

ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-02-27U

Ю.М. Козловський, М.В. Шовгенюк, В.М. Фітьо

ПОПЕРЕЧНЕ ЗМІЩЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ  
В ОБЛАСТІ ДРОБОВОГО ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ:  
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЕКСПЕРИМЕНТ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 03.65.Bz, 42.30.K, 42.30.V, 42.79, 42.25.F, 42.50.Dv, 52.25.Fi

**Поперечне зміщення зображень в області дробового фур'є-перетворення: математичне моделювання та експеримент**

Ю.М. Козловський, М.В. Шовгенюк, В.М. Фітьо

**Анотація.** Дається аналітичний опис схем реалізації ДФП в реальних оптичних системах. Розглядаються випадки однолінзового і дволінзового оптичних каскадів, та аналізуються області формування спряжених зображень. На основі використання методу розподілу сигналів дано пояснення повороту на інформаційній діаграмі розподілу вхідного сигналу при ДФП. Проведений аналіз оптичних схем ДФП. Представлені результати експерименту суміщення двох зміщених промодульованих плоскою хвилею зображень щілин в області ДФП.

**Images cross-shifting in the fractional Fourier transform domain: mathematical modeling and experiment**

Yu.M.Kozlovskii, M.V.Shovgenyuk, V.M. Fitio

**Abstract.** Analytical description of the FFT realization in the nonideal optical schemes is given. The cases of single and double optical stages are considered and the domain of the FFT images forming is analysed. Based on signal distribution method input signal rotation on the informational diagram is explained. The FFT optical schemes analysis is carried out. Experimental results of the two shifted and modulated by the plane wave slits images superposition in the FFT domain are presented.



## 1. ВСТУП

Дробове фур'є-перетворення (ДФП) відіграє важливу роль в різних областях фізики, зокрема оптики. Лише декілька математичних операцій можуть бути оптично реалізованими. Для прикладу, такими операціями є ДФП, звичайне фур'є-перетворення (ФП), кореляція. В поєднанні з операцією кореляції ДФП суттєво розширює можливості аналізу існуючих і побудови принципово нових оптичних систем обробки зображень. Кореляція є важлива тим, що вона може бути використана для вирішення багатьох проблем сучасної оптики, зокрема для розпізнавання образів, локалізації об'єктів і т.д. Операція кореляції може бути оптично реалізована, використовуючи властивість ФП для когерентних оптичних систем. Прикладом такої когерентної оптичної системи може бути корелятор Ван-дер-Люгта [1] конструкції  $4F$ , чи корелятор спільного фур'є-перетворення [2].

В зв'язку з цим постає питання про створення принципово нового оптичного корелятора на базі ДФП. В такому випадку кореляція відбувається в області ДФП і називається дробовою кореляцією [3, 4]. В основі побудови корелятора на базі ДФП лежать два зміщені сигнали, які суміщені в області ДФП та описані в роботі авторів [5].

Принциповою відмінністю цієї роботи є те, що в ній входні сигнали промодульовані плоскими хвилями з ненульовими просторовими частотами.

Розглянемо класичний випадок

$$g(x) = f_1(x + a) + f_2(x - a), \quad (1)$$

де  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  - входні сигнали,  $a$  - величина зміщення. В такому випадку оптична схема першого каскаду корелятора має вигляд.

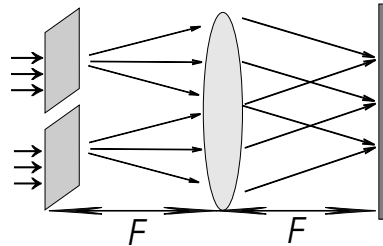


Рис. 1. Оптична схема першого каскаду класичного корелятора.

Як видно з Рис. 1 сигнали суміщаються в фур'є-площині. Якщо

розглянути випадок сигналів промодульованих плоскою хвилею

$$g(x) = f_1(x + a) \exp(iw_1x) + f_2(x - a) \exp(-iw_1x), \quad (2)$$

де  $w_1 = 2\pi\theta/\lambda$  - частота плоскої хвилі, то в такому випадку оптична схема буде мати вигляд

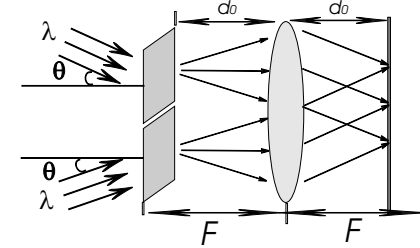


Рис. 2. Оптична схема першого каскаду корелятора на базі ДФП.

В такому випадку сигнали суміщаються в області ДФП. Ця схема є схемою реалізації першого каскаду принципово нового оптичного корелятора на базі ДФП.

Дана робота присвячена вивченню схем оптичної реалізації ДФП [6] в реальних системах. В першій частині роботи дається загальний опис таких схем, описуються області оптичної реалізації ДФП в однолінзовому і дволінзовому оптичних каскадах. В другій частині представлені експериментальні дані суміщення двох промодульованих плоскою хвилею щілин в області ДФП, які порівнюються з результатами математичного моделювання.

## 2. ДРОБОВЕ ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ І МЕТОД РОЗПОДІЛУ СИГНАЛІВ

### 2.1. Дробове фур'є-перетворення.

ДФП вперше було запропоновано в квантовій механіці Наміасом [7]. В оптиці ДФП було введено відносно недавно Ломаном [8] та Мендловіком і Озактасом [9]. За означенням ДФП оптичного сигналу  $f(x)$  записується у вигляді інтегрального перетворення

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \mathcal{F}^p[f(x)] = \\ &= C_0(\phi) \int f(x_0) \exp\left(i \frac{k[x_0^2 + x^2]}{2F \tan \phi}\right) \exp\left(-i \frac{kxx_0}{F \sin \phi}\right) dx_0, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mathcal{F}^p$  -оператор ДФП, постійний множник

$$C_0(\phi) = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}} \frac{\exp[-i(\pi/4 - \phi/2)]}{\sqrt{\sin \phi}}, \quad (4)$$

$k = 2\pi/\lambda$  - хвильове число,  $d_0$  - лінійна константа,  $\phi = p\pi/2$ ,  $p$  - параметр ДФП.

## 2.2. Базові функціонали розподілу.

Розглянемо два комплексно-спряжені оптичні сигнали  $f(\mathbf{r})$  і  $f^*(\mathbf{r})$ . За означенням координатного-частотного розподілу сигналів [10, 11] виберемо базові функціонали в формі функції невизначеності: координатне представлення

$$\mathcal{W}_{ff^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \int f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) f^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}_0}{2}\right) \exp(-i\omega_0 \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (5)$$

просторово-частотне представлення

$$\mathcal{W}_{FF^*}(\omega_0; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F\left(\omega + \frac{\omega_0}{2}\right) F^*\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right) \exp(i\omega \mathbf{r}_0) d\omega. \quad (6)$$

Тут  $F(\omega)$  і  $F^*(\omega)$  - комплексно-спряжені фур'є-образи оптичного сигналу.

Для функціоналів (5) і (6) прийняті наступні позначення: перша координата, як власна, відповідає формі представлення розподілу, а друга - спряжена координата.

Використання методу розподілу сигналів дає можливість відновити зображення оптичного сигналу як в координатній так і частотній площинах

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} [\mathcal{W}_{ff^*}(0; \omega_0)] = |f(\mathbf{r})|^2, \quad (7)$$

$$\hat{\mathcal{F}} [\mathcal{W}_{FF^*}(0; \mathbf{r}_0)] = |F(\omega)|^2. \quad (8)$$

Формула (7) описує *пряму схему* і, відповідно, формула (8) - *зворотню схему* відновлення зображення сигналу. Два зображення, які відновлюються за розподілом операторами фур'є-перетворення будемо називати *спряженими зображеннями*:  $|f(\mathbf{r})|^2$  - зображення в координатній площині і, відповідно,  $|F(\omega)|^2$  - зображення в частотній площині.

## 2.3. Розподіл дробового фур'є-перетворення.

Скориставшись методом розподілу сигналів можемо записати розподіл ДФП [12]

$$\mathcal{W}_{u_p u_p^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{ff^*}\left(\cos \phi \mathbf{r}_0 - \frac{d_0}{k} \sin \phi \omega_0; \frac{k}{d_0} \sin \phi \mathbf{r}_0 + \cos \phi \omega_0\right). \quad (9)$$

Звідси приходимо до важливого висновку, що при ДФП на інформаційній діаграмі  $(\mathbf{r}_0; \omega_0)$  відбувається лінійне перетворення спряжених координат розподілу вхідного сигналу, яке описується матрицею

$$\mathbf{T}_\phi = [t_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{d_0}{k} \sin \phi \\ \frac{k}{d_0} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Дана матриця описує поворот у від'ємному напрямі (за годинниковою стрілкою) розподілу вхідного сигналу на кут  $\phi = p\pi/2$ .

## 2.4. Спряжені зображення дробового фур'є-перетворення.

В роботі авторів [13] на основі методу розподілу сигналів запропоновано розраховувати спряжені зображення, які повніше розкривають властивості ДФП. Коротко розглянемо суть такого підходу.

Використовуючи схему (7) на основі розподілу (9) отримуємо формулу відновлення зображення ДФП

$$|u_p(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{\sin^2 \phi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_1) \exp\left(i \frac{k \mathbf{r}_1^2}{2d_0 \tan \phi}\right) \exp\left(-\frac{k \mathbf{r} \mathbf{r}_1}{d_0 \sin \phi}\right) d\mathbf{r}_1 \right|^2, \quad (11)$$

яка безпосередньо впливає із форми ядра ДПФ (3).

Використовуючи методологію ДФП, перехід до частотної площини здійснюється через матрицю  $\mathbf{T}_{\pi/2}$ . Тоді поворот розподілу ДФП на кут  $\pi/2$ , описується добутком матриць

$$\mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_{\pi/2} = \mathbf{T}_{\phi+\pi/2} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\frac{d_0}{k} \cos \phi \\ \frac{k}{d_0} \cos \phi & -\sin \phi \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Слід відмітити, що використання матриці повороту  $\mathbf{T}_{\pi/2}$  еквівалентно тому, що зворотня схема (8) реалізується через пряму схему

(7), де просторова частота задається співвідношенням  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{r}/\mathbf{d}_0$ . Звідси отримуємо формулу для розрахунку спряженого зображення

$$|U_p(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_2) \exp\left(-i \frac{k \tan \phi \mathbf{r}_2^2}{2d_0}\right) \exp\left(-\frac{k \mathbf{r} \mathbf{r}_2}{d_0 \cos \phi}\right) d\mathbf{r}_2 \right|^2. \quad (13)$$

### 3. ОПТИЧНІ СХЕМИ РЕАЛІЗАЦІЇ ДРОБОВОГО ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Своє застосування в описі оптичних систем ДФП знайшло в роботах [14–16]. Розглянемо типові оптичні системи.

#### 3.1. Елементарні перетворення на інформаційній діаграмі.

**Згортка Матриця**

$$\mathbf{M}_{CON} = \begin{pmatrix} 1 & \mp \frac{D}{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

відповідає згідно Рис. 3 (зліва) поперечному зсуву відносно осі  $x_0$  на інформаційній діаграмі. Знак '-' відповідає розбіжній сферичній хвилі з радіусом кривизни  $D$  і, відповідно, знак '+' - збіжній сферичній хвилі.

**Фільтрація Матриця**

$$\mathbf{M}_{FIL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \frac{k}{F} & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

відповідає згідно Рис. 3 (справа) поперечному зсуву відносно осі  $\omega_0$  на інформаційній діаграмі. Знак '+' відповідає додатній лінзі фокусної відстані  $F$  і, відповідно, знак '-' - від'ємній лінзі.

#### 3.2. Оптичний каскад.

Розглянемо тепер варіант реалізації дробового фур'є-перетворення в однолінзовому каскаді, який має свої особливості. Схема однолінзового каскаду описується матричним рівнянням

$$\mathbf{M}_{CAS} = \mathbf{M}_{CON1} \times \mathbf{M}_{FIL} \times \mathbf{M}_{CON2}. \quad (16)$$

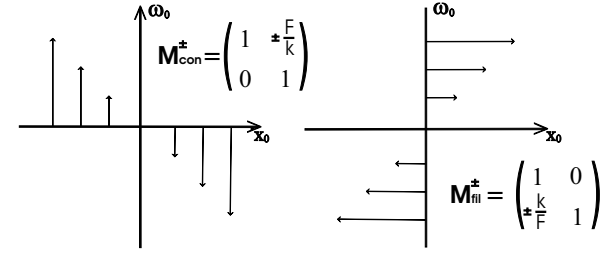


Рис. 3. Елементарні перетворення на інформаційній діаграмі.

Звідси знаходимо матрицю перетворення спряжених координат розподілу вхідного сигналу  $\mathcal{W}_{ff*}(\mathbf{r}_0; \omega_0)$  в оптичному каскаді

$$\mathbf{M}_{CAS} = \begin{pmatrix} 1 - d_1 & -\frac{F}{k}(d_1 + d_2 - d_1 d_2) \\ \frac{k}{F} & 1 - d_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тут  $d_1 = D_1/F$ ,  $d_2 = D_2/F$  - відносні віддалі. Якщо розглядати симетричну схему каскаду  $d_1 = d_2 = d_0$  і прийняти

$$d_0 = 1 - \cos \phi, \quad (18)$$

то отримаємо матрицю каскаду

$$\mathbf{M}_{CAS} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{F}{k} \sin^2 \phi \\ \frac{k}{F} & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Аналогічна матриця отримана раніше Бернардо [15].

Звідси видно, що оскільки в порівнянні з матрицею (10) елемент матриці  $a_{21} = \text{const}$ , то в оптичному каскаді ДФП за означенням теоретично не реалізується, за винятком граничних випадків:  $\phi = 0$ ,  $\pi/2$  і  $\pi$ .

В роботі Ломана [16] вперше досліджувалися умови реалізації ДФП в оптичному каскаді, де вводиться фіксований параметр

$$F_1 = \frac{F}{\sin \phi}, \quad (20)$$

за яким при виконанні умови (18) матриця (19) переходить в матрицю повороту (10). Цей перехід чисто теоретичний і не розкриває

фізичної суті ДФП. Покажемо, що в рамках запропонованого підходу вдається встановити тип ДФП, який реалізується в оптичному каскаді.

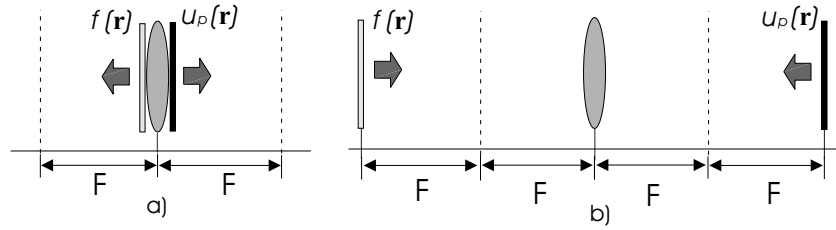


Рис. 4. Дві схеми реалізації ДФП в оптичному каскаді: а) - область 1; б) - область 2.

Виходячи із умови (18), існує дві схеми оптичного каскаду, які показані на Рис. 4, і в яких оптично реалізується спряжені зображення ДФП. Проте в кожній схемі каскаду реалізується ДФП, яке має свої особливості. Проведемо аналіз цих областей.

*Область 1* ( $0 \leq d_0 \leq 1$ ). На основі матриці (19) для даної області розподіл має вигляд

$$\mathcal{W}_{u_p u_p^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{ff^*} \left( \cos \phi \mathbf{r}_0 - \frac{d_0}{k} \sin^2 \phi \omega_0; \frac{k}{d_0} \mathbf{r}_0 + \cos \phi \omega_0 \right). \quad (21)$$

Використовуючи схему (7), за даним розподілом відновлюється зображення ДФП

$$|\tilde{u}_p(\mathbf{r})|^2 = \left| \int f(\mathbf{u}) \exp \left( i \frac{k \mathbf{u}^2}{d_0 \tan \phi \sin \phi} \right) \exp \left( -i \frac{k \mathbf{u} \mathbf{r}}{d_0 \sin^2 \phi} \right) d\mathbf{u} \right|^2. \quad (22)$$

Якщо виходити із означення (11), то в області 1 формується тип зображення ДФП

$$|\tilde{u}_p(\mathbf{r})|^2 = |u_{p_{ef}}(m\mathbf{r})|^2, \quad (23)$$

де ефективний порядок  $p_{ef}$  ДФП визначається за формулою

$$\tan \phi_{ef} = \tan \phi \sin \phi, \quad (24)$$

і, відповідно, масштабний множник зображення ДФП

$$m = (1 - \sin^2 \phi \cos^2 \phi)^{-1/2}. \quad (25)$$

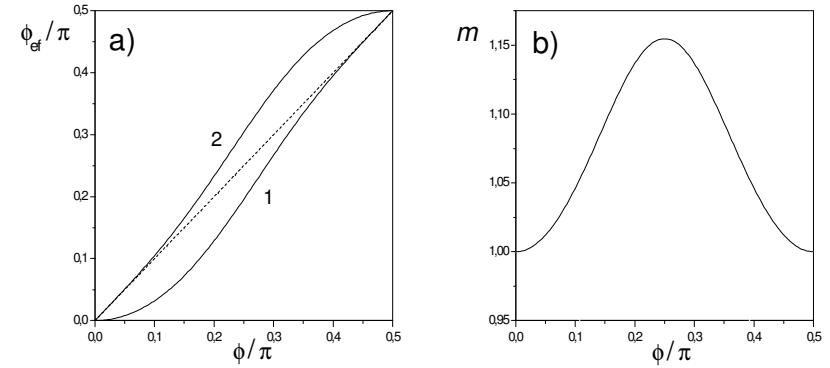


Рис. 5. Зміна ефективного порядку  $p_{ef}$  (а) і масштабу  $m$  (б) зображення ДФП в оптичному каскаді: 1 - крива за формулою (24); 2 - крива за формулою (30).

Як показує результати розрахунку на Рис. 5 (крива 1) ефективний порядок зображення ДФП в області 1 завжди менший, ніж за умовою (18). Відповідно до (25),  $m_{max} = 2/\sqrt{3}$  відповідає  $\phi = \pi/4$ .

*Область 2* ( $1 \leq d_0 \leq 2$ ). Враховуючи, що при  $\phi = \pi/2$  матриця (19) описує точне фур'є-перетворення, то доцільно зробити заміну  $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ . В результаті для області 2 отримуємо матрицю

$$\mathbf{M}_{CAS} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\frac{F}{k} \cos^2 \phi \\ \frac{k}{F} & -\sin \phi \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Розподіл для даної матриці

$$\mathcal{W}_{\tilde{U}_p \tilde{U}_p^*}(\mathbf{r}_0; \omega_0) = \mathcal{W}_{ff^*} \left( -\sin \phi \mathbf{r}_0 - \frac{d_0}{k} \cos^2 \phi \omega_0; \frac{k}{d_0} \mathbf{r}_0 - \sin \phi \omega_0 \right), \quad (27)$$

за яким відновлюється тип спряженого зображення ДФП

$$|\tilde{U}_p(\mathbf{r})|^2 = \left| \int f(\mathbf{u}) \exp \left( i \frac{k \tan \phi}{2 d_0 \cos \phi} \mathbf{u}^2 \right) \exp \left( -i \frac{k \mathbf{u} \mathbf{r}}{d_0 \cos^2 \phi} \right) d\mathbf{u} \right|^2. \quad (28)$$

На основі означення (13) і отриманою формули (28) в області 2 формується масштабоване спряженого зображення ДФП

$$|\tilde{U}_p(\mathbf{r})|^2 = |U_{p_{ef}}(m\mathbf{r})|^2. \quad (29)$$

Тут ефективний порядок  $p_{ef}$  спряженого ДФП визначається за формулою

$$\text{tg} \phi_{ef} = \frac{\text{tg} \phi}{\cos \phi}, \quad (30)$$

а масштабний множник - за формулою (25). Як видно із Рис. 5 (крива 2), ефективний порядок спряженого зображення ДФП в області 2 завжди більший, ніж за умовою (18). Таким чином приходимо до висновку, що умова (18) не визначає порядок  $p$  зображення ДФП, яке реалізується в оптичному каскаді.

Для аналізу спряжених зображень ДФП в двох областях оптичного каскаду можна використати діаграмне представлення (Рис. 6 а), раніше запропоноване в роботі [19]. Зображення  $A$  в області 1 здійснює перехід від координатної ( $\phi_{ef} = 0$ ) до частотної ( $\phi_{ef} = \pi/2$ ) площин. Спряжене зображення  $B$  в області 2 здійснює перехід, навпаки, від частотної ( $\phi_{ef} = \pi/2$ ) до координатної ( $\phi_{ef} = \pi$ ) площин.

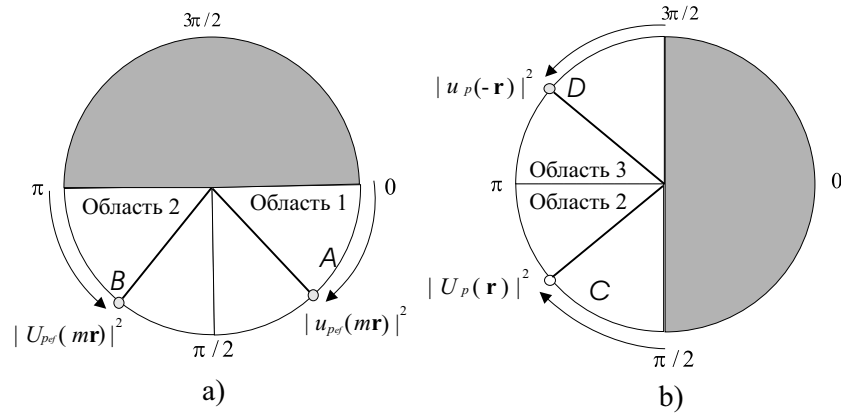


Рис. 6. Діаграма спряжених зображень ДФП: а) - оптичний каскад; б) - подвійний оптичний каскад. Стрілками показані напрями формування самоподібних зображень.

Із врахуванням формул (24) і (30) спряжені зображення ДФП в оптичному каскаді є різномасштабні. При значенні  $p_{ef} = 1/2$  спряжені зображення вироджуються в самоподібні. Характерно, що при виконанні умови

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad (31)$$

самоподібні зображення ДФП в оптичному каскаді завжди мають однаковий масштаб.

#### 4.3. Подвійний оптичний каскад.

Дослідимо схему подвійного оптичного каскаду (Рис. 7). Для простоти приймемо, що фокусні віддалі рівні:  $F_1 = F_2 = F$ . Така схема описується добутком матриць

$$\mathbf{M}_{CAS} = \mathbf{M}_{CON1} \times \mathbf{M}_{FIL1} \times \mathbf{M}_{CON2} \times \mathbf{M}_{FIL2} \times \mathbf{M}_{CON3}. \quad (32)$$

де за аналогією (17) введені відносні віддалі  $d_1 = D_1/F$ ,  $d_3 = D_3/F$  до і після каскаду, а  $d_2 = D_2/F = d_F$  - відносна віддаль між лінзами каскаду. Приймається, що  $d_1 = d_3 = d_0$ .

На Рис. 7 приведені три характерні схеми подвійного каскаду, в яких реалізується послідовність фур'є-перетворень вхідного сигналу. В схемі  $F$  ( $d_F = 1$ ) реалізується теоретична схема ( $d_0 = 0$ ) фур'є-перетворення.

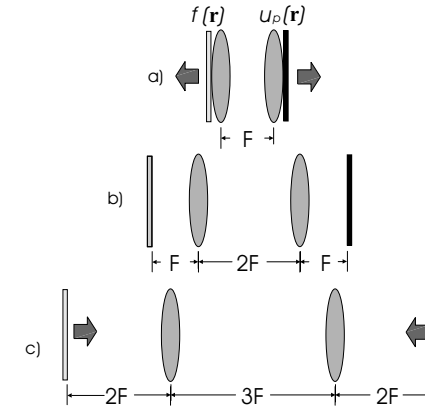


Рис. 7. Три схеми подвійного каскаду: а) - схема  $F$ ,  $\mathbf{M}_{CAS} = \mathbf{T}_{\pi/2}$ ; б) - схема  $4F$ ,  $\mathbf{M}_{CAS} = \mathbf{T}_{\pi}$ ; в) - схема  $7F$ ,  $\mathbf{M}_{CAS} = \mathbf{T}_{3\pi/2}$ .

В роботах Ломана [16–18] розглядався варіант узагальнення схеми  $F$  на випадок ДФП при виконанні умови

$$d_F = 1 - \cos \phi. \quad (33)$$

Зрозуміло, що дана умова передбачує випадки  $d_F < 1$ . Тепер, якщо підставити цю умову в матрицю (10), то отримуємо

$$\mathbf{M}_{\text{cas}} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\frac{F}{k}(1 - \cos \phi) \\ \frac{k}{F}(1 + \cos \phi) & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Як видно, дана матриця не зводиться до матриці ДФП (10) і тому в такій схемі подвійного каскаду не реалізуються умови ДФП за означенням, а масштабоване ДФП і зі зміною порядку. Більш того, така схема немає практичної реалізації.

При  $d_F = 2$ ,  $d_0 = 1$  отримуємо схему  $4F$  - базову для оптичної обробки інформації, в якій виконується подвійне фур'є-перетворення оптичного сигналу.

Нарешті, при  $d_F = 3$ ,  $d_0 = 2$  в схемі подвійного каскаду  $7F$  реалізується маловідома друга схема точного фур'є-перетворення. До речі, дана схема має пояснення на основі використання методу блочної побудови оптичних схем, запропонованого в роботах [17, 19]

$$\mathbf{M}_{\text{INV}} \times \mathbf{M}_{\text{CON}} \times \mathbf{M}_{\text{INV}} = \mathbf{M}_{\text{FR}}, \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_{\text{INV}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

матриця формування інверсного зображення. Тут перша матриця описує формування зображення в першому каскаді, друга матриця - фур'є-перетворення в другому каскаді, а третя матриця - френелівську дифракцію і в результаті отримуємо матрицю фур'є-перетворення, інверсну до другої матриці.

Нами встановлено [15], що між цими трьома граничними випадками в подвійному каскаді реально існує дві області реалізації спряжених зображень ДФП за означеннями (11) і (13), які описуються матрицями

$$\mathbf{T}_{\phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\frac{F}{k} \cos \phi \\ \frac{k}{F} \cos \phi & -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{T}_{\phi}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\cos \phi & \frac{F}{k} \sin \phi \\ -\frac{k}{F} \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В цих областях дробового фур'є-перетворення формуються спряжені зображення. В області 2 формуються зображення  $|U_p(\mathbf{r})|^2$ , які характеризують перехід від частотної площини  $p = 0$  до координатної площини  $p = 1$ . В області 3 формуються спряжені зображення  $|u_p(\mathbf{r})|^2$ , які характеризують перехід навпаки, від координатної площини  $p = 0$  до частотної площини  $p = 1$ . В точці  $p = 1/2$  ці спряжені зображення вироджуються в самоподібні.

З цього випливає, що в подвійному каскаді самоподібні зображення в двох областях дробового фур'є-перетворення проходять шлях назустріч одне одному. Починаючи з граничних точок  $d_F = 1$ ; 3, самоподібні зображення дробового фур'є-перетворення вхідного сигналу  $f(\mathbf{r})$  сходяться в точці  $d_F = 2$ , де формується точне зображення цього сигналу.

#### 4. ТЕОРІЯ ДВОХ ЗМІЩЕНИХ ЩІЛИН В ОПТИЧНОМУ КАСКАДІ

Розглянемо випадок двох зміщених та промодульованих плоскою хвилею нескінченних щілин, які описуються функцією

$$g(x) = \text{rect}\left(\frac{x+b}{2a}\right) \exp(i\omega_1 x) \pm \text{rect}\left(\frac{x-b}{2a}\right) \exp(-i\omega_1 x), \quad (39)$$

де  $2a$  - ширина щілини. Формула розподілу прямокутного імпульсу [11]

$$W_{rr^*}(x_0; \omega_0) = 2a \left\{ \frac{\sin(\omega_0[a + x_0/2])}{\omega_0 a} \text{rect}\left(\frac{a + x_0}{2a}\right) + \frac{\sin(\omega_0[a - x_0/2])}{\omega_0 a} \text{rect}\left(\frac{a - x_0}{2a}\right) \right\}. \quad (40)$$

В результаті підстановки (40) в (9) отримуємо явний вигляд розподілу двох зміщених та промодульованих плоскою хвилею нескінченних щілин [5].

Виходячи із розподілу, будемо шукати аналітичний розв'язок задачі формування зображення ДФП двох зміщених щілин у вигляді

$$I_p(x_a) = |u_p(x_a + B_{\phi}^n)|^2 + |u_p(x_a - B_{\phi}^n)|^2 \pm i(x_a; B_{\phi}^n), \quad (41)$$

де  $x_a = x/a$ ,  $B_{\phi}^n = B_{\phi}/a$  - нормований параметр поперечного зміщення.



Проведені нами розрахунки показують (при переході до нових змінних  $\Omega$ ), що формування зображення ДФП зміщених щілин описується загальною формулою

$$|u_p(x_a \pm B_\phi^n)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/\sin^2 \phi} \frac{\sin(4\pi F_0 \Omega \cos \phi [1 - \Omega \sin^2 \phi])}{\Omega \cos \phi} \times \cos(4\pi F_0 [x_a \pm B_\phi^n] \Omega) d\Omega, \quad (42)$$

де  $F_0 = a^2/\lambda d_0$  - число Френеля. Дана формула є узагальненням раніше виведених формул дифракції Френеля [7] та ДФП [3] від ізольованої щілини. Зауважимо, що для випадку ДФП в інтегральній формулі (27) змінна верхня межа інтегрування ( $1 \div \infty$ ) залежить від кута повороту  $\phi$  розподілу (25).

Для інтерференційного члена (41) отримуємо наступну формулу

$$i(x_a; B_\phi^n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/\sin^2 \phi} S(\Omega; B_\phi^n) \cos \left( 4\pi F_0 \left[ \Omega + \frac{\beta}{\sin^2 \phi} \right] x_a \right) d\Omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{1/\sin^2 \phi} S(\Omega; -B_\phi^n) \cos \left( 4\pi F_0 \left[ \Omega - \frac{\beta}{\sin^2 \phi} \right] x_a \right) d\Omega, \quad (43)$$

де введено позначення підінтегральної функції

$$S(\Omega; \pm B_\phi^n) = 4\pi F_0 (1 - \Omega \sin^2 \phi) \times \text{sinc} \left( 4F_0 \cos \phi \left[ \Omega \pm \frac{B_\phi^n}{\sin^2 \phi \cos \phi} \right] [1 - \Omega \sin^2 \phi] \right), \quad (44)$$

$\text{sinc}(\Omega) = \sin(\pi\Omega)/\pi\Omega$  - функція відліку,  $\beta = b/a$ .

Підстановка формул (27)-(29) в (26) дає аналітичний розв'язок поставленої задачі.

## 5. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Експериментальні дослідження проводились з допомогою установки, оптична схема якої зображена на Рис. 8.

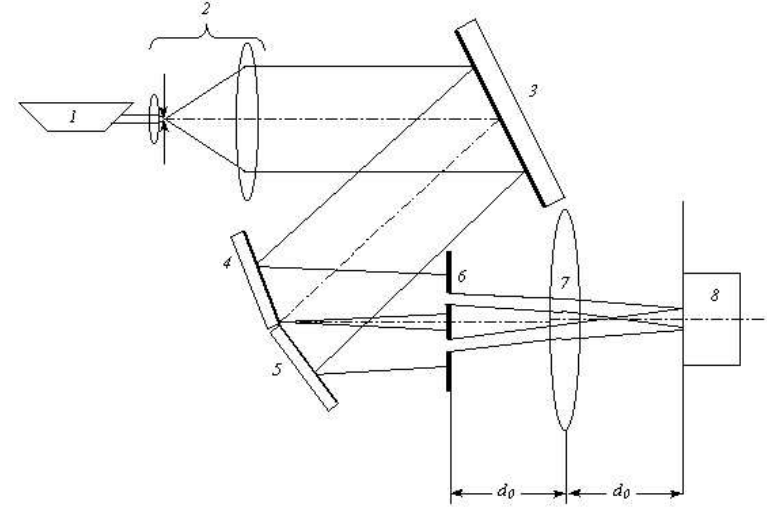


Рис. 8. Схема експериментальної установки для спостереження дробового фур'є-перетворення, 1 - лазер ЛГН-207, 2 - коліматор, 3 - поворотне дзеркало, 4, 5 - дзеркала, які утворюють дзеркало Ллойда, 6 - екран з двома щілинами, 7 - фур'є- об'єктив, ПЗЗ - камера.

В цій установці використовувався малогабаритний гелій-неоновий лазер ЛГН-207, який випромінює на довжині хвилі 0,6328 мкм. Вихідний пучок лазера з діаметром близько 0,5 мм проходить через мікрооб'єктив, точкову діафрагму з отвором 10 мкм, яка розміщена в фокусі мікрооб'єктива, та через колімуючий об'єктив з фокусною відстанню 500 мм та апертурою 70 мм. Мікрооб'єктив, точкова діафрагма, та колімуючий об'єктив утворюють коліматор 2, з допомогою якого формується пучок з плоским хвильовим фронтом. Колімований пучок падає на поворотне дзеркало 3, відбивається від нього та падає на дзеркало Ллойда, що складається з двох дзеркал 4 і 5, які можуть обертатися незалежно одне від одного відносно окремих осей. Таким чином цим дзеркалом формується два пучки, які в попе-

речному перерізі складають півкруги і поширюються під невеликим кутом один до одного. На шляху пучків, що збігаються, розміщаються дві паралельні щілини, які мають довжину 30 мм та ширину 2 мм. Відстань між щілинами складає 15 мм. Щілини виготовлялись з нових лез для гоління, причому гострі ножі лез утворюють краї щілин. Щілини розміщаються на відстані  $d_0$  до фур'є-об'єктива, з допомогою якого формують оптичне дробове фур'є-перетворення двох щілин позаду об'єктива по ходу променів на відстані  $d_0$ . В площині формування дробового фур'є-перетворення розміщена ПЗЗ-камера, з допомогою якої реєструється розподіл інтенсивності світла. Камера має  $640 \times 480$  пікселів з періодом розміщення по двох взаємоперпендикулярних напрямках 10 мкм. Таким чином ця камера дозволяє зареєструвати розподіл інтенсивності світла в площині формування дробового фур'є-перетворення двох щілин, коли відповідні спектри або перекриваються повністю або частково. Кут між двома збіжними пучками підібраний так, що при куті  $60^\circ$  спектри обох щілин перекриваються, при цьому вони інтерферують з контрастом рівним 1. Теоретичний і відповідний експериментальний розподіли спектру у цьому випадку показані на Рис.9.

На Рис. 10 показано, відповідно, теоретичні та експериментальні спектри обох щілин при куті  $51^\circ$ .

Спектри обох щілин в цьому випадку не накладаються, а вплив дифракції світла ще не є дуже сильним і розподіл світла при такому куті ще близький до розподілу інтенсивності світла безпосередньо на щілині. З ростом кута до  $56^\circ$  розподіли обох щілин сходяться, а вплив дифракції світла ще більше зростає, Рис. 11.

При куті  $\phi = 64^\circ$  (Рис. 12) щілини починають розходитися, інтерферують вони лише за рахунок часткового перекриття спектрів, вплив дифракції проявляється ще сильніше, внаслідок чого посередині спектру кожної щілини утворюється глибокий провал по інтенсивності.

На Рис. 13 наведено спектри від обох щілин при  $\phi = 70^\circ$ , які ще більше розходяться. Хоча провали по інтенсивності на середині обох спектрів ще є досить сильні, але розподіли стають "гладшими" ніж при куті  $\phi = 64^\circ$ . Можна сказати, що розподіли інтенсивності спектрів дробового фур'є-перетворення щілин  $\phi = 70^\circ$  є ближчими до спектру повного фур'є-перетворення ( $\phi = 90^\circ$ ) ніж до розподілу інтенсивності світла безпосередньо на щілинах ( $\phi = 0^\circ$ ).

Порівняння експериментальних і розрахункових розподілів з рис. 9 - 13 дозволяє зробити висновок про правильність теорії дробового фур'є-перетворення. Звичайно, експериментальні розподіли є "рва-

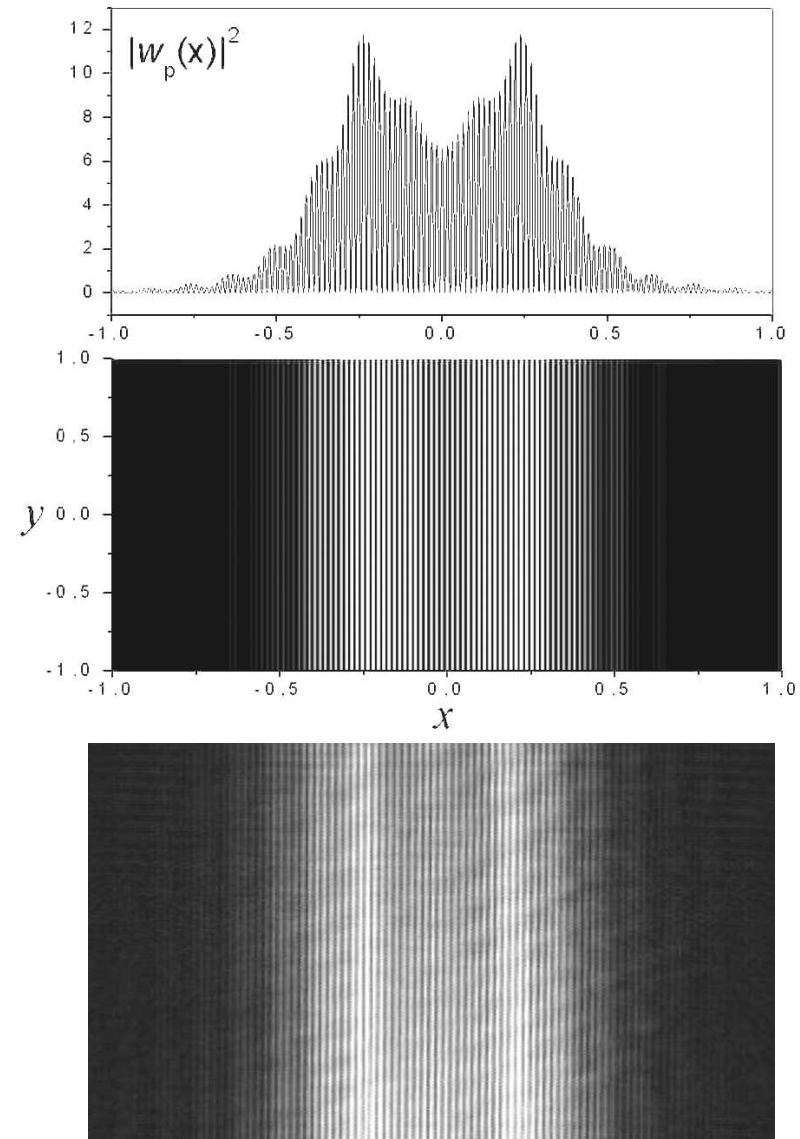


Рис. 9. Формування зображень двох щілин в точці  $\phi = 60^\circ$  ДФП при  $B_\phi = 0$ ; зверху - теорія; знизу - експеримент.

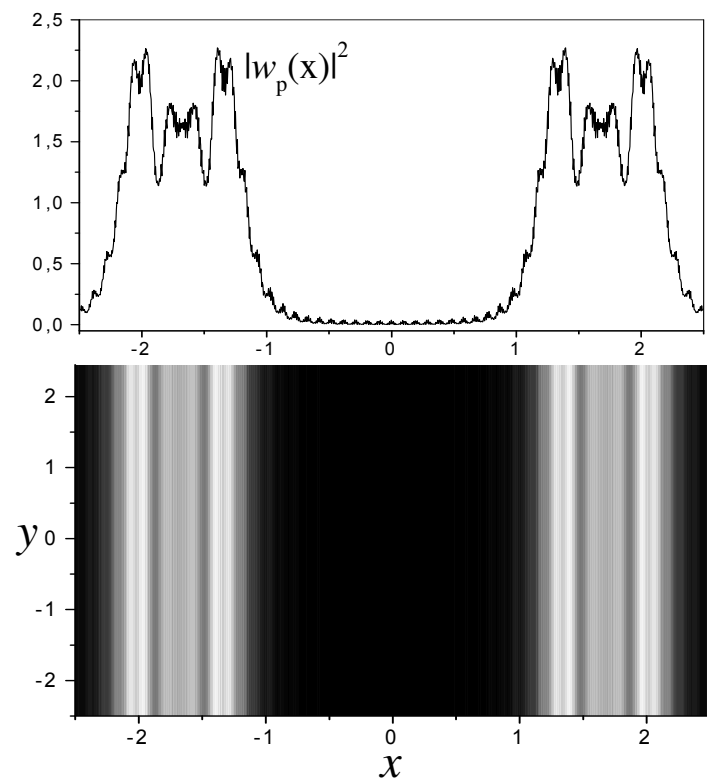


Рис. 10. Формування зображень двох щілин в точці  $\phi = 51^\circ$  ДФП при  $B_\phi = 1.7$ ; зверху - теорія; знизу - експеримент.

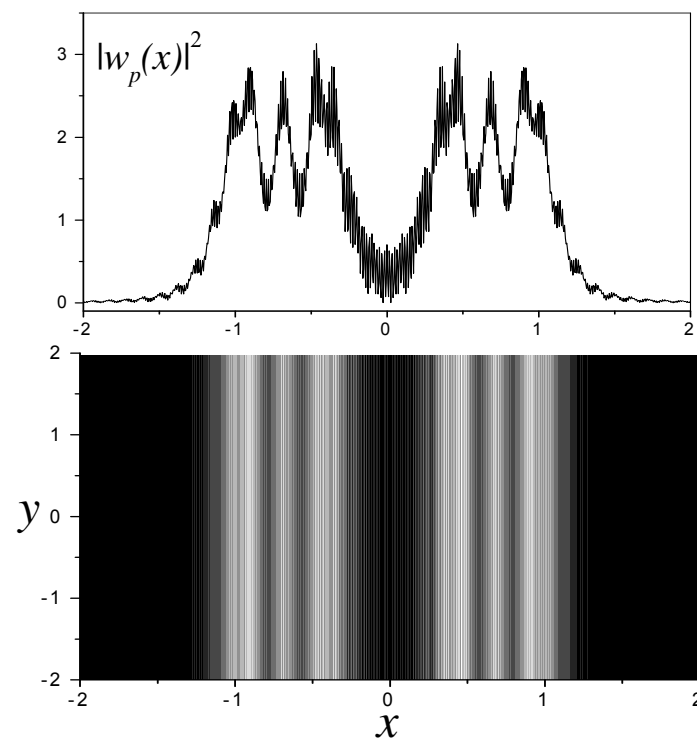


Рис. 11. Формування зображень двох щілин в точці  $\phi = 56^\circ$  ДФП при  $B_\phi = 0.76$ ; зверху - теорія; знизу - експеримент.

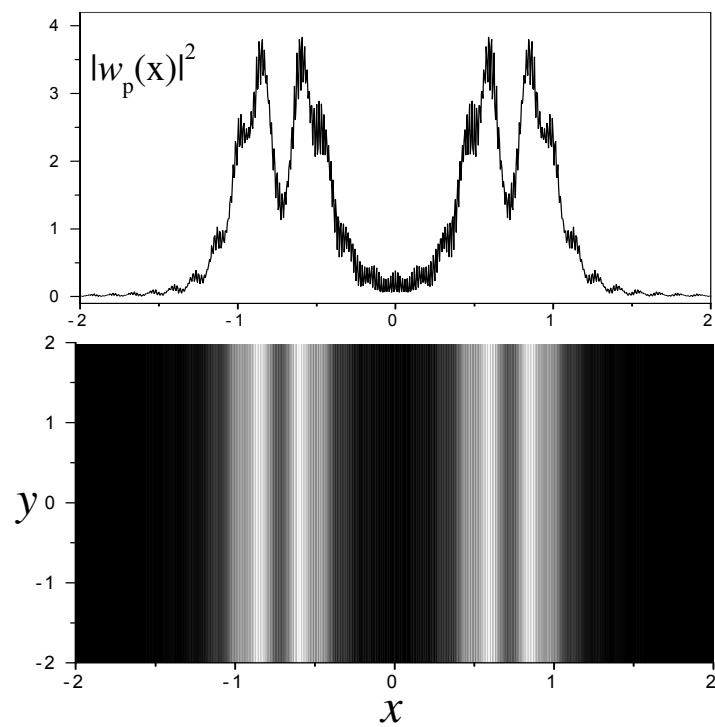


Рис. 12. Формування зображень двох щілин в точці  $\phi = 64^\circ$  ДФП при  $B_\phi = -0.76$ ; зверху - теорія; знизу - експеримент.

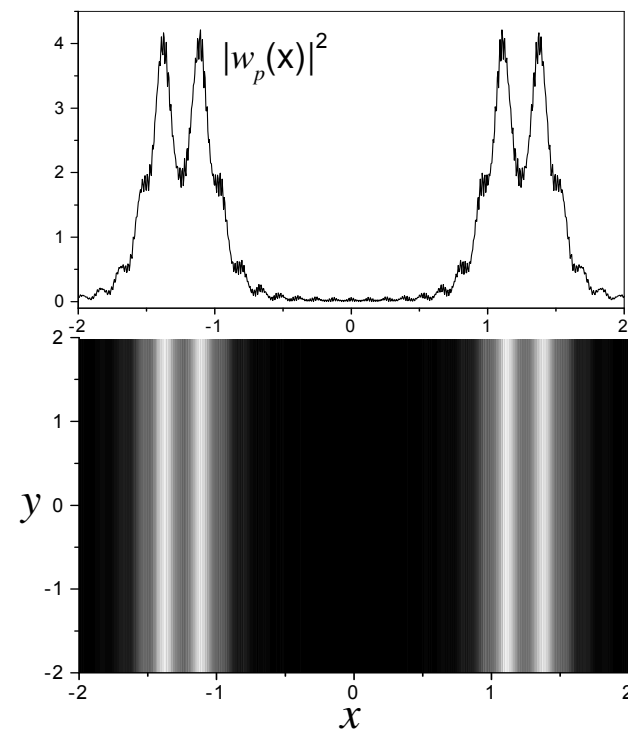


Рис. 13. Формування зображень двох щілин в точці  $\phi = 70^\circ$  ДФП при  $B_\phi = -1.85$ ; зверху - теорія; знизу - експеримент.

ними" за рахунок спекл-структури, яка утворюється завдяки паразитній інтерференції світла, що розсіюється на оптичних неоднорідностях поверхонь дзеркал та лінз. Але в цілому особливості структури експериментальних та теоретичних розподілів співпадають.

Автори висловлюють щире подяку д.т.н. Муравському Л.І. і к.т.н. Вороняку Т.І. за обговорення результатів роботи, та інж. Тхоруку А. і інж. Смоляку В. за допомогу в проведенні експерименту.

## Література

1. *Vander Lugt A.* Signal detection by complex spatial filtering. // J. IEEE Trans. Inf. Theory, 1964, IT-10, p.139-140.
2. *Weaver C.S. and Goodman J.W.* A technique for optically convolving two functions. // Appl. Opt., 1966, vol.5, p.1284-1249.
3. *Mendlovic D., Ozaktas H.M. and Lohman A.W.* Fractional correlation. // Appl. Opt., 1995, vol.34, p.303-309.
4. *Mendlovic D., Bitran Y., Dorsch R.G. and Lohman A.W.* Optical fractional correlation: experimental results. // J.Opt.Soc.Am. A, 1995, vol.12, p.1665-1670.
5. *Shovgenyuk M.V., Kozlovskii Yu.M., Muravskii L.I., Fitio V.M.* Optical Superposition of the Modulated Images in the Fractional Fourier Transform Domain // Ukr.J.Phys.Opt., 2002 vol.3, p.106-114.
6. *Шовгенюк М.В., Козловський Ю.М.,* Оптична інтерпретація дробового фур'є-перетворення. // Фізичний збірник НТШ, 2001, т.4, С.289-306.
7. *Namias V.* , The Fractional Order Fourier transform and its Application to Quantum Mechanics. // J. Instr. Maths Applics., 1980, vol.25, p.241-265.
8. *Lohmann A.W. and Soffer B.H.,* Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms // J. Opt. Soc. Am. A . -1994. - Vol. 11, No. 6.
9. *Ozaktas H.M. and Mendlovic D.* Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation. // Opt. Commun., 1993, vol.101, p.163-169.
10. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції. // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ІТФ-92-25U, Львів, 1992, 40 с.

11. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: виведення формули дифракції Френеля на ізольованій щілині. // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ІТФ-92-21U, Львів, 1992, 28 с.
12. *М.В.Шовгенюк, Ю.М.Козловський* Дробове фур'є-перетворення оптичних сигналів. // Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Препринт ICMP-01-06U, Львів, 2001, 42 с.
13. *Шовгенюк М. В., Козловський Ю. М.* Самоподібність спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // Доповіді НАН України, 2000, No.6, с.92-97.
14. *Bernardo L.M. and Soares O.D.D.,* Fractional Fourier transforms and optical system // Opt. Commun. - 1994. - Vol. 110. - P.517-522.
15. *Bernardo L.M.,* ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics // Opt. Eng . - 1996. - Vol.35, No 3. - P.732-740.
16. *Lohmann A.W.,* Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform // J. Opt. Soc. Amer. A. - 1993. - Vol.10. - P.2181-2186.
17. *Lohmann A.W.,* A fake zoom lens for fractional Fourier experiments // Opt. Commun. - 1995. - Vol.115. - P.437-443.
18. *Lohmann A.W., Mendlovic D., Zalevsky Z.,* Fractional transformations in optics //Progress in optics. - 1998. -Vol. XXXVIII, Chapter IV. - P.263-340.
19. *L.M.Bernardo and O.Soaes ,* Fractional Fourier transform and optical systems // Opt. Comm. - 1994.- 110(1994).- P.517-522.
20. *Alieva T. and Barbe A.* Self-imaging in Fourier transform systems. // Opt. Commun., 1998, vol.152, p.11-15.
21. *Kuo C. J. and Luo Y.* Generalized joint fractional Fourier transform correlators: a compact approach. // Appl. Opt., 1998, vol.37, No 35, p.8270-8276.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Юрій Михайлович Козловський  
Михайло Васильович Шовгенюк  
Володимир Михайлович Фітьо

ПОПЕРЕЧНЕ ЗМІЩЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ В ОБЛАСТІ ДРОБОВОГО  
ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ: МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА  
ЕКСПЕРИМЕНТ

Роботу отримано 20 грудня 2002 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТЕКС

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені