Національна академія наук України

ІНСТИТУТ
ФІЗИКИ
КОНДЕНСОВАНИХ
СИСТЕМ

ICMP–02–16U

А.В. Назаренко

ТЕРМОДИНАМІЧНІ ФУНКЦІЇ РЕЛЯТИВІСТИЧНОЇ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ У НАБЛИЖЕННІ КІЛЬЦЕВИХ ДІЯГРАМ

ЛЬВІВ

УДК: 531/533; 530.12:531.18

PACS: 05.20.-y

Термодинамічні функції релятивістичної системи зарядів у наближенні кільцевих діяграм

А.В.Назаренко

Анотація. Досліджено наближення кільцевих діяграм для статистичної суми релятивістичної системи заряджених частинок, яка описується гамільтоніяном у лінійному наближенні за константою взаємодії. Знайдено поправки, зумовлені релятивістичною взаємодією, до термодинамічних функцій.

Thermodynamic functions of relativistic system of charges in the ring-diagram approximation

A.V.Nazarenko

Abstract. The ring-diagram approximation for a partition function of relativistis system of the charged particles, which is described by the Hamiltonian in the linear approximation in the coupling constant, is investigated. Corrections due to relativistic interaction to the thermodynamic functions are found.

Подається в Int. J. Mod. Phys. B
Submitted to Int. J. Mod. Phys. B

1. Вступ

Спроби термодинамічного опису релятивістичних систем заряджених частинок (стислий огляд таких досліджень можна знайти у працях [4,8]) розпочалися статтею [17] і виходили з гамільтоніяну Дарвіна

$$H = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} - \frac{\mathbf{p}_a^4}{8m_a^3 c^2} \right) + \sum_{a<b}^{N} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \left\{ 1 - \frac{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})}{2 m_a m_b c^2} \right\}, \tag{1}$$

у термінах канонічних координат $\mathbf{x}_a$, з яких утворено вирази $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ та $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$, та спряжених імпульсів $\mathbf{p}_a$. Застосування виразу (1) до розрахунку класичної статистичної суми

$$Z_N = \frac{1}{N!} \int \mathrm{e}^{-\beta H} \prod_{a=1}^{N} \frac{d^3 x_a d^3 p_a}{(2\pi)^3} \tag{2}$$

відразу наштовхується на дві проблеми. По-перше, наявність в експоненті у (2) доданка, пропорційного p_a^4, негайно приводить до розбіжности інтеґрала. Тому в статистичних застосуваннях гамільтоніян Дарвіна використовують із точним вільночастинковим доданком, тобто

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 c^4 + \mathbf{p}_a^2 c^2} + \sum_{a<b}^{N} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \left\{ 1 - \frac{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})}{2 m_a m_b c^2} \right\}, \tag{3}$$

так що у вільночастинковій межі (2) дає точний релятивістичний результат Ютнера [15]

$$Z_N^{\mathrm{id}} = \frac{1}{N!} \left[\frac{2m^2 c V}{(2\pi)^2 \beta} K_2(\beta m c^2) \right]^N, \tag{4}$$

де

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \alpha^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} d\alpha \tag{5}$$

— функція Макдональда, V — об'єм системи.

Далекодіючий характер взаємодії привів до вивчення термодинаміки в рамках наближення кільцевих діяграм [1,9,18], яке виявилось ефективним у нерелятивістичній теорії. Однак, у першій роботі [17] було показано, що безпосереднє застосування гамільтоніяну Дарвіна (3) у схемі кільцевого наближення дає поправку до вільної енергії

$$\Delta F = \frac{V}{2\pi^2 \beta} \int_0^{\infty} \left[\frac{æ_c^2}{k^2} + \ln\left(1 - \frac{æ_c^2}{k^2}\right) \right] k^2 dk, \tag{6}$$

яка виявляється розбіжною. Тут однак з'явився (слабко) релятивістичний радіус Дебая $æ_c^{-1}$, який фіґурує у всіх наступних розрахунках, що виконуються для слабкорелятивістичної плазми, у формі

$$æ_c^2 = æ^2 \delta, \qquad \delta \equiv \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{3(m^2 c^2 + \mathbf{p}^2)} \right\rangle, \tag{7}$$

де $æ^2 = 4\pi e^2 \beta N/V$ — "класичний" параметер Дебая [1]. Середнє δ береться за вільночастинковим розподілом. Його слабкорелятивістичне значення дає

$$æ_c^2 = \frac{æ^2}{\beta m c^2}. \tag{8}$$

Для усунення розбіжности у виразі (6) при $k = 0$ автори праці [17] здійснили заміну $k^2 \to k^2 + æ_c^2$. Такий підхід зустрівся із серйозною критикою [5].

У працях [5,10] термодинаміка слабкорелятивістичної системи заряджених частинок досліджувалась за допомогою лаґранжіяну

$$L = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{m_a \dot{\mathbf{x}}_a^2}{2} + \frac{m_a \dot{\mathbf{x}}_a^4}{8c^2} \right) - \sum_{a<b}^{N} \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \left\{ 1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}_a \dot{\mathbf{x}}_b + (\dot{\mathbf{x}}_a \mathbf{n}_{ab})(\dot{\mathbf{x}}_b \mathbf{n}_{ab})}{2c^2} \right\}, \tag{9}$$

а не гамільтоніяну Дарвіна (3). Автори у кільцевому наближенні отримали скінчений вираз для поправки на взаємодію до вільної енергії

$$\Delta F = -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta} \left[1 - 2 \left(\frac{1}{\beta m c^2} \right)^{3/2} \right]. \tag{10}$$

Нееквівалентність лаґранжевого та гамільтонового підходів у описі слабкорелятивістичних систем тлумачилась складною формою зв'язку між швидкостями й імпульсами

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_a} = m_a \dot{\mathbf{x}}_a \left(1 + \frac{\dot{\mathbf{x}}_a^2}{2c^2} \right) + \frac{1}{2c^2} \sum_{b=1}^{N}{}' \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \left[\dot{\mathbf{x}}_b + \mathbf{n}_{ab} (\dot{\mathbf{x}}_b \mathbf{n}_{ab}) \right], \tag{11}$$

яку при статистичному описі, що передбачає термодинамічний перехід ($N \to \infty$, $V \to \infty$), не можна замінити нерелятивістичним співвідношенням

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \tag{12}$$

навіть у малих доданках порядку c^{-2}.

У праці [2] за допомогою специфічної процедури вираження швидкостей частинок через канонічні імпульси був запропонований ефективний гамільтоніян для слабкорелятивістичної системи заряджених частинок, придатний для термодинамічних розрахунків:

$$H = \sum_{a=1}^{N} \left[mc^2 + \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m}\left(1 + \frac{æ_c^3 V}{6\pi N}\right) - \frac{\mathbf{p}_a^4}{8m^3c^2} \right] + \sum_{a<b}^{N} \left(\frac{e_a e_b}{r_{ab}} - \frac{p_a^i p_b^k}{2m} R_{ab}^{ik} \right), \tag{13}$$

$$R_{ab}^{ik} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{4\pi e^2}{mc^2} \frac{\delta^{ik} - k^i k^k/\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + æ_c^2} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{ab}}. \tag{14}$$

Такий гамільтоніян містить усі степені c^{-2}, хоча отриманий з лаґранжіяну (9), справедливого лише з точністю до c^{-2}. Коректність (необхідність) використання в гамільтоніяні членів вищих порядків за c^{-2} була предметом дискусії [14,16]. Так, теорема аналітичної механіки про зв'язок малих поправок (тут — порядку c^{-2}) до лаґранжіяну й гамільтоніяну [7], приводить до гамільтоніяну (1), який задовольняє умови Пуанкаре-інваріянтности у даному наближенні. Зокрема, гамільтоніян (1), як ґенератор часових трансляцій (еволюції), разом з ґенераторами просторових трансляцій та поворотів

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^{N} \mathbf{p}_a, \qquad \mathbf{J} = \sum_{a=1}^{N} [\mathbf{x}_a \times \mathbf{p}_a], \tag{15}$$

а також бустів

$$\mathbf{K} = -t\mathbf{P} + \sum_{a=1}^{N} m_a \mathbf{x}_a \left(1 + \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a^2c^2}\right) + \frac{1}{c^2} \sum_{a<b}^{N} \mathbf{x}_a \frac{e_a e_b}{r_{ab}} \tag{16}$$

утворюють канонічну реалізацію групи Пуанкаре.

Ефективний гамільтоніян (13) обґрунтовувався низкою інших способів [3,4,11], зокрема елеґантним застосуванням перетворення Боголюбова до системи зарядів і електромагнетного поля [11]. Його використання для розрахунку вільної енергії слабкорелятивістичного електронного газу привело до результату (10).

Усі віднотовані вище праці орієнтувалися на дослідження слабкорелятивістичних систем, що описуються лаґранжіяном (9). Навіть якщо у певних ефективних конструкціях чи вільночастинкових доданках фігурували вищі за c^{-2} члени, жодної інформації про вищі ніж c^{-2} внески міжчастинкової взаємодії не закладалося. Отже, практично одностайно отримуваний результат (10) для вільної енергії ніякої інформації про такі внески не несе.

Спроба побудувати термодинаміку системи зарядів у лінійному за взаємодією наближенні формально з довільною ступінню релятивізму здійснювалась у [6]. Виключаючи польові змінні, автори побудували лаґранжіян системи, який не може вважатися коректним, бо не дає правильних рівнянь руху [13]. Побудована на основі цього лаґранжіяну (відповідного гамільтоніяну автори не знаходили) вільна енергія має вигляд

$$\Delta F = -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta} \left[1 - \frac{2}{(1+z)^{3/2}(\beta mc^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{11}{2\beta mc^2} + ... \right) \right], \tag{17}$$

де $z = |e_i/e|$ — заряд йонів. Для електронної плазми ($z = 0$) у слабкорелятивістичному наближенні (17) дає (10).

Більш недавня спроба врахувати вищі релятивістичні ефекти у взаємодії заряджених частинок (у лінійному наближенні за константою взаємодії) здійснена у праці [3], де побудовано узагальнення ефективного гамільтоніяну (13):

$$\begin{aligned} H \;=\; & \sum_{a=1}^{N} \left(\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}_a^2c^2} + \frac{1}{3} æ_r e^2 \frac{\mathbf{p}_a^2}{m^2c^2 + \mathbf{p}_a^2} \right) \\ & + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{a<b}^{N} \frac{4\pi e^2}{\mathbf{k}^2} \left(1 - \frac{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_b - (\mathbf{k}\mathbf{u}_a)(\mathbf{k}\mathbf{u}_b)/\mathbf{k}^2}{1 + æ_r^2/\mathbf{k}^2} \right), \end{aligned} \tag{18}$$

$$æ_r^2 = \sum_{a=1}^{N} \frac{4\pi e^2}{\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}_a^2c^2}} \left[1 - \frac{\mathbf{p}_a^2}{3(m^2c^2 + \mathbf{p}_a^2)} \right]. \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{p}_a}{\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}_a^2}}. \tag{20}$$

Такий гамільтоніян фактично враховує релятивістичну кінематику в (13). Нам невідомі розрахунки вільної енергії у наближенні кільцевих діяграм на основі цього гамільтоніяну.

2. Наближення хаотичних фаз для статистичної суми релятивістичної системи зарядів

Розвинений нами в [19] метод виключення ступенів вільности електромагнетного поля дозволив одержати гамільтоніян релятивістичної системи заряджених частинок у лінійному наближенні за константою взаємодії e^2. На відміну від слабкорелятивістичного, дане наближення не обмежується членами порядку c^{-2}. Цей гамільтоніян є ґенератором часових трансляцій канонічної реалізації групи Пуанкаре у даному наближенні і в термінах канонічних змінних $(\mathbf{z}_a, \boldsymbol{\rho}_a)$ має такий вигляд

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m^2+\boldsymbol{\rho}_a^2} + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{N}{}' \frac{e^2}{|\mathbf{z}_{ab}|} - \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{N}{}' e^2 \frac{\mathbf{u}_a\mathbf{u}_b + [\mathbf{u}_a\times\mathbf{z}_{ab}][\mathbf{u}_b\times\mathbf{z}_{ab}]/[\mathbf{u}_b\times\mathbf{z}_{ab}]^2}{\sqrt{(1-\mathbf{u}_b^2)\mathbf{z}_{ab}^2 + (\mathbf{u}_b\mathbf{z}_{ab})^2}}, \qquad (21)$$

де

$$\mathbf{z}_{ab} = \mathbf{z}_a - \mathbf{z}_b, \quad \mathbf{u}_a = \frac{\boldsymbol{\rho}_a}{\sqrt{m^2+\boldsymbol{\rho}_a^2}}.$$

Враховуючи точно релятивістичну кінематику, надалі вважатимемо $c = 1$.

Статистичну суму такої системи

$$Z_N = \frac{1}{N!}\int \mathrm{e}^{-\beta H} \prod_{a=1}^{N} \frac{d^3z_a d^3\rho_a}{(2\pi)^3} \qquad (22)$$

обчислимо у наближенні хаотичних фаз.

Відомі у літературі [2,5,10] техніки обчислення статистичної суми у наближенні кільцевих діяграм (хаотичних фаз) стартують або з лаґранжіяну (Дарвіна) або з одержаного з нього ефективного гамільтоніяну. Такі підходи не придатні для розрахунку термодинамічних функцій релятивістичної системи зарядів на основі знайденого нами Пуанкаре-інваріянтного гамільтоніяну у лінійному наближенні за e^2. Тут, базуючись на гамільтоніяні (21), дамо якісну оцінку впливу релятивістичних ефектів на термодинамічні властивості системи заряджених частинок використовуючи наближення хаотичних фаз без врахування зв'язку між канонічними та фізичними координатами (положеннями) частинок.

Гамільтоніян (21) в слабкорелятивістичному наближенні зводиться до гамільтоніяну Дарвіна. Для останнього, як відомо, безпосереднє застосування наближення кільцевих діяграм приводить до розбіжностей. Ця ж проблема існує і для гамільтоніяна (21). Для її подолання пропонується провести заміну імпульсних змінних в (22), яка б усунула з гамільтоніяна усі релятивістичні доданки (у лінійному наближенні за константою взаємодії) і звела проблему до розрахунку якобіяна перетворення. Цей якобіян у наближенні хаотичних фаз виявляється вільним від розбіжностей, хоча його розрахунок пов'язаний з певними неоднозначностями.

Подамо (21) у вигляді

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m^2+\boldsymbol{\rho}_a^2} + U - \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \mathbf{u}_a \boldsymbol{\mathcal{A}}_{(a)}^{\perp}, \qquad (23)$$

де U — кулонівська нерелятивістична взаємодія, а релятивістична взаємодія виражається за допомогою поперечного векторного потенціялу, який у зображенні Фур'є запишеться так

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(a)}^{\perp} = \frac{1}{V}\sum_{b=1}^{N}{}' \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \frac{\hat{P}_{\perp}(\mathbf{n})\mathbf{u}_b}{1-(\mathbf{n}\mathbf{u}_b)^2} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}}. \qquad (24)$$

Тут ми ввели позначення

$$\nu(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{k}^2}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \qquad \hat{P}_{\perp}(\mathbf{n}) = \|\delta^{ij} - n^i n^j\|.$$

Введемо нові імпульсні змінні $\boldsymbol{\pi}_a$ співвідношенням

$$\boldsymbol{\rho}_a = \boldsymbol{\pi}_a + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(a)}^{\perp}(\boldsymbol{\pi}), \qquad (25)$$

де $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{(a)}^{\perp}(\boldsymbol{\pi})$ позначає функцію (24), у якій замість канонічних імпульсів $\boldsymbol{\rho}_a$ стоять $\boldsymbol{\pi}_a$.

У термінах цих змінних гамільтоніян з точністю до e^4 набуває вигляду

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m^2+\boldsymbol{\pi}_a^2} + U,$$

і статистична сума (22) запишеться так:

$$Z_N = \frac{1}{N!}\int \exp\left[-\beta\left(\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m^2+\boldsymbol{\pi}_a^2} + U\right)\right] J \prod_{a=1}^{N} \frac{d^3z_a d^3\pi_a}{(2\pi)^3}. \qquad (26)$$

Тут J — якобіян переходу

$$J = \det \left\| \frac{\partial \rho_a^i}{\partial \pi_b^j} \right\| = \det \left\| \delta_{ab}\delta_j^i + \frac{\Delta_{ab}}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \Phi_j^i(\boldsymbol{\pi}_b) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}} \right\| ; \qquad (27)$$

$$\Delta_{ab} \equiv 1 - \delta_{ab}, \quad \Phi_j^i(\boldsymbol{\pi}_b) \equiv \frac{\partial}{\partial \pi_b^j} \frac{v_b^i - n^i(\mathbf{n}\mathbf{v}_b)}{1 - (\mathbf{n}\mathbf{v}_b)^2}, \quad \mathbf{v}_a = \frac{\boldsymbol{\pi}_a}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}_a^2}}. \quad (28)$$

Обчислимо визначник за 3-вимірними індексами. Оскільки матричні елементи ${\Phi_{ab}}_j^i$ пропорційні e^2, знехтуємо квадратичними (відповідно кубічними і т.д.) членами за ${\Phi_{ab}}_j^i$, як внесками вищого порядку малості, які слід зберігти під знаком визначника за індексами a, b лише за наявности взаємодії такого ж порядку в гамільтоніяні системи. Тоді одержуємо

$$J = \det \left\| \delta_{ab} + \frac{\Delta_{ab}}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \Phi_i^i(\boldsymbol{\pi}_b) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}} \right\| . \qquad (29)$$

Структура такого якобіяну дозволяє негайно провести інтеґрування за імпульсами:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \xi^N \int \exp\left(-\beta U\right) \bar{J} \prod_{a=1}^{N} d^3 z_a, \qquad (30)$$

де

$$\xi \equiv \int \exp\left(-\beta\sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}\right) \frac{d^3\pi}{(2\pi)^3} = \frac{2m^2 K_2(\beta m)}{(2\pi)^2 \beta}, \qquad (31)$$

$$\bar{J} = \det \left\| \delta_{ab} + \frac{\Delta_{ab}}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \langle \Phi_i^i \rangle \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}} \right\| , \qquad (32)$$

$$\langle \Phi_i^i \rangle \equiv \frac{1}{\xi} \int \exp\left(-\beta\sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}\right) \Phi_i^i(\boldsymbol{\pi}) \frac{d^3\pi}{(2\pi)^3}. \qquad (33)$$

Неважко показати, що

$$\langle \Phi_i^i \rangle = 2\beta X(\beta m), \quad X(a) = \frac{1}{a} \frac{K_1(a)}{K_2(a)}. \qquad (34)$$

Тоді якобіян (32) запишемо так:

$$\bar{J} = \det \left\| \delta_{ab} + C_{ab} \right\| , \quad C_{ab} \equiv \frac{\Delta_{ab}}{V} \sum_{\mathbf{k}} \nu(\mathbf{k}) \beta X(\beta m) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}}. \qquad (35)$$

Відзначимо особливість запропонованого підходу. Складність використаного гамільтоніяну системи сама вказала шлях знаходження $\bar{J}$. Як ми побачимо далі, обчислення $\bar{J}$ у наближенні хаотичних фаз дасть поправку до вільної енергії, яка у слабкорелятивістичному наближенні (для взаємодії Дарвіна) збігається з відомим у літературі результатом [2,5,10]. Однак у випадку слабкорелятивістичного гамільтоніяну Дарвіна елементи матриці ${\Phi_{ab}}_j^i$ не будуть залежати від імпульсів. Тоді у наближенні кільцевих діяграм вже формально можна обчислювати визначник (27), замість (29). Це, внаслідок врахування недіягональних членів матриці ${\Phi_{ab}}_j^i$, приведе до поправки до вільної енергії, яка буде відрізнятись від поправки, обчисленої на основі (29), на множник $\sqrt{2}$.

Подамо тепер $\bar{J}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \exp\left[\mathrm{Tr}\ \ln(\hat{I} + \hat{C})\right] \\ &= \exp\left[\mathrm{Tr}\left(\hat{C} - \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-\hat{C})^s}{s}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (36)$$

В розрахунках степенів матриці $\hat{C}$ скористаємось наближенням хаотичних фаз, тобто співвідношенням [2,10]:

$$\sum_{a=1}^{N} \mathrm{e}^{-i\mathbf{z}_a(\mathbf{k}-\mathbf{q})} = N\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$$

яке слід розуміти у термодинамічній межі, тобто при $N \to \infty$. Тоді, позначивши

$$æ_r^2 \equiv æ^2 X(\beta m), \quad æ^2 \equiv 4\pi e^2 \beta n, \quad n = \frac{N}{V}, \qquad (37)$$

одержимо

$$(\hat{C}^s)_{ab} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{æ_r^2}{\mathbf{k}^2}\right)^s \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}_{ab}}, \quad \mathrm{Tr}\ \hat{C}^s = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{æ_r^2}{\mathbf{k}^2}\right)^s, \quad s > 1.$$

Враховуючи, що $\mathrm{Tr}\ \hat{C} = 0$ внаслідок знакового множника Δ_{ab} (див. (35)), будемо мати

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \exp\left[-\sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s} \left(-\frac{æ_r^2}{\mathbf{k}^2}\right)^s\right] \\ &= \exp\left\{-\sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{æ_r^2}{\mathbf{k}^2} - \ln\left(1 + \frac{æ_r^2}{\mathbf{k}^2}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \qquad (38)$$

Після заміни підсумовування інтеґруванням одержуємо

$$\bar{J} = \exp\left(-\frac{æ_r^3 V}{6\pi}\right). \tag{39}$$

Тоді статистична сума (30) перепишеться у вигляді

$$Z_N = Z_N^{\mathrm{id}} Q_N \bar{J}, \tag{40}$$

де

$$Z_N^{\mathrm{id}} \equiv \frac{1}{N!}(\xi V)^N \tag{41}$$

— статистична сума ідеального релятивістичного газу (див. (4));

$$Q_N \equiv \frac{1}{V^N}\int \exp\left(-\beta U\right)\prod_{a=1}^{N} d^3 z_a \tag{42}$$

— конфігураційний інтеґрал нерелятивістичного кулонівського газу. Отже вільна енергія системи матиме вигляд

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z_N = F^{\mathrm{id}} + F - \frac{1}{\beta}\ln\bar{J}.$$

Беручи для кулонівського конфігураційного інтеґралу результат теорії Дебая–Хюкеля

$$F = -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta},$$

знаходимо

$$\Delta F \equiv F - F^{\mathrm{id}} = -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta}\left[1 - 2X^{3/2}(\beta m)\right]. \tag{43}$$

Враховуючи за допомогою заміни $m \to mc^2$ явну залежність одержаного виразу від швидкості світла c, у слабкорелятивістичному наближенні маємо

$$F - F^{\mathrm{id}} = -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta}\left[1 - \frac{2}{(\beta mc^2)^{3/2}}\right], \tag{44}$$

що збігається з результатами праць [2,5,10]. Хоча здійснена оцінка впливу релятивістичних ефектів приводить до відомих результатів, обчислення статистичної суми (вільної енергії) системи зарядів на основі гамільтоніяну у наближенні e^2 потребує глибшого вивчення.

Оскільки функція $X(a)$ є монотонно спадною і на кінцях проміжку набуває значення

$$X(0) = \frac{1}{2}, \qquad X(\infty) = 0,$$

то можна оцінити вираз у квадратних дужках в (43):

$$0.3 < \left[1 - 2X^{3/2}(m\beta)\right] < 1.$$

Це означає, що релятивістична поправка може ставати співмірною кулонівській.

Обчислимо ентропію та теплоємність системи:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = S^{\mathrm{id}} + \Delta S, \quad C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V^{\mathrm{id}} + \Delta C_V. \tag{45}$$

Для знаходження поправок ΔS, ΔC_V необхідно обчислити похідні від функції $X(a)$. Введемо позначення:

$$Y(a) \equiv -a\frac{dX(a)}{da} = \frac{K_0(a)K_2(a) - K_1^2(a)}{K_2^2(a)}, \tag{46}$$

$$Z(a) \equiv -a\frac{dY(a)}{da} = 2\frac{K_0(a)}{K_2(a)} - 2aY(a)\frac{K_1(a)}{K_2(a)} - 4Y(a). \tag{47}$$

Тут ми скористалися формулою для похідної від функції Макдональда довільного порядку:

$$\frac{dK_n(a)}{da} = -K_{n-1}(a) - \frac{n}{a}K_n(a). \tag{48}$$

Функції $X(a)$, $Y(a)$ та $Z(a)$ при великих значеннях арґументу асимптотично наближаються до $1/a$. В їх термінах поправки до термодинамічних функцій виражаються так:

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_V \\ &= -\frac{æ^3 V}{24\pi}\left(1 - 2X^{1/2}(m\beta)\left[X(m\beta) - 3Y(m\beta)\right]\right), \qquad (49)\\ \Delta C_V &= T\left(\frac{\partial \Delta S}{\partial T}\right)_V \\ &= \frac{æ^3 V}{16\pi}\Big(1 - 2X^{-1/2}(m\beta)\big[X^2(m\beta) - 4X(m\beta)Y(m\beta) \\ &\quad + Y^2(m\beta) + 2X(m\beta)Z(m\beta)\big]\Big). \qquad (50)\end{aligned}$$

Одержані результати дозволяють встановити вплив релятивістичної взаємодії на термодинамічні характеристики системи зарядів. Зазначимо, що досліджена у літературі [2,5,10] слабкорелятивістична взаємодія, для якої $X(a) = Y(a) = Z(a) = 1/a$, не дає внеску у теплоємність системи.

Знайдемо рівняння стану. Тиск газу релятивістичних частинок з електромагнетною взаємодією визначається формулою:

$$\begin{aligned} P &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \\ &= \frac{TN}{V}\left(1 - \frac{e^2\beta}{6}æ\left[1 - 2X^{3/2}(m\beta)\right]\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Відомо [1], що кулонівська взаємодія в електронному газі не приводить до помітного відхилення тиску від тиску ідеального газу. Через співмірність релятивістичної поправки до кулонівської (і то за певних умов) для тиску електронної плазми, спричиненого взаємодією, можна робити лише якісні оцінки.

Середня енергія взаємодії має вигляд

$$\Delta E = \Delta F + T\Delta S = -\frac{æ^3 V}{8\pi\beta}\left[1 - 2X^{1/2}(m\beta)(X(m\beta) - Y(m\beta))\right]. \tag{52}$$

Вираз у квадратних дужках не перевищує 1. Оскільки повинна виконуватись необхідна вимога [1]

$$æ^3 \ll n$$

застосування наближення кільцевих діяграм до системи заряджених частинок, то одержуємо, що

$$|\Delta E| \ll NT.$$

Це означає, що середня енергія взаємодії є менша за енергію вільних частинок

$$E^{\mathrm{id}} = mN\frac{K_1(\beta m)}{K_2(\beta m)} + 3NT,$$

тобто при переході від механічного до статистичного опису релятивістичної системи заряджених частинок зберіглась умова малості взаємодії.

Тепер розглянемо дану систему в ультрарелятивістичному випадку, коли $\beta m \ll 1$. За таких умов маємо

$$X(\beta m) \approx \frac{1}{2} + (-\ln\, 2 + \ln(\beta m) + C)\,\frac{(\beta m)^2}{4}, \tag{53}$$

де $C = 0.5772157$ — стала Ойлера. Тоді

$$\Delta F \approx -\frac{æ^3 V}{12\pi\beta}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.3. \tag{54}$$

На основі одержаного виразу неважко знайти інші термодинамічні функції, використовуючи знайдені вище формули.

Література

1. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 405 с.
2. Блажиевский Л.Ф., Укр. Физ. Журн. – 1975. – Т. 20, № 8. – С. 1273–2181.
3. Блажиєвський Л.Ф., Журн. Фіз. Досл. – 1999. – Т. 3, № 3. – С. 284–290.
4. Блажиєвський Л., Гіль Г., Семак С., Фіз. Збірник НТШ. – 1996. – Т. 2. – С. 261–268.
5. Косачев В.В., Трубников Б.А., Журн. Экспер. и Теор. Физ. – 1968. – Т. 54, № 3. – С. 939–950.
6. Косачев В.В., Трубников Б.А., Журн. Экспер. и Теор. Физ. – 1974. – Т. 66, № 4. – С. 1311–1315.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973.
8. Павлоцкий И.П. Введение в слаборелятивистскую статистическую механику. – М.: Ин-т приклад. мат., 1987.
9. Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – К.: Наук. думка, 1980.
10. Blazhievskii L.F., Theor. Math. Phys. – 2001. – Vol. 126, № 2. – P. 250–257.
11. Blazhievskii L.F., Krynytskyi, Condens. Matter Phys. – 1998. – Vol. 1, № 3(15). – P. 569–574.
12. Darwin C.G., Phil. Mag. – 1920. – Vol. 39, № 233. – P. 537–551.
13. Gaida R.P., Kluchkovsky Yu.B., Tretyak V.I., Theor. Math. Phys. – 1983. – Vol. 55, № 1. – P. 372–384.
14. Jones R.D., Phys. Rev. D – 1982. – Vol. 25, № 2. – P. 591–592.
15. Juttner F., Ann. der Phys. – 1911. – Vol. 34. – P. 856.
16. Krizan J.E., Phys. Rev. D – 1982. – Vol. 25, № 2. – P. 593–594.
17. Krizan J.E., Havas P., Phys. Rev. – 1962. – Vol. 128, № 6. – P. 2916.
18. Mayer J., Goeppert Mayer M. Statistical Mechanics. – New York: Wiley, 1940.
19. Nazarenko A., Int. J. Mod. Phys. A. – 2001. – Vol. 16, № 30. – P. 4865–4889.

Андрій Володимирович Назаренко

Термодинамічні функції релятивістичної системи зарядів у наближенні кільцевих діяграм

Роботу отримано 12 грудня 2002 р.

Затверджено до друку Вченою радою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу теорії металів і сплавів

Виготовлено при ІФКС НАН України