n} = (-i)^n \left(\frac{2}{P_2} \right)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^n e^{-iG_h x - x^2 - Gx^4}. \quad (2.36)$$

Похідні за $\rho_{\vec{m}}$ від (2.35) аналогічні до (2.18), де замість S_n слід підставити $a_n^{(1)}$. Порівнюючи ці похідні між собою при $\rho_{\vec{m}} = 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= i \cdot e^{a_0^{(1)}} \left(\frac{2}{P_2} \right)^{1/2} R_1, \\ a_2^{(1)} &= (a_1^{(1)})^2 + e^{a_0^{(1)}} \frac{2}{P_2} R_2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$a_3^{(1)} = 3a_1^{(1)} a_2^{(1)} - (a_1^{(1)})^3 - i e^{a_0^{(1)}} \left(\frac{2}{P_2} \right)^{3/2} R_3,$$

$$a_4^{(1)} = 4a_1^{(1)}a_3^{(1)} + 3(a_2^{(1)})^2 - 6(a_1^{(1)})^2a_2^{(1)} - (a_1^{(1)})^4 - \left(\frac{2}{P_2}\right)^2 e^{a_0^{(1)}} R_4.$$

Тут

$$\begin{aligned} R_{2l+1} &= -i \left(\frac{2}{P_2}\right)^{(2l+1)/2} (-1)^{(2l+1)/2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2l+1} \sin(G_h \cdot x) e^{-x^2 - Gx^4} \\ R_{2l} &= \left(\frac{2}{P_2}\right)^l (-1)^l \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2l} \cos(G_h \cdot x) e^{-x^2 - Gx^4}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Із структури виразів (2.36), (2.37) видно, що всі $a_n^{(1)}$ є дійсними величинами. Подібно до того, як були розраховані наближені вирази для коефіцієнтів a_n (див. (1.21)-(1.27)), можемо записати наближені вирази для $a_n^{(1)}$. При цьому маємо наступну відповідність:

$$a \rightarrow G_h, \quad g \rightarrow G, \quad \mu_2 \rightarrow \left(\frac{2}{P_2}\right)^{1/2}.$$

Крім того, відмінність полягає в зміні знаку біля перехресного члена $x \cdot \rho_m$ виразу (2.32) та відповідного йому доданку $\eta_l \nu_l$ в (1.21).

Наближені вирази для R_n наступні:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{i}{2} G_h e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{15}{4} G\right), \\ R_2 &= \frac{1}{2} e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{15}{4} G\right), \\ R_3 &= \frac{3i}{4} G_h e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{35}{4} G\right), \\ R_4 &= \frac{3}{4} e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{35}{4} G\right). \end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази в (2.37), знаходимо наближені формули для коефіцієнтів $a_n^{(1)}$:

$$\begin{aligned} e^{-a_0^{(1)}} &= e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{3}{4} G\right), \\ a_1^{(1)} &= \frac{1}{2} G_h \left(\frac{2}{P_2}\right)^{1/2} (1 - 3G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2^{(1)} &= \frac{1}{P_2} (1 - 3G), \\ a_3^{(1)} &= \frac{3}{2} G G_h \left(\frac{2}{P_2}\right)^{3/2}, \\ a_4^{(1)} &= 6G \left(\frac{1}{P_2}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4} G_h^2\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Тут величини G та G_R приведені в (2.34), а P_2 в (2.30). Статистична сума (2.28) із врахуванням (2.31), (2.35) набуває вигляду

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 (Q(P))^{N_1} \times \\ &\quad \times \int (d\rho)^{N_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} d_1(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \tilde{a}_1^{(1)} \sqrt{N_1} \rho_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{a_3^{(1)}}{\sqrt{N_1}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_1}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} \frac{a_4^{(1)}}{N_1} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_1}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

де

$$Q(P) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{P_2}\right)^{1/2} e^{-a_0^{(1)}}. \quad (2.41)$$

Для коефіцієнтів $d_1(k)$ та $\tilde{a}_1^{(1)}$ маємо

$$\begin{aligned} d_1(k) &= \tilde{a}_2^{(1)} - \beta \Phi(k); \\ \tilde{a}_2^{(1)} &= a_2^{(1)} + \beta \Phi(B_0, B_1); \\ \tilde{a}_1^{(1)} &= a_1^{(1)} + s^{d/2} a_1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Порівнюючи (2.39) із (1.28) бачимо, що функціональний вигляд статистичної суми не змінився. Зменшилося число змінних інтегрування (із N_0 до $N_1 = N_0 s^{-d}$) та іншими стали коефіцієнти $d(k)$ та a_n .

3. Рекурентні співвідношення

Запишемо явний вигляд рекурентних співвідношень (2.37), які виражають коефіцієнти $a_n^{(1)}$ через їхні початкові значення a_n із (1.25) чи

наближені вирази (1.27). Скориставшись формулами (2.34), (2.30) на підставі (2.37) знаходимо

$$e^{-a_0^{(1)}} = e^{-G_h^2/4} \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{3}{4}s^{-d}G_0\right) (1 - t_1 h_2), \quad (3.1)$$

де

$$t_1 = -\frac{3}{4}s^{-d} \frac{G_0 G_2}{1 - \frac{3}{4}s^{-d}G_0},$$

а також

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= s^{d/2} \alpha_{01} \left(\frac{a_4}{24}\right)^{1/4} h_3(1 + \alpha_1 h_2), \\ a_2^{(1)} &= f_{00} (a_4)^{1/2} (1 + \alpha_2 h_2), \\ a_3^{(1)} &= s^{-d/2} f_{01} a_3(1 + \alpha_3 h_2), \\ a_4^{(1)} &= s^{-d} f_{01} a_4(1 + \alpha_4 h_2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

де введені позначення:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= (1 - 3s^{-d}G_0)/4\gamma, & f_{00} &= (1 - 3s^{-d}G_0)/\gamma\sqrt{24}; \\ f_{01} &= G_0/4\gamma^2 \approx 0.2960 \\ \alpha_1 &= -3s^{-d} \frac{G_0 G_2}{1 - 3s^{-d}G_0} - \frac{1}{2}t_2; \\ \alpha_2 &= -3s^{-d} \frac{G_0 G_2}{1 - 3s^{-d}G_0} - t_2; \\ \alpha_3 &= G_2 - \frac{3}{2}t_2 \approx 0.2590; & \alpha_4 &= G_2 - 2t_2 \approx 0.4599. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $s = s^*$ маємо:

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= 0.7319, & f_{00} &= 0.5976; \\ \alpha_1 &= 0.2045, & \alpha_2 &= 0.4053. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (2.13) із (3.2), отримуємо

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= s^{d/2} f_{00} \left[a_3 (a_4)^{-1/2} + \sqrt{6} \alpha_1 d(B_0, B_1) a_3 / a_4 \right], \\ a_2^{(1)} &= f_{00} \left[a_4^{1/2} + \sqrt{6} \alpha_2 d(B_0, B_1) \right], \\ a_3^{(1)} &= s^{-d/2} f_{01} \left[a_3 + \sqrt{6} \alpha_3 d(B_0, B_1) a_3 / a_4^{-1/2} \right], \\ a_4^{(1)} &= s^{-d} f_{01} \left[a_4 + \sqrt{6} \alpha_4 d(B_0, B_1) a_4^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Виконаємо в (2.39) заміну змінних

$$\rho_{\vec{k}} = s \rho'_{\vec{k}}. \quad (3.5)$$

Внаслідок цього залежна від \vec{k} частина фур'є-образу потенціалу взаємодії у (2.39) змінюється з k^2 на $(sk)^2$. Приймаючи до уваги, що $\vec{k} \in \mathcal{B}_1$, то $s\vec{k}$ змінюється на інтервалі $[0, \mathcal{B}_0]$, як це мало місце для початкового виразу (1.28). Отже тепер можна порівняти решту коефіцієнтів виразів до і після інтегрування.

Заміна (3.5) в (2.39) приводить до результату

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 (Q(P))^{N_1} s^{N_1} \int (d\rho)^{N_1} \exp \left\{ -w_1 \sqrt{N_1} \rho_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_1} (r_1 + 2\beta\Phi(0)b^2(sk)^2) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \frac{1}{3!} \frac{v_1}{\sqrt{N_1}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_1}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \right. \\ &\quad \left. \rho_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \frac{1}{4!} \frac{u_1}{N_1} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_1}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4} \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де для коефіцієнтів маємо

$$\begin{aligned} w_1 &= s \cdot \tilde{a}_1^{(1)} = s[a_1^{(1)} + s^{d/2} a_1], \\ r_1 &= s^2 d_1(0) = s^2[\tilde{a}_2^{(1)} - \beta\Phi(0)], \\ v_1 &= s^3 a_3^{(1)}; & u_1 &= s^4 a_4^{(1)}. \end{aligned}$$

Приймаючи до уваги (3.4) отримуємо явний вигляд РС

$$\begin{aligned} w_1 &= s^{(d+2)/2} \left[w + f_{00} v u^{-1/2} - f_{00} \alpha_1 \sqrt{6} (r + q) v / u \right], \\ r_1 &= s^2 \left[r - (r + q) + f_{00} u^{1/2} + f_{00} \alpha_2 \sqrt{6} (r + q) \right], \\ v_1 &= s^{(6-d)/2} f_{01} \left[v + \alpha_3 \sqrt{6} (r + q) v u^{-1/2} \right], \\ u_1 &= s^{4-d} f_{01} \left[u + \alpha_4 \sqrt{6} (r + q) u^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тут введені позначення

$$w = a_1, \quad r = \tilde{a}_2 - \beta\Phi(0), \quad v = a_3, \quad u = a_4.$$

Для величини q маємо

$$q = 2\beta\Phi(0)b^2 \langle k^2 \rangle_{B_0, B_1},$$

а середнє значення k^2 на інтервалі $\vec{k} \in [B_1, B_0]$ рівне

$$\langle k^2 \rangle_{B_0, B_1} = B_0^2 \frac{1}{2} (1 + s^{-2}).$$

Знайдемо фіксовану точку РС (3.7) із умов

$$\begin{aligned} w_1 = w = w^*, & \quad r_1 = r = r^*, \\ v_1 = v = v^*, & \quad u_1 = u = u^*. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Із останнього рівняння (3.7) маємо

$$(sf_{01})^{-1} = 1 + \alpha_4 h_2^*,$$

де $h_2^* = \sqrt{6}(r^* + q)(u^*)^{-1/2}$. Оскільки $f_{01} < 1$ завжди існує таке значення $s = s^*$

$$s^* = f_{01}^{-1} = \frac{96\gamma^4}{12\gamma^2 - 1}, \quad (3.9)$$

при яких величина h_2^* обертається в нуль. Для s близьких до s^* величина h_2^* є малою¹. Проводячи розрахунок статистичної суми при

$$s = s^* = 3.3783$$

ми суттєво спрощуємо розрахунки, оскільки в розкладах за степенями h_2 можемо обмежитися декількома доданками. Із третього рівняння (3.7) для (3.8) знаходимо

$$v^*(1 - s^{3/2} f_{01}) = 0. \quad (3.10)$$

При $s = s^*$ маємо, що $f_{01} = (s^*)^{-1}$ і тому рівність (3.10) може виконуватися лише для

$$v^* = 0.$$

Величина $h_3^* = h_{30}v^*/(u^*)^{3/2}$ є пропорційною до v^* . Отже у фіксованій точці при $s = s^*$ маємо

$$h_2^* = 0, \quad h_3^* = 0. \quad (3.11)$$

¹У випадку $s = 3$ для h_2^* маємо:

$$h^* = 0.1124.$$

Із другого рівняння (3.7) знаходимо

$$(u^*)^{1/2} = q \cdot f_{00}^{-1}(1 - s^{-2}) = \beta\Phi(0) \frac{\bar{q}}{f_{00}}(1 - s^{-2}),$$

де величина \bar{q} означена в (2.6). Перше рівняння (3.7) приводить до умови:

$$w^* = 0.$$

Таким чином маємо наступні координати фіксованої точки РС (3.7)

$$w^* = 0, \quad r^* = -q, \quad v^* = 0, \quad (u^*)^{1/2} = qf_{00}^{-1}(1 - s^{*-2}). \quad (3.12)$$

Тут $q = \beta\Phi(0) \cdot \bar{q}$, $\bar{q} = \pi^2(b/c)^2 s_0^{-2}(1 + s^{-2})$.

Повернемося до виразу (2.40). Подібно до (1.28), його можна проінтегрувати за змінними $\rho_{\vec{k}}$, індекси яких приймають значення в інтервалі

$$\vec{k} \in \mathcal{B}_1/\mathcal{B}_2, \quad (3.13)$$

де для \mathcal{B}_2 маємо

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid = -\frac{\pi}{c_2} + \frac{2\pi}{c_2} \frac{n_i}{N_{2i}}; \right.$$

$$\left. n_i = 1, 2, \dots, N_{2i}, i = x, y, z \right\}.$$

Тут $N_{2x}N_{2y}N_{2z} = N_2$, $N_2 = N_1 s^{-d}$. Розрахунок проводиться аналогічно до формул (2.4)-(2.40). При цьому коефіцієнти a_n слід замінити на $a_n^{(1)}$, зокрема:

$$a_1 \rightarrow \tilde{a}_1^{(1)} = a_1^{(1)} + s^{d/2} a_1,$$

$$a_2 - \beta\Phi_0 = \tilde{a}_2 \rightarrow \tilde{a}_2^{(1)} + \beta\Phi(B_0, B_1),$$

$$a_3 \rightarrow a_3^{(1)}; \quad a_4 \rightarrow a_4^{(1)}.$$

В результаті інтегрування за змінними $\rho_{\vec{k}}$, де \vec{k} приймає значення із (3.13) для (2.39) знаходимо:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 Q_1 [Q(P^{(1)})]^{N_2} \times \\ &\times \int (d\rho)^{N_2} \exp \left\{ -\tilde{a}_1^{(2)} \sqrt{N_2} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_2} d_2(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3!} \frac{a_3^{(2)}}{\sqrt{N_2}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_2}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_3} \delta_{\rho_{\vec{k}_1} + \dots + \rho_{\vec{k}_3}} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{1}{4!} \frac{a_4^{(2)}}{N_2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_2}} \rho_{\vec{k}_2} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\rho_{\vec{k}_1} + \dots + \rho_{\vec{k}_4}} \right\}. \quad (3.14)$$

Тут

$$\begin{aligned} Q_1 &= [Q(P)Q(d_1)]^{N_1}, \\ Q(d_1) &= \left(\frac{24}{a_4^{(1)}}\right)^{1/4} \gamma_1 \left[1 - \gamma h_2^{(1)} + \frac{3}{8} \gamma (h_3^{(1)})^2\right], \\ Q(P^{(1)}) &= \left(2\pi P_2^{(1)}\right)^{-1/2} \exp\left[-(G_h^{(1)})^2/4\right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{3}{4} G^{(1)}(1 - G_h^{(1)2})\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

де введені позначення

$$h_2^{(1)} = \sqrt{6} d_1(B_1, B_2) (a_4^{(1)})^{-1/2}, G^{(1)} = s^{-d} G_0 (1 + G_2 h_2^{(1)});$$

$$h_3^{(1)} = h_{30} a_3^{(1)} (a_4^{(1)})^{-3/4}, G_h^{(1)} = s^{d/2} \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2} h_3^{(1)},$$

$$P_2^{(1)} = \left(\frac{24}{a_4^{(1)}}\right)^{1/2} \gamma (1 + t_2 h_2^{(1)}). \quad (3.16)$$

Для коефіцієнтів $a_n^{(2)}$ маємо

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= s^{d/2} \alpha_{01} \left(\frac{a_4^{(1)}}{24}\right)^{1/4} h_3^{(1)} (1 + \alpha_1 h_2^{(1)}), \\ a_2^{(2)} &= f_{00} \left(a_4^{(1)}\right)^{1/2} (1 + \alpha_2 h_2^{(1)}), \\ a_3^{(2)} &= s^{-d/2} f_{01} a_3^{(1)} (1 + \alpha_3 h_2^{(1)}), \\ a_4^{(2)} &= s^{-d} f_{01} a_4^{(1)} (1 + \alpha_4 h_2^{(1)}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тут постійні α_{0i} , f_{01} та α_i приведені в (3.3). Для $d_2(k)$ маємо

$$d_2(k) = \tilde{a}_2^{(2)} - \beta \Phi(k),$$

де

$$\tilde{a}_2^{(2)} = a_2^{(2)} + \beta \Phi(B_1, B_2),$$

$$\tilde{a}_1^{(2)} = a_1^{(2)} + s^{d/2} \tilde{a}_1^{(1)}.$$

Внаслідок проведення $(n+1)$ -ого поетапного інтегрування в (1.28) отримуємо

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 Q_0 Q_1 \dots Q_n [Q(P^{(n)})]^{N_{n+1}} \int (d\rho)^{N_{n+1}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\tilde{a}_1^{(n+1)} \sqrt{N_{n+1}} \rho_0 - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_{n+1}} d_{n+1}(k) \rho_{\vec{k}} \rho_{-\vec{k}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} \frac{a_3^{(n+1)}}{\sqrt{N_{n+1}}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n+1}}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_3} \delta_{\rho_{\vec{k}_1} + \dots + \rho_{\vec{k}_3}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4!} \frac{a_4^{(n+1)}}{N_{n+1}} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_{n+1}}} \rho_{\vec{k}_1} \dots \rho_{\vec{k}_4} \delta_{\rho_{\vec{k}_1} + \dots + \rho_{\vec{k}_4}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сумування в (3.18) відбувається за $\vec{k} \in \mathcal{B}_{n+1}$, де

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+1} &= \left\{ \vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \mid k_i = -\frac{\pi}{c_{n+1}} + \frac{2\pi}{c_{n+1}} \frac{n_i}{N_{n+1,i}}; \right. \\ &\quad \left. n_i = 1, 2, \dots, N_{n+1,i} \right\}, \end{aligned}$$

де $c_{n+1} = cs^{n+1}$, $N_{n+1,x} N_{n+1,y} N_{n+1,z} = N_{n+1}$, причому $N_{n+1} = N_0 s^{-d(n+1)}$. Для парціальних статистичних сум Q_n маємо

$$Q_0 = [e^{\tilde{a}_0} Q(d)]^{N_0}, \quad Q_n = [Q(P^{(n-1)})Q(d_n)]^{N_n}, \quad (3.19)$$

де

$$\begin{aligned} Q(P^{(n-1)}) &= (2\pi P_2^{(n-1)})^{-1/2} \exp\left[-(G_h^{(n-1)})^2/4\right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{3}{4} G^{(n-1)}(1 - G_h^{(n-1)2})\right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$Q(d_n) = \left(\frac{24}{a_n^{(n)}}\right)^{1/4} \gamma_1 \left[1 - \gamma h_2^{(n)} + \frac{3}{8} \gamma (h_3^{(n)})^2\right].$$

Тут

$$h_2^{(n)} = \sqrt{6} d_n(B_n, B_{n+1}) (a_4^{(n)})^{-1/2}; G^{(n-1)} = s^{-d} G_0 (1 + G_2 h_2^{(n-1)});$$

$$h_3^{(n)} = h_{30} a_3^{(n)} (a_4^{(n)})^{-3/4}; G_h^{(n-1)} = s^{d/2} \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2} h_3^{(n-1)};$$

$$P_2^{(n-1)} = \left(\frac{24}{a_4^{(n-1)}}\right)^{1/2} \gamma (1 + t_2 h_2^{(n-1)}). \quad (3.21)$$

Величина $d_{n+1}(k)$ має вигляд

$$d_{n+1}(k) = \tilde{a}_2^{(n+1)} - \beta \Phi(k),$$

де

$$\tilde{a}_2^{(n+1)} = a_2^{(n+1)} + \beta \Phi(B_n, B_{n+1}), \quad \tilde{a}_1^{(n+1)} = a_1^{(n+1)} + s^{d/2} \tilde{a}_1^{(n)}.$$

Коефіцієнти $a_n^{(n+1)}$ мають вигляд

$$a_1^{(n+1)} = s^{d/2} \alpha_{01} \left(\frac{a_4^{(n)}}{24}\right)^{1/4} h_3^{(n)} (1 + \alpha_1 h_2^{(n)}),$$

$$a_2^{(n+1)} = f_{00} \left(a_4^{(n)}\right)^{1/2} (1 + \alpha_2 h_2^{(n)}),$$

$$a_3^{(n+1)} = s^{-d/2} f_{01} a_3^{(n)} (1 + \alpha_3 h_2^{(n)}), \quad (3.22)$$

$$a_4^{(n+1)} = s^{-d} f_{01} a_4^{(n)} (1 + \alpha_4 h_2^{(n)}).$$

Для величини $d_n(B_n, B_{n+1})$ маємо

$$d_n(B_n, B_{n+1}) = d_n(0) + q s^{-2n}.$$

Запишемо РС між коефіцієнтами $(n+1)$ -ої та n -тої блочних структур. Виконаємо в (3.18) масштабні перетворення типу (3.6) та введемо позначення

$$w_{n+1} = s^{n+1} \tilde{a}_1^{(n+1)} = s^{n+1} \left[a_1^{(n+1)} + s^{d/2} a_1^{(n)} \right],$$

$$r_{n+1} = s^{2(n+1)} d_{n+1}(0) = s^{2(n+1)} \left[\tilde{a}_2^{(n+1)} - \beta \Phi(0) \right],$$

$$v_{n+1} = s^{3(n+1)} a_3^{(n+1)}, \quad u_{n+1} = s^{4(n+1)} a_4^{(n+1)}.$$

Тоді отримуємо наступні рекурентні співвідношення

$$w_{n+1} = s^{(d+2)/2} \left[w_n + f_{00} v_n u_n^{-1/2} - f_{00} \alpha_1 \sqrt{6} (r_n + q) v_n / u_n \right],$$

$$r_{n+1} = s^2 \left[q + f_{00} u_n^{1/2} + f_{00} \alpha_2 \sqrt{6} (r_n + q) \right],$$

$$v_{n+1} = s^{(6-d)/2} f_{01} \left[v_n + \alpha_3 \sqrt{6} (r_n + q) v_n / u_n^{-1/2} \right],$$

$$u_{n+1} = s^{4-d} f_{01} \left[u_n + \alpha_4 \sqrt{6} (r_n + q) u_n^{1/2} \right], \quad (3.23)$$

де величини f_{00} та f_{01} приведені в (3.3),

$$w_n = s^n \tilde{a}_1^{(n)}, \quad r_n = s^{2n} d_n(0),$$

$$v_n = s^{3n} a_3^{(n)}, \quad u_n = s^{4n} a_4^{(n)}. \quad (3.24)$$

У випадку відсутності зовнішнього поля ($h = 0$) в РС (3.23) залишається лише друге та четверте рівняння. Такий випадок детально досліджений нами в [2,4].

4. Дослідження рекурентних співвідношень

Порівнюючи РС (3.23) із (3.7) зауважимо, що вони мають ту саму фіксовану точку (3.12). Надалі будемо вважати, що $s = s^*$, де s^* задане в (3.9). Запишемо (3.23) в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} w_{n+1} - w^* \\ r_{n+1} - r^* \\ v_{n+1} - v^* \\ u_{n+1} - u^* \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} w_n - w^* \\ r_n - r^* \\ v_n - v^* \\ u_n - u^* \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Для елементів R_{ij} матриці \mathcal{R} маємо:

$$R_{11} = s^{(d+2)/2}, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = s^{(d+2)/2} f_{00} (u^*)^{1/2}, \quad R_{14} = 0;$$

$$R_{21} = 0; \quad R_{22} = s^2 f_{00} \alpha_2 \sqrt{6}, \quad R_{23} = 0, \quad R_{24} = s^2 f_{00} \frac{1}{2} (u^*)^{-1/2};$$

$$R_{31} = 0, \quad R_{32} = 0; \quad R_{33} = s^{d/2} f_{01}, \quad R_{34} = 0;$$

$$R_{41} = 0; \quad R_{42} = s f_{01} \alpha_4 \sqrt{6} (u^*)^{1/2}; \quad R_{43} = 0; \quad R_{44} = s f_{01}. \quad (4.2)$$

Матриця \mathcal{R} має чотири різні дійсні власні значення

$$E_1 = R_{11} = s^{(d+2)/2}; \quad E_3 = R_{33} = s^{d/2} f_{01} = s^{(d-2)/2},$$

$$E_{2,4} = \frac{1}{2} \left\{ R_{22} + R_{44} \pm [(R_{22} - R_{44})^2 + 4R_{24}R_{42}]^{1/2} \right\}. \quad (4.3)$$

Зауважимо, що власні значення E_1 та E_3 пов'язані з наявністю зовнішнього поля. Обидва вони більші за одиницю², оскільки $s > 1$. Що стосується величин E_2, E_4 , то вони дійсні, додатні та $E_2 > 1$, а $E_4 < 1$. У випадку $h = 0$ рекурентні співвідношення (3.23) спрощуються так, що E_1 та E_3 обертається в нуль і реалізується фіксована точка типу сідла.

²В роботі [5] припускалося, що лише одне із власних значень, пов'язаних з наявністю поля, є більше за одиницю, а решта менші від неї.

Поклавши $s = s^*$, знаходимо:

$$\begin{aligned} E_1 &= 20.9768, & E_3 &= 1.8380, \\ E_2 &= 7.3740, & E_4 &= 0.3974. \end{aligned} \quad (4.4)$$

У випадку $h = 0$ отримуємо наступне значення критичного показника кореляційної довжини

$$\nu = 0.609.$$

Воно дещо нижче від даних числового розрахунку цього показника для моделі Ізінга $\nu_c = 0.630$ (див., наприклад, [6]). Відмінність значень ν та ν_c зобумовлена не стільки наближеним способом розрахунку ν , як обмеженням в ході розрахунків моделлю ρ^4 . Насправді модель Ізінга можна точно відтворити лише моделлю ρ^{2m} , де $m \rightarrow \infty$ [2]. Для досягнення узгодженості між ν та ν_c слід використати для розрахунків принаймні модель ρ^6 .

Власні вектори W_{ik} матриці \mathcal{R} знаходимо із системи рівнянь

$$\sum_j R_{ij} W_{jk} = E_k W_{ik}.$$

Використовуючи (4.2), отримуємо

$$T = [W_{ik}] = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 & W_{33}T_{13} & 0 \\ 0 & W_{22} & 0 & W_{44}T_{24} \\ 0 & 0 & W_{33} & 0 \\ 0 & W_{22}T_{42} & 0 & W_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

де

$$\begin{aligned} T_{13} &= \frac{R_{13}}{E_3 - R_{11}}; & T_{24} &= \frac{E_4 - R_{44}}{R_{42}} = \frac{R_{24}}{E_4 - R_{22}}; \\ T_{42} &= \frac{E_2 - R_{22}}{R_{24}} = \frac{R_{42}}{E_2 - R_{44}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

З теорії матриць [7] відомо, що для несиметричної матриці \mathcal{R} , яка має різні дійсні власні значення E_i , має місце співвідношення

$$\mathcal{R} = T\Lambda T^{-1}, \quad (4.7)$$

де матриця T побудована так, що її стовпцями є власні вектори матриці \mathcal{R} , T^{-1} - обернена до неї матриця, така що

$$T^{-1} \cdot T = I, \quad (4.8)$$

де I - одинична матриця, а Λ - діагональна матриця, на головній діагоналі якої стоять власні значення матриці \mathcal{R} .

Для n -того степеня матриці \mathcal{R} має місце співвідношення

$$\mathcal{R}^n = T\Lambda^n T^{-1}, \quad (4.9)$$

де матриця Λ^n є також діагональною, по головній діагоналі якої стоять n -ті степені значень матриці \mathcal{R} . Користуючись властивостями (4.7)-(4.9) можемо переписати (4.1) у вигляді

$$\vec{x}_n = \mathcal{R}^n \vec{x}_0, \quad (4.10)$$

де стовпець x_n має вигляд

$$x_n = \begin{pmatrix} w_n - w^* \\ r_n - r^* \\ v_n - v^* \\ u_n - u^* \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Для отримання \vec{x}_0 слід покласти в (4.11) $n = 0$. Якщо прийняти до уваги (4.9), то із (4.10) отримуємо результат

$$\vec{x}_n = T\Lambda^n T^{-1} \vec{x}_0. \quad (4.12)$$

Останній вираз дозволяє знайти вирази для коефіцієнтів w_n , r_n , v_n та u_n (а отже і $a_n^{(n+1)}$, d_n із (3.18)), як функцій початкових величин: a_1 , $d(0)$, a_3 та a_4 із (1.28). Для реалізації окресленої вище задачі знайдемо матрицю T^{-1} . Вона складається із власних векторів транспонованої до \mathcal{R} матриці і шукається з рівнянь

$$\sum_i V_{ki} R_{ij} = E_k V_{kj}. \quad (4.13)$$

В результаті знаходимо

$$T^{-1} = [V_{kj}] = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & -V_{11}T_{13} & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 & -V_{22}T_{24} \\ 0 & 0 & V_{33} & 0 \\ 0 & -V_{44}T_{42} & 0 & V_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

де величини T_{ij} ті ж, що і в (4.5). Із умов нормування

$$\sum_j V_{kj} W_{jl} = \delta_{kl} \quad (4.15)$$

отримуємо:

$$V_1 = V_{11}W_{11} = 1, V_2 = V_{22}W_{22} = \left(1 + \frac{(E_2 - R_{22})^2}{R_{24}R_{42}}\right)^{-1} = D$$

$$V_3 = V_{33}W_{33} = 1, \quad V_4 = V_{44}W_{44} = D. \quad (4.16)$$

Знайдемо відповідно до (4.12) явний вигляд вектора \vec{x}_n . Для цього зауважимо, що

$$T^{-1}\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} V_{11}(w_0 - T_{13}v_0) \\ V_{22}[r_0 - r^* - T_{24}(u_0 - u^*)] \\ V_{33}v_0 \\ V_{44}[u_0 - u^* - T_{42}(r_0 - r^*)] \end{pmatrix}.$$

Виконуючи решту операцій із (4.12) отримуємо

$$\begin{aligned} w_n &= E_1^n(w_0 - T_{13}v_0) + T_{13}E_3^n v_0, \\ r_n - r^* &= V_2 E_2^n [r_0 - r^* - T_{24}(u_0 - u^*)] + V_2 T_{24} E_4^n [u_0 - u^* - \\ &\quad - T_{42}(r_0 - r^*)], \\ v_n &= E_3^n v_0, \\ u_n - u^* &= V_2 T_{42} E_2^n [r_0 - r^* - T_{24}(u_0 - u^*)] + \\ &\quad + V_2 E_4^n [u_0 - u^* - T_{42}(r_0 - r^*)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Величина V_2 приведена в (4.16). Легко переконалися, що у випадку $n = 0$ рівності (4.17) перетворюються в тотожності. Перепишемо (4.17) у більш зручній формі

$$\begin{aligned} w_n &= E_1^n w_0 + v_0 \frac{R_{13}}{E_1 - E_3} (E_1^n - E_3^n), \\ r_n - r^* &= V_2 (r_0 - r^*) [E_2^n - T_{24} T_{42} E_4^n] - \\ &\quad - V_2 (u_0 - u^*) T_{24} (E_2^n - E_4^n), \\ v_n &= E_3^n v_0, \\ u_n - u^* &= V_2 T_{42} (r_0 - r^*) [E_2^n - E_4^n] + V_2 (u_0 - u^*) [E_4^n - \\ &\quad - T_{24} T_{42} E_2^n]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

У випадку $h = 0$ система рівнянь (4.17) скорочується до двох ($w_n = v_n = 0$). Оскільки $E_4 < 1$, то E_4^n швидко спадає з ростом n . Значення величин r_n та u_n будуть прямувати до своїх фіксованих значень за умови

$$r_0 - r^* - T_{24}(u_0 - u^*) = 0, \quad (4.19)$$

яка визначає температуру фазового переходу T_c . В явному вигляді (4.19) записується

$$\tilde{a}_2 - \beta_c \Phi(0) + \bar{q} \beta_c \Phi(0) + \frac{R_{44} - E_4}{\beta_c \Phi(0) R_{42}^{(0)} \sqrt{\varphi_0}} (a_4 - \varphi_0 (\beta_c \Phi(0))^2) = 0, \quad (4.20)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2 + \beta \Phi(0) \bar{\Phi}, \quad \bar{q} = \pi^2 (b/c)^2 s_0^{-2} (1 + s^{-2}), \\ \varphi_0 &= \bar{q}^2 f_{00}^{-2} (1 - s^{*-2})^2; \quad f_{00} = \frac{1 - 3s^{-d} G_0}{\gamma \sqrt{24}}, \\ G_0 &= (12\gamma^2 - 1)/24\gamma^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Таким чином маємо квадратне рівняння для визначення температури фазового переходу T_c :

$$\begin{aligned} &[\beta_c \Phi(0)]^2 \left(1 - \bar{q} + \sqrt{\varphi_0} \frac{R_{44} - E_4}{R_{42}^{(0)}} - \bar{\Phi}_0\right) - \\ &- a_2 \beta_c \Phi(0) - a_4 \frac{R_{44} - E_4}{R_{42}^{(0)} \sqrt{\varphi_0}} = 0. \end{aligned}$$

На рис.1 приведена залежність оберненої температури $\beta_c \Phi(0)$ від величини параметра $\bar{\Phi}$ (при $b/c = 0.3$ та $s_0 = 2$). Для зручності введений масштабний множник, оскільки $\Phi(0) = 2dJ$, де J відповідає постійній взаємодії найближчих сусідів. Для моделі Ізінга із взаємодією найближчих сусідів J отримано [8,9] значення

$$\beta_c J = 0.2217, \quad (4.22)$$

яке відтворюється шляхом прямого розрахунку для деякого набору параметрів $\bar{\Phi}$, b/c та s_0 .

На рис.2 приведена залежність величини $\beta_c \Phi(0)/6$ від параметра b/c .

Як легко бачити, значення (4.22) досягається при $b/c \approx 0.3$. На рис.3 приведена залежність $\beta_c \Phi(0)/6$ від параметра s_0 при $b/c = 0.3$ та $\bar{\Phi} = 0.092$.

Проведений вище розрахунок значення T_c не ставив перед собою мети знайти "точне" значення температури фазового переходу. Він необхідний для визначення координати критичної точки ($T = T_c, h = 0$), поблизу якої буде досліджуватися поведінка термодинамічних функцій системи при наявності зовнішнього поля.

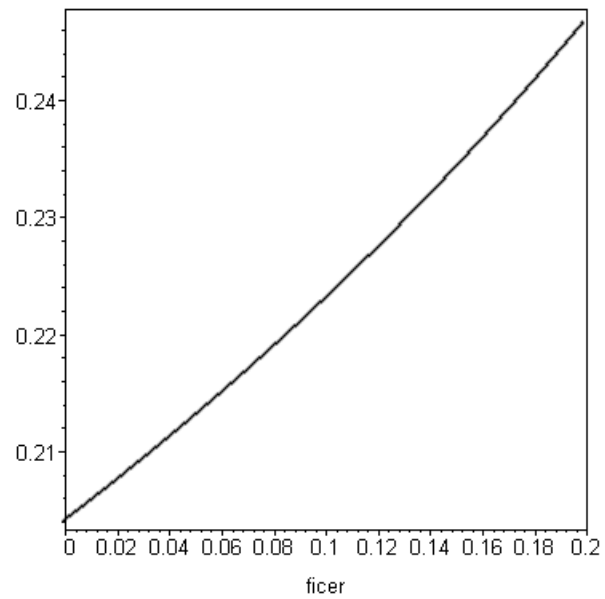


Рис. 1. Залежність оберненої температури $\beta_c \Phi(0)/6$ від величини параметра $\bar{\Phi}$ ($s_0 = 2$, $b/c = 0.3$).

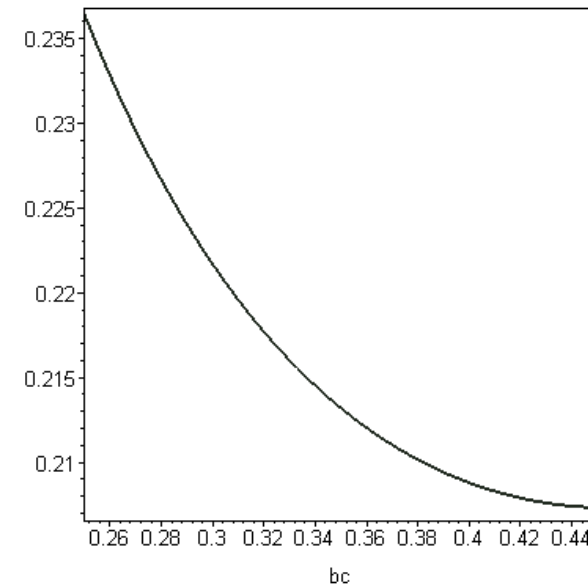


Рис. 2. Залежність $\beta_c \Phi(0)/6$ від відношення радіуса дії потенціалу b до сталої ґратки c при $s = 2$ та $\bar{\Phi} = 0.092$.

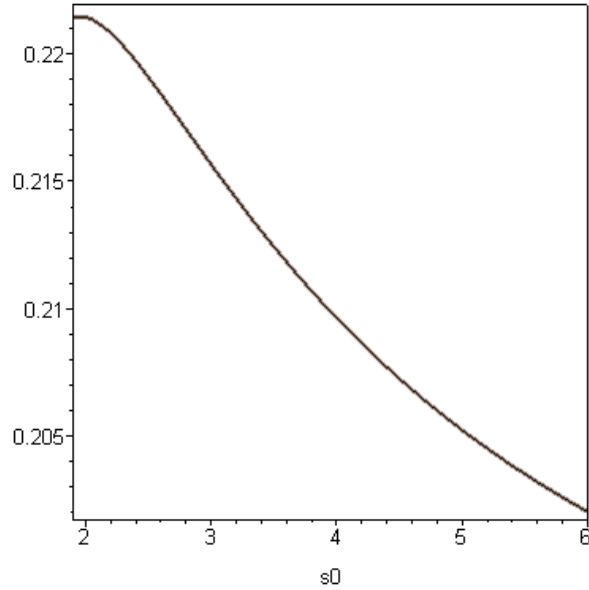


Рис. 3. Залежність оберненої температури фазового переходу від параметра s_0 .

Додаток 1

Дослідимо залежність кумулянтів $\mathcal{M}_n(\beta h)$ із (1.13) від величини $h' = \beta h$. Перепишемо вираз для статистичної суми (1.15) у вигляді:

$$\begin{aligned}
Z = & 2^N \exp\left(\frac{1}{2}\beta\Phi_0 N\right) e^{N\mathcal{M}_0} \int (d\eta)^{N_0} (d\omega)^{N_0} \times \\
& \exp\left\{\frac{1}{2}\beta \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} [\Phi(k) - \Phi(0)] \eta_{\vec{k}} \eta_{-\vec{k}} + 2\pi i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \eta_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}\right\} \times \\
& \exp\left[-2\pi i N_0^{d/2} \mathcal{M}'_1(h') \omega_0 - \frac{(2\pi)^2}{2} \mathcal{M}'_2(h') \sum_{\vec{k} \in \mathcal{B}_0} \omega_{\vec{k}} \omega_{-\vec{k}} - \right. \\
& - \frac{(2\pi)^3}{3!} N_0^{-1/2} \mathcal{M}'_3(h') i \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \omega_{\vec{k}_1} \dots \omega_{\vec{k}_3} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_3} - \\
& - \frac{(2\pi)^4}{4!} N_0^{-1} \mathcal{M}'_4(h') \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_4 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \omega_{\vec{k}_1} \dots \omega_{\vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_4}, \\
& - \frac{(2\pi)^5}{5!} N_0^{-3/2} \mathcal{M}'_5(h') i \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_5 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \omega_{\vec{k}_1} \dots \omega_{\vec{k}_5} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_5}, \\
& \left. - \frac{(2\pi)^6}{6!} N_0^{-2} \mathcal{M}'_6(h') \sum_{\substack{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_6 \\ \vec{k}_i \in \mathcal{B}_0}} \omega_{\vec{k}_1} \dots \omega_{\vec{k}_6} \delta_{\vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_6}\right\}, \quad (D1.1)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'_1(h') &= s_0^{d/2} \mathcal{M}_1(h'), \\
\mathcal{M}'_2(h') &= \mathcal{M}_2(h'), \\
\mathcal{M}'_3(h') &= s_0^{-d/2} (-\mathcal{M}_3(h')), \\
\mathcal{M}'_4(h') &= s_0^{-d} (-\mathcal{M}_4(h')), \\
\mathcal{M}'_5(h') &= s_0^{-3d/2} \mathcal{M}_5(h'), \\
\mathcal{M}'_6(h') &= s_0^{-2d} \mathcal{M}_6(h') \quad (D1.2)
\end{aligned}$$

Параметр $s_0 \geq 1$ характеризує вигляд потенціалу (1.3), який використовується при розрахунках. При цьому кожному значенню s_0 відповідає модельна система із своїми значеннями параметрів.

Криві залежності $M'_n(h)$ від величини поля h приведемо для значення $s_0 = 2$.

Збіжність інтегралів в (D1.1) визначається знаком парних кумулянтів $M_{2l}(h)$.

Кумулянт $M'_2(h')$ додатній при всіх значеннях h . Для $M'_4(h')$ маємо додатню область для $h \in (-0.658; 0.658)$ та від'ємну для $|h| > 0.658$. Величина M_6 додатня скрізь, за винятком $|h| \in (0.467; 1.472)$.

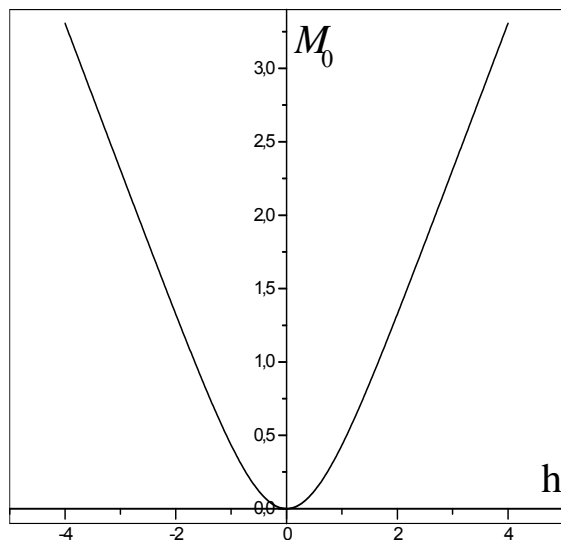


Рис. D1.1. Залежність коефіцієнта M_0 від поля h .

Література

1. Юхновский И.Р. Фазовые переходы второго рода. Метод коллективных переменных. - Киев: Наук. думка, 1985. - 224с.
2. Юхновський І.Р., Козловський М.П., Пилюк І.В. Мікроскопічна теорія фазових переходів у тривимірних системах. - Львів: ЄвроСвіт, 2001. - 592с.
3. Козловський М.П. Про розрахунок неуніверсальних характеристик фазового переходу другого роду. Препринт ICMP-01-06U, Львів, 2001, 20с.
4. Козловський М.П., Юхновський І.Р. Метод самоузгодженого опису критичної поведінки тривимірних ізінгоподібних систем

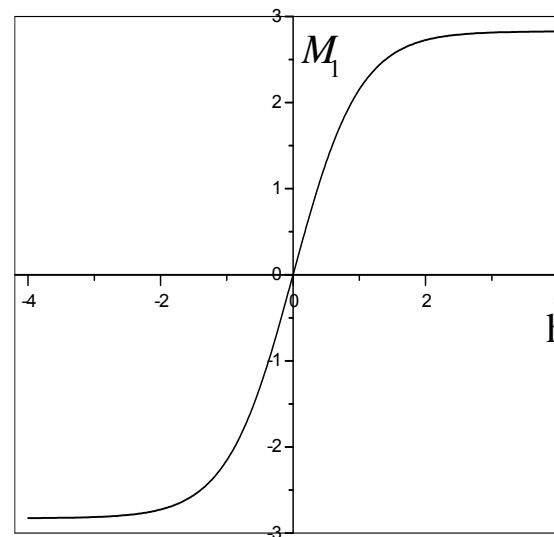


Рис. D1.2. Залежність від поля h першого непарного кумулянта M'_1 .

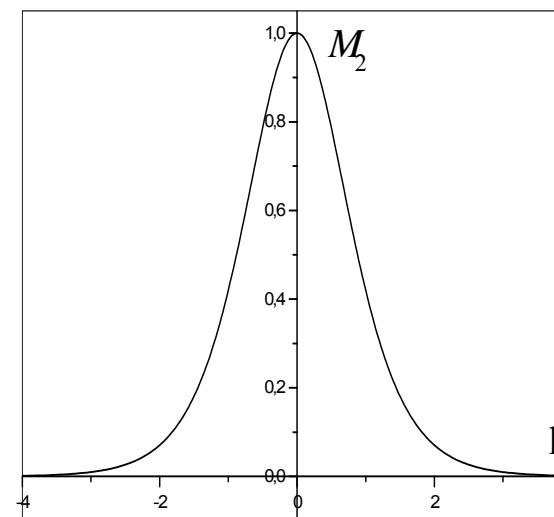


Рис. D1.3. Залежність від поля h другого кумулянта M_2 .

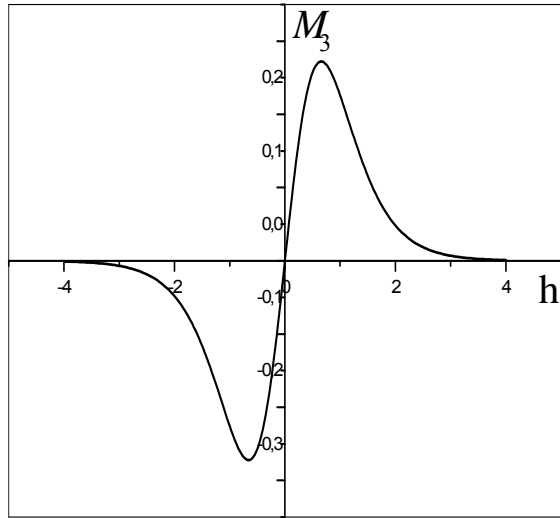


Рис. D1.4. Поведінка кумулянта M'_3 із зміною поля h .

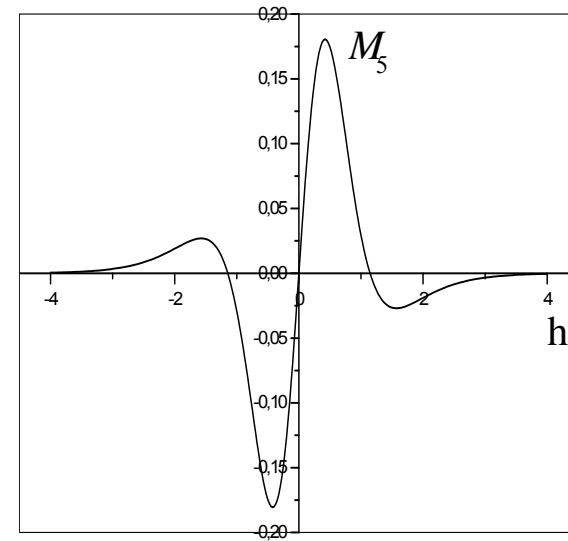


Рис. D1.6. Залежність M'_5 від поля h .

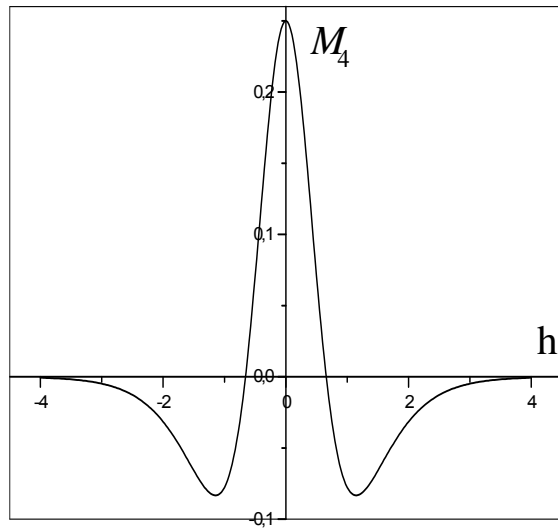


Рис. D1.5. Залежність від поля h четвертого кумулянта M'_4 . Для значень $|h| < 0.658$ кумулянт M'_4 приймає додатні значення.

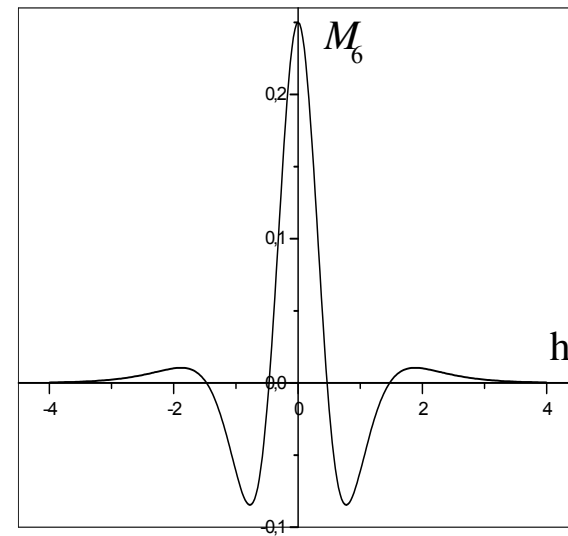


Рис. D1.7. Залежність від поля h кумулянта M'_6 . В областях $|h| < 0.467$ та $|h| > 1.472$ величина M'_6 є додатньою.

на мікроскопічному рівні. Препринт ІСМР-97-25U, Львів, 1977, 96с.

5. Идзик И.М. Решение рекуррентных соотношений для асимметрической модели ρ^6 . Препринт ИТФ-86-133Р, Київ, 1986, 36с.
 6. Palissetto A., Vicari E. Phys. Rep. **268**, p. 549-727, 2002.
 7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. - Москва, "Наука", 1969. - 368с.
 8. Moore M.A., Jasnov D., Wortis M. Phys. Rev. Lett. V.22, N 18, p. 940-943, 1969.
 9. Ferrenberg A.M., Landau D.P. Phys. Rev. B, v. 44, N 10, p.5081-5091, 1992.
-

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Михайло Павлович Козловський

Вплив зовнішнього поля на критичну поведінку
тривимірного магнетика. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Роботу отримано 28 грудня 2002 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТеКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені