

ІНСТИТУТ  
ФІЗИКИ  
КОНДЕНСОВАНИХ  
СИСТЕМ

ICMP-02-15U

Ю.І.Дубленич

ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ В МОДЕЛІ МІЦУЇ

ЛЬВІВ

**Фазові переходи в моделі Міцуї**

Ю.І.Дубленич

**Анотація.** У цій роботі в наближенні середнього поля досліджено фазові переходи в моделі Міцуї без поздовжнього поля, проте з поперечним полем  $\Omega$ . Встановлено взаємнооднозначну відповідність між такою моделлю та двопідгратковою моделлю Ізінга (або моделлю NNNI) з поздовжнім та поперечним полями. Побудовано фазові діаграми та діаграми областей існування сегнетофази. Для випадку  $\Omega = 0$  одержано простий аналітичний вираз для трикритичної температури і умову існування трикритичної точки. Для  $\Omega \neq 0$  записано системи рівнянь для трикритичної точки та умови її існування.

**Phase transitions in the Mitsui model**

Yu.I.Dublenych

**Abstract.** In this paper, phase transitions in the Mitsui model without a longitudinal field but with a transverse one are investigated in the mean field approximation. The one-to-one correspondence has been established between this model and the two sublattices Ising model (or the NNNI model) with longitudinal and transverse fields. Phase diagrams and diagrams of ferroelectric phase existence are constructed. In the case  $\Omega = 0$ , a simple analytical expression for the tricritical temperature and the condition of tricritical point existence are obtained. For  $\Omega \neq 0$ , sets of equations for the tricritical point and for the condition of its existence are written.

## 1. Вступ

Модель Міцуї, про яку йтиметься в цій роботі, було запропоновано ще в 1958 році [1]. На її основі було успішно пояснено основні особливості сегнетової солі. З того часу цю модель використовують для теоретичного опису властивостей різних сегнетоелектриків типу лад-безлад. В 1971 році Блінц та інші [2] перевели модель Міцуї на мову псевдоспінового формалізму і в такому вигляді вона тепер відома.

Модель Міцуї охоплює не тільки сегнетоелектрики типу лад-безлад, але й інші фізичні об'єкти з асиметричними двомініумними потенціальними ямами (протилежно зорієнтованими на сусідніх вузлах). Зокрема, в роботі [3] розглядалося псевдоспін-електронну модель на основі моделі Міцуї, а в роботі [4] було показано, що статсуму такої моделі (без перенесення електронів та поперечного поля) можна виразити через статсуму моделі Міцуї залежною від температури асиметрією ангармонічного потенціялу.

Особливий інтерес становить дослідження фазових переходів у моделі Міцуї. Однак, незважаючи на значну кількість робіт, ще й досі не було достатньо повного опису фазових переходів у цій моделі навіть у наближенні середнього поля.

В монографії [5] наведено діяграму областей існування сегнетофази, але ця діяграма далеко не повна й доволі приблизна. Детальнішу діяграму у випадку нульового поперечного поля (тунелювання) побудовано в роботі [6], де виділено області трьох фазових переходів, однак і вона не цілком повна і одна з ліній не до кінця правильна. Крім того, в [6] аналітичні вирази наведено тільки для двох найпростіших ліній діяграмм. Для випадку ненульового поперечного поля, побудовано тільки один із перерізів тривимірної діяograms, до того ж не всі лінії.

В даній роботі запропоновано нетрадиційний підхід і детально досліджено фазові переходи та побудовано повну діяограму областей існування сегнетофази для моделі Міцуї в наближенні середнього поля як для нульового, так і для відмінного від нуля поперечного поля. Для всіх кривих діяograms наведено аналітичні вирази, рівняння чи системи рівнянь, з яких ці криві одержано. Крім того, побудовано фазові діяograms в площині температура-асиметрія потенціялу.

## 2. Гамільтоніян в наближенні середнього поля

Розглянемо гамільтоніян моделі Міцуї (без зовнішнього поля):

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} (S_i^{zA} S_j^{zA} + S_i^{zB} S_j^{zB}) - \sum_{ij} K_{ij} S_i^{zA} S_j^{zB} \\ - \Delta \sum_i (S_i^{zA} - S_i^{zB}) - \Omega \sum_i (S_i^{xA} + S_i^{xB}). \quad (1)$$

Тут індекси  $A$  і  $B$  відповідають двом різним підграткам,  $S_i^{\alpha A}$  –  $\alpha$ -компоненти псевдоспіна на  $i$ -му вузлі підгратки  $A$ ,  $J_{ij}$  – взаємодія між псевдоспінами однієї підгратки,  $K_{ij}$  – взаємодія між псевдоспінами різних підграток,  $\Delta$  – асиметрія ангармонічного потенціялу, поперечне поле  $\Omega$  описує тунелювання між двома під'ямами двомініумного потенціялу.

Заміна  $S_i^{zB} \rightarrow -S_i^{zB}$ ,  $K_{ij} \rightarrow -K_{ij}$  перетворює гамільтоніян (1) у гамільтоніян двопідграткової моделі із поздовжнім полем  $\Delta$  (однаковим на обидвох підгратках) та поперечним полем  $\Omega$ . Тому всі результати, одержані для однієї моделі, справедливі й для іншої з точністю до вказаної заміни, і навпаки. Остання модель – це те саме, що й ізотропна модель Ізінга зі взаємодією між найближчими та наступними за ними сусідами (модель NNNI) в поздовжньому та поперечному полях.

В наближенні середнього поля гамільтоніян (1) має вигляд

$$H = \frac{N}{2} \left\{ K \eta_A \eta_B + \frac{J}{2} (\eta_A^2 + \eta_B^2) \right\} + \sum_i (H_i^A + H_i^B), \quad (2)$$

де

$$H_i^A = -(\Delta + K \eta_B + J \eta_A) S_i^{zA} - \Omega S_i^{xA}, \quad (3)$$

$$H_i^B = -(-\Delta + K \eta_A + J \eta_B) S_i^{zB} - \Omega S_i^{xB}, \quad (4)$$

$$K = \sum_i K_{ij} = \sum_j K_{ij}, \quad J = \sum_i J_{ij} = \sum_j J_{ij}, \quad (5)$$

$\eta_A = \langle S_i^{zA} \rangle$ ,  $\eta_B = \langle S_i^{zB} \rangle$  – середні значення псевдоспінів на підгратках,  
 $N$  – загальна кількість псевдоспінів.

### 3. Випадок $\Omega = 0$

#### 3.1. Вільна енергія, умови термодинамічної рівноваги та параметри впорядкування

Розглянемо спочатку випадок, коли немає тунелювання, тобто  $\Omega = 0$ . Тоді власні значення одновузлових гамільтоніянів  $H_i^A$  та  $H_i^B$  такі:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= -\frac{1}{2}(\Delta + K\eta_B + J\eta_A), & \tilde{\lambda}_A &= -\lambda_A; \\ \lambda_B &= -\frac{1}{2}(-\Delta + K\eta_A + J\eta_B), & \tilde{\lambda}_B &= -\lambda_B.\end{aligned}\quad (6)$$

Однокоміркова статсума

$$Z_i = \left( e^{-\beta\lambda_A} + e^{\beta\lambda_A} \right) \left( e^{-\beta\lambda_B} + e^{\beta\lambda_B} \right) e^{-\beta(K\eta_A\eta_B + \frac{J}{2}(\eta_A^2 + \eta_B^2))}. \quad (7)$$

Вільна енергія на одну комірку

$$\begin{aligned}F &= -\theta \ln Z_i, \\ F &= K\eta_A\eta_B + \frac{J}{2}(\eta_A^2 + \eta_B^2) - \\ &- \theta \ln \left( e^{-\beta\lambda_A} + e^{\beta\lambda_A} \right) - \theta \ln \left( e^{-\beta\lambda_B} + e^{\beta\lambda_B} \right).\end{aligned}\quad (8)$$

З умов термодинамічної рівноваги

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial F}{\partial \eta_A} \right)_{T,\Delta} = 0 \\ \left( \frac{\partial F}{\partial \eta_B} \right)_{T,\Delta} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

одержуємо рівняння для  $\eta_A$  та  $\eta_B$ :

$$\begin{cases} 2\eta_A = \tanh \left( \beta\tilde{\lambda}_A \right) \\ 2\eta_B = \tanh \left( \beta\tilde{\lambda}_B \right). \end{cases} \quad (10)$$

З урахуванням (10) вираз для вільної енергії можна записати так:

$$F = K\eta_A\eta_B + \frac{J}{2}(\eta_A^2 + \eta_B^2) + \frac{\theta}{2} \ln \left( \left( \frac{1}{4} - \eta_A^2 \right) \left( \frac{1}{4} - \eta_B^2 \right) \right). \quad (11)$$

Система рівнянь (10) має розв'язки двох типів: 1)  $\eta_A = -\eta_B$  (тоді вона зводиться до одного рівняння), який існує для довільних  $\Delta$  і

2)  $\eta_A \neq -\eta_B$ , який існує в обмеженій області змінювання  $\Delta$  і відповідає сегнетофазі.

Розбиймо площину  $(K, J)$  на вісім секторів, як показано на рис. 1. Графіки вільної енергії як функції  $\Delta$  за нульової температури для центрів дуг одиничного кола кожного з восьми секторів зображені на рис. 2. В секторах 4 і 5 фазових переходів нема взагалі, а в секторах 6, 7 та 8 існує фазовий перехід тільки за нульового  $\Delta$ . В секторі 3 маємо лише фазові переходи 2-го роду, їх легко дослідити. Нетривіальну картину фазових переходів спостерігаємо лише для першої чверті (сектори 1 і 2), тому надалі розглядатимемо тільки цю чверть ( $K \geq 0, J \geq 0$ ).

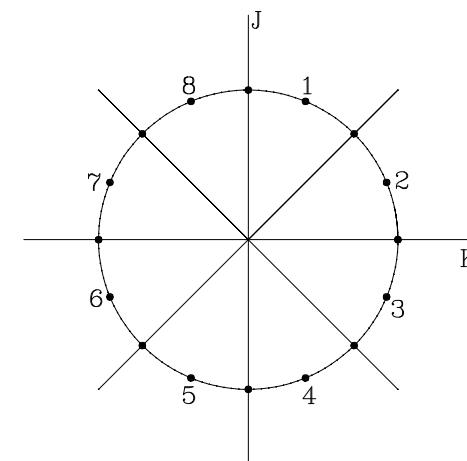


Рис. 1. Розбиття площини  $(K, J)$  на вісім областей, що відповідають різним співвідношенням між параметрами  $K$  та  $J$ .

Запровадьмо нові змінні:  $\xi = \eta_A + \eta_B$  – параметр сегнетоелектричного впорядкування, та  $\sigma = \eta_A - \eta_B$  – параметр антисегнетоелектричного впорядкування. Крім того, поділімо всі енергетичні величини на  $K + J$  і введімо такі позначення:

$$a = \frac{K - J}{K + J}, \quad \gamma = \frac{\Delta}{K + J}, \quad t = \frac{\theta}{K + J}, \quad f = \frac{F}{K + J}, \quad (12)$$

перейшовши таким чином до безрозмірних величин. Тоді систему рівнянь (10) можна записати у вигляді

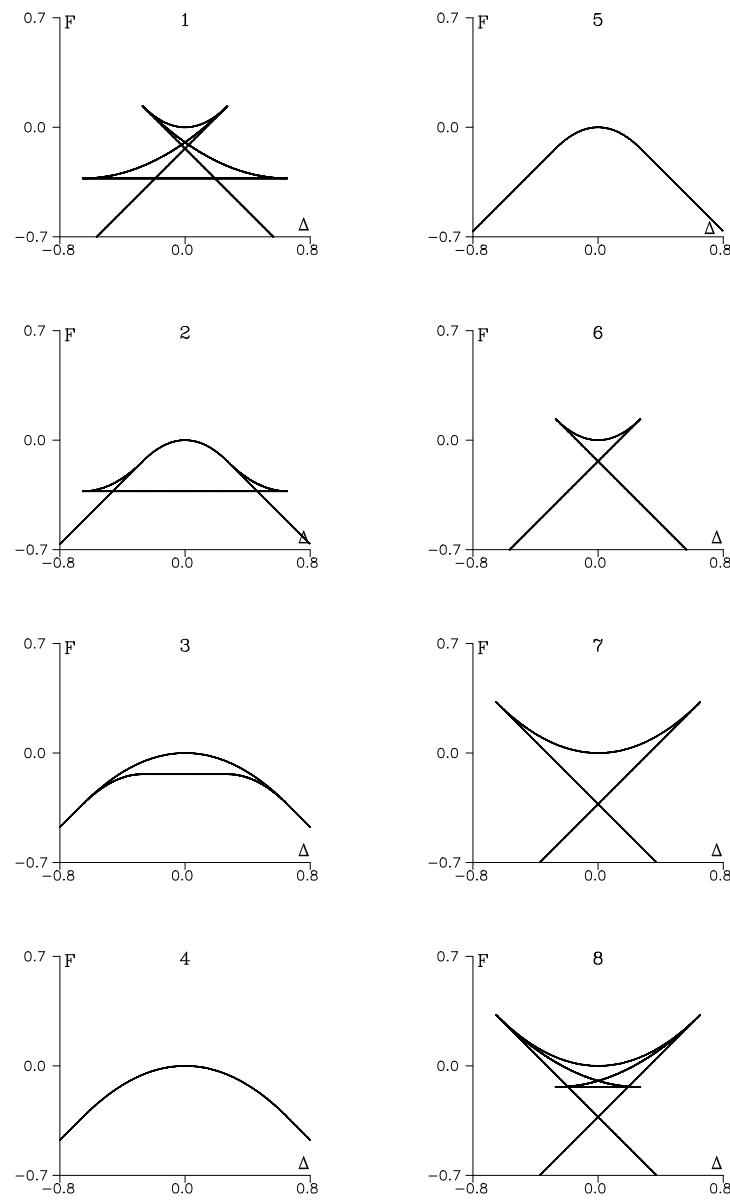


Рис. 2. Вільна енергія як функція  $\Delta$  за нульової температури. Числа над рисунками – номери точок на одиничному колі (див. рис. 1).

$$\begin{cases} e^{\xi/t} = \frac{(1+\xi)^2 - \sigma^2}{(1-\xi)^2 - \sigma^2} \\ e^{-a\sigma/t} = e^{-2\gamma/t} \frac{(1+\sigma)^2 - \xi^2}{(1-\sigma)^2 - \xi^2}. \end{cases} \quad (13)$$

Якщо  $\xi = 0$  (розв'язки першого типу), перше рівняння системи стає тотожністю. У випадку  $\xi \neq 0$  (розв'язки другого типу) з першого рівняння можна виразити  $\sigma$  через  $\xi$ , а друге розв'язати відносно  $\gamma$  і спростити, врахувавши перше рівняння:

$$\begin{cases} \sigma = \pm \sqrt{1 + \xi^2 + 2\xi \frac{1 + e^{\xi/t}}{1 - e^{\xi/t}}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma + \frac{\xi}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma - \xi}{1 - \sigma + \xi}. \end{cases} \quad (14)$$

З огляду на симетрію надалі розглядатимемо лише  $\sigma \geq 0, \xi \geq 0$ .

Запишімо у нових змінних ще вираз для вільної енергії на одну комірку:

$$f = \frac{1}{4} (\xi^2 - a\sigma^2) + \frac{t}{2} \ln ((1 - (\xi + \sigma)^2)(1 - (\xi - \sigma)^2)) - 2t \ln 2. \quad (15)$$

### 3.2. Фазові переходи 2-го роду

Сегнетоелектричному фазовому переходові 2-го роду відповідає точка галуження кривої  $\sigma(\gamma)$  за фіксованих  $a$  та  $t$  (або  $\sigma(t)$  за фіксованих  $a$  та  $\gamma$ ), де розв'язок першого типу переходить у розв'язок другого типу. В цій точці

$$\sigma = \tilde{\sigma} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sigma = \sqrt{1 - 4t}. \quad (16)$$

З (16) видно, що максимальна температура існування фазових переходів

$$t_{max} = \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Підставивши (16) у друге рівняння системи (14) з  $\xi = 0$ , одержимо рівняння для кривої  $\gamma(t)$  фазових переходів 2-го роду

$$\gamma = \frac{a}{2}\tilde{\sigma} + t \ln \frac{1 + \tilde{\sigma}}{1 - \tilde{\sigma}} \quad (18)$$

Треба ще знайти, за якої температури починаються фазові переходи 2-го роду.

Якщо  $a = 1$ , то існують фазові переходи лише 2-го роду. Якщо ж  $-1 < a < 1$ , то маємо переходи як 2-го, так і 1-го роду. Останні існують від  $t = 0$  до певного значення температури. Як видно з рис. 3, трикритична точка, тобто точка, в якій змінюється рід фазового переходу, визначається з умови

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d\gamma}{d\sigma} = 0, \quad (19)$$

з якої одержуємо вираз для трикритичної температури:

$$t_{tc} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(a-1)}. \quad (20)$$

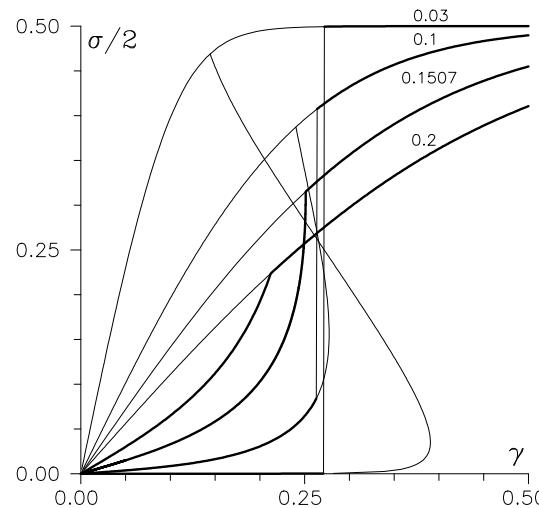


Рис. 3. Параметр антисегнетоелектричного впорядкування як функція  $\gamma$  за різних значень температури (числа над кривими).  $a = 0.0875$ . Потовщеними лініями виділено термодинамічно стійкі стани.

Трикритична точка існує, якщо за температури, яка визначається формуловою (20), виконується ще й умова

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} \leq 0 \quad (\gamma \geq 0). \quad (21)$$

Це ілюструє рис. 4, де наведено декілька кривих  $\frac{\sigma(\gamma)}{2}$  за різних значень параметра  $a$  і відповідних температур, обчислених за формуловою (20). Існування області, де залежність  $\sigma(\gamma)$  для  $\xi \neq 0$  двозначна,

свідчить про фазовий перехід 1-го роду. Зі зменшенням  $a$  ця двозначність зникає і рід переходу змінюється. З рівняння (20) та нерівності (21) одержуємо:

$$a \leq \frac{1}{4}. \quad (22)$$

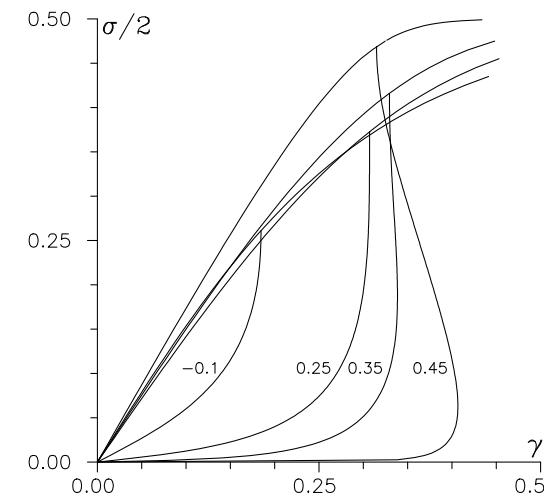


Рис. 4. Параметр антисегнетоелектричного впорядкування як функція  $\gamma$  за різних значень параметра  $a$  (числа біля кривих). Значення температури обчислено за формулою (20).

Зафіксуймо  $a$  і знайдімо точку максимуму кривої  $\gamma(t)$ . З умови екстремуму

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (23)$$

і рівняння (18) одержуємо:

$$\ln \frac{1 + \tilde{\sigma}}{1 - \tilde{\sigma}} = \frac{a + 1}{\tilde{\sigma}}, \quad \gamma = \frac{1}{4} \left( \frac{a + 1}{\tilde{\sigma}} + (a - 1)\tilde{\sigma} \right). \quad (24)$$

З рівняння (24) можна виключити  $\tilde{\sigma}$ , тоді одержимо рівняння для  $\gamma$

$$\left( 2\gamma + \sqrt{(2\gamma)^2 - a^2 + 1} \right) \tanh \frac{2\gamma + \sqrt{(2\gamma)^2 - a^2 + 1}}{2} = a + 1. \quad (25)$$

### 3.3. Фазові переходи 1-го роду

Досі ми аналізували фазові переходи 2-го роду і знайшли вираз для поверхні  $\gamma = \gamma(t, a)$  цих переходів, а також вираз для трикритичної температури та умову існування трикритичної точки. Розгляньмо тепер фазові переходи 1-го роду.

Фазовому переходові 1-го роду відповідає точка самоперетину кривої вільної енергії  $f(\xi, \sigma)$  як функції  $\gamma$  за фіксованих  $a$  і  $t$  (або як функції  $t$  за фіксованих  $a$  і  $\gamma$ ). Однак не всяка точка самоперетину дає фазовий перехід 1-го роду, а тільки та, в якій багатозначна функція для вільної енергії набуває мінімального із можливих за даного  $\gamma$  значень.

Якщо  $-1 \leq a \leq \frac{1}{4}$ , то фазові переходи 1-го роду існують від  $t = 0$  до  $t_{tc}$  (див. (20)). Криву для них у площині  $(\gamma, t)$ , тобто точки самоперетину кривої вільної енергії, а саме її гілки  $\xi = 0$  з гілкою  $\xi \neq 0$ , шукаємо з системи 4-ох рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sqrt{1 + \xi^2 + 2\xi \frac{1 + e^{\xi/t}}{1 - e^{\xi/t}}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma + \frac{\xi}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma - \xi}{1 - \sigma + \xi} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma_1 + t \ln \frac{1 + \sigma_1}{1 - \sigma_1} \\ f(\xi, \sigma) = f(0, \sigma_1). \end{array} \right. \quad (26)$$

Якщо  $t = 0$ , фазовий перехід 1-го роду відбувається за

$$\gamma = \pm \frac{1}{4}(a + 1). \quad (27)$$

У випадку  $t \neq 0$  систему (26) можна розв'язати тільки чисельно.

На рис. 5 зображені криві співіснування фаз для кількох значень параметра  $a$ . Така крива разом з осями координат обмежує область, яка відповідає сегнетофазі. Крім того, на рис. 5 потовщеною лінією зображено криву трикритичних точок (вірніше, її проекцію на площину  $(\gamma, t)$ ), від якої відгалужується крива мінімумів для фазових переходів 1-го роду, утворена точками мінімумів функції  $\gamma(t)$  для всіх можливих значень  $a$ , та крива максимумів для фазових переходів 2-го роду. Трохи далі  $a = 0.25$  крива трикритичних точок переходить у криву точок галуження та криву критичних точок (штрихована лінія). Для чотирьох кривих справа (див. також рис. 6) існують області

$\gamma$ , де  $\epsilon$  не один, а два фазові переходи 2-го роду. Така область виникає, коли максимум кривої  $\gamma(t)$  фазових переходів 2-го роду (24) збігається з трикритичною точкою; тоді  $a \approx 0.1793293$ .

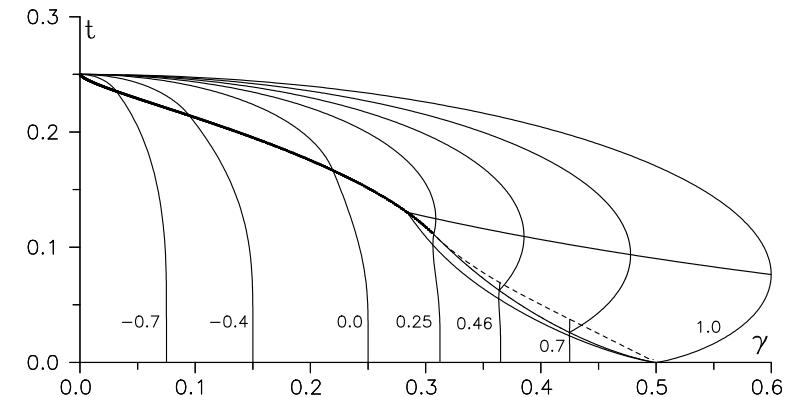


Рис. 5. Криві співіснування фаз в координатах  $(\gamma, t)$  для різних значень параметра  $a$  (числа біля кривих), а також крива трикритичних точок (потовщена лінія), крива мінімумів для фазових переходів 1-го роду, крива максимумів для фазових переходів 2-го роду, крива точок галуження та крива критичних точок (штрихована лінія).

Якщо  $a \geq \frac{1}{4}$ , верхня частина кривої фазових переходів 1-го роду відповідає фазовим переходам в межах сегнетофази. Температуру такого переходу (за фіксованих  $a$  та  $\gamma$ ), тобто температуру для точок самоперетину гілки  $\xi \neq 0$  кривої вільної енергії, шукаємо з системи 5-и рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sqrt{1 + \xi^2 + 2\xi \frac{1 + e^{\xi/t}}{1 - e^{\xi/t}}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma + \frac{\xi}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma - \xi}{1 - \sigma + \xi} \\ \sigma_1 = \sqrt{1 + \xi_1^2 + 2\xi_1 \frac{1 + e^{\xi_1/t}}{1 - e^{\xi_1/t}}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma_1 + \frac{\xi_1}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma_1 - \xi_1}{1 - \sigma_1 + \xi_1} \\ f(\xi, \sigma) = f(\xi_1, \sigma_1), \end{array} \right. \quad (28)$$

відкинувши тривіальні розв'язки типу  $\xi = \xi_1$ .

На рис. 6 b) та 6 c) зображені фрагменти фазових діаграм в координатах  $(\gamma, t)$  для випадку  $a \geq \frac{1}{4}$ . Та частина кривої фазових переходів 1-го роду, яка знаходиться над точкою галуження, відповідає переходам в межах сегнетофази.

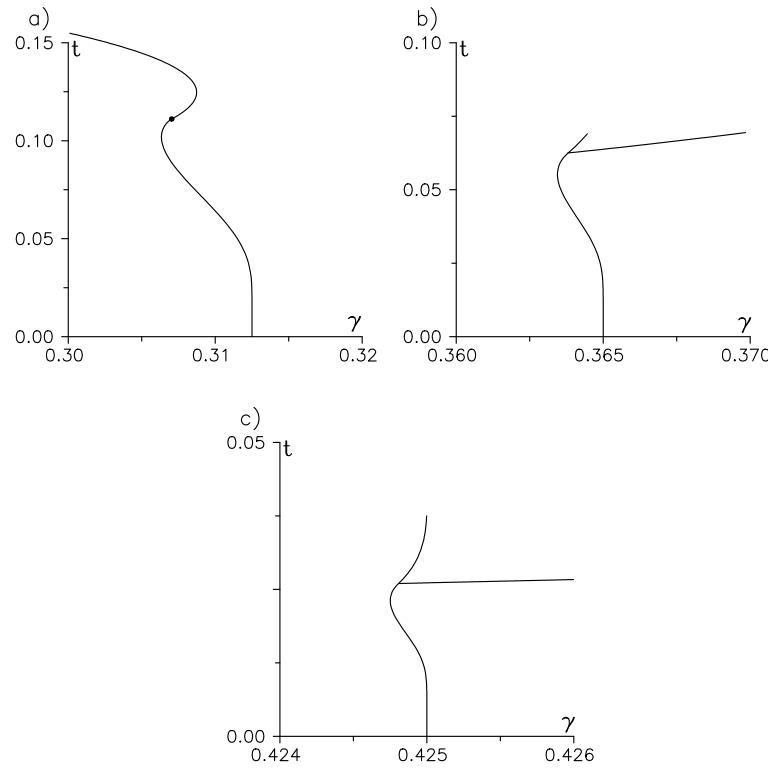


Рис. 6. Фрагменти кривих співіснування фаз для а)  $a = 0.25$  (виділено трікритичну точку), б)  $a = 0.46$  та с)  $a = 0.7$  (див. рис. 5).

Якщо  $a \geq \frac{1}{4}$ , то критичну температуру (за якої закінчуються

фазові переходи 1-го роду) визначаємо з системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\gamma}{d\sigma} = 0 \\ \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} = 0 \\ \sigma = \sqrt{1 + \xi^2 + 2\xi \frac{1 + e^{\xi/t}}{1 - e^{\xi/t}}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma + \frac{\xi}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma - \xi}{1 - \sigma + \xi}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Знайшовши похідні та виконавши прості перетворення, цю систему можна записати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 1 + \xi^2 - 2t + \frac{2}{a} \left( t - \sqrt{a^2\xi^2 + 2at\xi^2(1-a) + t^2(1+a)^2} \right) \\ \sigma^2 = 1 + a\xi^2 - 3t + \\ + \frac{1}{a} \left( t - \sqrt{(a\xi^2(1-a) + t(1+a))^2 - 4a^2\xi^2(2at - 2t - a)} \right) \\ \sigma^2 = 1 + \xi^2 + 2\xi \frac{1 + e^{\xi/t}}{1 - e^{\xi/t}} \\ \gamma = \frac{a}{2}\sigma + \frac{\xi}{2} + t \ln \frac{1 + \sigma - \xi}{1 - \sigma + \xi}. \end{array} \right. \quad (30)$$

Перші два рівняння останньої системи дають рівняння біквадратне відносно  $\xi$ , з якого

$$\xi^2 = \frac{-q - ((3a-1)t-a)\sqrt{q-2(a+1)t((a-1)^2t-a^2)}}{2a(a-1)(2(a-1)t-a)}, \quad (31)$$

де  $q = (a-1)(3a^2-14a-1)t^2 - 2a(2a^2-5a+1)t + a^2(a-1)$ , а отже, вона зводиться до одного трансцендентного рівняння.

Як бачимо з рис. 6, крива  $\gamma(t)$  фазових переходів 1-го роду (починаючи з певного  $a$ ) має мінімум. Щоб знайти його, продиференційованими останнє рівняння системи (26) за  $t$ , поклавши після цього  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ . Виключивши похідні, одержимо рівняння

$$\xi^2 - a\sigma^2 + 4\gamma\sigma = -a\sigma_1^2 + 4\gamma\sigma_1, \quad (32)$$

яке разом з рівняннями системи (26) дає точку мінімуму. За нульової температури розв'язки системи (26) також його задовільняють,

тобто

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (33)$$

Точку галуження фазової кривої (за фіксованого  $a \geq \frac{1}{4}$ ) можна знайти з системи (26), поклавши

$$t = \frac{1 - \sigma_1^2}{4}. \quad (34)$$

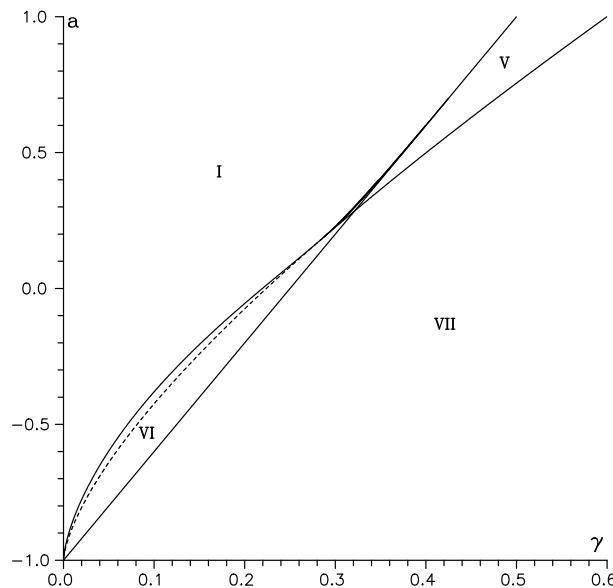


Рис. 7. Області існування сегнетофази (див. також рис. 9–10). Штриховану лінію – продовження ліній, яка обмежує область V – наведено тільки для порівняння з діяграмою з [5].

### 3.4. Області існування сегнетофази

Отже, ми одержали явні аналітичні вирази або записали рівняння чи системи рівнянь для всіх особливих точок фазової кривої за фіксованого  $a$ . Це дає нам змогу побудувати діяграму областей існування сегнетофази у площині  $(\gamma, a)$ , тобто діяграму областей різних типів температурної поведінки параметрів  $\sigma$  та  $\xi$ . Цих областей – сім (рис. 7–8). Їх обмежують такі криві (внизу зліва направо на рис. 8):

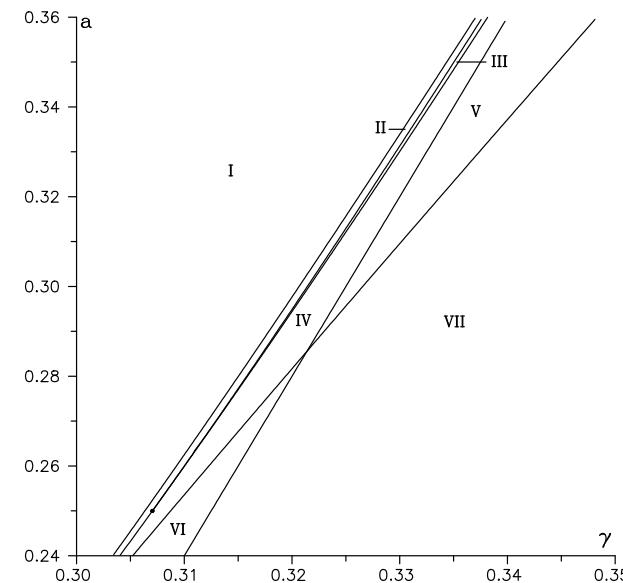


Рис. 8. Області існування сегнетофази (фрагмент). Темний кружечок – точка галуження.

- 1) крива мінімумів для фазових переходів 1-го роду (32);
  - 2) крива трикритичних точок (16), (18), (20);
  - 3) крива точок галуження (26), (34);
  - 4) крива критичних точок (30);
  - 5) крива максимумів для фазових переходів 2-го роду (25);
  - 6) пряма фазових переходів 1-го роду за нульової температури (27).
- В точці  $(a \approx 0.179329, \gamma = 0.283995)$  від кривої трикритичних точок відгалужуються крива мінімумів для фазових переходів 1-го роду та крива максимумів для фазових переходів 2-го роду, а в точці  $(a = 0.25, \gamma = 0.307041)$  крива трикритичних точок галузиться на криву точок галуження і криву критичних точок. Всі лінії, крім кривої максимумів для фазових переходів 2-го роду, сходяться в точці  $(a = 1, \gamma = 0.599839)$ . На рис. 9–10 показано поведінку параметрів  $\sigma$  та  $\xi$  для кожної з областей. В області I (рис. 7–8) існує один високотемпературний фазовий перехід 2-го роду. В області II, крім такого переходу, маємо ще два близьких переходи 1-го роду. Вузька область III відповідає чотирьом переходам – по два кожного роду, з них один перехід 1-го роду – в межах сегнетофази. В області IV існує три фазові переходи: один 1-го і два 2-го роду. Область V – це

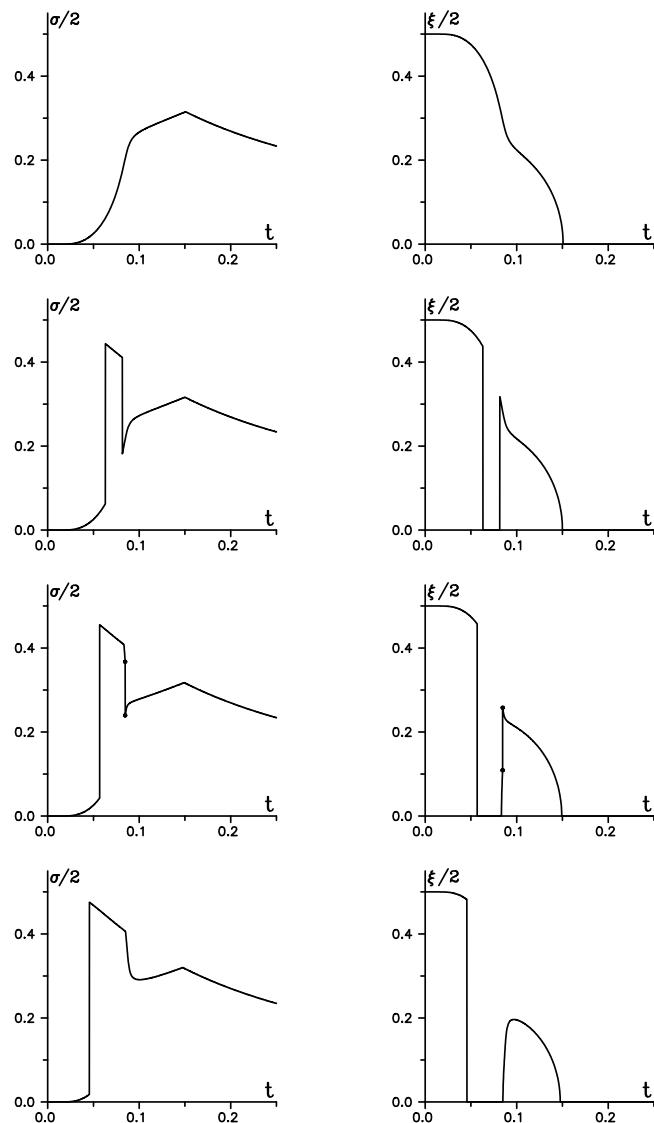


Рис. 9. Параметри сегнетоелектричного та антисегнетоелектричного впорядкування для різних областей існування сегнетофази. Зображені тільки термодинамічно стійкі стани.  $a = 0.36$ , далі по стрічках зверху вниз: I)  $\gamma = 0.337$ ; II)  $\gamma = 0.3375$ ; III)  $\gamma = 0.338$ ; IV)  $\gamma = 0.339$ . Для області III кружечками вказано фазовий перехід 1-го роду в межах сегнетофази.

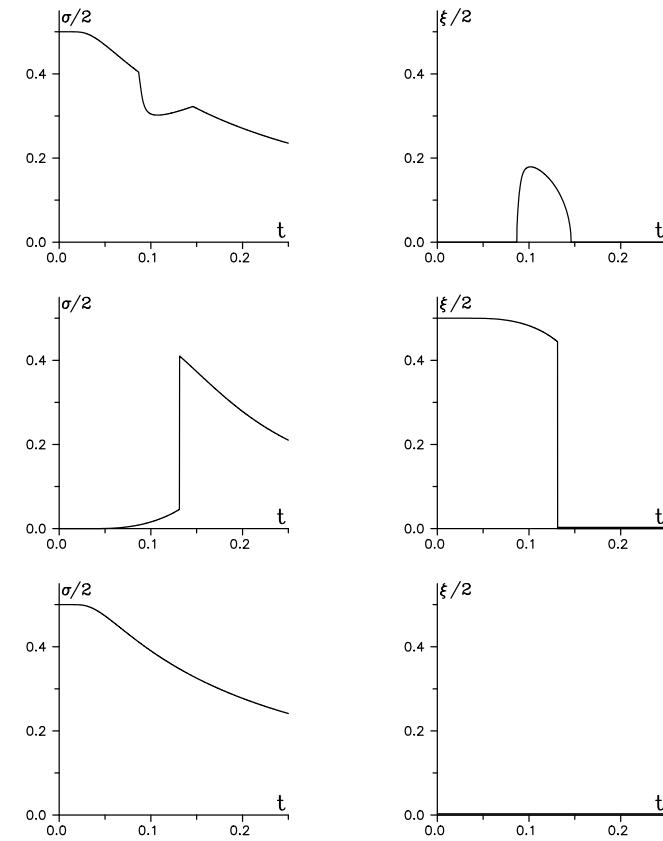


Рис. 10. (Продовження рис. 9.) V)  $a = 0.36$ ,  $\gamma = 0.34$ ; VI)  $a = -0.4$ ,  $\gamma = 0.14$ ; VII)  $a = 0.36$ ,  $\gamma = 0.35$ .

область, де є два переходи 2-го роду, як у сегнетовій солі. В області VI існує тільки один перехід – 1-го роду, а в області VII переходів нема взагалі.

#### 4. Випадок $\Omega \neq 0$

##### 4.1. Вільна енергія та умови термодинамічної рівноваги

Розглянемо тепер випадок ненульового тунелювання. Тоді власні значення одновузлових гамільтоніянів (3) і (4) будуть такими:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= -\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_A^2 + \Omega^2}, & \tilde{\lambda}_A &= -\lambda_A, & \Delta_A &= \Delta + K\eta_B + J\eta_A; \\ \lambda_B &= -\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_B^2 + \Omega^2}, & \tilde{\lambda}_B &= -\lambda_B, & \Delta_B &= -\Delta + K\eta_A + J\eta_B;\end{aligned}\quad (35)$$

а вільна енергія на одну комірку

$$\begin{aligned}F &= K\eta_A\eta_B + \frac{J}{2}(\eta_A^2 + \eta_B^2) - \frac{1}{2}(\sqrt{\Delta_A^2 + \Omega^2} + \sqrt{\Delta_B^2 + \Omega^2}) - \\ &- \theta \ln \left( 1 + e^{-\beta\sqrt{\Delta_A^2 + \Omega^2}} \right) - \theta \ln \left( 1 + e^{-\beta\sqrt{\Delta_B^2 + \Omega^2}} \right).\end{aligned}\quad (36)$$

З умов термодинамічної рівноваги (9) одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\eta_A = \frac{\Delta_A}{\sqrt{\Delta_A^2 + \Omega^2}} \tanh(\beta\tilde{\lambda}_A) \\ 2\eta_B = \frac{\Delta_B}{\sqrt{\Delta_B^2 + \Omega^2}} \tanh(\beta\tilde{\lambda}_B). \end{cases}\quad (37)$$

Як і у випадку  $\Omega = 0$ , перейдімо до безрозмірних величин, увівши, крім (12), іще одне позначення

$$\omega = \frac{\Omega}{K+J}. \quad (38)$$

Запровадимо також нові змінні:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\Delta_A + \Delta_B}{2(K+J)} = \frac{\eta_A + \eta_B}{2} = \frac{\xi}{2}, \\ y &= \frac{\Delta_A - \Delta_B}{2(K+J)} = \gamma - a\frac{\eta_A - \eta_B}{2} = \gamma - a\frac{\sigma}{2}.\end{aligned}\quad (39)$$

Тоді система (37) набуде вигляду

$$\begin{cases} 2x = A(x+y) - A(-x+y) \\ \frac{2(\gamma-y)}{a} = A(x+y) + A(-x+y), \end{cases}\quad (40)$$

де

$$A(z) = \frac{z}{2\sqrt{z^2 + \omega^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{z^2 + \omega^2}}{2t}\right), \quad (41)$$

а вираз для вільної енергії:

$$\begin{aligned}f &= x^2 - \frac{(\gamma-y)^2}{a} - \frac{1}{2} \left( \sqrt{(x+y)^2 + \omega^2} + \sqrt{(x-y)^2 + \omega^2} \right) - \\ &- t \ln \left( 1 + e^{-\frac{\sqrt{(x+y)^2 + \omega^2}}{t}} \right) - t \ln \left( 1 + e^{-\frac{\sqrt{(x-y)^2 + \omega^2}}{t}} \right).\end{aligned}\quad (42)$$

##### 4.2. Фазові переходи 2-го роду

Як і у випадку  $\Omega = 0$ , система рівнянь (40) має розв'язки двох типів: 1)  $x = 0$ ; тоді перше рівняння стає тотожністю; та 2)  $x \neq 0$ , який відповідає сегнетофазі. Спрямувавши  $x$  до нуля, з (40) одержимо систему рівнянь для гіперповерхні  $\gamma = \gamma(\omega, a, t)$  фазових переходів 2-го роду:

$$\begin{cases} B(\tilde{y}) - 1 = 0 \\ \gamma = \tilde{y} + aA(\tilde{y}), \end{cases}\quad (43)$$

де  $B(z) = \frac{dA(z)}{dz}$ ,  $\tilde{y} = \lim_{x \rightarrow 0} y$ .

Знайшовши  $B(z)$ , можемо записати цю систему у вигляді

$$\begin{cases} s^2 - \frac{2t\omega^2 s}{\tilde{y}^2 \sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2}} + \frac{4t(\tilde{y}^2 + \omega^2)}{\tilde{y}^2} - 1 = 0 \\ \gamma = \tilde{y} + \frac{as\tilde{y}}{2\sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2}}, \end{cases}\quad (44)$$

де запроваджено позначення  $s = \tanh\left(\frac{\sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2}}{2t}\right)$ .

Прирівнявши  $\gamma$  до нуля, з (44) одержуємо вираз для максимальної

температури, до якої існують фазові переходи:

$$t_{max} = \frac{\omega}{\ln \frac{1+2\omega}{1-2\omega}}. \quad (45)$$

Логарифм в останньому виразі має зміст, якщо  $\omega \leq \frac{1}{2}$ . Отже,

$$\omega_{max} = \frac{1}{2}. \quad (46)$$

Продиференціювавши рівняння системи (44) за  $t$ , прирівнявши до нуля  $\frac{d\gamma}{dt}$  та виключивши похідну  $\frac{d\tilde{y}}{dt}$ , після нескладних перетворень одержимо рівняння

$$\begin{aligned} 2(1+a)(\tilde{y}^2 + \omega^2) \left( \tilde{y}^2 s \sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2} - t(\tilde{y}^2 + \omega^2) \right) = \\ a \left( 3t\omega^2 s \sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2} - 2\tilde{y}^2 s \sqrt{\tilde{y}^2 + \omega^2} + 6t\omega^2 (\tilde{y}^2 + \omega^2) - \omega^2 \tilde{y}^2 s^2 \right), \end{aligned} \quad (47)$$

яке разом з рівняннями (44) дає точку максимуму кривої  $\gamma(t)$  фазових переходів 2-го роду (за фіксованих  $\omega$  та  $a$ ).

Рівняння для трикритичної точки аналогічне тому, що і у випадку  $\Omega = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\gamma}{dy} = 0. \quad (48)$$

З цього одержуємо:

$$(a+1)D(\tilde{y}) - 3a(C(\tilde{y}))^2 = 0, \quad (49)$$

де запроваджено позначення

$$C(z) = \frac{d^2 A(z)}{dz^2}, \quad D(z) = \frac{d^3 A(z)}{dz^3}. \quad (50)$$

Трикритична точка існує, якщо одночасно з (48) виконується ще й умова

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^2 \gamma}{dy^2} \leq 0 \quad (\gamma \geq 0), \quad (51)$$

яка дає рівняння:

$$8(D(\tilde{y}))^3 - 9C(\tilde{y})D(\tilde{y})E(\tilde{y}) + \frac{9}{5}(C(\tilde{y}))^2F(\tilde{y}) = 0. \quad (52)$$

Тут

$$E(z) = \frac{d^4 A(z)}{dz^4}, \quad F(z) = \frac{d^5 A(z)}{dz^5}. \quad (53)$$

Якщо фазові переходи 2-го роду існують аж до  $t = 0$ , то, як випливає з (44),  $\gamma$  для такого переходу за нульової температури має значення

$$\gamma = (2\omega)^{-\frac{2}{3}} \left( a + (2\omega)^{\frac{2}{3}} \right) \tilde{y}, \quad \text{де } \tilde{y} = \frac{1}{2} (2\omega)^{\frac{2}{3}} \left( 1 - (2\omega)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (54)$$

Записавши формулу (49) для нульової температури, знайдемо:

$$a = \frac{5(2\omega)^{\frac{2}{3}} - 4}{4(2\omega)^{\frac{2}{3}} - 5}. \quad (55)$$

Якщо  $a$  більше за це значення (за фіксованого  $\omega$ ), то фазові переходи 2-го роду починаються за нульової температури. З (52) випливає, що формула (55) справедлива, якщо

$$\omega \geq 2^{-\frac{5}{2}} \approx 0.1768; \quad (56)$$

тоді  $a \leq \frac{1}{2}$ .

#### 4.3. Фазові переходи 1-го роду

Точки фазових переходів 1-го роду в сегнетофазу чи з неї дає система рівнянь:

$$\begin{cases} 2x = A(x+y) - A(-x+y) \\ \frac{2(\gamma-y)}{a} = A(x+y) + A(-x+y) \\ \frac{\gamma-y_1}{a} = A(y_1) \\ f(x,y) = f(0,y_1). \end{cases} \quad (57)$$

Продиференціювавши останнє рівняння за  $t$ , та виключивши похідні, одержимо рівняння

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{(\gamma-y)^2}{a} - \left( x + \frac{\gamma-y}{a} \right) \frac{(x+y)^2 + \omega^2}{x+y} - \\ - \left( x - \frac{\gamma-y}{a} \right) \frac{(x-y)^2 + \omega^2}{x-y} = -\frac{(\gamma-y_1)^2}{a} - \frac{2(\gamma-y_1)}{a} \frac{y_1^2 + \omega^2}{y_1}, \end{aligned} \quad (58)$$

яке разом з системою (57) дає екстремуми кривої  $\gamma(t)$  фазових переходів 1-го роду (за фіксованого  $\omega$ ). Якщо  $t = 0$ , то розв'язки системи (57) задовільняють також і рівняння (58). Отже, для кривої  $\gamma(t)$  фазових переходів 1-го роду

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\gamma}{dt} = 0. \quad (59)$$

Систему рівнянь для критичної точки, як і у випадку  $\Omega = 0$ , одержимо, прирівнявши до нуля похідні  $\frac{d\gamma}{dy}$  та  $\frac{d^2\gamma}{dy^2}$ :

$$\begin{cases} a = \frac{2 - B_- - B_+}{2B_-B_+ - B_- - B_+} \\ C_+(1 - B_-)^3 + C_-(1 - B_+)^3 = 0 \\ 2x = A_+ - A_- \\ \frac{2(\gamma - y)}{a} = A_+ + A_-, \end{cases} \quad (60)$$

де  $A_{\pm} = A(\pm x + y)$ ,  $B_{\pm} = B(\pm x + y)$ ,  $C_{\pm} = C(\pm x + y)$ .

Записавши систему (60) для нульової температури, одержимо:

$$\begin{cases} \frac{z_+ \left( 2(z_-^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}} - \omega^2 \right)^3}{(z_-^2 + \omega^2)^2} + \frac{z_- \left( 2(z_+^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}} - \omega^2 \right)^3}{(z_+^2 + \omega^2)^2} = 0 \\ \frac{z_+}{2\sqrt{z_+^2 + \omega^2}} - \frac{z_-}{2\sqrt{z_-^2 + \omega^2}} - z_+ + z_- = 0 \\ a = \frac{4(z_+^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}(z_-^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}} - \omega^4}{\omega^2 \left( \omega^2 - (z_+^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}} - (z_-^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}} \right)} + 1 \\ \gamma = \frac{a}{4} \left( \frac{z_+}{\sqrt{z_+^2 + \omega^2}} + \frac{z_-}{\sqrt{z_-^2 + \omega^2}} \right) + \frac{1}{2}(z_+ + z_-), \end{cases} \quad (61)$$

де  $z_{\pm} = \pm x + y$ . Нетривіальний розв'язок цієї системи за фіксованого  $\omega \leq 2^{-\frac{5}{2}}$  відповідає точці, в якій закінчуються крива фазових переходів 1-го роду за нульової температури та крива критичних точок на діаграмі областей існування сегнетофази.

Криві співіснування фаз в площині  $(\gamma, t)$  для різних значень  $a$ , а також криві трикритичних точок, критичних точок і точок галуження для  $\omega = 0.1$  зображені на рис. 11. Дві останні вже не сходяться за нульової температури, а отже, існує проміжок значень  $a$ , для яких

фазові діаграми мають вигляд, як на рис. 12 b), тобто складаються з кривої фазових переходів 2-го роду та кривої фазових переходів 1-го роду в межах сегнетофази. За  $\omega = 2^{-\frac{5}{2}}$  криві критичних точок і точок галуження знову сходяться за нульової температури, а якщо  $2^{-\frac{5}{2}} < \omega < 0.196815$ , ці криві зливаються вже за відмінної від нуля температури, знову переходячи у криву трикритичних точок (рис. 13). Остання має "зворотний хід" (неоднозначність) в низькотемпературній області, що приводить до існування нового типу фазової діаграми – з двома трикритичними точками (рис. 14). Коли  $\omega$  перевищує  $\approx 0.196815$ , залишається тільки крива трикритичних точок.

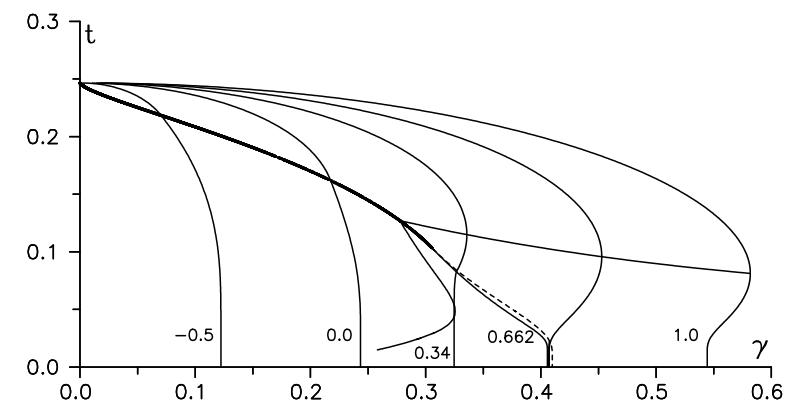


Рис. 11. Криві співіснування фаз в координатах  $(\gamma, t)$  для різних значень параметра  $a$  (числа біля кривих), а також крива трикритичних точок (потовщені лінії), крива екстремумів для фазових переходів 1-го роду (не доведено до кінця), крива максимумів для фазових переходів 2-го роду, крива точок галуження та крива критичних точок (штриховані лінії).  $\omega = 0.1$ .

#### 4.4. Області існування сегнетофази

На рис. 15–18 зображено діаграму областей існування сегнетофази для  $\omega = 0.1$ . Діаграму утворюють такі ж криві, що й за нульового  $\omega$ , до яких долучаються ще пряма фазових переходів 2-го роду за нульової температури (54) та крива максимумів для фазових переходів 1-го роду (58), яка проходить дуже близько до кривої фазових переходів 1-го роду за нульової температури.

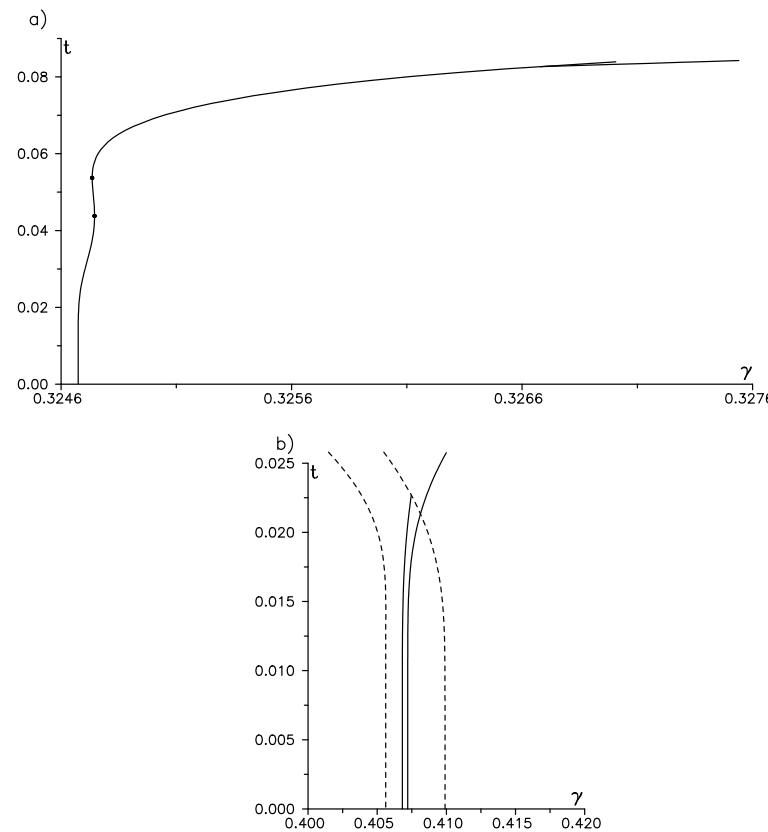


Рис. 12. Фрагменти кривих співіснування фаз для  $\omega = 0.1$  (див. рис. 11). а)  $a = 0.34$  (кружечки – точки екстремумів), б)  $a = 0.662$  (штрихована лінія зліва – крива точок галуження, а справа – крива критичних точок).

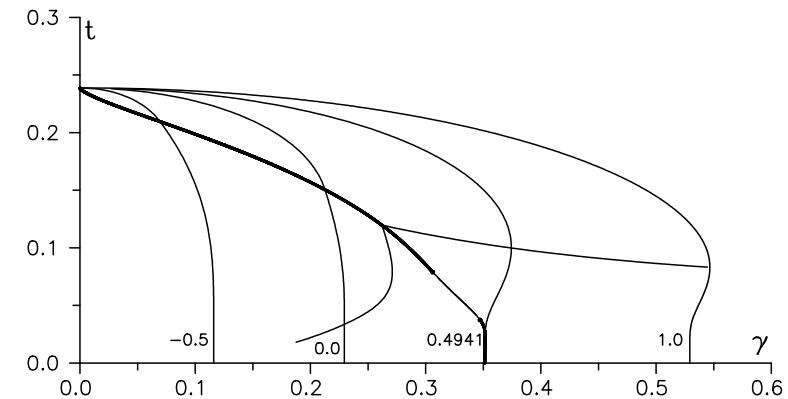


Рис. 13. Криві співіснування фаз в координатах  $(\gamma, t)$  для різних значень параметра  $a$  (числа біля кривих).  $\omega = 0.18$ . Потовщені лінії – крива трикритичних точок. Крива критичних точок та крива точок галуження в цьому масштабі зливаються в одну лінію.

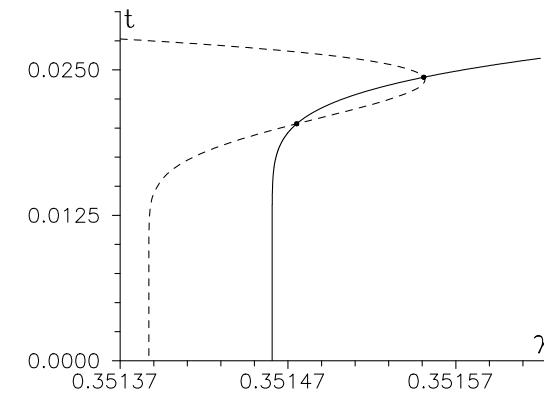


Рис. 14. Фрагмент кривої співіснування фаз для  $a = 0.4941$ ,  $\omega = 0.18$  (див. рис. 13). Штрихована лінія – крива трикритичних точок.

Як і за  $\omega = 0$ , від кривої трикритичних точок відгалужуються одночасно крива мінімумів для фазових переходів 1-го роду і крива максимумів для фазових переходів 2-го роду. Потім, якщо  $\omega < 0.196815$ , крива трикритичних точок галузиться на криву критичних точок і криву точок галуження, які, якщо  $\omega > 2^{-\frac{5}{2}}$ , знову зливаються в криву трикритичних точок. Крива фазових переходів 1-го роду за нульової температури складається з двох частин: перша відповідає переходам з сегнетофази чи в неї, починається в початку координат і закінчується в кінцевій точці кривої точок галуження ( $\omega \leq 2^{-\frac{5}{2}}$ ) або кривої трикритичних точок ( $\omega > 2^{-\frac{5}{2}}$ ), точці, з якої бере початок пряма фазових переходів 2-го роду за нульової температури; друга частина існує тільки у випадку  $\omega < 2^{-\frac{5}{2}}$ , відповідає переходам у межах сегнетофази і закінчується в кінцевій точці кривої критичних точок (див. рис. 16). У випадку  $\omega \geq 2^{-\frac{5}{2}}$  точка, в якій сходяться крива трикритичних точок і крива фазових переходів 1-го роду за нульової температури, визначається формулою (55), до того ж остання крива в цій точці гладко переходить у криву фазових переходів 2-го роду за нульової температури.

За відмінного від нуля  $\omega$  виникають нові області, яких нема, коли  $\omega = 0$ . Так, в області VIII існує один низькотемпературний фазовий переход 1-го роду в сегнетофазу та один 2-го роду. Область IX – це область 3-ох фазових переходів: один 1-го і два 2-го роду, але переход 1-го роду відбувається в межах сегнетофази. В області X існує один фазовий переход 1-го роду в межах сегнетофази та один переход 2-го роду.

Криві мінімумів та максимумів для фазових переходів 1-го роду сходяться в області VIII ( $a \approx 0.3433, \gamma \approx 0.3255, t \approx 0.0484$ ), відтинаючи від неї довгу косу (рис. 18) – область XI з двома низькотемпературними переходами 1-го роду та одним другого. Далі крива максимумів для фазових переходів 1-го роду відтинає вузькі смужки від областей IX, V та VII, які, коли б її не було, простягалися б до кривої фазових переходів 1-го роду за нульової температури. Це області XII, XIII і XIV відповідно, в яких додатково з'являються два близькі низькотемпературні фазові переходи 1-го роду. На рис. 17 цих областей не видно, бо вони дуже вузькі.

Як бачимо, за достатньо малих  $\omega$  діяграма областей існування сегнетофази багатша, ніж за нульового  $\omega$ , однак, починаючи з певного  $\omega$ , області одна за одною зникають і діяgrama збіднюється. Спершу зникає область III. На рис. 17 вона вже виглядає, як короткий відрізок кривої з початком у точці галуження. За нею зникає область XII, а за  $\omega = 2^{-\frac{5}{2}}$ , стягується в точку область X.

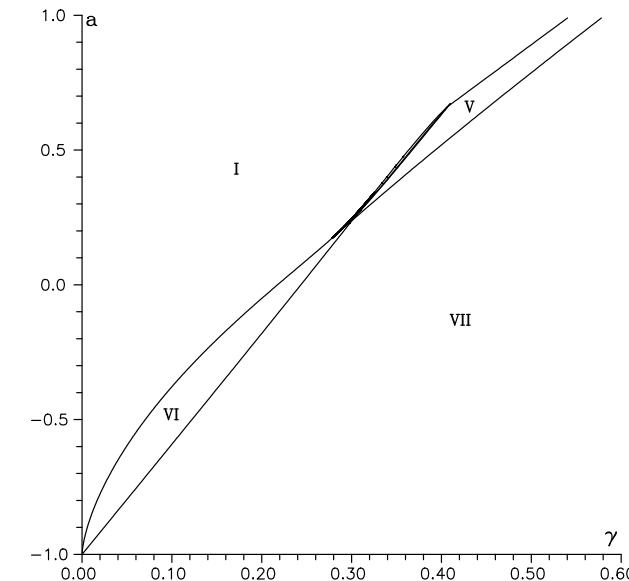


Рис. 15. Області існування сегнетофази.  $\omega = 0.1$ .

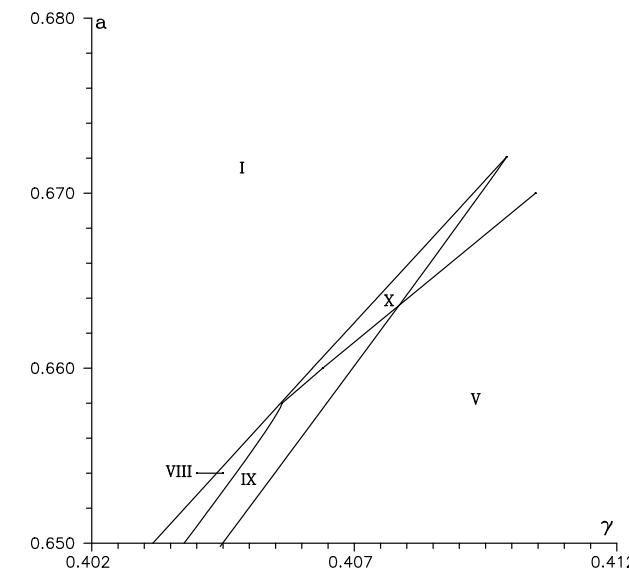


Рис. 16. Області існування сегнетофази (фрагмент).  $\omega = 0.1$ . (Див. також рис. 21).

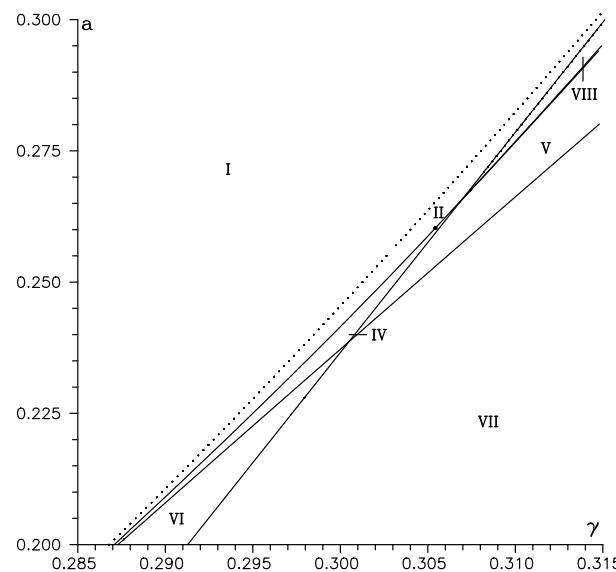


Рис. 17. Області існування сегнетофази (фрагмент).  $\omega = 0.1$ . Темним кружечком зображенено точку, де крива трикритичних точок галузиться на криву критичних точок та криву точок галуження.

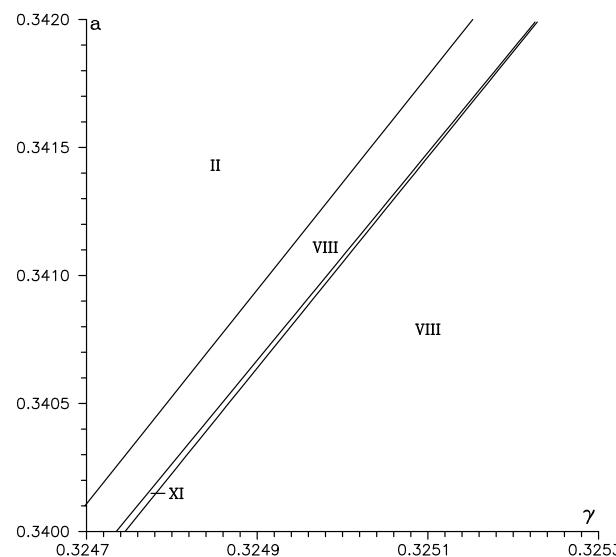


Рис. 18. Області існування сегнетофази (фрагмент).  $\omega = 0.1$ .

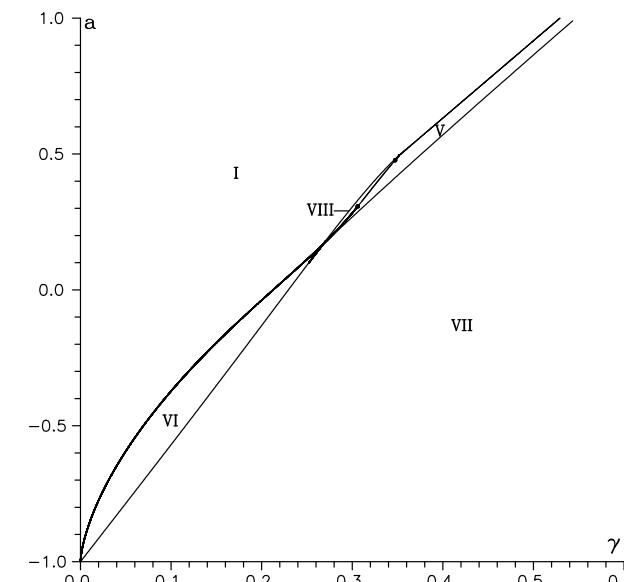


Рис. 19. Області існування сегнетофази.  $\omega = 0.18$ .

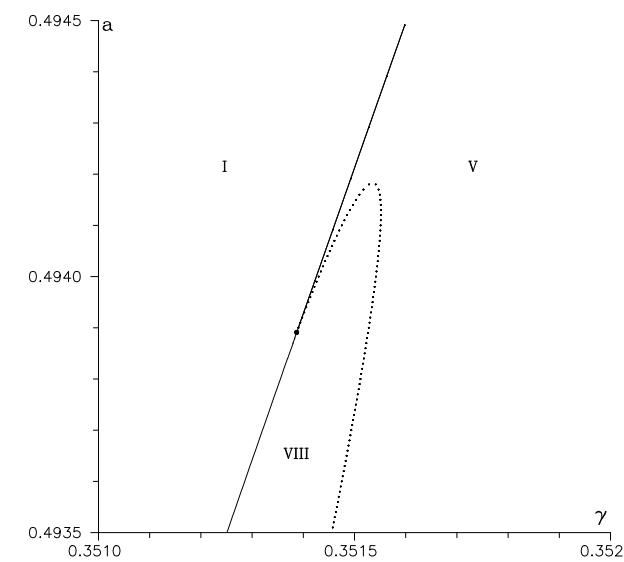


Рис. 20. Області існування сегнетофази (фрагмент).  $\omega = 0.18$ . Пунктирна лінія – верхня частина кривої трикритичних точок.

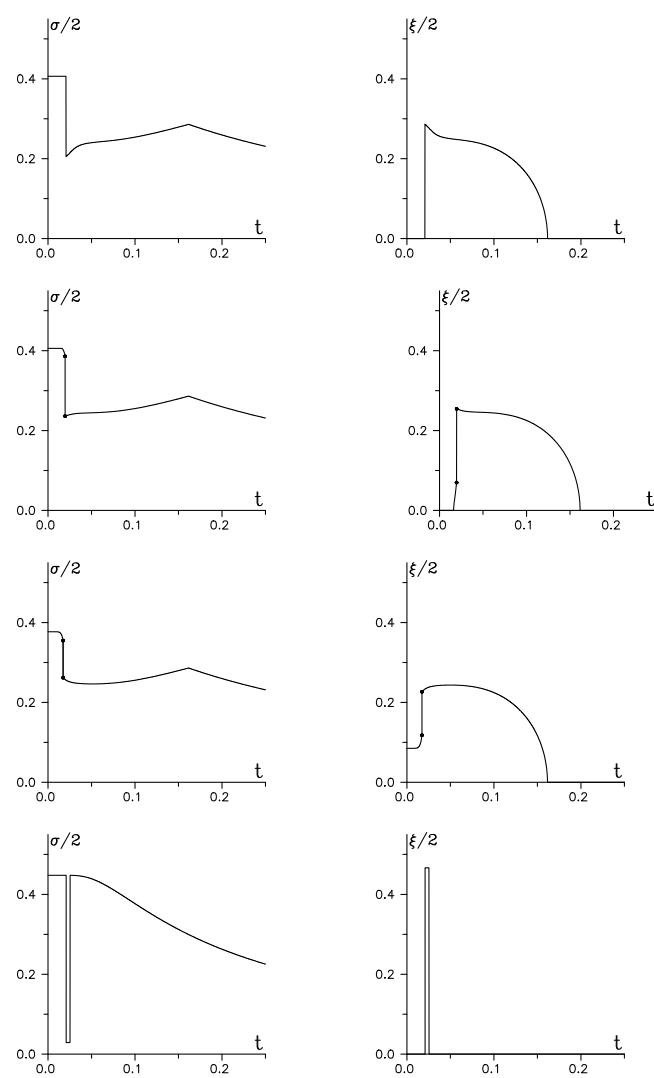


Рис. 21. Параметри сегнетоелектричного та антисегнетоелектричного впорядкування для різних областей існування сегнетофази.  $\omega = 0.1$ . Зображені тільки термодинамічно стійкі стани. По стрічках зверху вниз: VIII)  $a = 0.65$ ,  $\gamma = 0.4035$ ; IX)  $a = 0.66$ ,  $\gamma = 0.4065$ ; X)  $a = 0.667$ ,  $\gamma = 0.4085$ ; XIV)  $a = 0.2$ ,  $\gamma = 0.2912765$ . Кружечками вказано фазовий перехід 1-го роду в межах сегнетофази.

## 5. Результати

Отже, в роботі вперше проведено повний аналіз фазових переходів у моделі Міцюї (1) в наближенні середнього поля як за нульового, так і за відмінного від нуля поперечного поля  $\Omega$ . У випадку  $\Omega = 0$  знайдено аналітичний вираз для трикритичної температури і умову її існування ( $a \leq \frac{1}{4}$ ). У цьому випадку маємо сім областей в площині  $(a, \gamma)$ , що відповідають семи різним типам температурної поведінки параметра порядку – поляризації. Їх кількість стає удвічі більшою за невеликого поперечного поля  $\Omega$ . А з більшанням поперечного поля ці області деформуються і зміщуються в площині  $(a, \gamma)$ , а починаючи з деякого його значення, кількість областей меншає, а за  $\omega \geq \frac{1}{2}$  залишається тільки область, де фазових переходів нема взагалі.

За відмінного від нуля  $\Omega$  фазові переходи 2-го роду можливі й за нульової температури, чого не може бути у випадку  $\Omega = 0$ .

Максимальна кількість фазових переходів за  $\Omega = 0$  – чотири (по два кожного роду), а за  $\Omega \neq 0$  – п'ять (три 1-го і два 2-го роду).

## 6. Подяки

Автор вдячний професорові І. Стасюку, професорові Р. Левицькому, кандидатам фіз.-мат. наук Т. Верхолякові та О. Даниліву за корисні поради і обговорення результатів.

## Література

1. Mitsui T. Theory of the ferroelectric effect in Rochelle salt. // *Phys. Rev.*, 1958, **111**, No. 5, p. 1529-1567.
2. Žekš B., Shukla G.G., Blinc R. Dynamics of ferroelectric Rochelle salt. // *Phys. Rev. B*, 1971, **3**, p. 2305-2311.
3. Danyliv O.D. // *Physica C*, 1998, **309**, p. 303.
4. Дубленіч Ю.І. Фазові переходи та розшарування фаз у псевдо-спін-електронній моделі з прямою взаємодією псевдоспінів без поперечного поля та перенесення електронів. // Препрінт Інституту фізики конденсованих систем, Львів, 2001, ICMP-01-01U, 10 с.
5. Вакс В.Г. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. М.: Наука, 1973, 328 с.
6. Левицький Р.Р., Верхоляк Т.М., Кутний І.В., Гіль І.Г. Дослідження сегнетоактивних сполук типу лад-безлад з асиметричним одночастинковим потенціалом з двома мінімумами. //

Препринт Інституту фізики конденсованих систем, Львів, 2001,  
ICMP-01-U, 43 с.

Препринти Інституту фізики конденсованих систем НАН України розповсюджуються серед наукових та інформаційних установ. Вони також доступні по електронній комп'ютерній мережі на WWW-сервері інституту за адресою <http://www.icmp.lviv.ua/>

The preprints of the Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine are distributed to scientific and informational institutions. They also are available by computer network from Institute's WWW server (<http://www.icmp.lviv.ua/>)

Юрій Ігорович Дубленич

ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ В МОДЕЛІ МІЦУЇ

Роботу отримано 4 листопада 2002 р.

Затверджено до друку Вченого радиою ІФКС НАН України

Рекомендовано до друку семінаром відділу квантової статистики

Виготовлено при ІФКС НАН України

© Усі права застережені