Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–02–20U

Ю.М. Козловський, М.В. Шовгенюк

ТЕОРІЯ ПОПЕРЕЧНОГО ЗМІЩЕННЯ ТА МОДУЛЯЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ДРОБОВОГО ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ

ЛЬВІВ

УДК: 532; 533; 533.9:530.182; 536.75; 536-12.01.

PACS: 03.65.Bz,42.30.K, 42.30.V, 42.79, 42.25.F, 42.50.Dv, 52.25.Fi

Теорія поперечного зміщення та модуляції зображень дробового фур'є-перетворення

Ю.М. Козловський, М.В. Шовгенюк

Анотація. Дається опис загальної теорії двох зміщених сигналів при ДФП. Показаний вплив інтерференційних членів на формування зображення. Особлива увага зосереджена на випадку двох зміщених сигналів промудульованих плоскими хвилеями з ненульовими просторовими частотами. Розраховано зображення ДФП двох зміщених прямокутних імпульсів, а також представлена залежність зображення ДФП від параметра p. Отримано зображення ДФП двох зміщених гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею, для яких приведені чисельні розрахунки. Детально розлянута область максимальної модуляції даних сигналів.

Cros-displaysment and modulation theory of the fractional Fourier transform images

Yu.M.Kozlovskii, M.V.Shovgenyuk

Abstract. Description of the general theory of two shifted signals at the FFT is given. Influence of the interference terms on the image formation is pointed. Espessial attension is tern to the case of two shifted signals modulated by plane waves with nonzero space frequencies. The FFT images from two rectangular impulses are calculated and dependance of the FFT image form parameter p is presented. The FFT images from two shifted gausian signals modulated by the plane waves are obtained and results of numerical calculations are given. Domain of the maximal modulation for such signals is investigated in detail.

1. ВСТУП

У зв'язку з значним прогресом теорії дробового фур'є-перетворення (ДФП) інтенсивно ведуться дослідження по створенню принципово нового оптичного корелятора, який може бути використаний для задач розпізнавання образів та ідентифікації об'єктів.

Принцип дії класичної схеми корелятора сумісного фур'є-перетворення [1] полягає в тому, що на вході корелятора подаються два зміщені оптичні сигнали: $g(x,y) = f_1(x+b,y) + f_2(x-b,y)$. На виході першого каскаду корелятора - в фур'є-площині реєструється вінерівський (енергетичний) спектр просторових частот

$$\begin{aligned} |G(\omega_x,\omega_y)|^2 &= |F_1(\omega_x,\omega_y)|^2 + |F_2(\omega_x,\omega_y)|^2 \\ &+ F_1(\omega_x,\omega_y)F_2^*(\omega_x,\omega_y)\exp(2i\omega_x b) \\ &+ F_1^*(\omega_x,\omega_y)F_2(\omega_x,\omega_y)\exp(-2i\omega_x b), \end{aligned} \tag{1}$$

де $F(\omega_x,\omega_y)$ - фур'є-образ оптичного сигналу.

В роботі [2] запропоновано узагальнений корелятор на основі ДФП, а також показано, що корелятор спільного фур'є-перетворення на основі звичайного фур'є-перетворення(ФП) є лише частковим випадком узагальненого корелятора фур'є-перетворення(УКФП). Розглянуто різні випадки дробової кореляції в залежності від параметра ДФП і показано, що УКФП є менш чутливим до аддитивного шуму ніж корелятор спільного фур'є-перетворення. Своє застосування в теоретичному описі оптичних схем дробове фур'є-перетворення знайшло в роботах [3, 4].

За означенням ДФП оптичного сигналу $f(x)$ записується у вигляді інтегрального перетворення

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \mathcal{F}^p[f(x)] = \\ &= C_1(\phi)\int f(x_0)\exp\left(i\frac{k[x_0^2+x^2]}{2d_0\mathrm{tg}\phi}\right)\exp\left(-i\frac{kxx_0}{d_0\sin\phi}\right)dx_0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\mathcal{F}^p$ -оператор ДФП, постійний множник

$$C_1(\phi) = \sqrt{\frac{k}{2\pi d_0}}\,\frac{\exp[-i(\pi/4-\phi/2)]}{\sqrt{\sin\phi}}, \tag{3}$$

$k = 2\pi/\lambda$ - хвильове число, d_0 - лінійна константа, $\phi = p\pi/2$, p - параметр ДФП.

Важливу роль в процесі ідентифікації оптичних образів відіграє взаємне зміщення сигналів. Використання ДФП замість звичайного фур'є- перетворення при побудові корелятора вимагає вивчення властивостей взаємно зміщених сигналів при ДФП.

ДФП оптичних сигналів характеризується двома важливими властивостями [5, 6]

поперечне зміщення сигналу на величину b

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^p[f(x-b)] &= \exp\left(i\frac{b^2}{2}\frac{k}{d_0}\sin\phi\cos\phi\right) \\ &\times\exp\left(-ib\frac{k}{d_0}\sin\phi x\right)u_p(x-b\cos\phi), \end{aligned} \tag{4}$$

модуляція сигналу плоскою хвилею частоти ω_1

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^p[f(x)\exp(-i\omega_1 x)] &= \exp\left(-i\frac{\omega_1^2}{2}\frac{d_0}{k}\sin\phi\cos\phi\right) \\ &\times\exp\left(-i\omega_1\cos\phi x\right)u_p\left(x+\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, поперечне зміщення оптичного сигналу приводить як до поперечного зміщення ДФП пропорційно $\cos\phi$ так і модуляції (з точність до постійного квадратичного фазового множника) гармонічним сигналом з частотою яка пропорційна $\sin\phi$. Хоч дана властивість має фундаментальне значення її вивченню не приділяється особлива увага. У роботі Алієвої [7] детально розглянуто зміщення ДФП для різних значень параметра ДФП. Дана властивість досліджувалася в роботі Куо і Лю [2], де розлянуто випадок ДФП двох сигналів,

$$f(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x-b,y)\exp(i\omega x), \tag{6}$$

один з яких є зміщений і промодульований плоскою хвилею частоти ω.

Дана робота присв'ячена вивченню властивостей зміщених зображень при ДФП, які займають важливе місце в загальній теорії ДФП. В першій частині роботи розглядається загальний випадок формування зображень двох зміщених сигналів на основі методології представленої в роботі [8]. Цей випадок особливий тим, що при розрахунку такого зміщення виникають інтерференційні члени, які суттєво впливають на формування зображення. Далі на основі попередніх викладок розглядається випадок двох зміщених прямокутних імпульсів і двох зміщених гаусових сигналів, а також представлені результати чисельного розрахунку.

2. ТЕОРЕТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК

Розглянемо загальний випадок двох зміщених та промодульованих плоскими хвилями з ненульовими просторовими частотами оптичних сигналів $f_1(x)$ і $f_2(x)$

$$g(x) = f_1(x+b)\exp(i\omega_1 x) + f_2(x-b)\exp(-i\omega_1 x), \tag{7}$$

де b - величина зміщення, $\omega_1 = 2\pi\theta/\lambda$ - просторова частота хвилі.

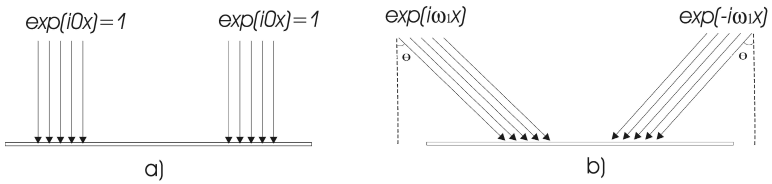

Рис. 1. Падаюча хвиля a) - $\theta = 0$,b) - $\theta \neq 0$.

ДФП даного сигналу має наступний вигляд

$$\hat{\mathcal{F}}^p[g(x)] = w_p(x;b,\omega_1) = u_p(x;b,\omega_1) + v_p(x;b,\omega_1), \tag{8}$$

$$u_p(x;b,\omega_1) = \hat{\mathcal{F}}^p[f_1(x+b)\exp(i\omega_1 x)], \tag{9}$$

$$v_p(x;b,\omega_1) = \hat{\mathcal{F}}^p[f_2(x-b)\exp(-i\omega_1 x)]. \tag{10}$$

Використоруючи метод розподілу сигналів [9,10], розподіл оптичного сигналу (7) має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{gg^*}(x_0;\omega_0) &= \mathcal{W}_{f_1 f_1^*}(x_0;\omega_0)\exp(i[\omega_0 b + x_0\omega_1]) \\ &+ \mathcal{W}_{f_2 f_2^*}(x_0;\omega_0)\exp(-i[\omega_0 b + x_0\omega_1]) \\ &+ \mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(x_0+2b;\omega_0-2\omega_1) \\ &+ \mathcal{W}_{f_2 f_1^*}(x_0-2b;\omega_0+2\omega_1). \end{aligned} \tag{11}$$

Відповідно, розподіл ДФП виражається через розподіл (11) наступним чином [11]

$$\mathcal{W}_{w_p w_p^*}(x_0;\omega_0) = \mathcal{W}_{gg^*}(t_{11}x_0 + t_{12}\omega_0; t_{21}x_0 + t_{22}\omega_0), \tag{12}$$

$$\mathbf{T}_\phi = [t_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\dfrac{d_0}{k}\sin\phi \\ \dfrac{k}{d_0}\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Із формули (12) видно, що ДФП вхідного оптичного сигналу відповідає лінійне перетворення спряжених координат $(x_0;\omega_0)$ розподілу даного сигналу, що описується матрицею повороту (13).

Перевага використання методу розподілу сигналів полягає в тому, що за розподілом (12) відновлюється зображення ДФП [10] за формулою

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1}\left[\mathcal{W}_{w_p w_p^*}(0;\omega_0)\right] = |w_p(x;b,\omega_1)|^2. \tag{14}$$

Формулу розподілу інтенсивності отримуємо з формул (11),(14)

$$\begin{aligned} |w_p(x;b,\omega_1)|^2 &= |u_p(x;b,\omega_1) + v_p(x;b,\omega_1)|^2 = \\ &= \hat{\mathcal{F}}^{-1}\left[\mathcal{W}_{f_1 f_1^*}(t_{12}\omega_0;t_{22}\omega_0)\exp(i[t_{22}\omega_0 b + t_{12}\omega_0\omega_1])\right] \\ &+ \hat{\mathcal{F}}^{-1}\left[\mathcal{W}_{f_2 f_2^*}(t_{12}\omega_0;t_{22}\omega_0)\exp(-i[t_{22}\omega_0 b + t_{12}\omega_0\omega_1])\right] \\ &+ \hat{\mathcal{F}}^{-1}\left[\mathcal{W}_{f_1 f_2^*}(t_{12}\omega_0+2b;t_{22}\omega_0-2\omega_1)\right] \\ &+ \hat{\mathcal{F}}^{-1}\left[\mathcal{W}_{f_2 f_1^*}(t_{12}\omega_0-2b;t_{22}\omega_0+2\omega_1)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Розглянемо окремо вклад кожного з доданків формули (15).

Використовуючи означення розподілу [9], для першого доданку отримаємо

$$\begin{aligned} |u_p(x;b,\omega_1)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\iint f_1\left(z+\frac{t_{12}\omega_0}{2}\right) f_1^*\left(z-\frac{t_{12}\omega_0}{2}\right) \\ &\times \exp(-it_{22}z\omega_0)\exp(i\omega_0[x+t_{22}b+t_{12}\omega_1])dz d\omega_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Якщо використати заміну змінних

$$z = \frac{u_1+u_2}{2}; \quad \omega_0 = \frac{u_1-u_2}{t_{12}}, \tag{17}$$

то в результаті інтеграл (16) зводиться до вигляду

$$\frac{1}{2\pi|t_{12}|}\left|\int f_1(u_1)\exp\left(-i\frac{t_{22}u_1^2}{2t_{12}}\right)\exp\left(i\frac{[x+t_{22}b+t_{12}\omega_1]u_1}{t_{12}}\right)du_1\right|^2 =$$

$$= \left|u_p\left(x+b\cos\phi-\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right)\right|^2. \qquad (18)$$

Отримана формула описує формування зображення ДФП сигналу $f_1(x+b)\exp(i\omega_1 x)$.

Аналогічним чином отримуємо, що формування зображення ДФП другого оптичного сигналу $f_2(x-b)\exp(-i\omega_1 x)$ описується формулою

$$|v_p(x;b,\omega_1)|^2 = \left|v_p\left(x-b\cos\phi+\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right)\right|^2. \qquad (19)$$

Очевидно, що третій і четвертий доданки розподілу інтенсивності (15) дають інтерференційний член ДФП

$$i_p(x;b,\omega_1) = u_p(x;b,\omega_1)v_p^*(x;b,\omega_1)+u_p^*(x;b,\omega_1)v_p(x;b,\omega_1). \qquad (20)$$

Для першого доданку інтерференційного члена отримуємо

$$u_p(x;b,\omega_1)v_p^*(x;b,\omega_1) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\iint f_1\left(z+\frac{[t_{12}\omega_0+2b]}{2}\right)f_2^*\left(z-\frac{[t_{12}\omega_0+2b]}{2}\right)$$
$$\times\exp(-iz[t_{22}\omega_0-2\omega_1])\exp(i\omega_0 x)d\omega_0 dz. \qquad (21)$$

Використаємо аналогічну (17) заміну змінних, де $\omega_0=(u_1-u_2-2b)/t_{12}$. В результаті взаємний розподіл інтенсивності можна записати у вигляді добутку інтегралів

$$u_p(x;b,\omega_1)v_p^*(x;b,\omega_1) = \frac{\exp\left(-i\frac{2bx}{t_{12}}\right)}{2\pi|t_{12}|}$$
$$\times\left\{\int f_1(u_1)\exp\left(-i\frac{t_{22}u_1^2}{2t_{12}}\right)\exp\left(i\frac{[x+t_{22}b+t_{12}\omega_1]u_1}{t_{12}}\right)du_1\right\}$$
$$\times\left\{\int f_2(u_2)\exp\left(-i\frac{t_{22}u_2^2}{2t_{12}}\right)\exp\left(i\frac{[x-t_{22}b-t_{12}\omega_1]u_2}{t_{12}}\right)du_2\right\}^*. \qquad (22)$$

Використовуючи означення ДФП (2), після простих перетворень отримуємо

$$u_p(x;b,\omega_1)v_p^*(x;b,\omega_1) = \exp\left(2i\left[b\frac{k}{d_0}\sin\phi+\omega_1\cos\phi\right]x\right)$$
$$\times u_p\left(x+b\cos\phi-\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right)v_p^*\left(x-b\cos\phi+\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right). \quad (23)$$

Зробивши аналогічні перетворення для другого інтерференційного члена знаходимо

$$u_p^*(x;b,\omega_1)v_p(x;b,\omega_1) = \exp\left(-2i\left[b\frac{k}{d_0}\sin\phi+\omega_1\cos\phi\right]x\right)$$
$$\times u_p^*\left(x+b\cos\phi-\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right)v_p\left(x-b\cos\phi+\omega_1\frac{d_0}{k}\sin\phi\right). \quad (24)$$

Тепер, підставляючи (18), (19), (23) та (24) в (15), отримуємо загальну формулу формування зображення ДФП двох зміщених і промодульованих оптичних сигналів

$$|w_p(x;B_\phi,\Omega_\phi)|^2 = |u_p(x+B_\phi)\exp(i\Omega_\phi x)+v_p(x-B_\phi)\exp(-i\Omega_\phi x)|^2, \qquad (25)$$

яка має повну аналогію із вхідним сигналом (7). В формулі (25) узагальнені параметри зміщення B_ϕ та частота модуляції Ω_ϕ ДФП визначаються матричним рівнянням

$$\begin{pmatrix} B_\phi \\ \Omega_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\frac{d_0}{k}\sin\phi \\ \frac{k}{d_0}\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ \omega_1 \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

тобто коефіцієнтами системи лінійних рівнянь служать елементи матриці повороту $\mathbf{T}_\phi$.

Отже ми приходимо до важливого висновку, що формування зображення ДФП двох зміщених і промодульованих плоскою хвилею оптичних сигналів можна інтерпретувати як паралельний процес зміщення ДФП окремих сигналів пропорційно величині B_ϕ та модуляції ДФП плоскою хвилею з частотою Ω_ϕ.

2.1. Граничні випадки.

Нульове зміщення: $B_\phi=0$. В цьому випадку формула (25) зводиться до наступного вигляду

$$|w_p(x;0,\Omega_\phi)|^2 = |u_p(x)|^2\cos^2(\Omega_\phi x), \qquad (27)$$

звідки легко бачити, що в даному випадку сигнали суміщаються в точці, яка визначається з умови $B_\phi = 0$. Отже в результаті ми отримуємо зображення одного сигналу промодульованого косинусом з частотою Ω_ϕ. Згідно (27) таку умову можна переписати наступним чином

$$\omega_1 = \frac{2\pi F_0 \beta}{\mathrm{tg}\phi_1}, \tag{28}$$

де $\phi_1 = p_1\pi/2$, p_1 - параметер ДФП, яких характеризує точку в області ДФП,в якій суміщуються сигнали. Точку в якій суміщуються сигнали будемо називати *точкою суміщення.*

Нульова модуляція: $\Omega_\phi = 0$**.** В цьому випадку формула (25) переписується наступним чином

$$|w_p(x;0,\Omega_\phi)|^2 = |u_p(x+B_\phi) + v_p(x-B_\phi)|^2, \tag{29}$$

отже коли частота модуляції є рівна нулеві то сигнали мають максимальну амплітуду.

3. РОЗПОДІЛ ДРОБОВОГО ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДВОХ ЗМІЩЕНИХ СИГНАЛІВ

3.1. Розподіл двох зміщених щілин

В оптиці ізольована щілина описується функцією прямокутного імпульсу. У випадку двох зміщених прямокутних імпульсів на основі формули (7) маємо

$$g(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x+b}{2a}\right)\exp(i\omega_1 x) + \mathrm{rect}\left(\frac{x-b}{2a}\right)\exp(-i\omega_1 x). \tag{30}$$

Розподіл прямокутного імпульсу [6] описується наступною формулою

$$\mathcal{W}_{rr^*}(x_0;\omega_0) = 2a\left\{\frac{\sin(\omega_0[a+x_0/2])}{\omega_0 a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a+x_0}{2a}\right) + \frac{\sin(\omega_0[a-x_0/2])}{\omega_0 a}\mathrm{rect}\left(\frac{a-x_0}{2a}\right)\right\}. \tag{31}$$

Підставивши явний вигляд розподілу прямокутного імпульсу в формулу (11) отримуємо вираз розподілу двох зміщених прямокутного імпульсів промодульованих плоскою хвилею

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{gg^*}(x_0;\omega_0) = {} & 2a\left\{\frac{\sin(\omega_0[a+x_0/2])}{\omega_0 a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a+x_0}{2a}\right)\right. \\
& + \left.\frac{\sin(\omega_0[a-x_0/2])}{\omega_0 a}\mathrm{rect}\left(\frac{a-x_0}{2a}\right)\right\}\cos(\omega_0 b + x_0\omega_1) \\
& + 2a\left\{\frac{\sin((\omega_0-2\omega_1)[a+(x_0+2b)/2])}{(\omega_0-2\omega_1)a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a+(x_0+2b)}{2a}\right)\right. \\
& + \left.\frac{\sin((\omega_0-2\omega_1)[a-(x_0+2b)/2])}{(\omega_0-2\omega_1)a}\mathrm{rect}\left(\frac{a-(x_0+2b)}{2a}\right)\right\} \\
& + 2a\left\{\frac{\sin((\omega_0+2\omega_1)[a+(x_0-2b)/2])}{(\omega_0+2\omega_1)a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a+(x_0-2b)}{2a}\right)\right. \\
& + \left.\frac{\sin((\omega_0+2\omega_1)[a-(x_0-2b)/2])}{(\omega_0+2\omega_1)a}\mathrm{rect}\left(\frac{a-(x_0-2b)}{2a}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{32}$$

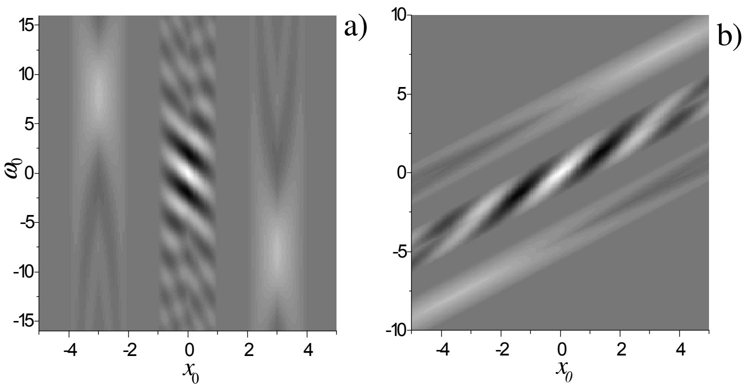

Рис. 2. Поворот розподілу двох зміщених прямокутних імпульсів промодульованих плоскою хвилею на інформаційній діаграмі при ДФП, для різних значень параметрів a)–$\beta = 2, \omega_1 = 4, p = 0$; b) - $\beta = 2, \omega_1 = 4, p = 0.5$, при $F = 2$.

Розподіл двох зміщених прямокутних імпульсів промодульованих плоскою хвилею зображений на Рис. 2. У випадку коли частота падаючої хвилі відмінна від нуля, на Рис. 2 (a,b) $\omega_1 = 4$. У даному випадку розподіли, що відповідають інтерференційним членам взаємозміщуються. На Рис. 2 (b) розглядається випадок формування зображення при ДФП, у випадку параметра ДФП $p = 0.5$, як і у випадку одного сигналу відбувається поворот розподілу на інформаційній діаграмі на кут пропорційний до параметру ДФП p.

3.2. Розподіл двох зміщених гаусових сигналів.

Важливо дослідити властивості розподіл Гауса при ДФП. За означенням функція Гауса записується у вигляді

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right). \quad (33)$$

Скориставшись координатно-частотним розподілом [9,10] отримуємо аналітичний вираз для розподілу функції Гауса

$$\mathcal{W}_{ff^*}(x_0;\omega_0) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\frac{x_0^2}{\sigma^2}+\omega_0^2\sigma^2\right]\right). \quad (34)$$

Розглянемо випадок двох зміщених гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею

$$g(x) = f_1(x+b)\exp(ixw_1) + f_2(x-b)\exp(-ixw_1), \quad (35)$$

де $2b$ - величина зміщення.

Використоруючи метод розподілу сигналів, розподіл двох зміщених гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею має наступний вигляд

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{gg^*}(x_0;\omega_0) &= \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\frac{x_0^2}{\sigma^2}+\omega_0^2\sigma^2\right]\right)\exp(\omega_0 b + x_0\omega_1)\\ &+ \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\frac{(x_0+2b)^2}{\sigma^2}+(\omega_0-2\omega_1)^2\sigma^2\right]\right)\\ &+ \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\frac{(x_0-2b)^2}{\sigma^2}+(\omega_0+2\omega_1)^2\sigma^2\right]\right). \quad (36)\end{aligned}$$

Рис. 3 зображений розподіл двох зміщених гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею, при значенні параметра $\sigma = 0.5$. Легко бачити, як і в попередніх випадках відбувається поворот розподілу на інформаційній діаграмі на кут пропорційний до параметру ДФП p.

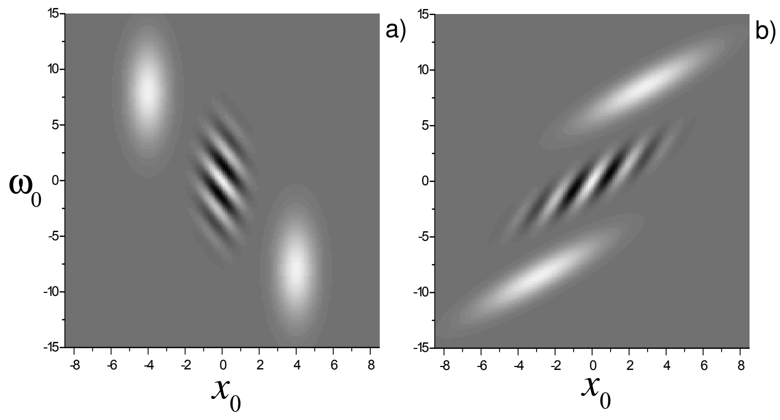

Рис. 3. Розподіл двох зміщених гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею при $\sigma = 0.5$, a) - $\beta = 2, \omega_1 = 0, p = 0$; b) - $\beta = 2, \omega_1 = 4, p = 0$; c) - $\beta = 2, \omega_1 = 4, p = 0.5$

4. ЗОБРАЖЕННЯ ДРОБОВОГО ФУР'Є-ПЕРЕТВОРЕННЯ

4.1. Розподіл інтенсивності двох зміщених щілин.

Підставимо розподіл (31) в формулу (15) і запишемо розподілу інтенсивності зображення ДФП двох щілин в загальному вигляді

$$|w_p(x_a;\beta,\omega_1)|^2 = |u_p(x_a;\beta)|^2 + |v_p(x_a;\beta)|^2 \pm i(x_a;\beta), \quad (37)$$

$$i(x_a;\beta,\omega_1) = u_p(x_a;\beta)v_p^*(x_a;\beta) + u_p^*(x_a;\beta)v_p(x_a;\beta). \quad (38)$$

де $x_a = x/a, \beta = b/a \geq 1$, Тут перший і другий члени в (37) описують зображення ДФП окремих зміщених щілин, третій інтерференційний член (38) - взаємний розподіл інтенсивності від двох щілин.

Відповідно до [6], отримуємо

$$\begin{aligned}|u_p(x_a;\beta,\omega_1)|^2 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/\sin\phi}\frac{\sin\left(4\pi F_0\cos\phi\Omega[1-\Omega\sin\phi]\right)}{\cos\phi\Omega}\\ &\times\cos\left(4\pi F_0\Omega\left[x_a+\beta\cos\phi-\frac{\omega_1}{2\pi F_0}\sin\phi\right]\right)d\Omega. \quad (39)\end{aligned}$$

Зробивши аналогічні розрахунки для другого доданку формули (11), отримуємо

$$|v_p(x_a;\beta,\omega_1)|^2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/\sin\phi} \frac{\sin\left(4\pi F_0\cos\phi\Omega[1-\Omega\sin\phi]\right)}{\cos\phi\Omega}$$
$$\times\cos\left(4\pi F_0\Omega\left[x_a-\beta\cos\phi+\frac{\omega_1}{2\pi F_0}\sin\phi\right]\right)d\Omega. \quad (40)$$

Для інтерференційного члена отримуємо наступну формулу

$$i(x_a;\beta,\omega_1) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/\sin\phi} S(\Omega;\beta)\cos\left(4\pi F_0\left[\Omega+\frac{\beta}{\sin\phi}\right]x_a\right)d\Omega$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/\sin\phi} S(\Omega;-\beta)\cos\left(4\pi F_0\left[\Omega-\frac{\beta}{\sin\phi}\right]x_a\right)d\Omega. \quad (41)$$

де для підінтегральної функції введено позначення

$$S(\Omega;\pm\beta,\omega_1) = 4\pi F_0\left(1-\Omega\sin\phi\right)$$
$$\times\,\mathrm{sinc}\left(4F_0\left(\cos\phi\left[\Omega\pm\frac{\beta}{\sin\phi}\right]\mp\frac{\omega_1}{2\pi F_0}\right)[1-\Omega\sin\phi]\right). \quad (42)$$

В результаті підстановки (39)-(41) в формулу (37) отримуємо аналітичний вираз для розподілу інтенсивності зображень ДФП двох зміщених щілин.

Для знаходження спряженого зображення ДФП подібно до [6] здійснимо поворот розподілу ДФП (12) на кут $\pi/2$. Такий поворот описується добутком матриць $\mathbf{T}_{\phi+\pi/2} = \mathbf{T}_\phi + \mathbf{T}_{\pi/2}$. Спряжене зображення ДФП

$$|W_p(x_a)|^2 = |U_p(x_a)|^2 + |V_p(x_a)|^2 \pm i_{sp}(x_a;\beta), \quad (43)$$

де перший і другий члени описують спряжені зображення ДФП щілин, третій інтерференційний член

$$i_{sp}(x_a;\beta) = U_p(x_a;\beta)V_p^*(x_a;\beta) + U_p^*(x_a;\beta)V_p(x_a;\beta). \quad (44)$$

4.1.1. Випадок суміщення зображень щілин в області ДФП.

Знайдемо загальну формулу, яка буде описувати два суміщені прямокутні імпульси в області ДФП. Таку умову можна записати наступним чином

$$\Omega_{MOD} = \frac{2\pi F_0\beta}{\mathrm{tg}\phi}. \quad (45)$$

Підставивши в загальну формулу (37) отримуємо остаточну формулу суміщених зображень двох щілин в області ДФП

$$|w_p(x_a)|^2 = 4\cos\left(\frac{2\pi F_0 x\beta}{\sin\phi}\right)^2$$
$$\times\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1/\sin\phi}\frac{\sin\left[4\pi F_0\Omega\cos\phi(1-\Omega\sin\phi)\right]}{\Omega\cos\phi}\cos(4\pi F x_a\Omega)d\Omega. \quad (46)$$

Отже ми отримали формулу для одного прямокутного імпульсу промудульованого квадратом косинуса, який залежить від початкової відстані між щілинами і числа Френеля які є основними характеристиками, що впливають на формування зображення, а також від $sin\phi$, що визначає точку суміщення.

4.2. Розподіл інтенсивності двох зміщених гаусових сигналів

Будемо шукати аналітичний розв'язок задачі формування зображення ДФП зміщених гаусових сигналів у вигляді (37), для перших двох доданків формули (15) отримуємо розподіли інтенсивності зміщених зображень ДФП

$$|u_p(x\pm B_\phi)|^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sigma_\phi(F_0)}\exp\left(-\frac{[x\pm B_\phi]^2}{\sigma^2\sigma_\phi^2(F_0)}\right), \quad (47)$$

де введено позначення:

$$B_\phi = t_{22}b + t_{12}\omega_1 = b\cos\phi - \sigma^2\omega_1\frac{\sin\phi}{2\pi F_0}; \quad (48)$$

$$\sigma_\phi^2(F_0) = \frac{t_{12}^2}{\sigma^4} + t_{22}^2 = \frac{\sin^2\phi}{(2\pi F_0)^2} + \cos^2\phi; \quad (49)$$

$$F_0 = \frac{\sigma^2}{\lambda d_0} \quad - \quad \text{число Френеля.} \quad (50)$$

Очевидно, що величина $\sigma_\phi(F_0)$ набуває змісту ефективного параметра функції Гауса, для якого число Френеля F_0 служить масштабним множником. Це дає підстави розглядати параметр $\sigma_\phi(F_0)$ як дробовий параметр гаусового сигналу, який в залежності від кута повороту ϕ змінюється по еліптичній траєкторії.

Із врахуванням (48)-(50) для інтерференційного члена отримуємо:

$$\begin{aligned} i_p(x) &= \frac{1}{\pi\sigma^2\sigma_\phi(F_0)}\exp\left(-\frac{\left[x^2+B_\phi^2\right]}{\sigma^2\sigma_\phi^2(F_0)}\right) \\ &\times \cos\left(\frac{2\left[\frac{b}{\sigma}\frac{\sin\phi}{2\pi F_0}+\sigma\omega_1\cos\phi\right]}{\sigma_\phi^2(F_0)}\frac{x}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Тепер в формулах (47) і (51) можна перейти до безрозмірної координати $x_\sigma = x/\sigma$. Тоді на основі (48) відношення $B_\phi/\sigma = B_\phi^n$ набуває змісту безрозмірної величини поперечного зміщення зображення ДФП.

Результуючий розподіл інтесивності можна записати формулою

$$\begin{aligned} |w_p(x)|^2 &= \frac{1}{\pi\sigma_\phi(F_0)}\exp\left(-\frac{\left[x_\sigma^2+(B_\phi^n)^2\right]}{\sigma_\phi^2(F_0)}\right) \\ &\times \left\{\mathrm{ch}\left(\frac{2B_\phi^n x_\sigma}{\sigma_\phi^2(F_0)}\right)+\cos\left(\frac{2\Omega_\phi^n x_\sigma}{\sigma_\phi^2(F_0)}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{52}$$

де нормовані параметри поперечного зміщення B_ϕ^n та частоти модуляції Ω_ϕ^n визначаються із матричного рівняння 26, звідки видно, що $\det \mathbf{T}_\phi^{Gaus} = \sigma_\phi^2(F_0)$.

5. ГРАНИЧНІ ВИПАДКИ

5.1. Випадок двох зміщених щілин.

1. Просторово-частотна площина: $p = 1,\ \phi = \pi/2$. У цьому випадку формула (37) зводиться до вигляду вінерівського спектру двох зміщених щілин

$$|u_{p=1}(x_a)|^2 = 16F_0\left\{\frac{\sin(2\pi F_0 x_a)}{2\pi F_0 x_a}\cos\left(2\pi F_0\beta x_a\right)\right\}^2. \tag{53}$$

2. Координатна площина: $p = 0,\ \phi = 0$. В даному випадку легко показати, що інтерференційні члени рівні нулеві. Тоді формула (37) зводиться до вигляду зображень двох щілин

$$|w_{p=0}(x_a)|^2 = \mathrm{rect}\left(\frac{x_a+\beta}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{x_a-\beta}{2}\right). \tag{54}$$

5.2. Випадок двох зміщених гаусових сигналів.

Просторово-частотна площина: $p = 1,\ \phi = \pi/2$. У цьому випадку формула (37) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} |w_{p=1}(x)|^2 &= 4F_0\left\{\pi^2\exp\left(-4\pi^2F^2x^2\right)\right. \\ &\left.+\frac{1}{4}\exp\left(-x^2 4\pi^2F^2\right)\cos\left(\frac{\beta x}{\pi F_0}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{55}$$

6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

6.1. Дві зміщені щілини.

На Рис. 4 і Рис. 5 представлено зображення ДФП від двох зміщених щілин промодульованих плоскими хвилями з ненульовими просторовими частотами при різних значеннях параметра ДФП p. При $\phi = 45^0$ на Рис. 4 зображення повністю суміщаються в області ДФП ($B_\phi^n = 0$). Результуюче зображення утворюється як наслідок суміщення двох щілин, які є промодульовані косинусоїдою. В даномому випадку модуляція відбувається за рахунок впливу інтерференційних членів на формування зображення, який в даному випадку є максимальним. При $\phi = 30^0$ і $\phi = 60^0$ (Рис. 4) зображення є частково суміщеними ($B_\phi \neq 0$) і влив інтерференційних членів є значно меншим. У випадку коли B_ϕ має максимальне ($\Omega_\phi = 0$) значення вплив інтерференційних членів відсутній. Аналогічно на Рис. 5 зображення повністю суміщені при $\phi = 60^0$ і частково суміщені при $\phi = 50^0$ і $\phi = 70^0$.

На Рис. 6 зображено області суміщення в області ДФП і легко бачити, що частота модуляції залежить від параметра ДФП p та змінюється пропорційно до величини $1/\sin\phi$.

6.2. Два зміщені гаусові сигнали.

На Рис. 7 і Рис. 8 представлена область максимальної модуляції зображень двох гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею

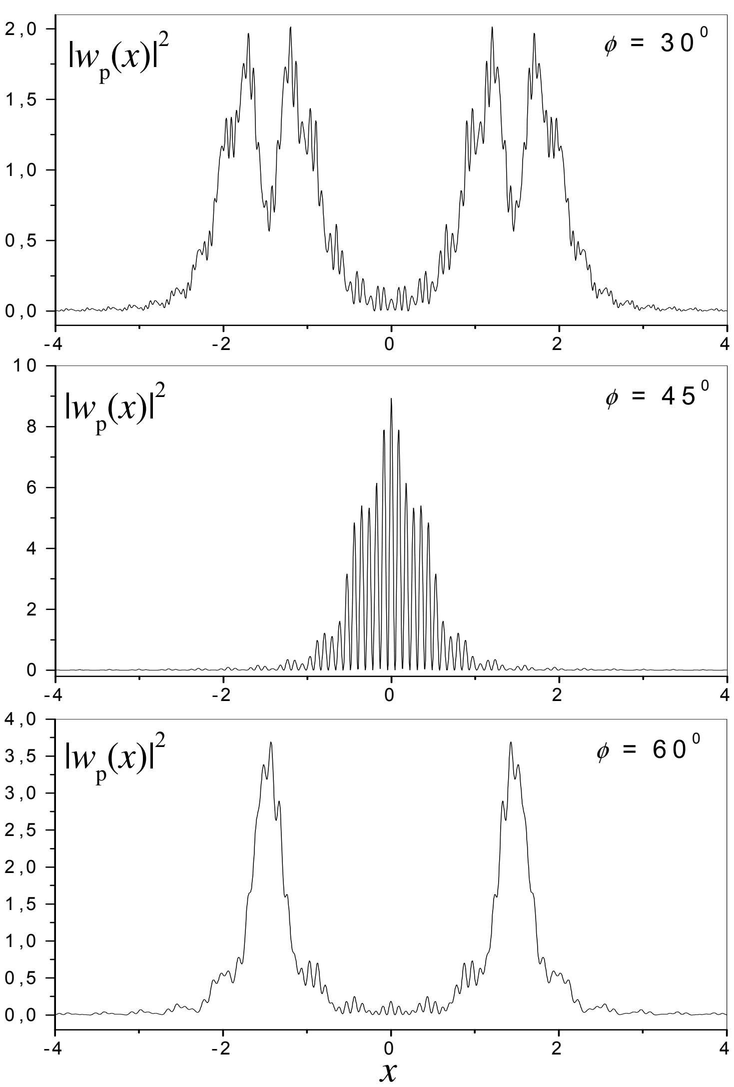

Рис. 4. Область максимальної модуляції двох щілин промодульованих плоскою хвилею, для різних значень параметра ДФП b=4, F=1, $a = 1$, $\omega_1 = 8\pi$.

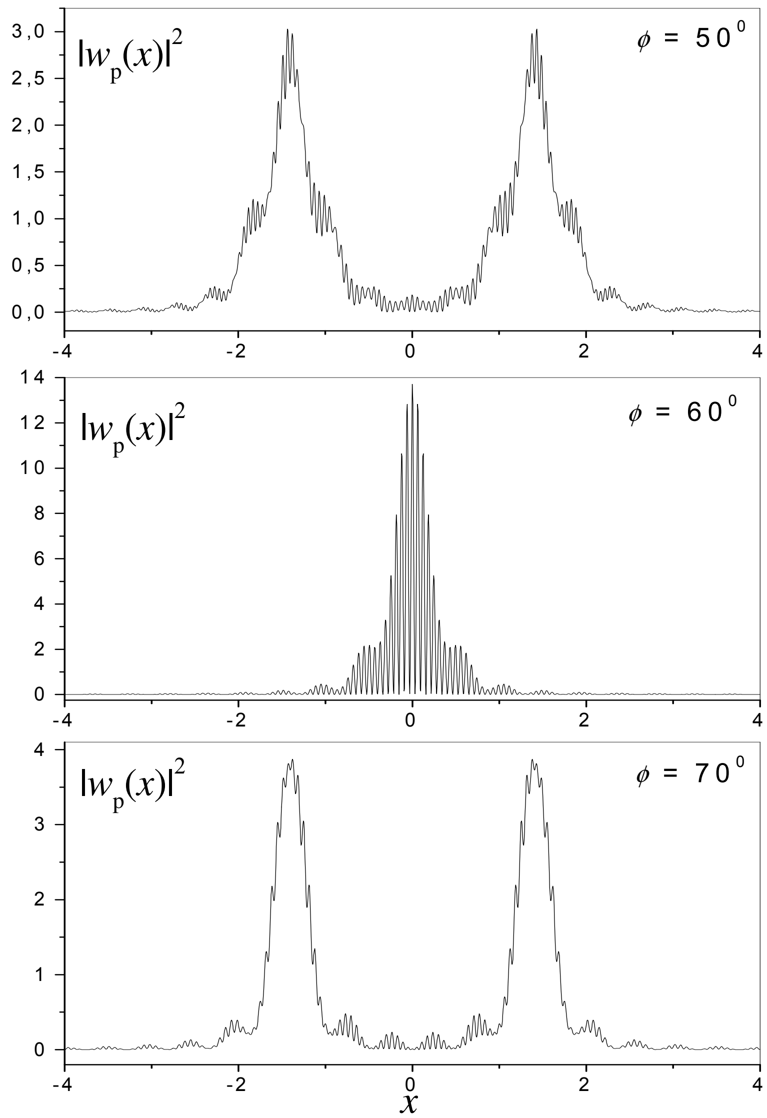

Рис. 5. Область максимальної модуляції двох щілин промодульованих плоскою хвилею, для різних значень параметра ДФП b=7, F=1, $a = 1$, $\omega_1 = 8\pi$.

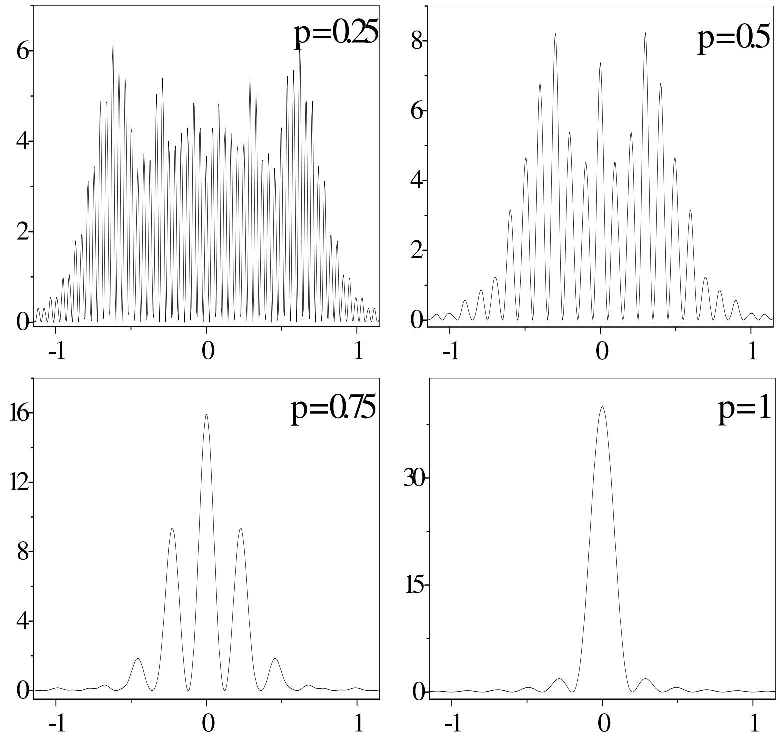

Рис. 6. Зображення двох зміщених щілин промудульованих плоскою хвилею при ДФП в області максимальної модуляції, для різних значень параметра ДФП,число Френеля $F_0 = 2, \beta = 2$

при ДФП. Легко бачити, що зображення ДФП до і після точки максимальної модуляції є різними, що зумовлено тим, що в даному випадку маємо розбіжну сферичну хвилю. При $\phi = 45^0$ на Рис. 7 зображення повністю суміщаються в області ДФП ($B_\phi = 0$). При $\phi = 30^0$ і $\phi = 55^0$ (Рис. 7) зображення є частково суміщеними ($B_\phi \neq 0$). Аналогічно на Рис. 8 зображення повністю суміщені при $\phi = 60^0$ і частково суміщені при $\phi = 50^0$ і $\phi = 65^0$. Як і у випадку суміщення двох щілин максимальний влив інтерференційних членів має місце в точці повного суміщення ($B_\phi = 0$) і спадає з ростом B_ϕ. Коли (B_ϕ) набуває максимального значення ($\Omega_\phi = 0$) вплив інтерференційних членів зникає.

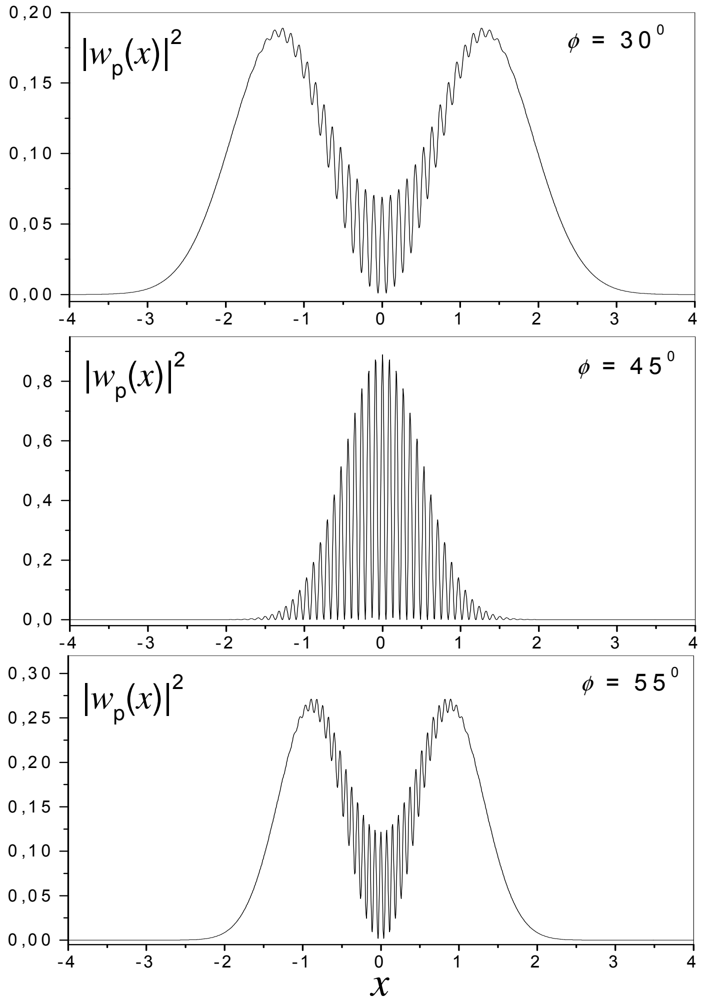

Рис. 7. Область максимальної модуляції двох гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею, для різних значень параметра ДФП b=4,F=1,$\sigma = 1$,$\omega_1 = 8\pi$.

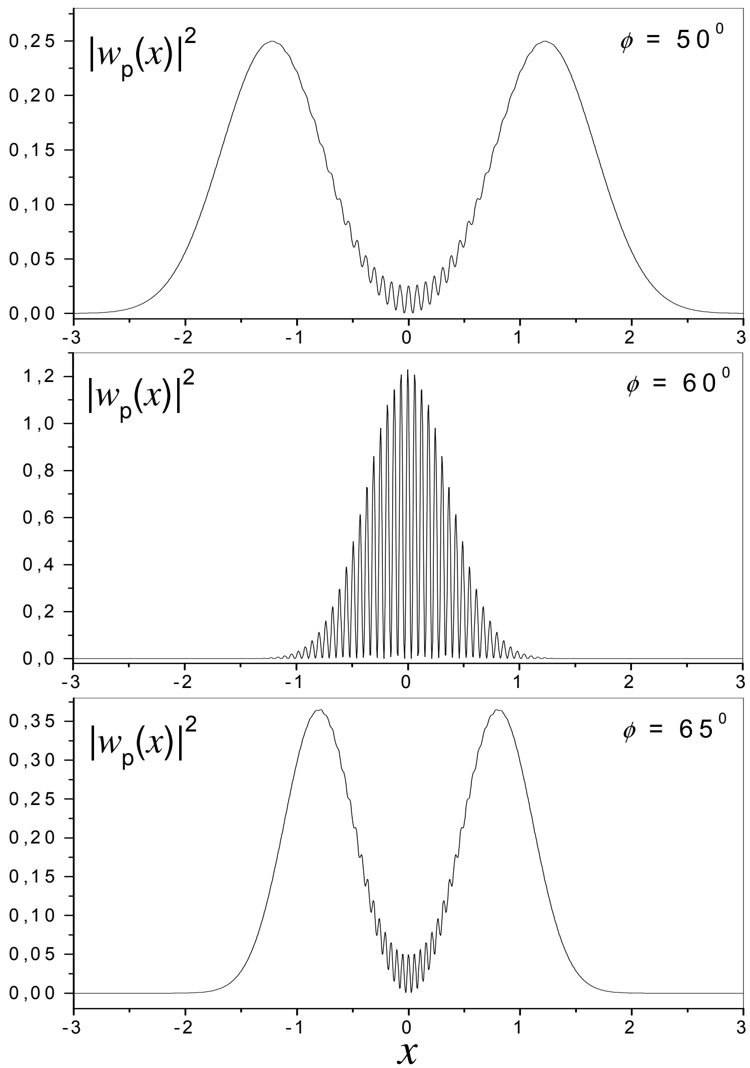

Рис. 8. Область максимальної модуляції двох гаусових сигналів промудульованих плоскою хвилею, для різних значень параметра ДФП b=7,F=1,$\sigma = 1$,$\omega_1 = 8\pi$.

Література

1. *Weaver C.S. and Goodman J.W.* A technique for optically convolving two functions. // Appl. Opt., 1966, vol.5, p.1284-1249.
2. *Kuo C. J. and Luo Y.* Generalizated joint fractional Fourier transform correlators: a compact approach. // Appl. Opt., 1998, vol.37, No 35, p.8270-8276.
3. *Mendlovic D., Ozaktas H.M. and Lohman A.W.* Fractional correlation. // Appl. Opt., 1995, vol.34, p.303-309.
4. *Mendlovic D., Bitran Y., Dorsch R.G. and Lohman A.W.* Optical fractional correlation: experimental results. // J.Opt.Soc.Am. A, 1995, vol.12, p.1665-1670.
5. *Shovgenyuk M.V., Kozlovskii Yu.M., Muravskii L.I., Fitio V.M.* Optical Superposition of the Modulated Images in the Fractional Fourier Transform Domain // Ukr.J.Phys.Opt., 2002 vol.3, p.106-114.
6. *М.В.Шовгенюк, Ю.М.Козловський* Дробове фур'є-перетворення оптичних сигналів. // *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*, Препринт ICMP-01-06U, Львів, 2001, 42 с.
7. *Alieva T. and Barbe A.* Self-imaging in Fourier transform systems. // Opt. Commun., 1998, vol.152, p.11-15.
8. *Шовгенюк М.В., Козловський Ю.М.*, Оптична інтерпретація дробового фур'є-перетворення. //Фізичний збірник НТШ, 2001, т.4, С.289-306.
9. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: новий підхід в теорії оптичної дифракції. // *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*, Препринт ІТФ-92-25U, Львів, 1992, 40 с.
10. *Шовгенюк М. В.* Координатно-частотний розподіл сигналів: виведення формули дифракції Френеля на ізольованій щілині. // *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*, Препринт ІТФ-92-21U, Львів, 1992, 28 с.
11. *Шовгенюк М. В., Козловський Ю. М.* Самоподібність спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // Доповіді НАН України, 2000, No.6, с.92-97.
12. *М.В. Шовгенюк, Ю.М. Козловський*, Перерозподіл спряжених зображень при дробовому фур'є-перетворенні // II Міжнародний Смакуловий симпозіум. Тернопіль 2000. с.86.
13. *M.V.Shovgenyuk, Yu.M.Kozlovskii*, Methodology of the fractional Fourier transform in optics. //Modern problems of soft matter theory. Lviv, 27-31 august, 2000. p.165.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою http://www.icmp.lviv.ua/

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (http://www.icmp.lviv.ua/)

Михайло Васильович Шовгенюк
Юрій Михайлович Козловський

Теорія поперечного зміщення та модуляції зображень дробового фур'є-перетворення

Роботу отримано 17 грудня 2002 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу СТЕКС

Виготовлено при ІФКС НАН України