

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ШПОТ Микола Адріанович

УДК 538.9, 538.915, 544.225.23, 535.33, 535.36

ДИСЕРТАЦІЯ

КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА ПРОСТОРОВО НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ

01.04.02 — теоретична фізика

(104 — фізика та астрономія)

10 — природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ М. А. Шпот

Науковий консультант акад. НАН України ЮХНОВСЬКИЙ Ігор Рафаїлович,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Львів — 2021

АНОТАЦІЯ

Шпот М.А. **Критична поведінка просторово неоднорідних систем.**

— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 — Фізика та астрономія).
— Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2021.

Дисертаційна робота присвячена теоретичному опису критичної поведінки неідеальних модельних систем. Їх неідеальність проявляється в невідповідності, в наявності одної або двох поверхонь, в присутності просторової анізотропії. Ці специфічні властивості характеризуються загальним терміном “просторова неоднорідність”.

Дослідження невідповіданих систем з замороженим безладом проводиться за допомогою методу “масивної” теорії поля Парізі у фіксованій вимірності простору. При цьому ми вперше реалізуємо ідею Парізі у випадку нецілих вимірностей d і у двопетльовому наближенні отримуємо плавні залежності критичних показників невідповіданих ізінгівських систем від d . Відповідні інтеграли Фейнмана і ренормгрупові функції розраховані в явному вигляді. Проведене детальне порівняння з результатами, опублікованими в літературі з фізики високих енергій.

Виконано нетривіальне узагальнення масивної теорії поля на випадок тривимірних невідповіданих ізінгівських систем, що перебувають у низькотемпературній фазі з ненульовим параметром порядку. У три- і чотирипетльовому наближенні розраховано ряд універсальних комбінацій критичних амплітуд. Зроблено висновок про те, що відношення критичних амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- може бути додатним всупереч передбаченням ε -розкладу біля $d = 4$.

Масивну теорію поля при $d = 3$ сформульовано для напівбезмежних систем, обмежених плоскою поверхнею, на якій можуть накладатися різні граничні умови. Запропоновано умови нормування, необхідні для опису звичайного та спеціального переходів. На основі двопетльового наближення зроблені чисельні оцін-

ки поверхневих критичних показників для цих двох видів переходів. Досліджено також вплив неупорядкованості поверхні на особливості спеціального переходу і зміни показників звичайного переходу в присутності об'ємного безладу.

Запропоновано новий підхід до розрахунку критичних показників, що описують критичну поведінку сильно анізотропних систем з довільною кількістю осей анізотропії m в околі точки Ліфшица (ТЛ). Вперше отримано правильні ε -розклади всіх показників m -вісних ТЛ з точністю $O(\varepsilon^2)$ (у цьому випадку для відхилення ε від верхньої граничної вимірності ми маємо $\varepsilon = 4 + m/2 - d$). Зроблено висновок про те, що індекс анізотропії θ є неklasичним для довільних чисел осей анізотропії m у повному проміжку $m \in (0, d)$. Виявлено та проаналізовано часто повторювані помилки інших авторів в аналогічних розрахунках: як у теоретичних підходах, так і в результатах.

Поставлено задачу про вплив кристалічної структури (а саме кубічної анізотропії) m -вісного модуляційного підпростору на критичну поведінку m -вісних ТЛ. В рамках другого порядку ε -розкладу розраховано відповідний кросоверний показник і зроблено висновок про те, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.

Сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних сильно анізотропних систем, обмежених поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей модуляції. В першому порядку за ε розраховані неklasичні поверхневі показники звичайного переходу, що відбуваються в таких системах при проходженні через ТЛ. Проведено відповідні чисельні оцінки та порівняння з наявними даними чисельного експерименту.

Для ТЛ з довільним числом осей анізотропії m (з $0 \leq m \leq d$) вперше застосовано метод $1/n$ -розкладу. Цей метод полягає у знаходженні поправок порядку $1/n$ (і вищих) до класичного розв'язку в сферичній границі Стенлі $n \rightarrow \infty$. Як звичайно, n — число компонент параметра порядку, яке вважається великим. Метод $1/n$ -розкладу дозволяє працювати при всіх допустимих значеннях вимірностей $d \geq 0$ і $0 \leq m \leq d$, які знаходяться між нижньою і верхньою граничними вимірностями, що визначаються лініями $d_\ell(m) = 2 + m/2$ і $d^*(m) = 4 + m/2$.

Відповідно, явно продемонстровано узгодження отриманих нами загальних результатів з чотирма граничними випадками. Це — $m = 0$, де відтворюються критичні показники звичайних ізотропних систем з точністю до поправок порядку $1/n$; при $m = d$ отримано аналогічне узгодження з відомими результатами для т. зв. ізотропної ТЛ. Крім цього, при малих відхиленнях ε_ℓ і ε від нижньої і верхньої граничних вимірностей $d_\ell(m)$ і $d^*(m)$ є узгодження з результатами вимірних ε і ε_ℓ -розкладів біля обидвох цих граничних вимірностей. Розглянуто також інші часткові випадки, які не є граничними, зокрема важливий випадок одновісних систем у тривимірному просторі.

На основі отриманих даних запропоновано схематичні графіки залежностей кореляційних критичних показників ТЛ $\eta_2(m, d)$ і $\eta_4(m, d)$ від вимірності простору d . На відміну від просто передбачуваного показника η_2 , величина η_4 змінює свій знак при зміні просторової вимірності d . Ми порівнюємо наші результати з даними роботи інших авторів, де передбачена нами якісна поведінка кореляційних показників при зміні d була підтверджена з використанням розв'язування точних рівнянь ренормалізаційної групи для ТЛ.

Виходячи за рамки розрахунків критичних показників, ми провели детальну перевірку т. зв. гіпотези локальної скейлінгової інваріантності Генкеля, яка представляє собою спробу формулювання аналога конформної інваріантності для систем з сильною анізотропією в ТЛ. Виявлено ряд неточностей в її оригінальних математичних формулюваннях і отримано нову інформацію стосовно математичної структури і явного вигляду парних кореляційних функцій систем з одновісною анізотропією в ТЛ. Нажаль, отримання відповідних явних функціональних залежностей у випадку $m = 1$ виявилось неможливим.

Натомість, в рамках епсилон-розкладу біля верхньої граничної вимірності $d^*(2) = 5$ в явному вигляді розраховані скейлінгові функції парних кореляторів типу поле-поле та енергія-енергія для біаксіальних систем. Розрахунки виконані з точністю до $O(\varepsilon^2)$, причому ε -розклади зроблено у двох різних напрямках в (m, d) -площині: $(m = 2, d = 5 - \varepsilon)$ і $(m = 2 - 2\varepsilon, d = 5 - 2\varepsilon)$. Показано, що коефіцієнти при ε^2 є різними для цих двох варіантів розрахунку. Таким чином

вперше отримано явні результати, що демонструють залежність від напрямів, вздовж яких виконуються епсилон-розклади для m -вісних ТЛ.

В загальному, зроблено висновок про незастосовність гіпотези локальної скейлінгової інваріантності до реальних взаємодіючих систем у ТЛ та окреслено область застосовності цієї гіпотези.

Додатковим побічним продуктом досліджень критичних показників і скейлінгових функцій в ТЛ стала поява чотирьох публікацій за участю автора, присвячених спеціальним функціям, що виникають при розрахунку базового однопетльового двоточкового інтеграла з ненульовим зовнішнім імпульсом і двома різними "масами".

Розширюючи коло досліджень просторово неоднорідних систем у критичній області, ми розглянули ефекти просторового обмеження двома паралельними поверхнями з різними граничними умовами. При такому обмеженні між граничними поверхнями виникають флуктуаційно індуковані сили, що відповідає ефекту Казимира в статистичних системах, а їх величина визначається т. зв. амплітудою Казимира.

Виявлена неаналітичність ε -розкладу амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами і в явному вигляді знайдено поправки $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд. Пояснено причину виникнення цієї неаналітичності та виконано відповідні чисельні оцінки в тривимірному просторі.

Показано, що флуктуаційно індуковані сили, які виникають в сильно анізотропних системах з плівковою геометрією, залежать від просторової орієнтації граничних поверхонь відносно напрямів осей анізотропії. Розглянуто два варіанти орієнтації поверхонь: "паралельну", при якій поверхні є паралельними до всіх осей анізотропії, і "перпендикулярну", коли одна з осей анізотропії є ортогональною до поверхонь. Для цих систем з різними граничними умовами на поверхнях виконані явні розрахунки амплітуд Казимира в рамках першого порядку епсилон-розкладу а також чисельні оцінки при $d = 3$.

Розглянуто базове гаусове наближення у випадку анізотропних систем з вільними граничними умовами типу Діріхле на "перпендикулярно" орієнтованих

поверхнях. Для досягнення можливого прогресу в отриманні результатів у вищих наближеннях досліджено альтернативну схему розрахунку амплітуди Казимира, що базується на розгляді інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца. Інтеграли такого типу є добре відомими в математиці та досліджувалися в ряді робіт. Ми вперше успішно і конкурентно застосовували стандартні методи теоретичної фізики до розрахунку цих відомих інтегралів. Нами запропоновано також нові математичні формули для подвійних сум від добутків дзета-функцій Рімана. Отримані результати дадуть змогу в перспективі проводити розрахунки вищих наближень для складних модельних задач статистичної фізики.

Ключові слова: неупорядковані системи, сильно анізотропні системи, просторово обмежені системи, граничні умови, масивна теорія поля, нецілі вимірності простору, ε -розклад, $1/n$ -розклад, інтеграли Фейнмана, критичні показники, скейлінгові функції, критичні амплітуди, амплітуда Казимира, точка Ліфшица, локальна скейлінгова інваріантність

ABSTRACT

Shpot M. A. Critical behavior of spatially inhomogeneous systems. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in specialization 01.04.02 «Theoretical Physics» (104 — Physics and Astronomy). — Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2021.

The subject of the dissertation is the theoretical description of the critical behavior of non-ideal model systems. Their non-ideality manifests itself in disorder, in the presence of one or two surfaces, in the spatial anisotropy. These specific properties are generally termed as “spatial inhomogeneities”.

The study of quenched disordered systems is carried out using the method of Parisi’s “massive” field theory in fixed space dimension. For the first time we implement the Parisi’s idea in the case of non-integer dimensions d , and in the two-loop approximation obtain the smooth dependence of the critical exponents of disordered Ising systems on d . The corresponding Feynman integrals and renormalization group functions are calculated explicitly. A detailed comparison with the results of the high energy physics literature is given.

A non-trivial generalization of the massive field theory is performed for the case of three-dimensional disordered Ising systems in the low-temperature phase with a non-zero order parameter. A number of universal combinations of critical amplitudes are calculated in the three- and four-loop approximations. It is concluded that the specific-heat critical amplitude ratio A_+/A_- can be positive in spite of the prediction of the ε -expansion near $d = 4$.

The massive field theory in $d = 3$ is formulated for semi-infinite systems, constrained by a flat surface with different boundary conditions. The normalization conditions are proposed, necessary to describe the ordinary and special transitions. In the two-loop approximation, numerical estimates of surface critical exponents are given for these two types of transitions. The effect of the surface disorder on the special

transition, as well as changes of the ordinary transition's exponents in the presence of the bulk disorder are also studied.

A new approach is suggested, to the calculation of critical exponents of strongly anisotropic systems with an arbitrary number of anisotropy axes m , in the vicinity of the Lifshitz point (LP). For the first time the correct ε -expansions up to $O(\varepsilon^2)$ are obtained, for all exponents of m -axial LPs with arbitrary m (in this case the deviation ε from the upper critical dimension is $\varepsilon = 4 + m/2 - d$). It is concluded that the anisotropy index θ is non-classical for arbitrary number of anisotropy axes m , in the whole interval $m \in (0, d)$. Frequently appearing errors of other authors in similar calculations are indicated, analyzed and commented.

We put forward the problem of the influence of crystalline structure (namely cubic anisotropy) of the m -axial modulation subspace on the critical behavior of m -axial LPs. We calculate the corresponding crossover exponent in the second order of the ε -expansion and conclude that the anisotropy of the modulation subspace can influence the character of the phase transition at the LP.

The renormalization-group description of semi-infinite strongly anisotropic systems with a surface perpendicular to one of the modulation axes is formulated. Non-classical surface critical exponents of the ordinary transition in such systems at the LP are calculated to first order of the ε -expansion. Numerical estimates in $d = 3$ are obtained and compared with available data of numerical experiments.

For the first time, the method of the $1/n$ -expansion is applied for arbitrary m -axial LPs with $0 \leq m \leq d$. The method consists in finding corrections of order $1/n$ (and higher) to the classical Stanley's solution in the spherical limit $n \rightarrow \infty$. As usual, n is the number of the order-parameter components, which is considered to be large. The $1/n$ -expansion allows to work directly with all admissible values of dimensions $d \geq 0$ and $0 \leq m \leq d$ lying between the lower and upper critical dimensions given by the lines $d_\ell(m) = 2 + m/2$ and $d^*(m) = 4 + m/2$. Accordingly, we explicitly demonstrate the agreement of our generic results with four marginal cases. These are: $m = 0$, where we reproduce the critical exponents of usual isotropic systems to order $O(1/n)$; with $m = d$ a similar agreement is obtained with the known results for the

isotropic LP. Moreover, for small deviations ε_ℓ and ε from the lower and upper critical dimensions $d_\ell(m)$ and $d^*(m)$ there is an agreement with the results of dimensional ε - and ε_ℓ -expansions near these critical dimensions. A number of other, non-limiting special cases are considered, in particular the important case of uniaxial systems in three-dimensional space.

With available information at hand, we propose schematic plots of the dependence of LP's correlation critical exponents $\eta_2(m, d)$ and $\eta_4(m, d)$ on the space dimension d . Unlike the simple and predictable behavior of the exponent η_2 , the value of η_4 changes its sign as the dimension d runs. We compare our results with that of other authors, where the predicted qualitative behavior of the correlation exponents was confirmed by solving the exact renormalization-group equations for the LP.

Going beyond the calculations of critical exponents, we carried out a thorough check of the so-called local scaling invariance hypothesis of Henkel, which represents an attempt to formulate an analogue of the conformal invariance for systems with strong anisotropy at the LP. We found a number of inaccuracies in its original mathematical formulation and obtained new information regarding the mathematical structure and explicit form of two-point functions of systems with uniaxial anisotropy at the LP. Unfortunately, it was impossible to obtain an explicit functional dependence of correlation functions in the uniaxial case $m = 1$.

Instead of that, the explicit expressions for the field-field and energy-energy correlators have been calculated in the case of biaxial systems using the ε -expansion near the upper critical dimension $d^*(2) = 5$. Calculations to order $O(\varepsilon^2)$ are performed along the two different directions in the (m, d) -plane: $(m = 2, d = 5 - \varepsilon)$ and $(m = 2 - 2\varepsilon, d = 5 - 2\varepsilon)$. It is shown that the coefficients at ε^2 are different for these two variants of calculation. Thus, for the first time the explicit results have been derived for m -axial LPs, where a dependence on directions of ε -expansions shows up.

Generally, it is concluded that the local scaling invariance hypothesis does not apply to real interacting systems at the LP, and the appropriate applicability region of this hypothesis is specified.

An extra by-product of calculations of critical exponents and scaling functions

at the LP is the appearance of four publications by the present author and coauthors, where special functions are considered, which arise in the calculation of the basic one-loop two-point integral with a non-zero external momentum and two different "masses".

Extending the scope of studies of spatially inhomogeneous systems in the critical domain, we consider the effects of a geometric restriction of a system by two parallel surfaces with different boundary conditions. In this setup, fluctuation-induced forces arise between the boundaries, which corresponds to the Casimir effect in statistical systems, and the value of these forces is determined by the so-called Casimir amplitude.

A non-analyticity is found, of the ε -expansion of Casimir amplitudes of systems with film geometry and periodic and special boundary conditions. Explicit corrections of order $O(\varepsilon^{3/2})$ are derived for these amplitudes. The reason for this non-analyticity is explained, and the corresponding numerical estimates are performed in three-dimensional space.

It is shown that fluctuation-induced forces occurring in strongly anisotropic systems with film geometry depend on the spatial orientation of boundaries with respect to the directions of anisotropy axes. Two options are considered for the orientation of surfaces: “parallel”, when they are parallel to all anisotropy axes, and “perpendicular”, when one of the anisotropy axes is orthogonal to the surfaces. For these systems, with different boundary conditions, explicit calculations of Casimir amplitudes to first order of the epsilon-expansion and numerical estimates in $d = 3$ are performed.

In the case of systems with free boundary conditions of Dirichlet type and a “perpendicular” orientation, we were limited to the basic Gaussian approximation. In order to open a possibility to move towards higher approximations, we studied an alternative calculational scheme of the Casimir amplitude, based on integrals of products of Hurwitz zeta functions. Integrals of this type are well known in mathematics and have been studied in a number of papers. We successfully applied the standard methods of theoretical physics to the calculation of these integrals. Moreover, we proposed some new results for certain double sums of products of Riemann zeta functi-

ons. In the future, our results will allow a derivation of new results for complex model problems in statistical physics.

Keywords: disordered systems, strongly anisotropic systems, constrained systems, boundary conditions, massive field theory, non-integer space dimensions, ε -expansion, $1/n$ -expansion, Feynman integrals, critical exponents, scaling functions, critical amplitudes, Casimir amplitude, Lifshitz point, local scale invariance

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Holovatch Yu., Shpot M. Critical exponents of random Ising-like systems in general dimensions // J. Stat. Phys. — 1992. — Vol. 66, no. 3/4. — P. 867–883.
2. Bervillier C., Shpot M. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 955–968.
3. Diehl H. W., Shpot M. Surface critical behavior in fixed dimensions $d < 4$: Nonanalyticity of critical surface enhancement and massive field theory approach // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 73, no. 25. — P. 3431–3434.
4. Shpot M. Special surface transition: Massive field theory and critical exponents in three dimensions // Condens. Matter Phys. — 1997. — no. 10. — P. 143–164.
5. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // Nucl. Phys. B. — 1998. — Vol. 528, no. 3. — P. 595–647.
6. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ -expansion results // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12338–12349.
7. Shpot M., Diehl H. W. Two-loop renormalization-group analysis of critical behavior at m -axial Lifshitz points // Nucl. Phys. B. — 2001. — Vol. 612, no. 3. — P. 340–372.
8. Diehl H. W., Shpot M. Lifshitz-point critical behaviour to $O(\epsilon^2)$ // J. Phys. A. — 2001. — Vol. 34, no. 42. — P. 9101–9105.
9. Usatenko Z. E., Shpot M. A., Chin-Kun Hu. Surface critical behavior of random systems: Ordinary transition // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, no. 42. — P. 056102–1–8.

10. Diehl H. W., Shpot M. Critical, crossover and correction-to-scaling exponents for isotropic Lifshitz points to order $(8-d)^2$ // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35, no. 30. — P. 6249–6259.
11. Diehl H. W., Shpot M. Comment on “Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior” // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68, no. 6. — P. 066401–1–066401–2.
12. Diehl H. W., Shpot M. A., Zia R. K. P. Relevance of space anisotropy in the critical behavior of m -axial Lifshitz points // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol. 68, no. 2. — P. 224415.
13. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M., Diehl H. W. Large- n expansion for m -axial Lifshitz points // J. Phys.: Condens. Matter. — 2005. — Vol. 17, no. 20. — P. S1947–S1972.
14. Diehl H. W., Shpot M. A., Prudnikov P. V. Boundary critical behaviour at m -axial Lifshitz points of semi-infinite systems with a surface plane perpendicular to a modulation axis // J. Phys. A. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7927–7942.
15. Diehl H. W., Grüneberg D., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in periodic slabs: Breakdown of epsilon expansion at the bulk critical point and revised field theory // Europhys. Lett. — 2006. — Vol. 75, no. 2. — P. 241–247.
16. Shpot M. A. A massive Feynman integral and some reduction relations for Appell functions // J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 48, no. 12. — P. 123512.
17. Shpot M. A., Diehl H. W., Pis'mak Yu. M. Compatibility of $1/n$ and ε expansions for critical exponents at m -axial Lifshitz points // J. Phys. A. — 2008. — Vol. 41, no. 13. — P. 135003.
18. Shpot M. A. Two-loop RG functions of the massive ϕ^4 field theory in general dimensions // Condens. Matter Phys. — 2010. — Vol. 13, no. 1. — P. 13101.
19. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // JSTAT. — 2010. — Vol. 2010. — P. P11020. — Erratum: JSTAT E05001-1—2 (2011).

20. Rutkevich S., Diehl H. W., Shpot M. A. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications // Nucl. Phys. B. — 2011. — Vol. 843, no. 1. — P. 255–301. — Erratum: Nucl. Phys. B 853, 210–211 (2011).
21. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M. Lifshitz-point correlation length exponents from the large- n expansion // Nucl. Phys. B. — 2012. — Vol. 862, no. 1. — P. 75–106.
22. Shpot M. A., Srivastava H. M. The Clausenian hypergeometric function with unit argument and negative integral parameter differences // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 259. — P. 819 – 827.
23. Shpot M. A., Pogány T. K. The Feynman integral in $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m$ and complex expansion of ${}_2F_1$ // Integral Transforms Spec. Funct. — 2016. — Vol. 27, no. 7. — P. 533–547.
24. Shpot M. A., Chaudhary M. P., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions and the Casimir effect in ϕ^4 field theories // J. Class. Anal. — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 99–115.
25. Shpot M. A., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions via Feynman parametrization and two double sums of Riemann zeta functions // Math. Aeterna. — 2016. — Vol. 6, no. 5. — P. 745–764.
26. Paris R. B., Shpot M. A. A Feynman integral in Lifshitz-point and Lorentz-violating theories in $\mathbb{R}^D \oplus \mathbb{R}^m$ // Math. Meth. Appl. Sci. — 2018. — Vol. 41, no. 5. — P. 2220–2246.
27. Головач Ю. В., Шпот Н. А. Критическое поведение разбавленной m -векторной модели при нецелых размерностях пространства // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (теория и эксперимент). — 1992. — № 3(24). — С. 48–53.

Тези

28. Bervillier C., Shpot M. Critical amplitude relations for disordered Ising systems // The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, 2-8 August 1992) Programme and Abstracts. — 1992. — P. 219.
29. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Xiamen 31 July - 4 August 1995) Programme and Abstracts. — 1995. — P. 182.
30. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, 1995). — 1995. — P. 1075.
31. Diehl H. W., Shpot M. Surface critical exponents in three-dimensional semi-infinite systems // Науковий семінар з статистичної теорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14-15 березня 1997), програма і тези доповідей. — 1997. — С. 20.
32. Shpot M. Critical phenomena on surfaces // Ising Lectures in Lviv (1997-2017) / ed. by M. Krasnytska et. al. — Lviv : ICMP, 2017. — P. 69.
33. Usatenko Z., Shpot M., Hu C.-K. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition // International Congress on Mathematical Physics, London, July 17-22 2000. — 2000. — P. 19.
34. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -fold degenerate Lifshitz points: field-theory and ϵ -expansion // Workshop on Modern problems of soft matter theory (Lviv, Ukraine, August 27-31 2000). — 2000. — P. 155.
35. Usatenko Z., Shpot M. Critical behaviour of semi-infinite random Ising-like systems at the ordinary transition // Workshop "Modern problems of soft matter theory" (Lviv, Ukraine, August 27-31 2000). — 2000. — P. 175.
36. Usatenko Z., Shpot M., Hu C.-K. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition // 20-th European Conference on

- Surface Science, Krakow, Poland, September 04-07 2001, Book of Abstracts. — 2001. — P. 120.
37. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: field-theory analysis and ϵ -expansion results. — 2001. — P. E10.006. — Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA March 12-16 2001).
 38. Diehl H. W., Shpot M., Zia R. K. P. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: a case study of anisotropic scale invariance. — 2001. — The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15-21 2001) Programme and Abstracts.
 39. Шпот М., Діль Г. В. Критична поведінка в анізотропній точці Лівшица // Різдвяні дискусії 2002 (Львів, Україна, 4-5 січня 2002), програма і тези доповідей. — 2002. — С. 6.
 40. Shpot M. A. Critical behavior at Lifshitz points // VI Ukrainian-Polish and II East-European Meeting on Ferroelectrics Physics, Uzhgorod-Synjak, Ukraine, September 6-10, 2002. — 2002. — P. 28.
 41. Shpot M. A., Pismak Y., Diehl H. W. Large- N expansion for m -axial Lifshitz points // The Spring-Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04-09 2005). — 2005. — P. 202.
 42. Shpot M. A. Large- N expansion for Lifshitz points // The 6th International Conference "Renormalization Group 2005 (Helsinki, Finland, 30 August - 03 September 2005). — 2005.
 43. Diehl H. W., Grüeneberg D., Shpot M. A. Revised field theory of finite size effects and Casimir forces in slabs // The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09-13 2007) Programme and Abstracts. — 2007.
 44. Shpot M. A. Lifshitz points: Recent theoretical progress // The 3rd Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications" (Lviv, Ukraine, June 23-25 2009), Programme and Abstracts. — 2009. — P. 67.

45. Diehl H. W., Rutkevich S., Shpot M. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications // Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15-19 2010), Book of Abstracts. — 2010. — P. 705.
46. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011), Book of Abstracts. — 2011. — P. 217.
47. Shpot M. A. Thermodynamic Casimir effect in isotropic and anisotropic systems // The 36th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukraine, April 5-7 2011). — 2011. — P. 149.
48. Shpot M. A. Lifshitz points at large n // The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3-6 2012). — 2012. — P. 178.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	21
ВСТУП	22
1 Огляд літератури	43
1.1 Вплив немагнітних домішок на фазовий перехід в ізінгівських системах	44
1.2 Напівбезмежні системи і поверхнева критична поведінка	51
1.3 Анізотропні системи і точка Ліфшица	55
1.4 Обмежені системи з плівковою геометрією та ефект Казимира . . .	66
2 Критична поведінка неупорядкованих ізінгівських систем	70
2.1 Ефективний гамільтоніан та вільна енергія	70
2.2 Масивна теорія поля при фіксованих вимірностях простору	72
2.3 Ренормгрупові функції у двопетльовому наближенні	74
2.4 Двопетльові інтеграли Фейнмана	77
2.4.1 Результати при $d = 2$	79
2.4.2 Контакт з “високоенергетичною” літературою	79
2.4.3 Критичні показники неупорядкованих ізінгівських систем при нецілих вимірностях простору	82
2.5 Універсальна комбінація критичних амплітуд R_{ξ}^{+} у тривимірному просторі	85
2.6 Критичні амплітуди в низькотемпературній фазі ($T < T_c$) при $d = 3$	91
2.6.1 Особливості ефективного гамільтоніана при $T < T_c$	91

	18
2.6.2 Співвідношення між температурними змінними	93
2.6.3 Термодинамічні функції	95
2.6.4 Універсальні комбінації критичних амплітуд	98
2.6.5 Чисельні оцінки універсальних комбінацій амплітуд	100
2.7 Висновки	103
3 Поверхнева критична поведінка напівбезмежних систем	105
3.1 Модель	106
3.2 Перенормування	108
3.2.1 Об'ємні кореляційні функції	108
3.2.2 Поверхневі кореляційні функції	109
3.2.3 Структура сингулярностей теорії збурень	111
3.3 Спеціальний перехід	112
3.3.1 Рівняння Каллана-Симанзіка	112
3.3.2 Скейлінгова поведінка в околі спеціального переходу	114
3.3.3 Ренормгрупові функції — явні вирази	115
3.3.4 Поверхневі критичні показники спеціального переходу	116
3.3.5 Довільні вимірності простору: явний розрахунок	120
3.4 Звичайний перехід. Особливості теоретичного опису	121
3.4.1 Критичні показники і їх значення в тривимірному просторі	122
3.5 Невпорядкованість і поверхнева критична поведінка	127
3.6 Висновки	130
4 Сильно анізотропні системи в точці Ліфшица	132
4.1 Ефективний гамільтоніан	133
4.2 Вільний пропагатор у координатному представленні	135
4.2.1 Асимптотична поведінка скейлінгової функції $\Phi(v)$	139
4.2.2 Спрощення функції $\Phi(v)$ в часткових випадках	141
4.2.3 Інші скейлінгові функції	142
4.3 Перенормування теорії	145

4.4	Розрахунок критичних показників	150
4.4.1	Часткові випадки $m = 2$ і $m = 6$	154
4.4.2	Ізотропні граничні випадки $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$	154
4.5	Чисельні оцінки критичних показників при $d = 3$	155
4.6	Роль кристалічної структури в ТЛ	157
4.6.1	Узагальнення ефективного гамільтоніана	158
4.6.2	Аналіз стійкості	159
4.6.3	Кросоверний показник	160
4.7	Напівбезмежні системи в точці Ліфшица	161
4.7.1	Загальний розгляд	162
4.7.2	“Звичайний” перехід в точці Ліфшица	165
4.8	Висновки	168

5 Кореляційні функції в точці Ліфшица і гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності 170

5.1	Гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності М. Генкеля	170
5.2	Парні кореляційні функції в теорії ϕ^4	178
5.3	Парна кореляційна функція полів параметра порядку	178
5.4	Парна кореляційна функція енергія-енергія	182
5.4.1	Деякі особливості інтегрування в $I(p, q)$	185
5.5	Кореляційна функція енергія-енергія одновісних систем	188
5.6	Висновки	191

6 $1/n$ - розклад для m - вісних точок Ліфшица 193

6.1	Рівняння самоузгодження і кореляційні критичні показники ТЛ в (m, d) -площині	194
6.2	Контакт з $1/n$ -розкладами	198
6.3	Контакт з епсилон-розкладами	200
6.4	Часткові випадки	203
6.5	Температурні критичні показники в порядку $O(1/n)$	207

6.5.1	Ізотропні границі $1/n$ -розкладів	209
6.5.2	Узгодження з ε -розкладом	211
6.5.3	Область застосовності, вимірна регуляризація та аналітичне продовження	213
6.5.4	Частковий випадок $m = 1, d = 4$	217
6.6	Одновісні системи в тривимірному просторі: коли $m = 1$ і $d = 3$. .	220
6.7	Висновки	222

7 Флуктуаційно індуковані сили в обмежених системах з плівковою геометрією 224

7.1	Ефект Казимира в ізотропних системах	224
7.2	Ефект Казимира в сильно анізотропних системах	234
7.2.1	Паралельна орієнтація поверхонь	237
7.2.2	Перпендикулярна орієнтація поверхонь	243
7.2.3	Ефект Казимира в теорії ϕ_d^4 і інтеграли від дзета-функцій Гурвіца	253
7.3	Висновки	261

Основні результати та висновки 263

Список використаних джерел 266

Додатки 299

А Список публікацій здобувача за темою дисертації 300

Б Апробація результатів дисертації 306

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

КТ	—	критична точка
ТЗ	—	теорія збурень
ТЛ	—	точка Ліфшица
ГУ	—	граничні умови
ВЕ	—	вільна енергія
ЕГ	—	ефективний гамільтоніан
РГ	—	ренормалізаційна група
ГЛСІ	—	гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності

ВСТУП

Актуальність теми. У сучасній фізиці конденсованих систем однією з центральних проблем є дослідження критичних властивостей багаточастинкових систем, в яких при критичній температурі $T = T_c$ відбуваються фазові переходи другого роду. Критичні явища спостерігаються в багаточисленних фізичних системах, які є дуже різними. Класичними прикладами є система рідина-газ у критичній точці, а також феромагнетики в околі температури Кюрі, де відбувається перехід між неупорядкованою парамагнітною фазою та феромагнітною фазою з однорідним упорядкуванням. А для науки і для практичних застосувань представляють інтерес чимраз складніші системи. Тут можна згадати про багатоконпонентні рідини і сплави, полімери, сегнетоелектрики, системи, в яких можуть виникати явища надплинності чи надпровідності.

В критичній області з $T \approx T_c$ всі ці системи характеризуються сильними далекосяжними флуктуаціями, які є результатом взаємодії безмежно великого числа частинок на мікроскопічному рівні. При наближенні до критичної точки радіус кореляцій (кореляційна довжина) стає набагато більшим за будь-які лінійні розміри, пов'язані з відстанями між сусідніми мікроскопічними частинками та їх взаємодіями. Стають несуттєвими такі мікроскопічні деталі, як, наприклад, тип просторового впорядкування найближчих частинок, анізотропія їх локальних взаємодій, чи інші особливості, які не проявляють себе в області сильних флуктуацій.

Виявляється, що важливими величинами, які характеризують систему в критичній області та визначають її асимптотичну поведінку в околі критичної точки, є тільки небагаточисленні параметри глобального типу. В першу чергу це вимірність простору і такі його глобальні характеристики як ізотропія чи ані-

зотропія, загальна симетрія системи, кількість компонент параметра порядку та його симетрія, локальність чи нелокальність міжчастинкових взаємодій. Тут ми маємо справу з явищем універсальності, яке, зокрема, полягає в тому, що велика кількість фізичних систем, які можуть бути досить різними, в критичній області поведуть себе однаково. При цьому тип їх поведінки залежить тільки від декількох спільних загальних характеристик, найважливіші з яких ми назвали вище. Таким чином ці системи потрапляють у відносно невелике число класів універсальності, що відповідають цим типам критичної поведінки. Так, згадані вище тривимірні системи рідина-газ і одновісні феромагнетики належать до одного класу універсальності. Тут ми маємо справу з вимірністю фізичного простору $d = 3$, система характеризується дискретною симетрією $\mathbb{Z}_2$, як ґраткова модель Ізінґа; число компонент параметра порядку $n = 1$, взаємодії між частинками є локальними і короткосяжними.

В 60-70-х роках минулого століття стало зрозумілим, що в критичній області системи статистичної фізики можуть описуватися за допомогою моделей і методів, запозичених з квантової теорії поля. Фундаментальним став підхід ренормалізаційної групи (РГ) Вільсона [7–9]. Тут різні фазові переходи потрапляють в один клас універсальності, якщо для них існує одна і та сама “нерухома точка” РГ. Асимптотична поведінка термодинамічних і кореляційних функцій таких систем в околі критичної точки буде описуватися одним і тим самим набором критичних показників.

З появою робіт Вільсона та Вільсона-Фішера [10], в останній з яких був запропонований знаменитий епсилон-розклад за відхиленням $\varepsilon = d^* - d$ вимірності простору d від граничної вимірності d^* , при якій критична поведінка системи є класичною, теорія фазових переходів і критичних явищ переживає бурхливий розвиток. На початку цього періоду теорія розвивалася, як правило, на основі опису ідеальних безмежних систем з однаковими фізичними властивостями вздовж усіх напрямів, тобто при наявності глобальної просторової ізотропії. Але всі ми чудово знаємо, що реальні фізичні системи такими не бувають. Усі вони обмежені поверхнями та обов’язково мають скінченні розміри. Крім того, реальні об’єкти

характеризуються різного роду структурними неоднорідностями та неоднаковими фізичними властивостями у різних просторових напрямках, що необхідно приймати до уваги. В таких ускладнених умовах відбуваються також специфічні фізичні явища, яких немає в ідеальних модельних системах. Саме з такими фізичними об'єктами працюють експериментатори, а комп'ютерні симуляції виконуються виключно для скінченних систем.

Все це необхідно було брати до уваги також і фізикам-теоретикам. Анізотропія, скінченність розмірів та наявність поверхонь, а також присутність випадкових домішок і дефектів — це загальні властивості, наявність яких може змінювати і визначати певні класи універсальності. Оскільки ці риси притаманні всім реальним фізичним об'єктам, дослідження неідеальних, просторово неоднорідних систем стало, і на даний час залишається важливою галуззю сучасної теоретичної фізики. До цієї галузі належить також і пропонована робота, в якій представлено математичний опис критичних явищ в ряді неупорядкованих, просторово обмежених, і анізотропних систем.

Очевидно, що розвиток теорій, які описують критичну поведінку просторово неоднорідних систем, представляє безсумнівний інтерес для теоретичної фізики взагалі. Тут коло нерозв'язаних задач і проблем є значно ширшим, як у випадку ідеальних безмежних об'єктів. Водночас, використовувані математичні підходи є набагато складнішими, і їх розвиток представляє інтерес також для математики. Так, у зв'язку з виконанням необхідних технічних розрахунків, автор даної роботи опублікував декілька математичних статей, більшість із них у співавторстві з відомими сучасними математиками [3–6, 11–14]. У свою чергу, теоретичний опис систем, максимально наближених до реальних, представляє значний інтерес для експериментаторів і спеціалістів з комп'ютерного моделювання.

Нарешті, в наш час неможливо оминати увагою “революцію” конформного бутстрапу — нове явище в теоретичній фізиці, яке ми спостерігаємо протягом останнього десятиріччя. Все почалося з роботи [15], де нові ідеї та сучасні чисельні методи були застосовані до старих самоузгоджених рівнянь конформного бутстрапу, відомих в конформній теорії поля ще з початку 70-х років минулого сторіччя.

У цьому підході обмеження, що диктуються “бутстрапними” рівняннями, генеруються на основі базових умов самоузгодженості та конформної симетрії, присутньої в критичній точці, безвідносно до будь-яких мікроскопічних деталей і без звертань до мікроскопічних гамільтоніанів. Таким чином, фактично, з найзагальніших умов визначається цілий клас універсальності систем, і цей клас досліджується безпосередньо в нетривіальній нерухомій точці Вільсона-Фішера.

За допомогою чисельного дослідження таких умов стало можливим дуже точне знаходження конформних даних, тобто, величин коефіцієнтів операторних розкладів Вільсона-Каданова на малих відстанях, а також скейлінгових вимірностей базових локальних флуктуюючих величин (т. зв. операторів). Останні — безпосередньо пов’язані з критичними показниками, звичними в теорії критичних явищ.

Кульмінацією “нового” методу конформного бутстрапу є найбільш точний на сьогоднішній день розрахунок критичних показників моделі Ізінга у вимірності простору $d = 3$ [16], а саме $\eta = 0.0362978(20)$ і $\nu = 0.629971(4)$. Як визнали самі автори роботи [16], їх результати для $O(n)$ -симетричної моделі з $n = 2$ і $n = 3$ були менш точними порівняно з найкращими оцінками, отриманими методом Монте-Карло. Проте, зовсім недавно [17] з’явилися нові точні значення скейлінгових вимірностей тривимірної XU -моделі, які за точністю не поступаються розрахункам типу Монте-Карло, а, можливо, і їх покращують. Критичні показники $\eta = 0.038176$ і $\nu = 0.67175$ визначаються з даних з [17, Табл. 1] за співвідношеннями $\eta = 2\Delta_\phi - d + 2$ і $\nu = 1/(d - \Delta_\epsilon)$ при $d = 3$, де Δ_ϕ і Δ_ϵ — скейлінгові вимірності поля параметра порядку і енергії, відповідно. Для ознайомлення з вичерпним порівнянням згаданих результатів з іншими чисельними оцінками, зокрема, шестипетльовими результатами ε -розкладу, див. [18]. Ці результати свідчать на користь даних, отриманих за допомогою чисельного моделювання XU -моделі у порівнянні з відомими експериментальними даними, отриманими для рідкого гелію-4 поблизу λ -точки в умовах невагомості, які приводять, зокрема, до результатів $\alpha = -0.0127 \pm 0.0003$, $\nu = 0.6709$.

Знову ж таки, ці успіхи в застосуванні сучасного методу конформно-

го бутстрапу стимулювали численні дослідження в статистичній фізиці, а також у різних суміжних наукових галузях. Достатньо зробити пошуковий запит “bootstrapping” в Google Scholar, і ви побачите тисячі найрізноманітніших цікавих робіт. Значну кількість цитувань можна знайти в оглядових статтях [19, 20]. Науковці, що володіють новими методами конформного бутстрапу, шукають цікаві задачі фізики багаточастинкових систем, особливо ті, в розв’язанні яких у минулому виникали труднощі та неузгодження — подібно, як у випадку XY -моделі.

Так, з нової перспективи починають досліджуватися, і, відповідно, знов набувають актуальності зокрема задачі, близькі до розглянутих нижче в даній роботі. Досліджуються неупорядковані системи з замороженим безладом [21–24], системи з нецілими вимірностями простору [21, 25, 26], з анізотропною скейлінговою інваріантністю [27], зі структурними фазовими переходами [28–30] (статті на цю тему цитують роботи, що увійшли ще в кандидатську дисертацію автора [31, 32]), та інші.

Серед досліджень складних систем статистичної фізики, що набули особливої актуальності у зв’язку з розвитком останніх подій, для нас особливий інтерес представляє вивчення критичної поведінки обмежених поверхнями систем з застосуванням методів конформної теорії поля. В англomовній літературі ця галузь відома під назвою BCFT: “boundary conformal field theory” (деякі аспекти конформної теорії поля обмежених систем і систем з протяжними дефектами згадуються в огляді [20, Розділ V.B.6]).

Перша робота [33], в якій критична поведінка напівбезмежних систем досліджувалася з точки зору конформного бутстрапу, з’явилася відносно недавно, у 2013 р. В [33] було сформульовано самоузгоджені рівняння бутстрапу, специфічні для задач такої категорії. Порівнюючи два різні розклади на малих відстанях для однієї і тієї ж самої парної кореляційної функції, автори відтворили її відому функціональну залежність від координат у прямому просторі з точністю до $O(\varepsilon)$. Цей аналітичний результат було виведено без використання будь-якого гамільтоніана. Крім того, за допомогою методів лінійного програмування, обмеження конформного бутстрапу досліджувалися у випадках спеціального та екстраординарного

переходів при $d = 3$. Таким чином були отримані чисельні оцінки для деяких базових скейлінгових вимірностей, пов'язаних з поверхневими критичними показниками. Аналіз отримуваних результатів відбувався з використанням даних нашої роботи [34].

Більш точні оцінки скейлінгових вимірностей та інших конформних даних, необхідних для аналізу поверхневої критичної поведінки тривимірних напівбезмежних систем при звичайному та спеціальному переходах, були отримані в наступних роботах [35] і [36]. Результати порівнювались як з теоретичними розрахунками нашої роботи [34], так і з низкою даних, отриманих методом Монте-Карло (див. [36, Табл. 1]). У випадку екстраординарного переходу конформний бутстрап дав певну інформацію про спектр об'ємних операторів (як часто називають локальні флуктуюючі величини) [35], що представляє інтерес поза межами теорії систем обмежених поверхнею. Аналогічна задача розглядалася також у нашій недавній роботі [37].

Зовсім недавно значного прогресу було також досягнуто в *аналітичному* розв'язанні рівнянь бутстрапу конформної теорії поля обмежених систем. В роботі [38] були відтворені відомі скейлінгові вимірності головних поверхневих операторів, що відповідають спеціальному та звичайному переходам, у порядку $O(\varepsilon^2)$. Це — найвищий порядок ε -розкладу, відомий на сьогодні для критичних показників цих переходів. Більше того, використовуючи тільки інформацію про аналітичну структуру парної кореляційної функції та загальні симетрії конформної теорії поля обмежених систем, в [38] (див. також виправлення в [39]) вперше було знайдено внесок порядку $O(\varepsilon^2)$ в скейлінгові функції двоточкових кореляторів напівбезмежних систем при звичайному та спеціальному переходах. Підкреслимо, що аналогічні явні результати порядку $O(\varepsilon^2)$ для парних кореляційних функцій не були відомими в статистичній фізиці, окрім надто складних неявних представлень, запропонованих в [40] і [41].

В наших недавніх роботах [42] і [37] вперше було розраховано явні вирази для шарової сприйнятливості напівбезмежних моделей з однокомпонентним та $O(n)$ -симетричним параметром порядку при екстраординарному переході. Ви-

користовуючи новітні методи конформної теорії поля ми вперше виконали явний розрахунок двоточної кореляційної функції $O(n)$ моделі в координатному представленні для цього класу універсальності [37]. Наші розрахунки зроблені в наближенні $O(\varepsilon)$, тоді як дотепер розглянуті функції були відомими тільки в класичному наближенні Ландау. Ми також виявили нові загальні співвідношення між операторними розкладами парної кореляційної функції та шарової сприйнятливості.

Наші роботи [42] і [37] одразу ж отримали визнання серед науковців, що займаються конформним бутстрапом. В статі [43] говориться, що в [37, 42] було розвинуто нову техніку для вивчення конформної теорії поля обмежених систем. Незабаром після появи [37] вийшла робота [44], де розглядається надзвичайно цікавий варіант екстраординарного переходу, при якому на двовимірній поверхні напівбезмежної системи присутнє впорядкування типу Костерліца-Таулеса. Подібний фазовий перехід спостерігався також в чисельних експериментах типу Монте Карло при дослідженні тривимірної напівбезмежної моделі Гайзенберга ($d = n = 3$) [45].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України, з науковою тематикою якого пов'язаний вибраний напрямок досліджень. Представлені в дисертації результати отримані згідно з планами робіт в рамках держбюджетних тем НАН України: “Дослідження фазових переходів першого та другого роду з використанням функціональних методів” (1988–1993 рр., номер державної реєстрації 01 88 0086790), “Дослідження критичної поведінки простих та багатокомпонентних флюїдів та спінових систем” (1994–1998 рр., номер державної реєстрації 01 94 022987), “Дослідження фазових переходів в об'ємних і просторово-обмежених системах та опис на мікроскопічному рівні їх термодинамічних та структурних характеристик” (1999–2001 рр., номер державної реєстрації 0199U000668), “Розвиток кількісної теорії фазових переходів у конденсованих системах” (2002–2004 рр., номер державної реєстрації 0102U000218), “Особливо-

сті критичної поведінки конденсованих систем під впливом зовнішнього поля, структурного безладу, фрустрацій та анізотропії” (2005–2007 рр., номер державної реєстрації 0105U002081), “Розвиток і застосування методів аналітичної теорії та комп’ютерного експерименту для опису явищ переносу в іон-електронних системах” (2007–2011 рр., номер державної реєстрації 0107U002081), “Аналітичні та чисельні дослідження скейлінгових властивостей та фазових переходів у багато-частинкових системах” (2008–2012 рр., номер державної реєстрації 0108U001152), “Розвиток теорії складних плинів та міжфазних областей: фазова поведінка, структурні, термодинамічні та динамічні властивості” (2009–2013 рр., номер державної реєстрації 0109U001058), “Багатомасштабність і структурна складність конденсованої речовини: теорія і застосування” (2013–2016 рр., номер державної реєстрації 0112U003119), “Розвиток теоретичних методів опису флюїдних, ґраткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” (2013–2017 рр., номер державної реєстрації 0112U007763), “Нові концепції статистичного опису і їх застосування у теорії багаточастинкових систем” (2017–2019 рр., номер державної реєстрації 0117U002093), “Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінгу у складних системах” (2018–2022 рр., номер державної реєстрації 0118U003012). Робота з іноземними співавторами проводилася за підтримки Комісії з атомної енергії (CEA), Франція (1991–1992 рр.), гранту фонду Александра фон Гумбольдта, ФРН (1993–1995 рр.), грантів Sonderforschungsbereich 237 і Програми Лейбніца Di 378/2-1, Di 378/3, Di 378/5 Німецького фізичного товариства (DFG) (1996–2014 рр.).

Мета і задачі дослідження дисертації. *Метою дисертаційної роботи є опис критичної поведінки складних систем статистичної фізики, характерною рисою яких є неідеальність їх властивостей в реальному просторі. До такого опису в першу чергу належить дослідження параметрів, які характеризують термодинамічні величини і кореляційні функції в околі критичної температури T_c . Такими параметрами є критичні показники і критичні амплітуди. Вони визначають загальну форму, а також характерні особливості досліджуваних величин у крити-*

чній області, і є доступними для експериментальних вимірювань.

Однією з наших цілей є якомога точніше визначення чисельних значень критичних показників і універсальних комбінацій критичних амплітуд сингулярностей термодинамічних величин біля T_c , а також явних функціональних форм кореляційних функцій при $T = T_c$. Для таких розрахунків потрібне просування до чимраз вищих наближень теорії збурень в поєднанні зі специфічною подальшою математичною обробкою отримуваних даних. При роботі зі складними системами це вимагає використання передових математичних підходів.

Для досягнення даної мети у роботі необхідно було розв'язати наступні *завдання*, серед яких:

- Розрахунок критичних показників і універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкованих систем у фіксованих вимірностях простору, зокрема при $d = 3$
- Знаходження поверхневих критичних показників тривимірних напівбезмежних систем при звичайному і спеціальному переходах
- Вивід критичних показників сильно анізотропних
- Розрахунок явних виразів для кореляційних функцій в точці Ліфшица та при екстраординарному переході в напівбезмежних системах
- Знаходження критичних амплітуд Казимира ізотропних та анізотропних просторово обмежених систем з двома поверхнями
- Дослідження деяких математичних властивостей вищих трансцендентних функцій (таких як функції Апеля, узагальнені гіпергеометричні функції ${}_3F_2$) та інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца

При розв'язанні перелічених задач кожен раз нашою метою був їх розгляд у найвищих доступних наближеннях. З часу наших публікацій жодна з цих задач не була розв'язана іншими авторами у вищих наближеннях (за винятком робіт [46, 47] для неупорядкованої моделі Ізінга), чи більш досконалішими методами.

Об'єктом дослідження є просторово неоднорідні системи з різними видами

неоднорідності, що перебувають у точці фазового переходу другого роду та її околі.

Предметом дослідження є критичні показники, критичні амплітуди та кореляційні функції, що описують статичну критичну поведінку просторово неоднорідних систем.

Методи дослідження. Ключовим методом дослідження, що використовується в роботі, є теоретико-польовий підхід до критичних явищ в контексті ренормалізаційної групи Вільсона. В загальних рамках цього підходу використовуються різні варіанти ε -розкладу Вільсона-Фішера, “масивна” теорія поля Парізі у фіксованих вимірностях простору, $1/n$ -розклад за великим числом компонент параметра порядку n Абе-Ма, розклади в ряди теорії збурень в термінах діаграм Фейнмана. Застосування цих методів у даній роботі є оригінальними і нетривіальними. Вони приводять до нових результатів у нетривіальних наближеннях, більшість з яких залишається найвищими до теперішнього часу.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, огляду літератури, шести розділів з викладом результатів оригінальних досліджень, висновків і списку цитованих джерел. Роботу викладено на 265 сторінках (разом із переліком літературних джерел – на 299 сторінках). Бібліографічний список містить 398 покликів.

У **Вступі** висвітлено актуальність теми, сформульовано мету і завдання дисертації, окреслено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів. Також визначено особистий внесок здобувача та наведено інформацію щодо апробації роботи.

Перший розділ представляє огляд літератури за темами, безпосередньо розглянутими в дисертаційній роботі. Оскільки за кожною з цих тем існує величезна кількість літератури, тут розглядаються і згадуються тільки ті літературні джерела, які мають найближчий стосунок до проблем, що вивчаються в наступних, основних, розділах. Відповідно, у кожній з цих тем її огляд не може претендувати на повноту. Головною метою автора було визначення місця і ролі його

власних досліджень за даними тематиками.

Огляд літератури розпочинається окреслення кола фізичних систем, критичні властивості яких будуть вивчатися у подальшому. Це — три види систем, для охоплення яких ми використовуємо загальний термін “просторово неоднорідні”. Це системи, в яких немає однорідності чи впорядкування на мікроскопічному рівні найближчих сусідів; системи, де відсутня глобальна обертова симетрія і їх неоднорідність проявляється у відмінностях фізичних властивостей у різних просторових напрямках; системи, неоднорідність яких проявляється у наявності одної, або і двох поверхонь, і відсутності трансляційної інваріантності в напрямі, перпендикулярному до цих поверхонь.

У підрозділі 1.1 обговорюються прояви впливу замороженого безладу на критичну поведінку спінових систем. Тут ми записуємо класичний спіновий гамільтоніан для систем з “вакансіями”, обговорюємо конфігураційне усереднення за неупорядкованістю, зупиняємося на феноменологічному критерії Гарріса [48], див.також [49, розд. 8.1]. Саме цей класичний гамільтоніан є основою для формулювання задачі про критичну поведінку таких спінових систем в термінах теоретико-польового ефективного гамільтоніана (ЕГ) Ландау-Гінзбурга-Вільсона (див. підрозділ 2.1). Ми даємо коротку історичну довідку про роботи, що вперше виконувалися на основі ЕГ (2.1), а далі — слідкуємо за розвитком подій в теорії критичної поведінки ізінгівських систем з замороженою неупорядкованістю до наших днів. Особливий наголос при цьому робиться на порівнянні досягнень, викладених у Розділі 2 даної дисертації, і подібних робіт інших авторів.

Подібним чином побудований і підрозділ 1.2. Тут для напівбезмежних систем також записується відповідний спіновий гамільтоніан і обговорюються його особливості, а далі робиться огляд літератури, присвяченої поверхневій критичній поведінці таких систем з наголосом на ролі робіт автора результатах, викладених у Розділі 3.

Аналогічно і в підрозділі 1.3, ми спершу формулюємо т. зв. модель ANNNI (Axial Next-Nearest Neighbor Ising model) для сильно анізотропних спінових систем

і характеризуємо її основні риси. Критичні властивості таких систем ми досліджуватимемо в розділах 4, 5 і 6. Нажаль, у цьому контексті доводиться зупинитися на ряді помилок і неточностей, які нам довелося виявити в деяких роботах інших авторів.

Підрозділ 1.4 дає загальне уявлення про характер задач, які будуть розглядатися в Розділі 7. Це — флуктуаційно індуковані сили, що виникають в системах з плівковою геометрією при об’ємній критичній температурі, і піддаються експериментальним вимірюванням. Огляд розпочинається з явних формул, вперше отриманих у цьому контексті Казимиром. Його робота за 1948 рік була присвячена ролі нульових вакуумних флуктуацій електромагнітного поля в проміжку між двома паралельними провідними пластинами. В статистичну фізику ефект Казимира “прийшов” у 1978 р. завдяки визначній роботі Фішера і де Жена, а в квантову теорію поля — через роботу Симанзіка (1981 р.). В роботах автора ефект Казимира в просторово однорідних, а також сильно анізотропних системах, досліджувався за допомогою теоретико-польових методів, і це привело до нових цікавих результатів у цій галузі.

Другий розділ присвячений проявам впливу замороженої неупорядкованості на критичну поведінку моделі Ізінга в тривимірному просторі а також в нецілих вимірностях простору d між $d = 2$ і $d = 4$.

Взагалі, на наше переконання, дослідження критичної поведінки моделей статистичної фізики в нецілих вимірностях простору є важливим. Зокрема, особливе значення має можливість прослідкувати їх поведінку дещо нижче верхньої граничної вимірності d^* , де з’являється славнозвісна нетривіальна нерухома точка Вільсона-Фішера, і де доступні дані розкладів за $\varepsilon = d^* - d$. Узгодження з ε -розкладом при подальшому просуванні до нижчих вимірностей простору забезпечує апробацію використовуваних нами методів у фізичній вимірності простору $d = 3$.

У цій частині дисертації для дослідження критичної поведінки неупорядкованих ізінгівських систем в нецілих вимірностях простору а також при $d = 3$

використовується т. зв. масивна теорія поля. Саме цей варіант теорії поля вперше був використаним Парізі [50] для роботи у фіксованих вимірностях простору d , зокрема при $d = 3$ і $d = 2$. Характерною рисою цього підходу була відмова від застосування ε -розкладів біля верхньої чи нижньої граничної вимірності. Проте, як ми відзначили вище, встановлення контакту масивної теорії поля з ε -розкладами є можливим і важливим для перевірки правильності її функціонування.

У цьому розділі описано як вперше ідея Парізі була реалізована при нецілих вимірностях простору. Масивна теорія поля вперше була застосована до дослідження неупорядкованої моделі Ізінга з замороженим безладом. При цьому були отримані плавні залежності критичних показників цієї моделі при $2 \leq d < 3.4$. З іншого боку, в проміжку $3.4 \leq d \leq 4$ ці показники були обчислені за допомогою пересумування типу Паде-Бореля рядів другого порядку за $\sqrt{\varepsilon}$ з $\varepsilon = 4 - d$.

Необхідні інтеграли Фейнмана і вирази для двопетльових функцій РГ в масивній теорії поля були розраховані в явному вигляді для довільних вимірностей простору d .

Масивна теорія поля була також вперше застосована до розрахунків універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкованих ізінгівських систем при $d = 3$. Критичні амплітуди розраховані як при $T > T_c$, так і при $T < T_c$, у 4- і 3-петльовому наближенні, відповідно. На підставі чисельних оцінок зроблено, зокрема, висновок про те, що теоретичне значення відношення A_+/A_- критичних амплітуд питомої теплоємності може бути додатним на противагу передбаченням ε -розкладу.

У **третьому розділі** вперше масивна теорія поля при фіксованих вимірностях простору d сформульована для напівбезмежних систем з плоскою $(d - 1)$ -вимірною поверхнею.

Тут запропоновано умови нормування, необхідні для формулювання теорії в рамках даного підходу. Вони різні у випадках звичайного та спеціального переходів, що розглядалися в цьому розділі.¹ Розраховані двопетльові ренормгру-

¹Екстраординарний перехід і розрахунок кореляційних функцій при цьому переході розглядалися в недавніх роботах автора [42] і [37].

пові функції і поверхневі критичні показники цих переходів. За можливостями, необхідні інтеграли Фейнмана розраховані в явному вигляді.

Оцінки поверхневих критичних показників при $d = 3$ отримані за допомогою екстенсивного аналізу апроксимант Паде і пересумувань Паде-Бореля рядів теорії збурень. На основі чисельних даних зроблено висновок про те, що неупорядкованість поверхні не впливає на критичні особливості спеціального переходу.

З іншого боку, розпорядкування об'єму змінює поверхневі критичні показники звичайного переходу. Для цих показників отримані оригінальні чисельні дані як з масивної теорії поля при $d = 3$, так і з $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу.

Подібної роботи з розрахунку поверхневих критичних показників у вищому наближенні теорії збурень дотепер не виконано. Отримані автором чисельні оцінки добре відомі в наукових колах і цитуються практично у всіх роботах, присвячених дослідженням критичної поведінки напівбезмежних систем.

У **четвертому розділі** розпочинається дослідження критичної поведінки сильно анізотропних систем, для яких характерною є присутність особливої мультикритичної точки, точки Ліфшица. Оскільки в попередніх дослідженнях ТЛ (які в основному проводилися в "традиційному" імпульсному представленні) було багато помилок і неточностей, на початку цього оригінального розділу значна увага приділяється формулюванню теорії та опису її базових функцій безпосередньо в прямому, координатному просторі.

Далі виконано ренормгруповий аналіз теорії, розрахунок функцій РГ в другому порядку епсилон-розкладу, і вперше отримані коректні вирази, в рамках цього підходу, для критичних показників ТЛ.

Тут також поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.

На завершення розділу сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних анізотропних систем з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії, і отримані поверхневі показники звичайного переходу в таких системах.

П'ятий розділ присвячений критичному перегляду т. зв. гіпотези локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ), запропонованої М. Генкелем², яка представляє собою спробу формулювання аналога конформної інваріантності для систем з сильною анізотропією, і порівнянню її передбачень з розрахованими нами епсилон-розкладами для парних кореляційних функцій m -вісних анізотропних систем у ТЛ.

Виявлено ряд неточностей в математичних формулюваннях ГЛСІ. Отримано нову інформацію стосовно математичної структури і явного вигляду парних кореляційних функцій систем з одновісною анізотропією в ТЛ, які ми розраховували в рамках теорії ϕ^4 з точністю до $O(\varepsilon^2)$. При цьому в наших ε -розкладах кореляційних функцій вперше спостерігалася залежність від напрямів у (m, d) -площині, вздовж яких ці розклади виконувалися. Ми прийшли до висновку про те, що ГЛСІ є справедливою тільки для певного типу ефективних гаусових теорій поля і не дає якісно правильних передбачень для взаємодіючих систем.

Додатково ми отримали новий компактний вираз в термінах *однієї*, явно симетричної функції Апеля F_1 , для стандартного D -вимірному двоточкового однопетльового інтеграла Фейнмана з двома різними масами m_1^2 і m_2^2 і ненульовим зовнішнім імпульсом p .

У шостому розділі ми повертаємося до розрахунку критичних показників ТЛ, але вже без залучення ε -розкладу. На відміну від розділу 4, тут ми застосуємо розклад за оберненими степенями великого числа компонент параметра порядку n . Цей альтернативний підхід не потребує епсилон-розкладів за відхиленнями від граничних вимірностей; в цьому його велика перевага і схожість з масивною теорією поля. Він придатний для роботи в будь-яких вимірностях простору між верхньою і нижньою граничними. У застосуванні до ТЛ, це дає змогу прослідковувати залежності критичних показників від вимірності d в цілій смузі між лініями граничних вимірностей $d^* = 4 + m/2$ і $d_\ell = 2 + m/2$ з врахуванням очевидного фізичного обмеження на кількість осей анізотропії, $0 \leq m \leq d$ — див.

²Головною роботою Генкеля на цю тему є М. Henkel, Nucl. Phys. B 641, 405 (2002).

Рисунок 6.1 на стор. 194.

З використанням рівнянь самоузгодження типу Швінгера-Дайсона ми знайшли в загальному вигляді перші нетривіальні поправки порядку $1/n$ для двох незалежних кореляційних критичних показників η_2 і η_4 , і пов'язаного з ними індекса анізотропії θ , а також критичних показників кореляційних довжин, ν_2 і ν_4 , і основних термодинамічних функцій, α_L , β_L , і γ_L .

Встановлено узгодження з чотирма різними граничними випадками: при $m = 0$ і $m = d$ відтворюються результати $1/n$ -розкладів для критичної точки та ізотропної ТЛ; при малих відхиленнях ε і ε_ℓ від верхньої і нижньої граничних вимірностей $d^*(m)$ і $d_\ell(m)$ отримуються епсилон-розклади для m -вісних ТЛ. Виконані явні розрахунки для деяких інших часткових випадків, зокрема, три- і чотиривимірних одновісних систем.

На основі якісного аналізу зроблений висновок про те, що кореляційний критичний показник $\eta_4(m, d)$ змінює свій знак при зміні вимірності простору d .

Заключний **сьомий розділ** представляє дослідження флуктуаційно-індукованих сил, що з'являються в просторово обмежених багаточастинкових системах завдяки появі далекосяжних флуктуацій при критичній температурі, і розрахунок т. зв. амплітуд Казимира, що визначають величини цих сил.

Виявлені неконтрольовані інфрачервоні розбіжності в певних класах діаграм Фейнмана для амплітуд Казимира у випадках періодичних і спеціальних ГУ і пояснені причини їх виникнення. Проблема розв'язана шляхом реорганізації теорії збурень. Виявлена неаналітичність ε -розкладів відповідних амплітуд Казимира і в явному вигляді знайдені поправки порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд. Запропоновані оновлені чисельні оцінки при $d = 3$.

При розгляді просторово обмежених *сильно анізотропних* систем виявлено, що флуктуаційно-індуковані сили залежать від просторової орієнтації граничних поверхонь відносно напрямів осей анізотропії. Розраховані амплітуди Казимира анізотропних систем, по-різному орієнтованих між двома паралельними поверхнями з різними ГУ.

Наукова новизна одержаних результатів. Вперше масивна теорія поля застосована при *нецілих* фіксованих вимірностях простору $2 < d < 4$. Виведено явні вирази двопетльових функцій ренормалізаційної групи для довільних d . Побудовано плавні залежності від d критичних показників ізінгівських систем з замороженим безладом.

Вперше масивна теорія поля при $d = 3$ застосована до дослідження *критичних амплітуд* неупорядкованих ізінгівських систем при температурах, вищих і нижчих за критичну. На основі цього методу вперше здійснено розрахунок універсальних комбінацій критичних амплітуд, зокрема відношень їх величин при $T > T_c$ і $T < T_c$. Зроблено висновок про те, що теоретичне значення відношення критичних амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- може бути додатнім на противагу передбаченням $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу.

Вперше масивна теорія поля при довільних вимірностях простору d сформульована для *напівбезмежних* систем. Запропоновано умови нормування для опису звичайного та спеціального переходів. Проведені двопетльові розрахунки поверхневих критичних показників цих переходів при $d = 3$. Зроблено висновок про те, що неупорядкованість поверхні не впливає на особливості спеціального переходу, а об'ємний безлад змінює показники звичайного переходу.

У дисертації запропоновано новий підхід до розрахунку критичних показників точки Ліфшица (ТЛ) з довільною кількістю осей анізотропії m . Вперше отримані правильні ε -розклади показників ТЛ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ і зроблено висновок про те, що в нетривіальній взаємодіючій теорії показник анізотропії θ є некласичним для будь-якої кількості напрямів модуляції m . Виявлено та проаналізовано помилки інших авторів в аналогічних розрахунках.

Вперше поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.

Сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних анізотропних систем з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії. Виведені некласичні поверхневі показники звичайного переходу у таких системах.

Вперше для ТЛ з $0 \leq m \leq d$ застосований $1/n$ -розклад за великою кількістю компонент параметра порядку. Знайдено поправки порядку $1/n$ для кореляційних і термодинамічних показників. Встановлено узгодження з відомими результатами у чотирьох різних граничних режимах. Якісний аналіз залежностей критичних показників від вимірності простору d дозволив зробити висновок про те, що кореляційний критичний показник $\eta_4(m, d)$ міняє знак при зміні d .

Виявлена неаналітичність ε -розкладу амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами, в явному вигляді знайдено поправки $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд.

Вперше розглянуто флуктуаційно індуковані сили в сильно анізотропних системах, по різному орієнтованих між двома паралельними поверхнями.

Практичне значення одержаних результатів.

Узагальнення

теоретико-польових підходів у дослідженнях критичних явищ, розроблені в дисертації, можуть використовуватися для уточнення отриманих даних шляхом розгляду вищих наближень теорії збурень. Так, в рамках цікавої і актуальної задачі про зміну поведінки критичних систем із зміною вимірності простору d , а також при розрахунку величини R_ξ^+ в DIM, розрахунки у вищих наближеннях були виконані в роботах різних авторів [46, 47, 51]. Підходи наших робіт [52] і [53] можуть бути поширеними також на інші моделі та задачі в теорії багаточастинкових систем.

Отримані нами в [34] чисельні оцінки поверхневих критичних показників цитуються практично всіма роботами, присвяченими критичним явищам в напівбезмежних системах, зокрема вони використовуються в найновіших дослідженнях методами конформного бутстрапу [35, 36].

Наші формулювання теорій сильно анізотропних систем в точці Ліфшица і технологічні засоби, які при цьому використовуються, з певністю є корисними для квантових теорій поля з порушенням Лоренцівської інваріантності [54, 55] див. також огляди в [56] і [57]. Деякі математичні аспекти таких теорій ґрунтовно досліджувалися в нашій роботі [6]. Пропоновані нами способи розрахунків є суттєво

ефективнішими за всі попередні і дозволяють проводити аналогії до інших складних систем.

Запропонований в роботі [58] підхід до реорганізації теорії збурень, де вона не працює традиційним чином, дає загальний алгоритм, який теж може бути використаний для знаходження спостережуваних величин в інших теоріях, таких як *тиск* в температурній теорії поля [59].

Нарешті, наші статті [3, 11] використовуються і цитуються в математичних роботах, присвячених дослідженням спеціальних функцій.

Особистий внесок здобувача. В роботах [52, 60] здобувачем виконані аналітичні розрахунки, пов'язані з інтегралами Фейнмана і функціями РГ, аналіз отриманих результатів і написання тексту статті. В [53] поставлена задача, виконані всі аналітичні розрахунки і аналіз чисельних результатів. В [34, 61] виконані всі розрахунки за винятком дослідження неаналітичності в перенормуванні поверхневих взаємодій, обробка і аналіз отриманих даних. В [62, 63] здобувачеві належить оригінальна ідея розрахунку полюсних частин діаграм Фейнмана і інтегральних представлень їх лишків, аналітичні (за винятком аналізу рівнянь РГ) та чисельні розрахунки, аналіз результатів і їх порівняння з даними інших робіт. Коментарі [64, 65] і присвячена ізотропній ТЛ стаття [66] написані співавтором здобувача у значній мірі на основі його попередніх досліджень; в задачі про критичну поведінку напівбезмежних систем в ТЛ [67] здобувач виконав аналітичні розрахунки функцій РГ, отримав остаточні чисельні результати. В роботі [68] здобувачу належить постановка задачі, розрахунки в порядку $O(\sqrt{\varepsilon}^2)$ поверхневих критичних показників, написання остаточної версії опублікованої статті. Здобувачу належить також постановка задачі роботи [69] про вплив кристалічної структури підпростору модуляції на критичну поведінку m -вісних ТЛ і аналітичний розрахунок відповідного кросоверного показника. В [57, 70, 71] здобувач виконав всю аналітичну і чисельну роботу за винятком найперших загальних інтегральних представлень кореляційних показників, написав текст статті [57]. В [58] здобувач ідентифікував проблеми вищих порядків теорії збурень для амплітуд Казимира в

плівкових системах з періодичними граничними умовами і вперше отримав неаналітичний внесок $O(\varepsilon^{3/2})$ шляхом сумування безмежного ряду діаграм. В [72, 73] здобувач брав активну участь на всіх етапах роботи, в першу чергу — розрахунків діаграмних розкладів; виявив і виправив помилки в оригінальних статтях та ініціював публікацію коректних результатів. В [3, 4, 6, 13, 14] здобувач задіяв відомих математиків до розв’язання математичних задач, що виникали в процесі його фізичних досліджень. В одноосібних статтях [11, 12, 74] вся робота виконана здобувачем.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися і обговорювалися на: The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, FRG, 2–8 August 1992); The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Xiamen, PRC 31 July – 4 August 1995); Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, FRG, 1995); Науковий семінар з статистичної теорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14–15 березня 1997); Ізінгівські читання (Львів, Україна, 29 квітня 1998); International Congress on Mathematical Physics “ICMP 2000” (London, UK, July 17–22 2000); Workshop on Modern Problems of Soft Matter Theory (Lviv, Ukraine, August 27–31 2000); Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA, March 12–16 2001); 20–th European Conference on Surface Science (Krakow, Poland, September 04–07 2001); The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15–21 2001); Різдвяні дискусії (Львів, Україна, 4–5 січня 2002); VI Ukrainian–Polish and II East–European Meeting on Ferroelectrics Physics (Uzhgorod–Synjak, Ukraine, September 6–10, 2002); The Spring–Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04–09 2005); The 6th International Conference “Renormalization Group 2005” (Helsinki, Finland, 30 August – 03 September 2005); The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09–13 2007); The 3rd Conference “Statistical Physics: Modern Trends and Applications” (Lviv, Ukraine, June 23–25 2009); Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15–19 2010); Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011); The 36th

Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukraine, April 5–7 2011); The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3–6 2012); 13-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, Україна, 5–7 червня 2013); Йорданські читання (Львів, Україна, 2018), а також на семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України, факультету фізики Університету Дуйсбург–Ессен (Ессен, Дуйсбург ФРН), кафедри теоретичної фізики Університету Аахен (Аахен, ФРН) відділу теоретичної фізики Центру ядерних досліджень Сакле (Сакле, Франція), факультету фізики Університету Нансі (Нансі, Франція), факультету математики Південно-китайського університету технології (Гуангджоу, КНР).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 27 статей у фахових наукових виданнях [1-27], (з них 3 статті [4,16,18] є одноосібними) і 21 тези конференцій [28–48] згідно із *Списком публікацій здобувача за темою дисертації*. Дві статті автора за темою, близькою до дисертаційної [37, 42], препринт [75] і стаття з математики [5], що фігурують у "Списку використаних джерел", у матеріал дисертації не входять.

Подяки. Автор вдячний науковому консультанту, Ігорю Рафаїловичу Юхновському за постановку задачі з пропозицією способу її розв'язання — за допомогою Ренормалізаційної Групи — ще в далекі 1980-ті роки, і за постійний інтерес до його роботи. Вдячний усім співавторам, без яких виконання цієї роботи було б неможливим, а особливо Юрію Васильовичу Головачу — за його підтримку на початку наукової діяльності автора та в завершальній фазі підготовки цієї дисертації. Дякую всім працівникам Інституту, які брали участь в обговоренні роботи. Особлива подяка Андрію Михайловичу Швайці за допомогу, яку важко переоцінити, при підготовці цієї роботи до захисту.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

За останні пів-століття методи теорії поля набули особливої важливості в сучасній теорії фазових переходів і критичних явищ [9, 76, 77]. Їх використання привело до величезного прогресу в описі критичних явищ, що відбуваються в безмежно великих ідеальних модельних системах. Термін “ідеальні” передбачає відсутність у цих системах будь-якого роду неупорядкованості, а також незмінність їх фізичних властивостей у всіх просторових напрямках. “Безмежність” таких систем передбачає те, що вони не мають скінченних розмірів у жодному з напрямів, а також не мають поверхонь, які б обмежували їх у просторі.

Пропонована робота присвячена теоретико-польовому дослідженню систем з різного роду просторовими неоднорідностями. Так, у першу чергу ми розглядаємо неупорядковані системи з замороженим безладом, які описуються т. зв. розведеною моделлю Ізінга. В таких системах просторові неоднорідності проявляються на мікроскопічному рівні: частинки, які складають систему, можуть мати різних “найближчих сусідів” у своєму оточенні. Така система нагадує ліс, або натовп людей, які заповнили площу. У великих масштабах, при розгляді здалека, такі системи виглядають однорідними та ізотропними, тобто однаковими у різних напрямках. Тим не менше, у фізичних системах наявність неоднорідностей такого характеру приводить до того, що в “критичній області” їх поведінка може відрізнятися від критичної поведінки аналогічних систем з ідеальним упорядкуванням.

Наступна різновидність просторової неоднорідності, якій ми присвятимо увагу, це наявність важливих відмінностей фізичних властивостей системи в різних напрямках. Таку систему можна порівняти із стосом аркушів паперу. Очевидно, що такий фізичний об’єкт має різні властивості вздовж осі, перпендикуляр-

ної до площин аркушів, і в напрямках, паралельних до цих площин. Тут ми маємо справу з сильною анізотропією. У контексті статистичної фізики така анізотропія приводить до змін фазової діаграми системи і появи на ній нових особливих (мульти)критичних точок.

Нарешті, ми присвяtimo увагу просторово обмеженим системам. У цьому випадку їх неоднорідність проявляється в присутності однієї або двох паралельних граничних поверхонь. У критичній області на поверхні напівбезмежних систем виникають сингулярності термодинамічних величин, які відрізняються від об'ємних сингулярностей, характерних для безмежних систем. Коли поверхонь є дві, при наближенні температури системи до критичної точки фазового переходу можливе виникнення флуктуаційно-індукованих сил між цими поверхнями.

1.1. Вплив немагнітних домішок на фазовий перехід в ізінгівських системах

Прототипом невпорядкованих систем, критична поведінка яких розглядатиметься в Розд. 2, є класична спінова система, що описується гамільтоніаном [78, 79]

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle_{nn}} J_{ij} c_i c_j \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j - h \sum_i c_i s_i^{(1)}. \quad (1.1)$$

Тут $\mathbf{s}_i$ та $\mathbf{s}_j$ є m -компонентними спіновими змінними $\{s_{i,j}^{(\alpha)}\}$, $\alpha = 1, \dots, m$, розміщеними в регулярно розподілених точках $\mathbf{x}_i$ та $\mathbf{x}_j$ d -вимірному простору $\mathbb{R}^d$, причому вимірність простору d ми вважатимемо неперервною змінною, яку можна розглядати в проміжку від 1 до 4. Індеси сумування i та j вважаються цілими числами. Для асимптотичного опису системи в околі критичної точки вид структури ґратки, на якій розміщені спіни, не має принципового значення. Зараз для нас важливо те, що в гамільтоніані (1.1) присутні “числа заповнення” c_i та c_j , які випадковим чином можуть набувати значень 1 (з ймовірністю c) і 0 (з ймовірністю $1 - c$). Таким чином ми маємо справу з варіантом *розведеної* m -векторної моделі. Вважається, що заповнені і незаповнені вузли утворюють певну фіксовану конфігурацію, тобто невпорядкованість є “замороженою” [78]. У

слабоневпорядкованій системі число немагнітних домішок є набагато меншим за кількість магнітних частинок, і концентрація останніх c є близькою до одиниці. Потенціал короткосяжної обмінної взаємодії $J_{ij} > 0$ є феромагнітним. Функція $J_{ij} = J(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ є трансляційно інваріантною та ізотропною, причому вважається, що $J_{ii} \equiv 0$. Насправді для наших застосувань можна вважати її відмінною від нуля тільки у випадку, коли вузли $\mathbf{x}_i$ та $\mathbf{x}_j$ є найближчими сусідами; під знаком суми в (1.1) значок $< i, j >_{nn}$ вказує на обмеження саме парами найближчих сусідів у сумуванні за i та j . При цьому взаємодії між магнітною і немагнітною підсистемами немає. Нарешті, другий доданок в гамільтоніані (1.1) враховує дію на систему зовнішнього (магнітного) поля $h > 0$. Це поле спрямоване вздовж однієї (першої) компоненти векторної змінної $\mathbf{s}$ на кожному вузлі (інша можливість орієнтації зовнішнього поля буде розглядатися в Розд. 2.6.1).

Для опису термодинамічних властивостей такої системи необхідно розрахувати конфігураційне середнє вільної енергії (ВЕ) [78] $F = -T \langle \ln Z_{conf} \rangle_{conf}$, де $Z_{conf} = \text{Sp}[\exp(-\beta H)]$ — статистична сума певної просторової конфігурації (тут T —абсолютна температура, $\beta = 1/T$, і прийнято, що константа Больцмана k рівна одиниці), а Sp означає операцію сумування за всіма станами спінових змінних $\{\mathbf{s}_i\}$.

У даній задачі часто використовується т. зв. метод реплік [49, 80, 81], який дозволяє змінити порядок термодинамічного і конфігураційного усереднень. Цей спосіб полягає в тому, що логарифм конфігураційно-залежної статистичної суми $\ln Z$ (для компактності опускаємо індекс $conf$) представляється у вигляді “реплічної” границі $\lim_{n \rightarrow 0} (Z^n - 1)/n$, і за конфігураціями усереднюється величина Z^n . Таким чином виникає трансляційно-інваріантний ЕГ з кубічною анізотропією в (n -вимірному) просторі параметра порядку [82], критична поведінка якого формально ідентична критичній поведінці неупорядкованої моделі (1.1) в реплічній границі $n \rightarrow 0$. В Розд. 2.1 ми будемо працювати з таким теоретико-польовим ЕГ типу ϕ^4 — див. (2.1).

Декілька років після появи основоположних робіт Вільсона і Фішера [7, 8,

10], що революційним чином впровадили теоретико-польовий метод у статистичну фізику, розпочалася нова хвиля дослідження критичної поведінки неупорядкованих систем. З'явився феноменологічний критерій Гарріса [48]. Згідно з цим критерієм, якщо критичний показник питомої теплоємності α чистої системи додатний, то критична поведінка такої системи зміниться при її розпорядкуванні. Коли йдеться про m -векторну модель (1.1) з цілими значеннями числа m , то критерію Гарріса задовольняє тільки модель Ізінга з $m = 1$. Тому модель саме такого типу ми і досліджуємо в наступному розділі.

Якісна картина, що відповідає критерію Гарріса, підтвердилася і в перших ренормгрупових дослідженнях критичної поведінки неупорядкованих систем [82–85], див.також [49, розд. 8]. У цих роботах було використано епсилон-розклад Вільсона-Фішера [10], тобто, критичні показники розраховувалися як розклади за степенями $\varepsilon = 4 - d$ відхилення просторової вимірності системи d від верхньої граничної вимірності простору $d^* = 4$ (при $d \geq d^*$ система описується класичними критичними показниками теорії Ландау). Тут проявилася ще одна особливість, притаманна випадку $m = 1$: параметром розкладу виявилася величина $\sqrt{\varepsilon}$ [82, 85, 86], а не ε , як зазвичай. Головні внески $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу в критичні показники (магнітної) сприйнятливості, кореляційної довжини, критичних кореляцій, питомої теплоємності, намагніченості мають вигляд $\gamma = 1 + \lambda$, $\nu = \gamma/2$, $\eta = -\lambda^2/3$, $\alpha = -2\lambda$, $\beta = 1/2 + \lambda/2$, $\omega = 2\varepsilon$, де для компактності запису введений ефективний параметр розкладу $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{6\varepsilon/53} \simeq 0.168\sqrt{\varepsilon}$ і опущені доданки порядку $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^{3/2}), \dots$

В наступних роботах [86, 87] були розраховані наступні порядки $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладів, і стало зрозуміло, що з таких результатів непросто отримати чисельні оцінки у фізичній вимірності простору $d = 3$. (Це було підтверджено згодом: у вищих порядках $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу коефіцієнти мають дуже нерегулярні знаки і величини [88, 89], що практично не дає шансів для знаходження надійних екстраполяцій до $\varepsilon = 1$. Автори найновішої статті [90], де $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад досліджувався на рівні шестипетльового наближення, також визнають, що “resumming of $\sqrt{\varepsilon}$ series themselves turned out to be disappointing”.)

Така ситуація стимулювала розвиток інших підходів до дослідження критичної поведінки неупорядкованих систем. З'явилися роботи [32, 91–96], в яких розрахунки на основі модельного ЕГ (2.1) проводилися в рамках т. зв. масивної теорії поля безпосередньо в тривимірному просторі (а також частково при $d = 2$) — за методом запропонованим Парізі [50].¹ До цієї серії належать також наші роботи [52, 60, 98], де теоретико-польовий підхід Парізі був застосований до аналогічної моделі в нецілих вимірностях простору між $d = 2$ і $d = 4$. У цьому контексті на особливу увагу заслуговує ґрунтовна робота [99], де критична поведінка неупорядкованих ізінгівських систем в нецілих вимірностях досліджувалася за допомогою методу масштабних полів, заснованого на розв'язуванні точного рівняння РГ Вільсона [9]. Нажаль, ця лінія досліджень більше не продовжувалася, що було пов'язано з суттєвими розрахунковими труднощами такого підходу. Лише в 2002р. з'явилося інше дослідження критичної поведінки неупорядкованої моделі Ізінга непертурбативного типу [100], в якому використовувався альтернативний варіант точного рівняння РГ для т. зв. ефективної усередненої дії [101]. Цей варіант розрахунку теж не отримав подальшого розвитку.

Як і в [99], але за допомогою масивної теорії поля, ми теж отримали графіки плавних залежностей критичних показників неупорядкованих ізінгівських систем від вимірності простору. Отримана нами в [52] залежність критичного показника кореляційної довжини ν від d показана на Рисунку 2.1 (стор. 83). Тут, в рамках нашого огляду, для зручності порівняння ми відтворюємо отриманий згодом аналогічний рисунок з роботи [46]. Зображена на Рисунку 1.1 суцільна крива отримана в [46] в наступному, трипетльовому наближенні (наш двопетльовий результат з [52] показаний пунктиром).

Добрі оцінки критичних показників *тривимірної* неупорядкованої моделі Ізінга були отримані за допомогою методу мінімальних віднімань без ε -розкладу [102] в роботі [97], а також із застосування т. зв. псевдо-епсilon розкладу — див.

¹Трипетльові функції РГ, опубліковані в [91] і використані в [93] були неправильними. Правильні ренормгрупові функції і відповідні коректні результати для критичних показників неупорядкованої моделі Ізінга, а саме $\{\nu, \gamma\} = \{0.671, 1.328\}$ вперше були розраховані в [94, (3.31)], [32, (8)] (порівн. з [97, стор. 15116]). Ці поправки були враховані при виводі наступного наближення в [51, 95].

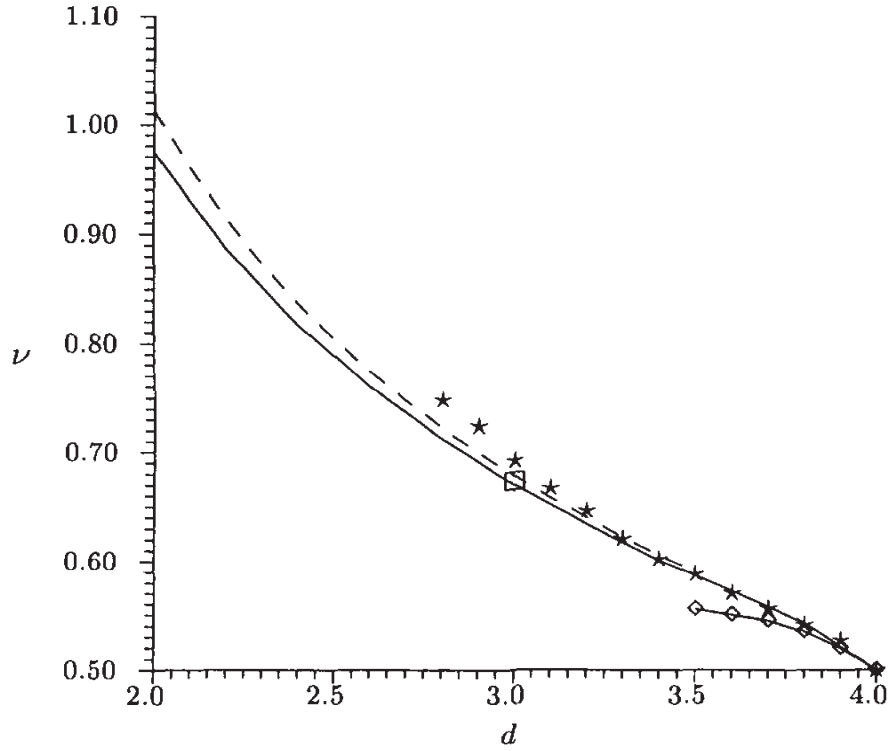


Рис. 1.1. Рисунок з роботи [46]: залежність критичного показника ν від вимірності простору d . Суцільна лінія — [46] (трипетльове наближення); пунктирна лінія — [52] (двопетльове наближення); квадрат — [96] (чотирипетльове наближення); зірочки — [99]; ромбики — пересумований $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад

[103–105] і цитовані там роботи. Нарешті, наведемо чисельні оцінки цих показників, отримані в найвищому, шестипетльовому наближенні тривимірної масивної теорії поля [106]:

$$\begin{aligned}\gamma &= 1.330(17), & \nu &= 0.678(10), & \eta &= 0.030(3), \\ \alpha &= -0.034(30), & \beta &= 0.349(5), & \omega &= 0.25(10).\end{aligned}$$

Ці результати, ймовірно, вважаються найкращими, але вони явно не є оптимальними з точки зору співвідношення зусилля/якість: практично такі самі чисельні дані були отримані набагато раніше [92] з нескладного двопетльового наближення з використанням найпростішого пересумування типу Паде-Бореля.² Наводимо їх у всій красі з точністю до п'яти позицій після коми — як у таблиці III роботи [92]: $\gamma = 1.33551$, $\nu = 0.67813$, $\eta = 0.03061$, $\alpha = -0.03440$, $\beta = 0.34944$, $\omega = 0.45033$.

²Цей факт, як і наявність хороших чисельних оцінок критичних показників у трипетльовому наближенні [32, 94] були проігнорованими авторами роботи [106].

Винятком тут є тільки показник поправки до скейлінгу ω . Зауважимо при цьому, що наступне, трипетльове наближення дає для цього показника значення $\omega \simeq 0.359$ і 0.376 в залежності від способу пересумування бета-функцій [94, Табл. 1 і 2]. Ці значення практично лежать в межах точності визначення $\omega = 0.37(6)$ в, напевне, найбільш досконалих симуляціях типу Монте Карло [107]. При такому порівнянні величина $\omega = 0.25(10)$ з [106, Табл. XI], отримана в шестипетльовому наближенні, виглядає не дуже привабливо. Щодо величин ω , отриманих різними способами і в різних наближеннях, див. також [89] і [108].

У значно меншій мірі просунуте дослідження критичних амплітуд і їх універсальних комбінацій — важливих величин, які разом із критичними показниками визначають форму сингулярностей термодинамічних функцій в околі фазового переходу другого роду (див. огляд [109]). Така ситуація пов'язана в першу чергу з тим, що тут, як правило, необхідно працювати також і в низькотемпературній, упорядкованій фазі, розраховувати рівняння стану. У випадку неупорядкованої моделі Ізінга рівняння стану і кореляційні функції вперше вивчалися в [110], і результати цієї роботи, які стосуються статичної парної кореляційної функції, були переглянуті і доповнені в [111] (див. також [47, стор. 6-7]). В роботі [112] на основі розгляду однопетльового наближення для рівняння стану були отримані головні члени $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу для універсальних відношень критичних амплітуд, а саме, $C_+/C_- = 2 + (\ln 4 - 3)\lambda + O(\varepsilon)$, $A_+/A_- = -\frac{1}{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$, $f_+/f_- = \sqrt{2} [1 - (\frac{9}{8} - \ln \sqrt{2})\lambda] + O(\varepsilon)$. Тут C_+ і C_- — критичні амплітуди сингулярної поведінки сприйнятливості при температурах вищих і нижчих за критичну, A_+ і A_- їх аналоги для питомої теплоємності, а f_+ і f_- — амплітуди сингулярної температурної залежності парної кореляційної функції.

Дещо неочікуваним виявився від'ємний знак відношення амплітуд A_+/A_- сингулярної частини температурної залежності питомої теплоємності. Постало питання про те, чи цей знак може змінитися при врахуванні вищих наближень $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу. Це послужило однією з головних мотивацій автора для розрахунку рівняння стану і універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкова-

ної моделі Ізінга в наступному порядку за $\sqrt{\varepsilon}$. Відповідні результати і чисельні оцінки при $d = 3$, що з них випливають, були опубліковані в роботі [113]. Вищі наближення $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу ніким не розглядалися до теперішнього часу. Хоча слід визнати, що з огляду на труднощі чисельних оцінок високих порядків $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу [88, 89], розгляд таких наближень навряд чи міг би мати суттєве практичне значення окрім чисто академічного інтересу.

Наступними роботами автора, присвяченими розрахунку універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкованої моделі Ізінга — на цей раз — безпосередньо у тривимірному просторі були стаття [53] і препринт [114]. Після їх появи аналогічні розрахунки у вищих наближеннях проводилися, напевне, тільки у двох роботах. Першою з них є робота [51], де розглядалася виключно високотемпературна фаза і були отримані результати п'ятипетльового наближення тільки для універсальної комбінації R_{ξ}^{+} (див. Розд. 2.5). Другою є робота [47]. Тут непрямым чином розраховувалося рівняння стану, а також універсальні комбінації критичних амплітуд неупорядкованої моделі Ізінга, які вимагають розгляду (як і в [53, 113]) температур вищих і нижчих за T_c . Автори роботи [47] традиційно не роблять порівнянь з наявними результатами попередніх теоретичних робіт (винятком є тільки два останні рядки цієї статті), двічі повторюючи те, що, на їхню думку, вони не є достатньо точними.

Зауважимо також, що в роботі [108] за допомогою теоретико-польового підходу в тривимірному просторі були розраховані універсальні комбінації критичних амплітуд поправок до скейлінгу а також кросоверні функції неупорядкованої моделі Ізінга (див. також цитовані в [108] роботи щодо ефективних критичних показників).

Результати нашої діяльності, зокрема і питання знаку відношення A_{+}/A_{-} , будуть детально обговорюватися в Розд. 2.

1.2. Напівбезмежні системи і поверхнева критична поведінка

Оскільки всі реальні фізичні об'єкти є скінченними і мають граничні поверхні, дослідження просторово обмежених модельних систем є важливими завданням теорії. У Розд. 3 ми будемо розглядати поверхневі критичні ефекти, що виникають у напівбезмежних системах, обмежених плоскою поверхнею. Тут ми матимемо вже справу з просторовою неоднорідністю, яка приводить до втрати трансляційної інваріантності в напрямі, перпендикулярному до поверхні, і до відповідних математичних ускладнень при описі таких систем.

Припустимо, що площина поверхні розміщена при $z = 0$, а сама система займає півпростір з $z \geq 0$. В напрямках $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}$ перпендикулярних до осі z , а отже паралельних до поверхні, система вважається безмежною та ізотропною.

Для такої системи можна записати спіновий гамільтоніан у вигляді (порівн. з [115, стор. 83-84])

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle'_{nn}} J_{ij} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j - \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle_{nn}|_{z=0}} J_{ij}^s \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j - h \sum_i s_i^{(1)} - h_1 \sum_{i|_{z=0}} s_i^{(1)}. \quad (1.2)$$

Як і в (1.1), $\mathbf{s}_i$ та $\mathbf{s}_j$ — класичні m -компонентні спінові змінні, розташовані в точках $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}_+^d$ частини d -вимірного простору $\mathbb{R}^d$ з $z \geq 0$. У першій сумі в (1.2) сумування відбувається за всіма парами найближчих сусідів, обидва з яких одночасно не належать поверхні з $z = 0$. Такі пари включає в себе сумування в другому доданку. Виключення цих поверхневих пар з сумування в першому доданку позначене там штрихом. Оскільки фізично на поверхні взаємодія між парами найближчих сусідів є, взагалі кажучи, відмінною від взаємодії пар в об'ємі, поверхнева константа взаємодії J_{ij}^s в загальному випадку відрізняється від свого об'ємного аналога J_{ij} . Два останні доданки в (1.2) враховують можливу присутність зовнішніх (магнітних) полів. Об'ємне поле h діє на всі спіни системи, а поверхнєве h_1 — тільки на спіни, розміщені на поверхні.

У залежності від співвідношення між силами об'ємних і поверхневих взаємодій в напівбезмежній системі, що описується гамільтоніаном (1.2), можуть

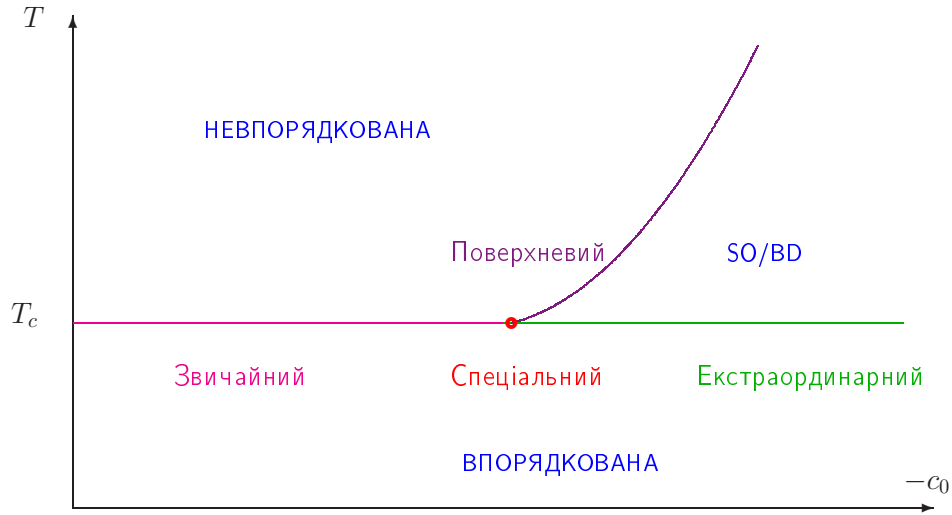


Рис. 1.2. Схематична фазова діаграма напівбезмежної системи. В секторі SO/BD ми маємо впорядковану фазу на поверхні системи, але неупорядковану в її об'ємі. Параметр c_0 відповідає співвідношенню між поверхневими і об'ємними взаємодіями (див. розд. 3.1).

відбуватися фазові переходи, що характеризуються різними типами поверхневої критичної поведінки. У відсутності зовнішніх полів на фазовій діаграмі напівбезмежної системи ми маємо (див. Рисунок 1.2 а також [116, стор. 19-23], [115, стор. 85-87]) лінії поверхневих, звичайних і екстраординарних переходів, а також мультикритичну точку, де відбувається т. зв. спеціальний перехід. Більш детально ми розповімо про ці різні види переходів у розділі 3.1. У цьому ж розділі ми запишемо ефективний польовий гамільтоніан Ландау-Гінзбурга-Вільсона (3.1) типу ϕ_d^4 , що відповідає спіновій моделі (1.2), і уточнимо те, як ці різні переходи реалізуються в теоретико-польовій моделі (3.1). Там ця інформація буде потрібною нам для подальшого викладу.

Перші роботи, присвячені розрахунку нетривіальних поправок до класичних величин поверхневих критичних показників [117, 118] використовували оригінальні ренормгрупові методи Вільсона і Фішера [7, 8, 10] і запропонований цими авторами ε -розклад [9, 10], тобто розклад за малими відхиленнями $\varepsilon = 4 - d \ll 1$ вимірності простору d від верхньої граничної вимірності $d^* = 4$. Результати були отримані у вигляді коротких рядів першого порядку за степенями ε .

Нова хвиля дослідження поверхневих критичних явищ розпочалася на поча-

тку 80-х років минулого століття з роботи [119], коли в цій галузі почали застосовуватися методи квантової теорії поля, більш зручні для практичних розрахунків у вищих порядках теорії збурень (ТЗ). З їх допомогою були отримані внески другого порядку за ε в поверхневі критичні показники [40, 120–124] та отримано дуже багато іншої важливої інформації (див. вичерпний огляд [115] а також [125]).

Однак, для отримання з відносно коротких рядів за степенями ε чисельних оцінок у тривимірному просторі необхідна була їх екстраполяція до $\varepsilon = 1$. Ця процедура не завжди є простою і її застосування не кожен раз приводить до надійних результатів. Наприклад, отримані таким чином [124] значення кросоверного поверхневого показника Φ на 20-30% відрізнялися від результатів чисельних розрахунків методом Монте Карло (див. [34, 61, 115]).

Тому в наших роботах [34, 61, 74], на описі яких ми зупинимося в Розд. 3, ми узагальнили т. зв. масивну теорію поля на випадок напівбезмежних систем. Таке узагальнення дало нам можливість досліджувати поверхневу критичну поведінку безпосередньо у фізичній вимірності простору $d = 3$, і більш загально — у нецілих вимірностях простору d в проміжку $2 \leq d < 4$.

Розроблений нами підхід дозволяє також узагальнення на випадки більш складних напівбезмежних систем. Зокрема, в роботі [68] нами було виконане дослідження критичної поведінки напівбезмежних систем з *об’ємною* “замороженою” неупорядкованістю (див. попередній пункт 1.1) при звичайному переході. Тут ми узагальнили і розширили на наступний порядок $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу розрахунки, представлені в більш ранній роботі [126]. Ця задача буде розглядатися в розд. 3.5. Згодом питання про вплив неупорядкованості на поверхневу критичну поведінку при спеціальному переході розглядалося в роботі [127], а в [128] досліджувався кросовер між звичайним і спеціальним переходами в системах такого типу. В роботі [129] запропонований нами підхід був узагальнений для дослідження критичної адсорбції полімерів у середовищі з замороженими протяжними дефектами з далекосяжними кореляціями, а в [130] — для випадку напівбезмежних систем з кубічною анізотропією в полі параметра порядку.

Зазначимо, що наші результати для поверхневих показників, і зокрема ро-

бота [63], стали дуже добре відомими в середовищі науковців, що займаються фізикою поверхневих явищ. Зокрема, наша робота [63] особливо часто цитується в статтях з фізики полімерів. Наприклад, ось тільки поклики на такі роботи, які з'явилися в 2018 році: [131–133].

Ймовірно, що якість чисельних оцінок поверхневих критичних показників, досягнута в наших роботах [34, 61, 74], в основному задовольняє запити спеціалістів з фізики поверхні. Ми не маємо жодних даних про роботи, які мали б за мету покращити отримані тут результати: нам не відомі ні роботи у вищих наближеннях масивної теорії поля у тривимірному просторі, ні спроби розрахувати поправки вищих порядків до ε -розкладів, описаних в оглядовій роботі [115]. Можливо, дійсно в таких розрахунках вищого порядку і нема особливого змісту: можемо згадати тут ситуацію з шестипетльовими розрахунками критичних показників розведеної моделі Ізінга, які практично не дали жодного покращення чисельних оцінок, досягнутих вже в найпростішому двопетльовому наближенні (див. підрозділ 1.1).

Оптимальними з точки зору співвідношення зусилля(складність розрахунків)/якість результатів автор вважає екстраполяції епсилон-розкладів біля верхньої граничної вимірності простору $d^* = 4$ до $d = 3$ з врахуванням інформації, наявної при нижчих значеннях d , таких як $d = 2$, чи можливо $d = 1$, а також в найближчих околах цих просторових вимірностей. Такі апроксиманти типу Паде для ε -розкладів поверхневих критичних показників β_1 і γ_1 звичайного переходу можна знайти в [115, (3.157),(3.161)]. При $d = 2$ вони відтворюють, відповідно, відомі точні результати $\beta_1 = 1/2$ при $n = 1$ і $\gamma_1 = 61/64$ при $n = 0$ (див.[115, стор. 187-188]). За допомогою цих інтерполяційних формул були отримані чисельні оцінки при $d = 3$, які покращують аналогічні результати, отримані на основі самого тільки ε -розкладу.

Ще більш точними є результати, що отримуються на основі двоточкових інтерполяційних апроксимант Паде (див. напр. [134, стор. 393]), які враховують по декілька порядків вимірних розкладів біля верхньої і нижньої граничних вимірностей. Такий підхід був використаний в роботі [135] для розрахунку чисель-

них величин поверхневих критичних показників $\eta_{\parallel}$ і β_1 звичайного переходу при $n = 3$. Тут для показника $\eta_{\parallel}$ будувалися апроксиманти, які точно відтворювали для нього вимірні розклади біля $d = 2$ і $d = 4$ до другого порядку включно кожен і давали можливість отримати добрі наближені значення при $d = 3$.³ Ми порівнюємо ці результати з нашими в кінці п. 3.4.1. У цій частині нашої роботи ми проводимо порівняння наших результатів з даними багатьох інших робіт, де різними способами розраховувалися поверхневі критичні показники, і які були опубліковані як до, так і після виходу в світ наших робіт [34, 61, 74]. Аналогічні порівняння для спеціального переходу проведені в п. 3.3.4.

1.3. Анізотропні системи і точка Ліфшица

В останні п'ятнадцять-двадцять років значного прогресу було досягнуто у вивченні сильно анізотропних систем, тобто таких, що мають різні фізичні властивості в різних напрямках у просторі. Наявність сильної просторової анізотропії приводить до серйозних наслідків. Суттєво ускладнюється фазова діаграма, на ній з'являється особлива мультикритична точка фазового переходу — точка Ліфшица (ТЛ), вперше “відкрита” в 1975 р. Горнрайхом, Любаном і Штрікманом у теоретичній роботі [137].

У ТЛ “зустрічаються” три різні фази: високотемпературна неупорядкована, низькотемпературна просторово-однорідна (аналогічна до впорядкованої фази, що розглядалася в розд. 2.6) і низькотемпературна періодично модульована. Періодичність просторово-неоднорідної модульованої фази характеризується ненульовим модуляційним хвильовим вектором $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, тоді як в однорідних фазах $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Між неупорядкованою фазою і кожною з упорядкованих фаз відбуваються фазові переходи другого роду. В свою чергу, однорідна і модульована низькотемпературні фази розділені на фазовій діаграмі лінією переходів першого роду. Остання тангенціально підходить до лінії переходів другого роду в її точці перегину, і з'єднується з нею в точці Ліфшица. Відповідна фазова діаграма зображена

³Аналогічний спосіб покращення чисельної оцінки критичного показника поправки до скейлінгу ω був використаний в [136].

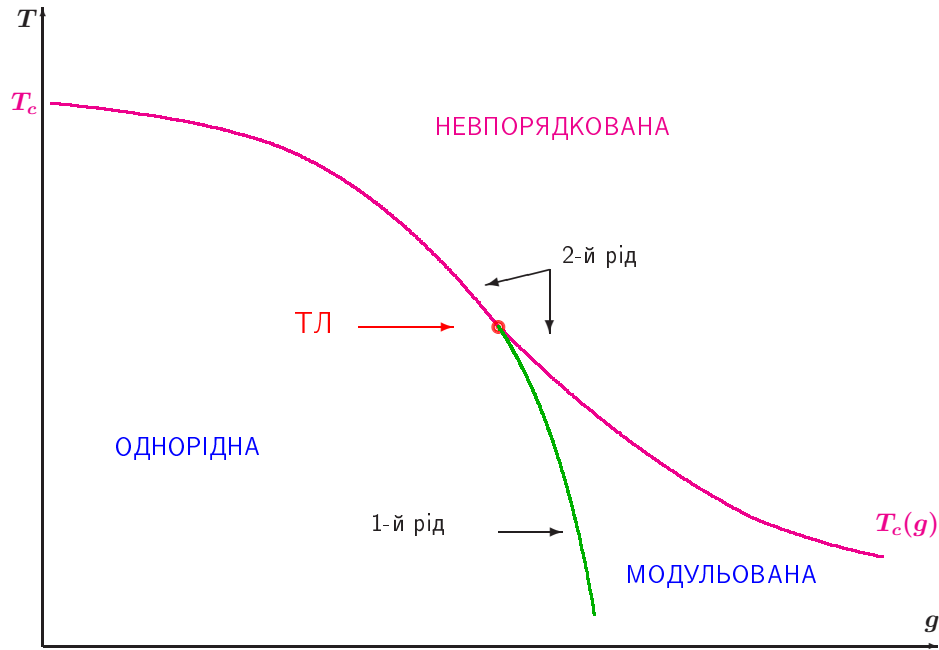


Рис. 1.3. Точка Ліфшица на фазовій діаграмі сильно анізотропної системи.

на Рисунок 1.3, див. також [138, розд. 2.1].

На лінії $T = T_c(g)$, що відділяє неупорядковану фазу від упорядкованих, критична температура залежить від певного (зовнішнього) чинника, неупорядковуючого термодинамічного поля g . Таким чинником може бути зовнішній тиск, композиційний склад системи, відношення сил феро- і антиферомагнітних обмінних взаємодій (див. (1.3)). Точка Ліфшица відповідає одному певному значенню параметра g , $g = g_L$, і температурою переходу $T = T_L \equiv T_c(g_L)$. В околі ТЛ форма лінії описується співвідношенням $|g - g_L| \sim |T_c - T_L|^\varphi$, де φ — кросоверний показник.

На гелікоїдальній частині лінії $T_c(g)$, де проходить розділ між неупорядкованою і модульованою фазами, хвильовий вектор просторової модуляції $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}(T_c(g))$ змінюється в залежності від величини поля g . При безпосередньому наближенні до ТЛ вздовж цієї частини критичної лінії, величина вектора модуляції $q_c(g)$ неперервно зменшується до нуля за степеневим законом $q_c \approx |g - g_L|^{\beta_q}$, де β_q — показник вектора модуляції⁴. Цей критичний показник не має аналога у критичній точці (КТ) звичайних ізотропних систем. Взагалі, в околі ТЛ система

⁴У відповідній формулі (77) нашої статті [62] опечатка: тут змінна τ повинна бути заміненою на величину ρ , пропорційну $|g - g_L|$. Аналогічна поправка стосується і зноски 6 в [63].

характеризується критичними показниками, що відрізняються від їх аналогів в ідеально однорідних системах.

ТЛ називається m -вісною, якщо просторова модуляція в d -вимірній системі відбувається вздовж m напрямів з $0 < m \leq d$. Граничний випадок $m = 0$ відповідає звичайній критичній точці. З другого боку, якщо $m = d$, маємо справу з d -вісною ТЛ. В літературі цей випадок звичайно називається ізотропною ТЛ. В одній з наших робіт [69] ми аргументували, що припущення про ізотропність простору не є необхідним при дослідженні m -вісних ТЛ. Причому, присутність просторової анізотропії в системі може відігравати суттєву роль для перебігу фазового переходу в ТЛ. Це питання ми розглянемо нижче, у розд. 4.6.

Важливим прикладом спінової системи, в якій реалізується ТЛ, є модель Ізінга з конкуренцією феромагнітних і антиферомагнітних обмінних взаємодій вздовж певної виділеної осі, т. зв. модель ANNNI (Axial Next-Nearest Neighbor Ising) (див. оглядові роботи [139, 140] і цитовані в них оригінальні статті). У цьому випадку спіновий гамільтоніан можна записати у вигляді

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle_{nn}} J_{ij} s_i s_j - \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle_{nnn,z}} \hat{J}_{ij} s_i s_j. \quad (1.3)$$

Феромагнітними є взаємодії між ізінгівськими спінами s_i та s_j , розміщеними на сусідніх вузлах (nn) простої кубічної ґратки. Для них ми маємо $J_{ij} > 0$. Разом з цим, в напрямі однієї з кристалографічних осей (ми позначаємо її z) відбуваються конкуруючі антиферомагнітні взаємодії між спінами, наступними за найближчими сусідами (nnn). За ці взаємодії відповідає друга сума в (1.3), де $\hat{J}_{ij} < 0$; ми не розглядаємо зовнішнього магнітного поля. Наявність цих двох типів взаємодій, що сприяють впорядкуванню різних типів, робить можливим виникнення модульованих низькотемпературних станів вздовж вибраної осі анізотропії. Завдяки цьому на фазовій діаграмі моделі ANNNI з'являється також одновісна ($m = 1$) точка Ліфшица. Параметру g , якого ми ввели дещо вище, відповідає відношення $J_{ij}/|\hat{J}_{ij}|$. Таким чином, в рамках простої ґраткової моделі (1.3) реалізується можливість дослідження властивостей ТЛ за допомогою чисельного експерименту — методом Монте Карло [141–144], а також традиційними методами високотем-

пературних розкладів [145, 146].

У літературі досліджуються також більш загальні варіанти моделі (1.3), де спінові змінні можуть бути векторними ($\mathbf{s} = \{s^{(1)}, \dots, s^{(n)}\}$ як в гамільтоніанах (1.1) і (1.2)). Це — моделі ANNNXY [142, 146, 147] з $n = 2$ і ANNNH [147] з $n = 3$ (див. також [140]). Також більшою може бути і кількість осей анізотропії. Якщо йдеться про тривимірний простір, то конкуренція між феро- і антиферомагнітними взаємодіями може відбуватися не тільки вздовж однієї осі z , як в (1.3). Таких осей анізотропії може бути дві ($m = 2$, див. напр. [144]) або й три ($m = d = 3$). В останньому випадку з $m = d$ відновлюється ізотропія простору і ми маємо справу з ізотропною ТЛ. Цей варіант ТЛ розглядався вперше в [148], і згодом, аж до останнього часу в [66, 148–153].

В теоретичних дослідженнях критичної поведінки сильно анізотропних систем в ТЛ зазвичай використовується ЕГ Ландау-Гінзбурга-Вільсона (4.1), вперше ведений в роботі [137]. На відміну від польових гамільтоніанів (2.1) і (3.1), про які ми згадували вище, у формулі (4.1) ми маємо справу з поділом простору, зайнятого системою, на два нееквівалентні підпростори, а також з появою в одному з них градієнтного члена з просторовими похідними четвертого порядку. При цьому вимірності обидвох підпросторів вважаються неперервними параметрами, сума яких рівна повній вимірності простору d . Застосовуючи теоретико-польовий підхід до дослідження критичної поведінки такого ЕГ ми маємо можливість довільним чином вибирати цікаві нам величини вимірностей m і d . Зокрема, ми можемо спрямовувати кожен з цих параметрів до нуля для додаткової перевірки правильності наших розрахунків і результатів.

Сплеск теоретичних досліджень критичної поведінки в ТЛ на основі ЕГ (4.1) відбувся відразу ж після виходу основоположної статті [137]: див. [148, 154–160]. Огляд ранніх робіт був зроблений в [161]. Виявилось, що поза простим однопетльовим наближенням розрахунки суттєво ускладнюються. Технічні труднощі призвели до того, що виникли розбіжності в результатах робіт різних груп авторів. Так, результати ε -розкладу біля верхньої граничної вимірності простору [137] $d^*(m) = 4 + m/2$ відрізнялися в порядку $O(\varepsilon^2)$ в одній групі авторів [156, 158, 161]

і в іншій [159]. Обидві групи визнавали [159, 161], що вони не розуміють причин очевидних неузгоджень. Така ситуація привела практично до припинення теоретичних робіт у цій галузі приблизно на двадцять років.

При цьому було очевидно, що ТЛ представляє собою надзвичайно цікавий об'єкт з точки зору фізики. Було усвідомлено, що ТЛ, або подібні до неї мультикритичні точки можуть бути присутніми на фазових діаграмах великої кількості різноманітних фізичних систем включаючи магнетики [162, 163], системи зі структурними фазовими переходами [164], рідкі кристали [165–167], сегнетоелектрики [168–170].

У більш загальному розумінні, теорія критичної поведінки в ТЛ є типовою для широкого класу т. зв. систем з анізотропною скейлінговою інваріантністю [171–173]. Теорії такого типу є характерними для багатьох статичних і динамічних фізичних систем, для яких “анізотропія”, в широкому сенсі слова, є суттєвою для критичної поведінки. Тут можна виділити принаймні чотири основні категорії: (i) статична критична поведінка рівноважних анізотропних систем, таких як феромагнетики з диполь-дипольною обмінною взаємодією [174] чи з протяжними дефектами [175, 176], а також системи з ТЛ, (ii) анізотропна критична поведінка нерівноважних систем, що перебувають у стаціонарних станах [177], чи така, що спостерігається при стохастичному рості поверхонь [178], (iii) динамічні критичні явища в системах поблизу стану термічної рівноваги [179], (iv) динамічні критичні явища в нерівноважних системах [177].

У зв'язку із згаданими теоретичними аспектами, розвитком експериментальних досліджень ТЛ (див. огляд [180]), а також з метою розв'язання труднощів і неузгодженостей, що виникли в ранніх розрахунках критичних показників, у кінці 1990-х років відновився інтерес теоретиків до ТЛ [143, 181–185]. До цієї групи робіт належать також і наші статті [62–66, 69]. При цьому, в [62] і [63] нами вперше в повному обсязі була сформульована теорія критичної поведінки у ТЛ, включно з вичерпним розрахунком усіх критичних показників з точністю до ε^2 для найбільш загального випадку m -вісних ТЛ.

Наші результати, записані в загальному вигляді для довільних m і d , в оби-

двох граничних випадках $m = 0$ і $m = d$ відтворювали відомі дані для критичних показників відповідних ізотропних систем. Нарешті ми внесли ясність у питання про те, які з результатів робіт 1970-х років були правильними.

Нажаль, відносно недавно була започаткована також і серія явно неправильних з математичної точки зору робіт присвячених критичній поведінці у ТЛ [185–187]. Незаконні математичні спрощення, що пропагувалися в цих статтях, приводили, зокрема, і до хибних фізичних висновків. У свій час це вимагало від нас відповідних роз’яснень [64–66] і додаткових підтверджень правильності наших теоретичних розробок [71]. Математична строгість і фізична адекватність опису критичних властивостей систем в ТЛ набула особливої важливості та актуальності.

Цікаво зазначити, що останнім часом різні версії теорій “типу Ліфшица” користуються особливою популярністю у квантовій теорії поля, фізиці елементарних частинок, теорії гравітації та космології (див. [54, 55, 188–192] і статті, де цитуються ці роботи). Справжній бум відбувається в теорії квантової гравітації, поштовхом до якого послужила стаття Гожави [190]. Новим оглядом робіт такого типу є [56]. Крім цього, в статті [57] ми зробили короткий огляд таких робіт з точки зору фізики конденсованих систем.

За аналогією з задачами статистичної фізики, в цих теоріях вводиться анізотропія між часовою і просторовими координатами, а інколи також і між самими просторовими напрямками [54, 55]. Це порушує симетрію Лоренца в таких теоріях поля, і тому їх часто називають теоріями із зламанною Лоренцівською інваріантністю — “Lorentz violating (LV) theories” [54, 193, 194]. У цьому контексті робота [55] дає явні розрахунки і результати, які у випадку скалярних полів є повністю аналогічними до представлених у наших роботах [70] і [57] для часткового випадку $m = 1$, $d = 4$ і великого числа компонент параметра порядку n . У статті [57] ми даємо розгорнутий аналіз застосованих в обидвох випадках розрахункових технік і остаточних результатів, а також вказуємо на помилковість одного з основних результатів роботи [55].

Запропонований нами в [62, 63] підхід до дослідження критичної поведінки в ТЛ і побудови ε -розкладів для відповідних критичних показників був успішно узагальнений на випадок анізотропних систем, обмежених плоскою поверхнею. Такі напівбезмежні системи поєднують в собі два різні види просторової неоднорідності, які ми розглядали вище кожен зокрема. Таке поєднання приводить до появи як якісних так і кількісних відмінностей від попередньо розглянутих систем. Зокрема, суттєве значення для поверхневої критичної поведінки напівбезмежної анізотропної системи має просторова орієнтація поверхні відносно наявних осей анізотропії.

Так, в серії робіт [195–197] були запропоновані ефективні гамільтоніани типу Гінзбурга-Ландау-Вільсона, придатні для опису поверхневих критичних явищ напівбезмежних систем з плоскою поверхнею, паралельною до можливих осей модуляції, в ТЛ, а також розраховані відповідні поверхневі показники. При побудові ε -розкладів поверхневих критичних показників автори цих робіт суттєво використовували розрахункові методи впроваджені нами в [62] і [63] а також інформацію щодо скейлінгових функцій, опубліковану в цих статтях.

Натомість в [67] ми розглянули клас універсальності напівобмежених систем з m -вісною анізотропією, поверхня яких орієнтована перпендикулярно до одного з m напрямів модуляції. Теоретичне дослідження таких систем методами ренормалізаційної групи та ε -розкладу виконувалося нами в роботі [67] вперше. До цього часу такі системи розглядалися тільки в рамках класичної теорії Ландау в [198–200], або за допомогою чисельного моделювання методами Монте Карло в [201]. В останній роботі було отримано неklasичні критичні показники напівобмеженої одновісної ANNNI-моделі для випадків спеціального і звичайного поверхневих переходів. Для такого класу систем зовсім можливим міг би бути також і експеримент на реальних магнетиках MnP , особливо, коли йдеться про звичайний перехід.

$1/n$ -розклад для критичних показників. Як відомо ще з початку 1970-х років (див. напр. [202]), поряд з класичним ε -розкладом, для отримання нетривіаль-

них значень критичних показників можна застосовувати також $1/n$ -розклад. Цей альтернативний підхід ґрунтується на можливості використання т. зв. сферичного наближення [203], в якому число компонент параметра порядку n -векторної моделі n приймається безмежно великим, і розрахунку поправок до цього базового наближення у вигляді рядів за степенями малої величини $1/n$ при $n \rightarrow \infty$ [204–207].

Розгляд безмежно великих n і застосування $1/n$ -розкладу призводить до необхідності розв’язування рівнянь самоузгодження [76, 205, 208]. Мати з ними справу значно складніше, ніж із звичайними рядами теорії збурень. Тому доступні розклади за степенями $1/n$ обмежені низькими порядками, навіть у відносно простому випадку звичайної критичної точки в ізотропних системах. Крім того, зазвичай повільна збіжність $1/n$ -розкладів ускладнює їх використання для чисельних оцінок критичних показників.

Але з іншого боку, ця техніка має ряд дуже привабливих властивостей. Завдяки цим властивостям $1/n$ -розклад залишається важливим інструментом в аналізі різних нетривіальних теорій поля і статистичної фізики. Спектр задач, при розв’язанні яких цей метод застосовувався і зробив значний внесок, вражаюче багатий. Він простягається від вивчення класичних спінових моделей і проблем квантової теорії поля [77, 208–212], критичної поведінки в напівбезмежних системах [213], фізики неупорядкованих пружних середовищ [214, 215] та моделі стохастичного росту поверхні [216] до проблем квантових фазових переходів [217], фізики високих енергій, теорії струн і гравітації [218, 219].

Однією з таких переваг $1/n$ -розкладу є його здатність враховувати флуктуаційні ефекти в критичній області систематичним, непертурбативним чином. Іншою особливістю є те, що $1/n$ -розклади можуть застосовуватися для будь-якого фіксованого значення вимірності простору d між нижньою d_ℓ і верхньою d^* граничною вимірностями, тобто всюди, де в системі відбувається фазовий перехід другого роду при скінченній температурі та існує критична точка. При цьому розклади за відхиленнями вимірності простору d від d_ℓ чи d^* не є обов’язковими. Але їх можна виконати і провести порівняння з вимірними розкладами за малими

параметрами $\epsilon = d - d_\ell$ і $\varepsilon = d^* - d$. Таке співставлення результатів отриманих різними способами дає можливість перевірки всіх трьох згаданих методів. Цю важливу можливість ми будемо успішно використовувати при дослідженні критичних показників ТЛ — в параграфах 6.3 і 6.5.2.

Що стосується саме m -вісної ТЛ в анізотропних системах, то нажаль, до появи наших робіт [57, 70, 71] для критичної поведінки у цій точці майже не було результатів, отриманих за допомогою $1/n$ -розкладу. Роботи [157, 220–222], в яких бралися до уваги загальні значення $m \in [0, d]$, обмежувалися тільки сферичним наближенням $n \rightarrow \infty$, в них не робилося спроб розрахунку поправок порядку $O(1/n)$. Натомість, такі поправки розглядалися раніше тільки в частковому випадку $m = d$ -вісної *ізотропної* ТЛ [148, 223, 224].

Такий брак результатів $1/n$ -розкладу для загальних m пов'язаний з труднощами, обумовленими поєднанням двох особливостей сильно анізотропних систем в ТЛ. Це — незвично складна форма двоточкових скейлінгових функцій, що проявляється в координатному представленні вже на рівні теорії Ландау (цей аспект теорії ми детально розглядаємо в п. 4.2), а також анізотропна природа масштабної інваріантності в критичній області. Фактично, з цих самих причин виникали і суттєві труднощі в побудові ε -розкладів, про що ми вже згадували вище.

Нарешті, згадаймо ще про один ренормгруповий підхід, який полягає у розв'язуванні точних рівнянь РГ Вільсона [9] (знайомство з ним доречно розпочати з огляду [225]). З його допомогою, переважно чисельними методами, теж можливо досліджувати критичну поведінку багаточастинкових систем у всіх фізично допустимих вимірностях простору d .⁵ До дослідження анізотропних систем в ТЛ цей підхід застосовувався в роботах [226] і [2]. В останній з цих робіт вивчалися, зокрема, залежності кореляційних критичних показників ТЛ $\eta_2(m, d)$ і $\eta_4(m, d)$ від вимірності простору d , і були отримані графічні зображення, які ми відтворюємо на Рисунку 1.4 для зручності порівняння з нашим рисунком 6.2 на стор. 222. Тут підтверджується передбачена нами в [70] якісна поведінка цих

⁵У цьому контексті ми вже згадували роботу [99], де досліджувалася критична поведінка неупорядкованих ізінгівських систем.

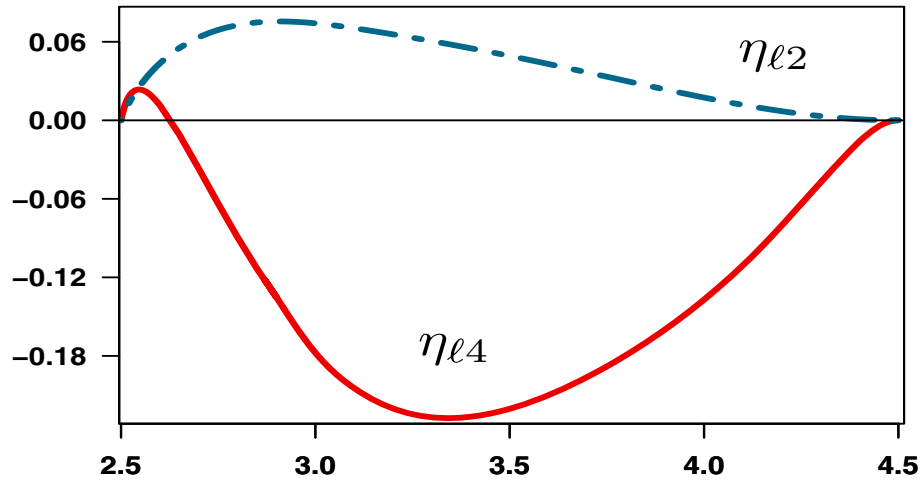


Рис. 1.4. Залежності критичних показників $\eta_2(1, d)$ і $\eta_4(1, d)$ при $n = 3$ від вимірності простору d . Рисунок отриманий в роботі [2] з використанням розв’язування точних рівнянь ренормалізаційної групи для одновісної ТЛ.

критичних показників при зміні d (див. Рисунок 6.2 на стор. 222), хоча цікаве питання про їх кількісні значення, зокрема при $d = 3$, на нашу думку, все-ще залишається не до кінця з’ясованим.

Анізотропна скейлінгова інваріантність і гіпотеза Генкеля. Раніше ми вже говорили про те, що анізотропна скейлінгова інваріантність, з якою ми маємо справу при розгляді ТЛ, є характерною для різноманітних фізичних систем, що перебувають у критичній області. Наявність анізотропної скейлінгової інваріантності означає, що різниці координат $dz^{(\alpha)}$ вздовж деяких напрямів змінюють свій масштаб як нетривіальні степені їх аналогів $dr^{(\beta)}$ вздовж решти ортогональних напрямів⁶, тобто $dz^{(\alpha)} \sim (dr^{(\beta)})^\theta$, де θ , так званий індекс анізотропії, — це нетривіальний показник, що відрізняється від 1 (а також і від $1/2$). Значення $\theta = 1/2$ є класичним для систем з сильною анізотропією, а при $\theta = 1$ ми втрачаємо відмінності різних просторових напрямів і приходимо до стандартного випадку об’ємних ізотропних систем.

Як відомо, безмежні ізотропні системи з короткосяжними взаємодіями при критичній температурі є конформно інваріантними (див. напр. [227–229]). В та-

⁶На початку п. 4.1 координати з індексом α означені як “паралельні”, а координати з індексом β — як “перпендикулярні”.

ких системах конформна інваріантність зумовлюється спільною присутністю масштабної інваріантності разом з трансляційною інваріантністю та обертовою симетрією, — перетворень, які залишають “критичну” систему незмінною. Конформна інваріантність може розглядатися як узагальнення цього набору глобальних симетрій на більш широку групу локальних перетворень. Вони відповідають локальним комбінаціям зміщень, поворотів і масштабних перетворень з масштабним фактором $\ell(\mathbf{x})$, що залежить від просторової координати $\mathbf{x}$. Як і в випадку глобальних перетворень, ці локальні перетворення також залишають незмінними властивості системи, яка перебуває у критичному стані.

Ідеї конформної теорії поля до теорії критичних явищ впровадив у своєму короткому повідомленні [230] Поляков. Це відбулося в 1970 р., ще за рік до появи основоположної статті Вільсона [7], яка започаткувала широкомасштабне застосування ренормалізаційної групи в цьому розділі статистичної фізики. Незабаром з’явилися більш детальні дослідження конформної інваріантності [231, 232] в теорії критичних явищ, що проходили вже у взаємодії з ренормгруповим підходом Вільсона. Однак ця проблематика не притягала до себе особливої уваги до появи робіт Белавіна із співавторами [233, 234], присвячених *двовимірним* конформним теоріям поля. Ці роботи проявили величезний потенціал конформно інваріантних теорій, що стимулювало суттєве збільшення дослідницької активності в цій галузі (див. напр. згадані вище книжки [227–229] і цитовану там літературу). Було досягнуто також важливих успіхів у суміжних галузях, таких як скейлінг систем із скінченними розмірами (finite-size scaling) і поверхнева критична поведінка [213, 227, 235–237], а також фізика полімерів [238], проблеми квантових домішок [239], теорія струн [228, 240].

Подібне узагальнення конформної теорії поля на випадок сильно анізотропних систем стало завданням робіт Генкеля [143, 173, 181, 229]. З цією метою ним була сформульована т. зв. гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ). Суть цієї гіпотези полягає у спробі формулювання локальних перетворень, які були б наслідком наявності в таких системах глобальної анізотропної скейлінгової інваріантності разом з трансляційною та обертовою інваріантностями в координа-

тах $dz^{(\alpha)}$ і $dr^{(\beta)}$, і залишали б ці системи незмінними при критичній температурі. В термінології Генкеля, при розгляді систем “типу Γ ” ця гіпотеза стосується, зокрема, m -вісних анізотропних систем у (мульти)критичній точці Ліфшица.

Критичні властивості саме таких систем ми досліджуємо в розділах 4, 5 і 6. Зокрема, розділ 5 присвячений докладному розгляду математичного формулювання гіпотези локальної скейлінгової інваріантності Генкеля. Тут ми також порівнюємо передбачення ГЛСІ з явними розрахунками епсилон-розкладів парних кореляційних функцій в m -вісних точках Ліфшица. Суть наших висновків полягає в тому, що теорія Генкеля не є вільною від математичних неточностей, і що передбачення ГЛСІ фактично є справедливими тільки для вільних від взаємодії теорій. А добрі кількісні результати описані в роботах Генкеля пояснюються тим, що врахування флуктуацій в розглянутих випадках приводить тільки до незначних чисельних поправок.

1.4. Обмежені системи з плівковою геометрією та ефект Казимира

В останньому розділі дисертації розглядаються системи з плівковою геометрією. Вони обмежені двома паралельними поверхнями, на яких можуть бути встановлені різні граничні умови (ГУ), і є прикладом систем, один з розмірів яких є скінченним. Ця властивість наближає їх до реальних фізичних об'єктів які є скінченними і мають граничні поверхні, що їх обмежують.

З одного боку, могло б здаватися, що такі системи є досить простим узагальненням напівбезмежних систем, кількість поверхонь в яких зросла від одної до двох. Але ситуація є більш складною. Насправді в таких системах проявляються ефекти, які є відсутніми в ідеальних системах без просторових обмежень. Одним з прикладів може бути т. зв. ефект Казимира в критичних системах. Він проявляє себе у вигляді виникнення флуктуаційно індукованих далекосяжних сил притягання чи відштовхування (що залежить від ГУ) між поверхнями, що обмежують фізичну систему. Це відбувається тоді, коли температура наближається до

критичної точки фазового переходу в безмежному об'ємі. Величина цієї взаємодії може вимірюватися експериментально і визначається значенням т. зв. амплітуди Казимира.

Назва ефекту походить від імені датського фізика Казимира, який у 1948р. показав [241], що паралельні провідні пластини, розміщені у вакуумі, повинні притягатися завдяки існуванню нульових вакуумних флуктуацій електромагнітного поля. Казимир розрахував енергію взаємодії $\delta E(L)$ між цими поверхнями на одиницю площі і отримав результат

$$\delta E(L)/A = \hbar c \left(-\frac{\pi^2}{720} \right) L^{-3}, \quad (1.4)$$

де A — площа пластин, а L — відстань між ними. Коефіцієнт $-\pi^2/720$ згодом почали називати амплітудою Казимира. Диференціюючи останній вираз за L , Казимир записав вираз для сили притягання між пластинами

$$|F| = \hbar c \frac{\pi^2}{240} L^{-4} = 0.013 \frac{1}{L_\mu^4} \text{ dyne/cm}^2, \quad (1.5)$$

де L_μ — відстань між пластинами виміряна в мікронах, і зауважив, що цю силу можливо виміряти експериментально. Зрозуміло, що така інформація згодом викликала велике зацікавлення як у фізиків-теоретиків, так і в експериментаторів. Це зацікавлення не спадає і до наших днів.

Аналогічне притягання між паралельними поверхнями, зануреними в рідину, що перебуває в критичній точці, передбачили у своєму короткому повідомленні за 1978 р. [242] Фішер і де Жен. На основі скейлінгового аналізу сингулярної частини вільної енергії такої системи ці автори отримали для енергії взаємодії поверхонь оцінку

$$\delta E(L)/A \sim -k_B T L^{-2}, \quad (1.6)$$

яка є аналогом формули Казимира (1.4) в статистичній фізиці. У тривимірному просторі відповідна сила притягання спадає за степеневим законом L^{-3} .

Завдяки роботі Симанзіка [119] стало зрозуміло, що аналог ефекту Казимира існує і в безмасовій (супер)перенормовній квантовій теорії поля з взаємодією

типу $g\phi^4$ у просторі з вимірністю $d = 4 - \varepsilon$. Симанзік довів скінченність енергії Казимира $\delta E(L)$ для пари паралельних поверхонь з ГУ Діріхле у всіх порядках теорії збурень за константою зв'язку g . Він також отримав явний вираз для цієї енергії в першому порядку ТЗ за g .⁷

Виявилося, що в d -вимірному просторі $\delta E(L) \sim L^{d-1}$. Ця залежність узагальнює степені L , що фігурували у формулах (1.4) і (1.6) на проміжок $4 \leq d < 2$. В граничному випадку $d = 2$ виникають додаткові логарифмічні залежності. Згідно з передбаченням Фішера і де Жена [242], у двовимірному просторі $\delta E(L) \sim (\ln L)/L$. Відповідним чином, в цікавому для нас проміжку $4 \leq d < 2$ для сили Казимира ми маємо $F \sim L^{-d}$.

Формально така сама теорія описує в теоретико-польовому підході критичні явища в класичних статистичних системах. Саме в цьому контексті були виконані розрахунки роботи Креха і Дітріха [243, 244]. Тут амплітуди Казимира вперше визначалися для систем статистичної фізики з n -компонентним параметром порядку і рядом різних ГУ з використанням ε -розкладу Вільсона-Фішера. Ця робота дала поштовх до появи великої кількості теоретичних [245–249], експериментальних [250–252] і чисельних [253–257] досліджень ефекту Казимира в просторово обмежених статистичних системах. Далекосяжні сили подібного характеру є надзвичайно важливими для нанофізики та для практичних потреб у створенні максимально компактних приладів. Проблематика такого типу докладно розглядається в огляді [258].

Наша робота, представлена в останньому розділі дисертації, стала новим кроком, який необхідно було зробити з часів піонерських робіт 1981 та 1991 років, де амплітуди Казимира визначалися тільки в лінійному за ε наближенні. Вперше в літературі нам вдалося просунутися в наступний порядок теорії збурень при розгляді плівкових систем з періодичними та спеціальними граничними умовами. Ми показали [58], що внаслідок особливостей інфрачервоної поведінки певного типу діаграм Фейнмана, у цих випадках ε -розклад амплітуд Казимира втрачає

⁷В роботі [119] цей результат наведено без жодних розрахункових деталей. Його вивід з використанням інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца виконано в [13] — див. п. 7.2.3.

аналітичність за межами першого порядку за ε . Всупереч наївним очікуванням доданка порядку ε^2 , ми виявили поправку порядку $\varepsilon^{3/2}$ і знайшли коефіцієнт цієї нової поправки в явному вигляді. Було також показано, що ε -розклади таких амплітуд, крім цілих степенів ε , включають нецілі степені $\varepsilon^{k/2}$ з $k \geq 3$, а також степені $\ln \varepsilon$. Ключовою ідеєю, яка забезпечила систематичний підхід до проблеми, було виділення небезпечної нульової моди і утворення пов'язаного з нею ефективного гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$ шляхом відінтегровування ненульових мод.

Крім цього, в роботі [72] ми вперше розглянули ефект обмеження двома паралельними поверхнями сильно анізотропних критичних систем. Тут було визначено, що в присутності анізотропії статистичний ефект Казимира залежить від орієнтації цих поверхонь відносно напрямів осей анізотропії. Цю тезу ми підтвердили явними розрахунками.

РОЗДІЛ 2

КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА НЕВПОРЯДКОВАНИХ ІЗІНГІВСЬКИХ СИСТЕМ

Критична поведінка невідпорядкованих систем досліджувалася автором в роботах [52, 53, 60, 98, 114, 259]. Перші три з них присвячені розгляду невідпорядкованої моделі Ізінга в нецілих вимірностях простору d . На нашу думку, знання якісної поведінки цікавих для нас моделей в нецілих вимірностях є важливим. Зокрема, особливе значення має можливість прослідкувати їх коректну поведінку біля верхньої граничної вимірності $d^* = 4$, де для нас доступні дані $\varepsilon=4-d$ -розкладів. Таке узгодження дає нам апробацію використовуваних методів у фізичній вимірності простору $d = 3$. Також особливий інтерес представляє собою можливість прослідкувати процес наближення до таких особливих вимірностей як $d = 2$ і $d = 1$. Роботи [53, 114, 259] присвячені теоретико-польовому розрахунку рівняння стану та універсальних комбінацій критичних амплітуд невідпорядкованих ізінгівських систем. Тут розрахунки виконувалися безпосередньо у тривимірному просторі.

2.1. Ефективний гамільтоніан та вільна енергія

Критична поведінка слабо розведених невідпорядкованих ізінгівських систем з замороженим безладом є формально ідентичною критичній поведінці ЕГ типу Ландау-Гінзбурга-Вільсона з кубічною анізотропією

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \phi)^2 + m_0^2 |\phi|^2] + \frac{u_0}{4!} (|\phi|^2)^2 + \frac{v_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha^4 \right\} \quad (2.1)$$

в реплічній границі $n \rightarrow 0$. Тут n — число компонент векторного поля $\phi = \phi(x) = \{\phi_\alpha(x), \alpha = 1, \dots, n\}$, причому параметру n дозволяється бути неперервним і

приймати граничне значення $n = 0$ в остаточних результатах. Модель з ЕГ (2.1) визначена в безмежному, ізотропному і трансляційно інваріантному d -вимірному Евклідовому координатному просторі $\mathbb{R}^d$. Кубічна анізотропія стосується простору параметра порядку і проявляється в наявності останнього доданка з константою зв'язку $v_0 > 0$ поряд із звичайним $O(n)$ членом типу ϕ^4 з константою зв'язку u_0 . При описі неупорядкованих систем константа зв'язку u_0 є від'ємною, $u_0 < 0$, і повинна зберігати свій знак в нерухомій точці, що контролює критичну поведінку характерну для системи з неупорядкованістю. Це обмеження не накладається при розгляді кубічної моделі з $n > 1$ ¹. Тут навпаки, величина u_0 повинна бути додатною. Величина m_0^2 в (2.1), “неперенормована маса” мовою теорії поля, є лінійною функцією температури T : $m_0^2 \sim T - T_c^{(0)}$, де $T_c^{(0)}$ — критична температура наближення середнього поля.

Члени типу ϕ^4 з ЕГ (2.1) можуть бути записані у тензорному вигляді

$$\frac{1}{4!} (u_0 S_{\alpha_1 \dots \alpha_4} + v_0 F_{\alpha_1 \dots \alpha_4}) \phi^{\alpha_1} \dots \phi^{\alpha_4}, \quad (2.2)$$

де тензори $S_{\alpha_1 \dots \alpha_4}$ (обертowo симетричний) і $F_{\alpha_1 \dots \alpha_4}$ (кубічний) визначені як

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_4} = \frac{1}{3} (\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} + \delta_{\alpha_1 \alpha_3} \delta_{\alpha_2 \alpha_4} + \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \delta_{\alpha_2 \alpha_3}) \quad \text{і} \quad F_{\alpha_1 \dots \alpha_4} = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4}, \quad (2.3)$$

а $\delta_{\alpha\beta}$ — δ -символи Кронекера.

Реплічна границя, яку потрібно виконати при розгляді неупорядкованої моделі Ізінга, передбачає, що вільна енергія в цьому випадку визначається як

$$F = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\langle Z_c^n \rangle_c - 1) = - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z_c^n \rangle_c, \quad (2.4)$$

де $\langle Z_c^n \rangle_c$ означає конфігураційне усереднення n -ного степеня залежної від конфігурацій статистичної суми Z_c системи. Величина $\langle Z_c^n \rangle_c$ визначається функціональним інтегралом $\int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}[\phi]}$ з гамільтоніаном (2.1) в експоненті підінтегральної функції. Саме внаслідок усереднення за конфігураціями безладу в методі реплік і виникає різниця в знаках констант зв'язку $u_0 < 0$ і $v_0 > 0$ в ЕГ (2.1).

¹В граничному випадку $n = 1$ обидва члени ϕ^4 стають однаковими і модельний гамільтоніан (2.1) втрачає свою анізотропію.

Розрахунки критичних показників розведеної моделі Ізінга з (2.1) відбувається згідно із стандартними схемами, при чому використовується нерухома точка ($u^* < 0, v^* > 0$) і в остаточних результатах береться $n = 0$.

2.2. Масивна теорія поля при фіксованих вимірностях простору

При розрахунках критичних показників, вільної енергії та універсальних комбінацій критичних амплітуд розведених ізінгівських систем ми використовуємо в своїх роботах [52, 53] і [12] загальну схему масивної теорії поля [260–263] при фіксованих вимірностях простору d [50]. Таким чином, при перенормуванні теорії тут використовувалися стандартні умови нормування для вершинних функцій Гріна при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі (тобто при температурі, відмінній від критичної)

$$\Gamma_R^{(2)}(k; m, u, v)|_{k=0} = m^2, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; m, u, v)|_{k=0} = 1, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k, k_1; m, u, v)|_{k=k_1=0} = 1, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_4, R}^{(4)}(\{\mathbf{k}_i\}; m, u, v)|_{\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3=\mathbf{k}_4=0} = m^\varepsilon (u S_{\alpha_1 \dots \alpha_4} + v F_{\alpha_1 \dots \alpha_4}). \quad (2.8)$$

Умови нормування (2.5)–(2.8) записані для перенормованих одночастинково-незвідних кореляційних функцій Γ_R . Останні пов'язані з відповідними перенормованими функціями співвідношеннями

$$\Gamma_R^{(N)}(\{\mathbf{k}\}; m, u, v) = Z_\phi^{N/2}(u, v) \Gamma^{(N)}(\{\mathbf{k}\}; m_0, u_0, v_0), \quad (2.9)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; m, u, v) = Z_\phi(u, v) Z_{\phi^2}(u, v) \Gamma^{(2,1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1; m_0, u_0, v_0), \quad (2.10)$$

де $\Gamma^{(2,1)}$ означає двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}$ із вставкою $\frac{1}{2}\phi^2$.

Початкові параметри ЕГ (2.1) m_0^2, u_0, v_0 виражаються через аналогічні величини m^2, u, v перенормованої теорії, яка правильно описує критичну поведінку, що нас цікавить. Ми маємо

$$\phi = Z_\phi^{1/2}(u, v) \phi_R, \quad \phi^2 = Z_{\phi^2}^{-1}(u, v) [\phi^2]_R, \quad (2.11)$$

а також

$$u_0 = m^\varepsilon Z_u(u, v) u \quad \text{і} \quad v_0 = m^\varepsilon Z_v(u, v) v. \quad (2.12)$$

Ренормалізаційні фактори $Z_i = Z_i(u, v)$ визначаються співвідношеннями (2.5)–(2.10), і їх можна записати у вигляді

$$Z_\phi^{-1}(u, v) \equiv Z_3^{-1} = \frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}(k; m_0, u_0, v_0)|_{k^2=0}, \quad (2.13)$$

$$[Z_{\phi^2}(u, v) Z_\phi(u, v)]^{-1} \equiv Z_2^{-1} = \Gamma^{(2,1)}(\{0\}; m_0, u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma^{(2)}(0; m_0, u_0, v_0), \quad (2.14)$$

$$[Z_u(u, v) Z_\phi^2(u, v)]^{-1} \equiv Z_{1u}^{-1} = u_0^{-1} \Gamma_u^{(4)}(\{\mathbf{0}\}; m_0, u_0, v_0), \quad (2.15)$$

$$[Z_v(u, v) Z_\phi^2(u, v)]^{-1} \equiv Z_{1v}^{-1} = v_0^{-1} \Gamma_v^{(4)}(\{\mathbf{0}\}; m_0, u_0, v_0). \quad (2.16)$$

Тут мається на увазі, що в рядах для кореляційних функцій $\Gamma(m_0, u_0, v_0)$ мають бути виконані перенормування усіх їх аргументів. У двох останніх формулах $\Gamma_u^{(4)}$ і $\Gamma_v^{(4)}$ означають обертово симетричну та кубічну частини чотириточкової вершинної функції $\Gamma^{(4)}$ (порівн. з (2.8)). В (2.13)–(2.16) ми навели два види позначень ренормалізаційних факторів, які найчастіше використовуються в літературі а також далі у даній роботі.

За означенням, кореляційна функція² $\Gamma_2(0; m_0^2, u_0, v_0)$ є оберненою сприйнятливістю системи χ^{-1} . Ця фізична величина обертається в нуль у критичній точці, і тому часто розглядається як “критичний” параметр теорії. Її часто позначають m_1^2 , називаючи “частково перенормована маса”, а умову нормування для Γ_2 записують у вигляді

$$\Gamma_2(0; m_0^2, u_0, v_0) = m_1^2. \quad (2.17)$$

Домноження цієї рівності з обидвох сторін на Z_ϕ разом з перенормуванням аргументів функції Γ_2 повертає нас до умови (2.5). Очевидно, маємо співвідношення $m^2 = Z_\phi m_1^2$. Як і у випадку чистої $O(n)$ -симетричної моделі ϕ^4 , перенормована маса m співпадає з оберненою кореляційною довжиною ξ^{-1} , визначеною як другий момент двоточкової кореляційної функції.

²Для спрощення запису ми використовуватимемо також позначення Γ_N для неперенормованих N -точкових вершинних функцій $\Gamma^{(N)}$.

У критичній границі $m \rightarrow 0$ перенормовані константи зв'язку u і v прямують до їх значень в нерухомій точці (u^*, v^*) . Остання визначається спільними нулями β -функцій $\beta_u(u, v)$ і $\beta_v(u, v)$, які є розв'язками системи рівнянь

$$\beta_u(u, v) \frac{\partial \ln(m^{-\varepsilon} u_0)}{\partial u} + \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln(m^{-\varepsilon} u_0)}{\partial v} = d - 4 \quad (2.18)$$

$$\beta_u(u, v) \frac{\partial \ln(m^{-\varepsilon} v_0)}{\partial u} + \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln(m^{-\varepsilon} v_0)}{\partial v} = d - 4. \quad (2.19)$$

Ренормгрупові γ -функції визначаються як

$$\gamma_\phi(u, v) = \beta_u(u, v) \frac{\partial \ln Z_\phi(u, v)}{\partial u} + \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln Z_\phi(u, v)}{\partial v}, \quad (2.20)$$

$$\gamma_2(u, v) = -\beta_u(u, v) \frac{\partial \ln Z_2(u, v)}{\partial u} - \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln Z_2(u, v)}{\partial v}. \quad (2.21)$$

У стійкій нерухомій точці $(u = u^*, v = v^*)$ функція γ_ϕ дає величину кореляційного показника Фішера η , тоді як γ_2 дає комбінацію показників $2 - \nu^{-1} - \eta$:

$$\gamma_2(u^*, v^*) = 2 - \nu^{-1} - \eta, \quad \text{звідки} \quad \nu^{-1} = 2 - \gamma_2^* - \eta, \quad (2.22)$$

де ν є критичним показником кореляційної довжини. Для розведеної моделі Ізінга в цих остаточних результатах виконується реплічна границя $n \rightarrow 0$. Зауважимо, що в деяких роботах, зокрема і в [52], результати якої будуть розглядатися в наступних пунктах, використовуються позначення $\bar{Z}_{\phi^2} \equiv Z_2$ і $\bar{\gamma}_{\phi^2} \equiv \gamma_2$ для введених вище ренормгрупових функцій.

2.3. Ренормгрупові функції у двопетльовому наближенні

Двопетльове наближення відповідає другому порядку розкладу ренормгрупових функцій γ_ϕ , γ_2 , β_u/u і β_v/v за степенями перенормованих констант зв'язку u і v . У цьому наближенні ренормгрупові β - та γ -функції, що відповідають ЕГ (2.1) в просторі вимірності d , можуть бути записані у вигляді [52, 60, 92, 98, 263]

$$\beta_u(u, v) = -(4 - d)u \left\{ 1 - u - \frac{2v}{3} + \frac{8u^2}{(n + 8)^2} [(5n + 22)f(d) + (n + 2)j(d)] \right\}$$

$$+\frac{32uv}{n+8}\left[f(d)+\frac{1}{6}j(d)\right]+\frac{8v^2}{9}\left[f(d)+\frac{1}{3}j(d)\right]\}+\dots, \quad (2.23)$$

$$\beta_v(u,v)=- (4-d)v\left\{1-v-\frac{12u}{n+8}+\frac{24u^2}{(n+8)^2}\left[(n+14)f(d)+\frac{n+2}{3}j(d)\right]+\frac{16uv}{n+8}\left[12f(d)+j(d)\right]+\frac{8v^2}{27}\left[9f(d)+j(d)\right]\right\}+\dots, \quad (2.24)$$

$$\gamma_\phi(u,v)=-4(4-d)\left[\frac{n+2}{(n+8)^2}u^2+\frac{2uv}{3(n+8)}+\frac{v^2}{27}\right]j(d)+\dots, \quad (2.25)$$

$$\gamma_2(u,v)=(4-d)\left\{\frac{n+2}{n+8}u+\frac{v}{3}-\left[12\frac{n+2}{(n+8)^2}u^2+\frac{8uv}{n+8}+\frac{4v^2}{9}\right]f(d)\right\}+\dots \quad (2.26)$$

Функції $f(d) \equiv i(d) - 1/2$ і $j(d)$, що залежать від вимірності простору d , є комбінаціями інтегралів Фейнмана, взятих при нульових зовнішніх імпульсах,

$$i(d) = \text{diagram} / \text{diagram}^2 \quad \text{і} \quad j(d) = \frac{\partial}{\partial k^2} \text{diagram} \Big|_{k^2=0} / \text{diagram}^2. \quad (2.27)$$

Масивні двопетльові інтеграли, що входять в означення функцій $i(d)$ та $j(d)$, мають вигляд

$$I(m^2; d) = \int \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{(k_1^2 + m^2)^2 (k_2^2 + m^2) [(k_1 + k_2)^2 + m^2]}, \quad (2.28)$$

$$J(m^2, k^2; d) = \int \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{(k_1^2 + m^2)(k_2^2 + m^2) [(k_1 + k_2 + k)^2 + m^2]} \quad (2.29)$$

Інтеграл $J(m^2, k^2; d)$ і його похідна за зовнішнім імпульсом в нулі входять у важливу формулу перенормування маси в двопетльовому наближенні. Записана в термінах діаграм Фейнмана вершинної функції Γ_2 з “ампутованими” зовнішніми лініями ця формула має вигляд

$$m_0^2 = m^2 + \text{diagram} + \text{diagram} - m^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \text{diagram} \Big|_{k^2=0} + O(3L). \quad (2.30)$$

Однопетльова діаграма включає в себе інтеграл Фейнмана

$$I_1(m^2; d) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (2.31)$$

Символ $O(3L)$ означає, що діаграми Фейнмана з трьома (і більшою кількістю) петель тут відкидаються. Трипетльові внески в перенормування маси бралися до

уваги в [53] при розрахунку універсальної комбінації критичних амплітуд R_ξ^+ (див. п. 2.5).

Інтеграли в (2.27), так само як і перенормовані константи зв'язку, пронормовані в наших роботах [52, 60, 98], вслід за [92, 264–266], на однопетльовий інтеграл

$$D(m^2; d) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = m^{d-4} (4\pi)^{-d/2} \Gamma(2 - d/2), \quad (2.32)$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера (див., напр. [267]). Фактично кожній “петлі” діаграми Фейнмана, тобто кожному d -вимірному інтегруванню за внутрішнім імпульсом відповідає ділення на величину $D(m^2; d)$ з (2.32). Оскільки кожна діаграма Фейнмана містить добутки степенів констант зв'язку і петльових інтегралів, то, відповідним чином, інтеграл $D(m^2; d)$ включається в нормування безрозмірних перенормованих констант зв'язку u і v . Більше того, в нормування констант зв'язку включають також і симетрійні фактори чотириточкових фейнманівських діаграм, $(n+8)/6$ і $3/2$. Таке нормування передбачає (див. [92, 264, 266], [34, (5.8)–(5.9)]), що в тривимірній теорії відповідні ренормгрупові β -функції починаються з $-u + u^2 + O(uv)$ і $-v + v^2 + O(uv)$.

З іншого боку, оскільки інтеграл $D(d)$ має полюс $\sim 1/\varepsilon$ коли d наближається до 4, при такому нормуванні константи зв'язку u звичайної $O(n)$ -симетричної моделі ϕ^4 , епсилон-розклад для нерухомої точки u^* буде починатися з $1 + O(\varepsilon)$ (див. [34, стор. 612–613]). А у випадку розведеної моделі Ізінга внаслідок такого нормування величини нерухомих точок u^* і v^* матимуть вигляд $\sim \varepsilon^{-1/2} + O(\varepsilon^0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такі незвичні форми розкладів величин нерухомих точок при малих ε дещо ускладнюють порівняння даних наших робіт із стандартними формулами ε - та $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладів. Щоб уникнути такої незручності, перенормовані константи зв'язку краще було б нормувати не точно на інтеграл $D(m^2; d)$ з (2.32), а на величину $\varepsilon D(m^2; d)$, яка є скінченною при $d = 4$. При цьому, оскільки $\varepsilon = 1$ при $d = 3$, були б збережені ті нормування, які традиційно використовувалися в тривимірних теоріях.

Зауважимо, що при $d = 3$ інтеграли I_1 і J є розбіжними. Натомість D , I і $\partial J / \partial k^2|_{k=0}$ збігаються. Ми маємо $D(m^2; 3) = 1/(8\pi m)$, $i(3) = 2/3$, $j(3) = -2/27$

(див. наступний пункт).

Ренормгрупові функції (2.23)–(2.26), нерухомі точки при $n = 0$ та критичні показники неупорядкованих ізінгівських систем, що з них сліднують, аналізувалися в роботах [92] і [93] при фіксованих вимірностях простору $d = 3$ і $d = 2$, подібно як і в основоположній роботі Парізі [50]. Новим в наших роботах [52, 60, 98] стало те, що ідея Парізі [50] про можливість дослідження методами масивної теорії поля критичної поведінки статистичних систем у фіксованих вимірностях простору (зокрема $d = 3$ чи $d = 2$) була реалізована нами при *нецілих* вимірностях d у всьому інтервалі $2 \leq d < 4$.

2.4. Двопетльові інтеграли Фейнмана

Для конкретних розрахунків нам необхідно вміти обчислювати комбінації інтегралів $i(d)$ та $j(d)$ при довільних нецілих значеннях параметра d .

На час виконання робіт [52, 60, 98] була відома наступна інформація про потрібні інтеграли Фейнмана. Комбінації $i(d)$ та $j(d)$ можна було легко розрахувати при $d = 3$. Їх значення $i(3) = 2/3$ і $j(3) = -2/27$ неявно використовувалися в роботі [91], а їх чисельні величини приводилися в [92, 265]. При $d = 2$ було відомо [92, 265] тільки чисельні значення $i(2) = 0.78130241\dots$ і $j(2) = -0.11463575\dots$. Коли $d \rightarrow 4$, обидва інтеграли $I(d)$ та $J(d)$ мають полюси за ε , а саме, $I(4 - \varepsilon) \sim 1/\varepsilon^2$ та $J(4 - \varepsilon) \sim 1/\varepsilon$. У функціях $i(4 - \varepsilon)$ та $j(4 - \varepsilon)$ ці полюси компенсуються діленням на $D^2(4 - \varepsilon)$, так що їх ε -розклади починаються з³ [263]

$$i(d) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + O(\varepsilon^2) \quad \text{і} \quad j(d) = -\frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon^2}{8} \left(\frac{3}{4} + I \right) + O(\varepsilon^3), \quad (2.33)$$

де

$$I = \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{1 - x(1 - x)} + \frac{\ln[x(1 - x)]}{[1 - x(1 - x)]^2} \right\}. \quad (2.34)$$

Автори роботи [263] не розраховували останній інтеграл, оскільки він є “залежним від схеми перенормування” і не входить в результати для критичних показників

³Подібна формула, наведена на стор. 873 статті [52] — неправильна.

[263]. Чисельне значення цього інтеграла є $I = -1.5626048 \dots$. Нижче, в (2.51) ми наводимо отриманий нами аналітичний вираз для інтеграла I з (2.34).

В наших роботах [52, 98] за допомогою параметризації Фейнмана (див., напр., [14, 268]) функції $i(d)$ та $j(d)$ були зведені до подвійних інтегралів за параметрами Фейнмана і записані як

$$i(d) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon/2)} \int_0^1 \frac{x dx}{[x(1-x)]^{1-\varepsilon/2}} \int_0^1 \frac{y^{\varepsilon/2} dy}{[x(1-x)(1-y)+y]^\varepsilon}, \quad (2.35)$$

$$j(d) = -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon/2)} \int_0^1 \frac{dx}{[x(1-x)]^{-\varepsilon/2}} \int_0^1 \frac{y^{\varepsilon/2}(1-y) dy}{[x(1-x)(1-y)+y]^\varepsilon}. \quad (2.36)$$

Всі деталі розрахунків викладені в [98]. Тут, а також у більшості випадків у подальшому ми параметризуємо залежності від вимірностей простору стандартним відхиленням ε від верхньої граничної вимірності d^* . При цьому зовсім не обов'язково, щоб це відхилення вважалось малим. Зараз ми маємо $\varepsilon = 4 - d$.

Виходячи з формул (2.35) і (2.36), в роботах [52, 98] ми протабулювали функції $f(d)$ і $j(d)$ для нецілих d в інтервалі $2 \leq d \leq 4$ та отримали поточкові графічні зображення цих залежностей.

З іншого боку, в нашій відносно недавній роботі [12] нам вдалося знайти явні вирази для функцій $f(d)$ і $j(d)$ в термінах гіпергеометричної функції Гауса ${}_2F_1$, яка визначається степеневим рядом (див., напр., [269, 270])⁴

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \quad \text{з} \quad (a)_n := a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1), \quad (2.37)$$

що збігається для всіх $a, b \in \mathbb{C}$ і $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ всередині одиничного кола $|z| < 1$ (і при $|z| = 1$, якщо $\Re(c - a - b) > 0$). Ми отримали для нормованого інтеграла $i(d)$ вираз

$$i(d) = \frac{1}{2 - \varepsilon} \left[2 + {}_2F_1\left(\varepsilon, 1; \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{4}\right) - 2 {}_2F_1\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \right], \quad (2.38)$$

а також просте співвідношення, що пов'язує $i(d)$ з $j(d)$:

$$j(d) = \frac{1}{3d} \left[4 - (4 + d)i(d) \right]. \quad (2.39)$$

⁴Аналогічна *узагальнена* гіпергеометрична функція ${}_3F_2$, що з'являється в наступному пункті, має на один параметр чисельника і знаменника більше.

З його допомогою можна аналогічний вираз для $j(d)$. Легко переконатися, що остання формула справедлива для $i(d)$ і $j(d)$ з (2.33) з точністю до $O(\varepsilon^2)$.

2.4.1. Результати при $d = 2$

Хоч інтеграли $i(d)$ та $j(d)$ є гладкими функціями d , їх розрахунок при $d = 2$ не є тривіальним. Щоб отримати $i(2)$ з (2.38), необхідно ввести малий параметр α , що контролює відхилення від $d = 2$, і працювати з границями $\alpha \rightarrow 0$ обидвох доданків у (2.38).

Такий розрахунок приводить [12] до виразів для $i(d)$ та $j(d)$ при $d = 2$ в термінах узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_3F_2$:

$$i(2) = \frac{4}{3\sqrt{3}} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right), \quad j(2) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}. \quad (2.40)$$

У пошуку за іншими представленнями для $i(2)$ (див. [12, додаток А]) ми знайшли співвідношення

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) = \text{Cl}_2(\pi/3). \quad (2.41)$$

Тут $\text{Cl}_2(\pi/3) = 1.0149417\dots$ — величина максимуму функції Клаузена (детальна інформація про цю функцію може бути знайдена в книжці [271]),

$$\text{Cl}_2(\theta) = -\int_0^\theta d\theta \ln \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{n^2}. \quad (2.42)$$

Очевидно, тотожність (2.41) не представлена в математичній літературі. Вона доповнює дуже подібну формулу

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^2}{10} \quad (2.43)$$

з математичних таблиць [272] (ф-ла 7.4.6.1).

2.4.2. Контакт з “високоенергетичною” літературою

Порівняння наших формул з аналогічними даними робіт з високоенергетичної фізики привело до ряду цікавих спостережень.

Результат, аналогічний до (2.38) міститься в рівнянні (33) роботи [273] (з заміною $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/2$):

$$i(d) = \frac{1}{2-\varepsilon} \frac{2}{3} \left[3^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon/2)} + \frac{3}{2}(1-\varepsilon) {}_2F_1\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \right]. \quad (2.44)$$

Еквівалентні вирази можна знайти також в [274], ф-ла (4.38), а також [275], ф-ла (A.11). Безпосереднє порівняння між (2.44) і (2.38) може бути зроблене після застосування гаусових співвідношень для суміжних функцій ${}_2F_1$ з параметром чисельника $\varepsilon/2$. Це приводить до цікавого і нетривіального співвідношення між гаусовими функціями, різниця між якими є $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$${}_2F_1\left(\varepsilon, 1; \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{4}\right) + {}_2F_1\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) - 2 = 3^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{2\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon/2)}. \quad (2.45)$$

За допомогою ф-ли (4.16) з [274] можна записати повні ε -розклади функцій $i(d)$ і $j(d)$. Зокрема,

$$i(d) = \frac{1}{2-\varepsilon} \left\{ 1 + 3^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{2\pi\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon/2)} - \frac{\varepsilon}{2} 3^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left[\text{Ls}_{j+1}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \text{Ls}_{j+1}(\pi) \right] \right\}, \quad (2.46)$$

де

$$\text{Ls}_j(\theta) = - \int_0^\theta d\theta \ln^{j-1} \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| \quad (2.47)$$

— “log-sine”-функції [271, 274]. За означенням, $\text{Ls}_1(\theta) = -\theta$ і $\text{Ls}_2(\theta) = \text{Cl}_2(\theta)$, де $\text{Cl}_2(\theta)$ — функція Клаузена, яка вже зустрічалася в розділі 2.4.1 при розрахунку інтегралів $i(d)$ та $j(d)$ у двох вимірах. З двох перших членів суми, враховуючи співвідношення (2.39), а також $\text{Cl}_2(2\pi/3) = 2/3 \cdot \text{Cl}_2(\pi/3)$, $\text{Cl}_2(\pi) = 0$, ми дістаємо ε -розклади

$$i(d) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{3}} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + O(\varepsilon^3) \quad (2.48)$$

і

$$j(d) = -\frac{\varepsilon}{8} - \frac{3\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^2}{3\sqrt{3}} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) + O(\varepsilon^3). \quad (2.49)$$

Нетривіальний член порядку $O(\varepsilon^2)$, присутній у фігурних дужках в (2.46) чи в (2.48), узгоджується з аналогічним доданком ф-ли (33) з [273].

Ми бачимо, що трансцендентна константа $\text{Cl}_2(\pi/3)$, яка представляє собою максимальну величину інтеграла Клаузена $\text{Cl}_2(\theta)$, виникає і в епсилон-розкладі $i(d)$ біля $d = 4$ і в явному виразі для $i(d)$ при $d = 2$. Це є природньо, тому що інтеграли Фейнмана, такі як тут розглядаються, задовольняють певним загальним співвідношенням, що пов'язують їх величини при різних вимірностях простору d [276–279]. В роботі [12] (р-ня (31), (32), (39)) ми наводимо приклади найпростіших співвідношень такого типу, що стосуються інтегралів $i(d)$ та $j(d)$. Зокрема, для $i(d)$ ми маємо

$$i(4 - \varepsilon) = \frac{1}{2 - \varepsilon} \left[1 - \frac{3\varepsilon^2}{4(1 + \varepsilon)} i(2 - \varepsilon) \right]. \quad (2.50)$$

Легко перевірити, що функція $i(d)$ з (2.44) дійсно задовольняє цьому співвідношенню.

А зараз, не вдаючись у подробиці, повернемося до епсилон-розкладів цих функцій, записаних з літературних даних в (2.33)–(2.34). Порівнюючи формули (2.33)–(2.34) з (2.48)–(2.49), ми бачимо, що (2.48) містить член порядку $O(\varepsilon^2)$ з $i(d)$, якого не було в (2.33). А порівняння внесків порядку $O(\varepsilon^2)$ в $j(d)$ дозволяє записати інтеграл I з (2.34) у явному вигляді:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 - x(1 - x)} \left\{ 1 + \frac{\ln[x(1 - x)]}{[1 - x(1 - x)]} \right\} = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right). \quad (2.51)$$

З іншого боку, спроба розрахувати цей інтеграл за допомогою пакету Mathematica [280] приводить до виразу для I в термінах похідної від псі-функції $\psi(x)$, яка є логарифмічною похідною гамма-функції Ейлера (див., напр., [267, 281]). Таким чином ми приходимо до ланцюжка рівностей

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) = \text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \psi'\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}. \quad (2.52)$$

Друга рівність в (2.52) є присутньою в рівнянні (A.13) роботи [106].

2.4.3. Критичні показники неупорядкованих ізінгівських систем при нецілих вимірностях простору

Знання явних залежностей РГ-функцій (2.23)–(2.26) від вимірності простору дозволяє проводити безпосередній розрахунок критичних показників неупорядкованих систем при довільних нецілих значеннях d . Такий розрахунок можливий при використанні відповідного узагальнення масивної теорії поля, сформульованої Парізі [50] для 3- і 2-вимірних систем, і був виконаний нами в роботах [52, 60, 98]. В даних роботах використовувалося чисельне табулювання функцій $i(d)$ та $j(d)$ за їх інтегральними представленнями (2.35) і (2.36), оскільки явні вирази для них, представлені вище, відомими ще не були. Зараз, знаючи, що всі ренормгрупові функції (2.23)–(2.26) записуються в термінах лише однієї комбінації інтегралів Фейнмана, скажімо, $i(d)$ (див. (2.38)–(2.39)), ми могли б проробити аналогічні розрахунки значно простіше.

Табл. 2.1. Чисельні результати для неупорядкованої моделі Ізінга при нецілих вимірностях простору

d	ν	η	α	u^*	v^*	b_1	b_2
2.0	1.012	0.198	−0.024	2.562	−0.130	0.933	0.096
2.2	0.914	0.141	−0.011	2.459	−0.210	0.892	0.155
2.4	0.837	0.100	−0.009	2.391	−0.294	0.827	0.216
2.6	0.774	0.069	−0.012	2.357	−0.384	0.733	0.284
2.8	0.722	0.047	−0.022	2.356	−0.486	0.584	0.386
3.0	0.678	0.031	−0.034	2.396	−0.605	0.450	0.450
3.2	0.640	0.019	−0.048	2.492	−0.756	0.405	0.405
3.4	0.606	0.010	−0.060	2.683	−0.968	0.344	0.344

У таблиці 2.1 ми наводимо наші чисельні результати [52] для координат нетривіальних змішаних НТ (u^*, v^*) , власних значень матриці стійкості b_1 і b_2 і критичних показників ν , η і α домішкової моделі Ізінга при нецілих значеннях вимірності простору d . Для зручності огляду ми виділили результати у двох найважливіших з практичної точки зору вимірностях, $d = 3$ і $d = 2$. У статті [52] наведено більше чисельних даних — там вони представлені з кроком 0.1 для d .

Гладкі залежності величин критичних показників $\nu(d)$ і $\eta(d)$ представлені на рисунках 5 і 6 в [52]. Один із них ми наведемо нижче.

Ми бачимо, що при зростанні d таблиця обривається при $d = 3.4$. Це пов'язане з тим, що при вищих значеннях d в паде-апроксимантах, які використовувалися для визначення пересумованих функцій, з'являються полюси, що перешкоджають чисельному інтегруванню. Тут видно також, що власні значення матриці стійкості b_1 і b_2 є однаковими при $d > 2.8$. Насправді вони стають комплексними, а показані тільки їх дійсні частини, додатність яких забезпечує стійкість змішаних НТ, з якими ми маємо справу. При $d = 3$ і $d = 2$ відтворені результати роботи [92], а решта даних — оригінальні.

Графіки для критичного показника кореляційної довжини показані на Рисунку 2.1.⁵ Наші результати представлені суцільною кривою, що починається з точки $(d, \nu) = (2, 1.012)$. Крива з “виколеними” точками, що стартує з $(d, \nu) = (4, 1/2)$, показує результати виконаного нами пересумування [52] другого порядку $\sqrt{\epsilon}$ -розкладу для ν з робіт [86, 87]. Як бачимо, такий спосіб розрахунку дає акуратні оцінки лише досить близько до $d = 4$. Добру екстраполяцію між двома суцільними кривими дає точкова лінія, яка представляє дані роботи [99]. Останні отримані з точного рівняння РГ Вільсона за допомогою методу скейлінгових полів Гольнера-Ріделя.

Для двовимірних систем величина $\nu(d = 2) = 1.012$ є дуже близькою до точки $(d, \nu) = (2, 1)$. Ця точка на Рисунку 2.1 позначена зірочкою. Вона відповідає точному результату Онзагера $\nu(d = 2) = 1$ для критичного показника кореляційної довжини двовимірної моделі Ізінга, що зберігається і у випадку наявності неупорядкованості (див. [282, 283]).

Ще одна зірочка — в точці $(3, 0.6701)$ показує значення ν у чотирипетльовому наближенні [95], найвищому на 1992 р. Ця величина дуже мало відрізняється від двопетльового результату $\nu = 0.678$. Тут цікаво зауважити, що згодом у 2000р. були опубліковані дані шестипетльових розрахунків [106]. Їх результат

⁵Аналогічний рисунок (рис. 1.1) роботи [46] з кривою наступного, трипетльового наближення, відтворений на стор. 48.

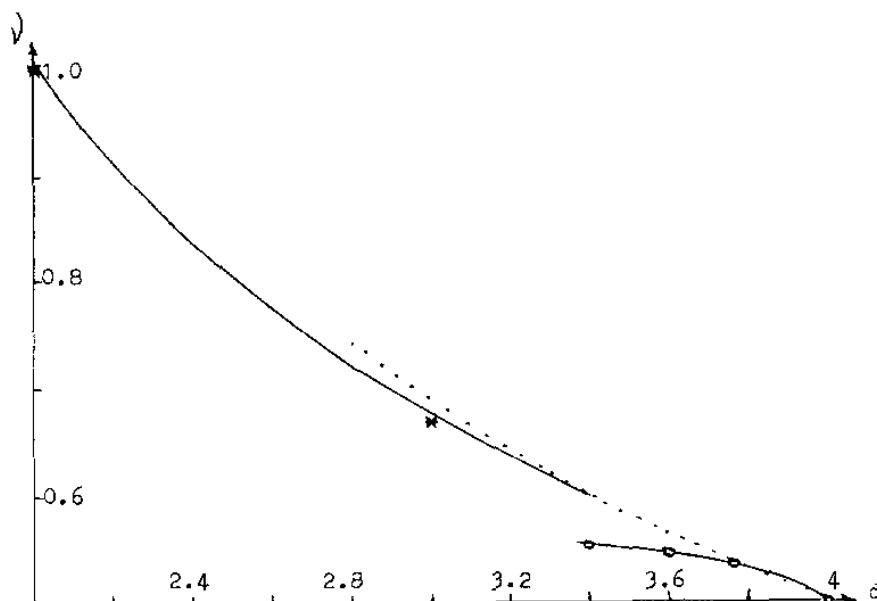


Рис. 2.1. Критичний показник ν розведеної моделі Ізінга як функція вимірності простору d .

для ν , $\nu(d=3) = 0.678(10)$, з точністю до трьох знаків співпадає з двопетльовим, отриманим ще в [92] і [52]. Автори роботи [106] на таке співпадіння уваги не звернули. З докладною таблицею, що охоплює результати для критичних показників розведеної моделі Ізінга, отримані в 1981—2000 роках, можна ознайомитися в оглядовій роботі [103]. Найновіші дані зібрані в таблицях I і V роботи [90].

Взагалі, згідно з аналізом, проведеним у роботі [52], точність отриманих тут результатів знаходиться в межах від 0.1 до 2%. Звернемо увагу також на те, що в розд. 3.1 нашої роботи [52] запропонований нами підхід до визначення критичних показників у нецілих вимірностях простору був успішно протестований на випадку чистої моделі Ізінга, де розрахунки $\nu(d)$ і $\eta(d)$ не стикалися з жодними проблемами у всьому проміжку $2 \leq d \leq 4$.

За декілька років після появи роботи [52], трипетльові інтеграли Фейнмана в нецілих вимірностях простору були протабульовані в [284], а відповідні критичні показники чистих систем і неупорядкованої моделі Ізінга розраховані в [285] і [46].

А задача про дослідження критичної поведінки статистичних систем при неперервній зміні вимірності простору не втрачає своєї актуальності і до наших днів — див. [18], а також [286], де показники ізінгівських систем при нецілих $2 \leq$

$d \leq 4$ розраховувалися за допомогою сучасних методів конформного бутстрапу. Перші подібні спроби дослідження неупорядкованої моделі Ізінга із залученням конформної ТЗ були зроблені в [21].

2.5. Універсальна комбінація критичних амплітуд R_ξ^+ у тривимірному просторі

Розгляд універсальних комбінацій критичних амплітуд розпочинаємо з величини R_ξ^+ , яка визначається у високотемпературній фазі $T > T_c$. Завдяки неупорядкованості цієї фази необхідні розрахунки можна провести у відносно високому порядку ТЗ. Фізичний зміст цієї комбінації полягає в тому, що вона пов'язана з величиною вільної енергії в кореляційному об'ємі, тобто, з добутком $f_{\text{sing}}\xi^d$. Як звичайно, f_{sing} це сингулярна частина густини ВЕ, а ξ — кореляційна довжина. При $T \rightarrow T_c$ величина $f_{\text{sing}}\xi^d \propto t^{2-\alpha}t^{-d\nu}$ є незалежною від температури, оскільки $2 - \alpha = d\nu$. Універсальність цієї комбінації була передбачена і доведена ще на початку 1970-х років (див. огляд [109] і цитовані там роботи).

В термінах критичних амплітуд величина R_ξ^+ визначається як

$$R_\xi^+ = A_+^{1/d} \xi_0^+, \quad (2.53)$$

де ξ_0^+ — множник біля асимптотичної залежності кореляційної довжини $\xi(t) \simeq \xi_0^+ t^{-\nu} + o(t^{-\nu})$ при $t \rightarrow 0$, а A_+ — амплітуда сингулярної частини питомої теплоємності

$$C(t) = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \simeq \frac{A_+}{\alpha} t^{-\alpha} + C_0. \quad (2.54)$$

В останній вираз для $C(t)$ поряд з сингулярною частиною $C_{\text{sing}}(t) \propto t^{-\alpha}$ входить також незалежний від температури “фоновий” член C_0 .

В термінах залежних від температури фізичних величин в асимптотичному режимі $t \rightarrow 0$ цікава нам комбінація амплітуд може бути записана як

$$R_\xi^+ = [\alpha t^2 C_{\text{sing}}(t)]^{\frac{1}{d}} \xi(t) = t [-C'(t)]^{\frac{1}{d}} \xi(t). \quad (2.55)$$

Перевагою другого запису є те, що тут похідна за t ліквідує внесок від постійної C_0 в питому теплоємність. Оскільки в масивній теорії температурною змінною, яка контролює наближення до критичної точки, є “маса” $m = \xi^{-1} \propto t^\nu$ (або $m_1^2 = \chi^{-1} \propto t^\gamma$), для розрахунку R_ξ^+ потрібно визначити зведену температуру t . Ми робимо це як у роботі [287]. Диференціювання співвідношення $m_1^2 = \text{const} \cdot t^\gamma$ за t дає нам $dm_1^2/dt = \gamma m_1^2/t$. Аналогічним чином з умови нормування $\Gamma_2(0; m_0^2, u_0, v_0) = m_1^2$ (див. (2.17)) отримуємо $dm_1^2/dt = d\Gamma_2(0)/dt = d\Gamma_2(0)/dm_0^2 \cdot dm_0^2/dt$, а за означенням (2.14), $d\Gamma_2(0)/dm_0^2 = Z_2^{-1}$, де ми використовуємо скорочене позначення Z_2 для добутку Z -факторів $Z_{\phi^2}Z_\phi$ з (2.14). Похідна dm_0^2/dt є константою, тому що m_0^2 і t є лінійними функціями температури. Оскільки наявність таких (неуніверсальних) констант не впливає на значення універсальної величини R_ξ^+ , в [53] ми прийняли її рівною одиниці. Таким чином був отриманий взаємозв’язок

$$t = \gamma Z_2 m_1^2, \quad (2.56)$$

де $\gamma = \gamma(u^*, v^*)$ — критичний показник сприйнятливості. Разом з $Z_2 = Z_2(u, v)$, у виразі для t можна використати відомий ряд для гамма-функції $\gamma(u, v)$, а перехід до НТ (u^*, v^*) здійснити в кінцевому виразі для R_ξ^+ .

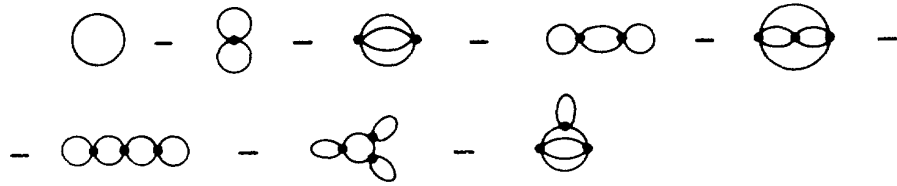


Рис. 2.2. Діаграмне представлення ВЕ неупорядкованої фази в чотирипетльовому наближенні, яке використовувалося в нашій роботі.

Що стосується питомої теплоємності, то за означенням з (2.54) вона визначається другою похідною ВЕ $\Gamma^{(0,0)}$ за m_0^2 . У роботі [53] ми працювали в чотирипетльовому наближенні, в якому ВЕ задається діаграмним рядом, представленим на Рисунку 2.2. Кожне диференціювання діаграм з рис. 2.2 за m_0^2 приводить до появи додаткової крапки на одній з ліній. Приклади діаграм Фейнмана з двома крапками наведені на Рисунку 2.3. Перенормування маси з переходом від m_0^2 до

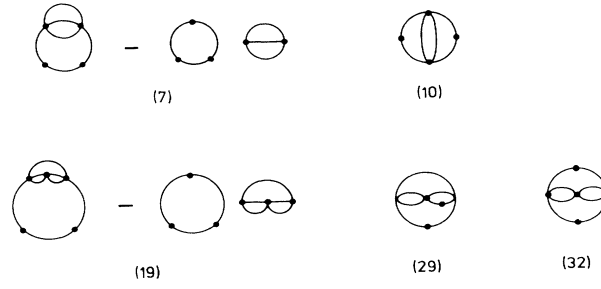


Рис. 2.3. Графічне зображення інтегралів Фейнмана, що входять у вираз для питомої теплоємності (2.57).

m_1^2 супроводжується знищенням всіх діаграмних внесків з простим однопетльовим власноенергетичним включенням $\bigcirc$. Однчасно виникають ефективні параметри розкладу $u_1 = u_0 D(m_1^2)$ і $v_1 = v_0 D(m_1^2)$, де $D(m_1^2)$ — інтеграл Фейнмана, що відповідає діаграмі $\bigcirc$, записаний в (2.32). При $d = 3$ маємо $D(m_1^2) = 1/(8\pi m_1)$. Таким чином ми отримуємо розклад

$$C = \frac{n}{2} D_2(m_1^2) \overline{C}(u_1, v_1) \quad (2.57)$$

з

$$\begin{aligned} \overline{C}(u_1, v_1) = & 1 - \frac{p_1}{2} + \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_2}{3} \left(j_7^S + \frac{2}{3} j_{10} \right) - \frac{p_1^3}{8} \\ & - \frac{p_1 p_2}{3} \left(j_7^S + \frac{2}{3} j_{10} \right) - \frac{p_3}{4} (2j_{19}^S + 4j_{29} + j_{32}), \end{aligned} \quad (2.58)$$

де p_1 , p_2 і p_3 — тензорні множники, що відповідають діаграмам 1, 2 і 3 з рис. 2.4:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{n+2}{3} u_1 + v_1 \\ p_2 &= \frac{n+2}{3} u_1^2 + 2u_1 v_1 + v_1^2 \\ p_3 &= \frac{n+2}{3} \frac{n+8}{9} u_1^3 + \frac{n+8}{3} u_1^2 v_1 + 3u_1 v_1^2 + v_1^3. \end{aligned} \quad (2.59)$$

У формулі (2.58) j_i — інтеграли Фейнмана, нормовані таким самим чином, як і в таблицях [265]: для L -петльового інтеграла $J_i^{(L)}$ з пропагаторами типу $(k^2 + 1)^{-1}$ величина j_i визначається як $j_i = J_i^{(L)} / D^L(1) = (8\pi)^L J_i^{(L)}$. Індекси i є тими самими, що позначають чотириточкові діаграми в [265]. Ми розрахували потрібні інтеграли Фейнмана в явному вигляді. Принаймні в літературі, присвя-

ченій дослідженню фазових переходів у тривимірних системах ця робота була виконана вперше⁶.

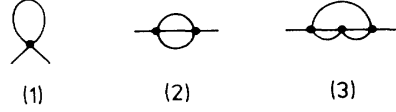


Рис. 2.4. Діаграми вершинної функції $\Gamma_2(k)$ з тензорними множниками p_1 , p_2 і p_3 .

Наші результати для інтегралів j_i (див. рис. 2.3) є наступними:

$$j_7^S = \frac{1}{4} - \ln \frac{4}{3}, \quad j_{10} = \frac{1}{2}, \quad j_{19}^S = j_{19} - d_3 i_5, \quad j_{29} = \frac{1}{4}, \quad j_{32} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.$$

Індекс S в j_7 і j_{19} означає, що в цих інтегралах робляться віднімання власно-енергетичних частин, як це показано на Рисунку 2.3 В комбінації j_{19}^S значення чотирипетльового інтеграла $j_{19} = \pi^2/8 - 1/4$, петлі з трьома точками відповідає $d_3 = 1/4$, а трипетльовий інтеграл i_5 , (“5-S3” в [265]) записується як

$$i_5 = 32 \left(a + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \quad \text{де} \quad a = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\arctg \frac{x}{2} \right)^2}{(x^2 + 1)^2} dx. \quad (2.60)$$

Для величини a ми отримали явний вираз

$$a = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \ln^2 \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \text{Li}_2 \frac{1}{4}, \quad (2.61)$$

де $\text{Li}_2(z)$ — дилогарифм, частковий випадок полілогарифмічних функцій [269, 271], що визначаються аналітичним продовженням ряду Тейлора

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j^k} \quad \text{з} \quad |z| < 1 \quad \text{і} \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.62)$$

Наші результати узгоджуються з чисельними даними роботи [265]. Їх порівняння може дати уяву про точність останніх.

Щоб отримати величину R_ξ^+ за другим означенням з (2.55), потрібно про-диференціювати питому теплоємність (2.57) за t . Це приводить нас до формули

$$R_\xi^+ = \frac{\gamma}{\sqrt{Z_3}} \left\{ \frac{nZ_2^2}{32\pi} \left[1 + u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} \right] \bar{C}(u_1, v_1) \right\}^{\frac{1}{3}}. \quad (2.63)$$

⁶Згодом аналогічні результати були отримані також в роботі [288]

Після перенормування вершин, остаточний розклад універсальної комбінації R_ξ^+ при $d = 3$ в чотирипетльовому наближенні має вигляд

$$\begin{aligned}
 R_\xi^+ = & \sqrt[3]{\frac{n}{32\pi}} \left[1 + \frac{n+2}{2(n+8)}u + \frac{1}{6}v + \right. \\
 & \frac{1}{n+8} \left(\frac{n+2}{n+8}u^2 + \frac{2}{3}uv \right) \left(\frac{27n+98}{108} - 4 \ln \frac{4}{3} \right) + \frac{v^2}{27} \left(\frac{125}{108} - 4 \ln \frac{4}{3} \right) + \\
 & \frac{12u^2}{(n+8)^2} \left(\frac{n+2}{n+8}u + v \right) \left(-\frac{1004-4n-9n^2}{864} - 4\frac{23n+103}{81} \ln \frac{4}{3} + \frac{n+8}{9}w_0 \right) + \\
 & \frac{4}{3(n+8)}uv^2 \left(-\frac{9554-635n}{7776} - 2\frac{n+27}{9} \ln \frac{4}{3} + w_0 \right) + \\
 & \left. \frac{4}{81}v^3 \left(-\frac{991}{864} - \frac{56}{9} \ln \frac{4}{3} + w_0 \right) \right], \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

де для компактності запису ми ввели позначення

$$w_0 = \frac{11\pi^2}{12} - 19 \left[\text{Li}_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{4}{3} \right]$$

З довільним n , результат (2.64) відповідає n -компонентній моделі з кубічною анізотропією. Покладаючи тут $v = 0$, ми відтворюємо перші чотири члени розкладу величини R_ξ^+ для випадку чистої ізотропної n -векторної моделі з [287]. Щоб отримати відповідну величину для розведеної моделі Ізінга, потрібно в (2.64) вилучити загальний множник $\sqrt[3]{n}$ і після цього перейти до границі $n \rightarrow 0$.

Тут слід підкреслити різницю між визначеннями вільних енергій n -векторної кубічної моделі з $n > 1$ і розведеної моделі Ізінга з реплічною границею $n \rightarrow 0$. В моделі з кубічною анізотропією в просторі параметра порядку прямий розрахунок вільної енергії на основі ЕГ (2.1) приводить до суми діаграм Фейнмана, зображеної на Рисунку 2.2. При цьому вираз для кожної з цих діаграм має множник n — число компонент поля ϕ . Цей загальний множник вільної енергії з'являється, відповідно, у виразі для питомої теплоємності (2.57), і, в степені $1/d$ — в комбінації R_ξ^+ . При розгляді невпорядкованої моделі Ізінга з замороженим безладом її ВЕ визначається реплічною формулою (2.4). Відповідно, сума діаграм з Рисунку 2.2 в цьому випадку відповідає величині $-\ln \langle Z_c^n \rangle_c$. Це означає, що згідно з (2.4), ВЕ розведеної моделі Ізінга отримується з ВЕ n -векторної кубічної

Табл. 2.2. Чисельні оцінки R_ξ^+ при $d = 3$ для кубічної моделі ($n = 3$) і розведеної моделі Ізінга ($n = 0$).

n	3	0	0	0	0
R_ξ^+	0.42 ± 0.01	0.286 ± 0.004	0.2886 ± 0.0006^a	$0.290(10)^b$	$0.2885(15)^c$

Без індексів — величини, отримані з формули (2.64) в нашій роботі [53].

^a Результат 5-петльового наближення з [51].

^b Результат 6-петльового наближення з [47].

^c Дані чисельного розрахунку методом Монте Карло з [289].

моделі шляхом ділення останньої на n і подальшого переходу до границі $n \rightarrow 0$. Відповідне ділення на $n^{1/3}$ і наступний перехід до $n = 0$ відбуваються у формулі (2.64) для величини R_ξ^+ .

Для чисельних оцінок величини R_ξ^+ в [53] ми використовували апроксиманти типу Паде для подвійних рядів, видів $[(2, 2), (1, 1)]$ і $[(1, 1), (2, 2)]$. Такі апроксиманти раніше успішно застосовувалися при розрахунках критичних показників [32, 93, 94]. Чисельні оцінки виконувалися в НТ трипетльового наближення, координати яких вперше були правильно визначені в [32, 94]: $v^* = 2.26212$, $u^* = -0.74537$ для розведеної моделі Ізінга і $v^* = 0.04055$, $u^* = 1.35854$ для кубічної моделі з $n = 3$.

Наші чисельні оцінки зібрані в таблиці 2.2. Як видно з наведених даних, наш результат для універсальної комбінації $R_\xi^+(n = 0) = 0.286 \pm 0.004$, що відповідає випадку розведеної моделі Ізінга, дуже добре узгоджується як з чисельними оцінками вищих наближень, так і з результатом високоточних комп'ютерних симуляцій. З огляду на таке узгодження, ми можемо бути певними, що й наша оцінка $R_\xi^+(n = 3) = 0.42 \pm 0.01$, отримана аналогічним чином для моделі з кубічною анізотропією, теж добре описує цю фізичну величину.

2.6. Критичні амплітуди в низькотемпературній фазі ($T < T_c$) при $d = 3$

При температурах, нижчих за критичну ($T < T_c$), розрахунки необхідно проводити з врахуванням спонтанного порушення симетрії в системі та наявності в ній ненульового параметра порядку. Для дослідження критичних амплітуд фізичних величин низькотемпературної фази нам потрібна інформація, що визначається рівнянням стану.

2.6.1. Особливості ефективного гамільтоніана при $T < T_c$

При розгляді впорядкованої фази для виводу рівняння стану ми повинні проводити розрахунки при наявності ненульового зовнішнього магнітного поля H_0 - див. (1.1). Це приводить до появи в ЕГ (2.1) додаткового члена (див. [113, (1)-(4)])

$$- \int d^d x H_0 \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha}(x). \quad (2.65)$$

Така форма зв'язку між зовнішнім полем і реплічними компонентами ϕ_{α} поля параметра порядку передбачає, що кожна з цих компонент у впорядкованій фазі має одне і те ж саме середнє значення $\bar{\phi}_{\alpha} = M_0$. Це означає що “вектор намагніченості” $\bar{\phi}$ спрямований вздовж напрямку $(1, 1, \dots, 1)$. Впорядкована фаза такого типу є можливою в моделі з кубічною анізотропією (2.1) (див. [290, 291]).

У такій ситуації зручно звести розрахункову задачу до більш стандартного вигляду. Це досягається таким поворотом осей координат в n -компонентному реплічному просторі, що зовнішнє магнітне поле стає спрямованим вздовж тільки однієї з компонент поля ϕ . Вслід за роботами [112, 113, 291] ми повертаємо базисну систему координат $\{e_{\alpha}^{(0)}\} \rightarrow \{e_{\alpha}\}$ таким чином, що один з ортів старого базису, наприклад $e_1^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)$, переходить в одиничний вектор e_1 , напрям якого співпадає з напрямом індукованого зовнішнім полем вектора намагніченості: $(1, 1, \dots, 1)$ в початкових координатах. При цьому відбувається лінійне перетво-

рення поля параметра порядку і польові компоненти ϕ_α перетворюються в Φ_α . В результаті ЕГ (2.1) набуває вигляду

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 + m_0^2 |\Phi|^2] + \frac{u_0}{4!} |\Phi|^4 + \frac{v_0}{4!} b_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \Phi_{\alpha_1} \dots \Phi_{\alpha_4} - H_0 \sqrt{n} \Phi_1 \right\} \quad (2.66)$$

Тензор $b_{\alpha_1 \dots \alpha_4}$ у другому члені типу ϕ^4 визначається матричними елементами повороту $e_\beta^\alpha = (\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha^{(0)})$, так, що $b_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha_1}^\alpha \dots e_{\alpha_k}^\alpha$. Як звичайно, відбувається сумування за індексами, що повторюються.

Далі, після стандартного зміщення поздовжньої компоненти Φ_1 на величину її середнього значення $\bar{\Phi}_1 = \sqrt{n} M_0$, де M_0 — намагніченість, ми приходимо до дещо більш громіздкого ЕГ з вершинами типу ϕ^3 і ϕ^4 , що мають різну симетрію (див. [113, 291]). У квадратичних за полями членах з'являються дві різні “маси”, що відповідають поздовжній і поперечній сприйнятливостям:

$$\begin{aligned} r_{0L} &= m_0^2 + \left(\frac{v_0}{2} + \frac{nu_0}{2} \right) M_0^2, \\ r_{0T} &= m_0^2 + \left(\frac{v_0}{2} + \frac{nu_0}{6} \right) M_0^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Важливо те, що в границі $n \rightarrow 0$ обидві вони зводяться до однієї і тієї ж стандартної величини

$$r_0 = m_0^2 + M_0^2 v_0 / 2. \quad (2.68)$$

Це дозволяє без принципово нових труднощів проводити розрахунки для розведеної моделі Ізінга в низькотемпературній фазі. При цьому роль вільного пропагатора відіграє величина $(k^2 + r_0)^{-1}$, з тим, що члени, пропорційні n в r_{0L} і r_{0T} , враховуються за теорією збурень з малим параметром n . Така процедура приводить до необхідності брати до уваги вершини типу ϕ^2 поряд з вершинами типу ϕ^3 та ϕ^4 при побудові діаграм Фейнмана, що призводить до суттєвого збільшення їх числа.

Таким чином, явні розрахунки проводитимуться на основі ЕГ

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \varphi)^2 + r_0 \varphi^2] + \frac{nu_0}{4} M_0^2 \varphi_1^2 + \frac{nu_0}{12} M_0^2 \sum_{\alpha=2}^n \varphi_\alpha^2 + \right.$$

$$+ \frac{u_0}{4!} |\varphi|^4 + \frac{v_0}{4!} b_{\alpha_1 \dots \alpha_4} \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_4} + \left. + \frac{u_0}{3!} M_0 \sqrt{n} \varphi_1 |\varphi|^2 + \frac{v_0}{3!} M_0 \sqrt{n} b_{\alpha_1 \dots \alpha_3} \varphi_{\alpha_1} \dots \varphi_{\alpha_3} \right\}, \quad (2.69)$$

де $\phi_1 \equiv \Phi_1 - \sqrt{n} M_0$, а ϕ_α з $\alpha = 2, \dots, n$ відповідають поперечним компонентам поля Φ .

2.6.2. Співвідношення між температурними змінними

Для отримання фізичних результатів, позбавлених ультрафіолетових розбіжностей, в рядах ТЗ потрібно виконувати перенормування початкових параметрів теорії. Як звичайно, в упорядкованій фазі доцільно використати схему перенормувань, аналогічну до тієї, що застосовується при $T > T_c$ [76, 77]. При цьому перенормовані константи зв'язку u і v , як і їх значення в НТ u^* і v^* , повинні залишитися тими самими, що й при $T > T_c$. Для того, щоб температурний параметр теорії низькотемпературної фази, перенормована маса m^2 , теж зберігав властивості аналогічного параметра теорії з $T > T_c$, застосовуються наступні міркування [292].

У високотемпературній фазі при перенормуванні маси відбувається перехід від лінійного за температурою параметра m_0^2 до перенормованої маси, яка є нелінійною функцією температури, $m^2 \sim (T - T_c)^\nu$, де $\nu \neq 1$ — критичний показник кореляційної довжини. Натомість, при $T < T_c$ через присутність ненульового параметра порядку неперенормована маса m_0^2 перетворюється у вільному пропагаторі на величину $m_0^2 + v_0 M_0^2/2$ (див. (2.68)). Остання містить у собі нелінійність за температурою, оскільки $M_0 \sim (T_c - T)^\beta$, де $\beta \neq 1$ — критичний показник намагніченості. Щоб зберегти і в низькотемпературній фазі схему перенормування маси, що перетворює лінійну функцію температури в нелінійну, в роботі [292] було запропоновано замінити величину $v_0 M_0^2$, що входить у вільний пропагатор упорядкованої фази, на добуток⁷ $v_0 M_0^2 Z_2/Z_1$. Оскільки ця комбінація є лінійною

⁷Тут ми використовуємо для ренормалізаційних Z -факторів позначення Z_2 і Z_1 , прийняті в статті [53]. Взаємозв'язок між ними і Z -факторами Z_{ϕ^2} і Z_v , введеними в розділі 2.2 визначається співвідношеннями $Z_2 = Z_{\phi^2} Z_\phi$ і $Z_1 = Z_v Z_\phi^2$. При цьому $Z_3 \equiv Z_\phi$.

функцією температури при $T \rightarrow T_c$, то таким чином відновлюється лінійність за температурою вільного пропагатора при нульовому імпульсі.

Таким чином, при розгляді розведеної моделі Ізінга в упорядкованій фазі перенормування маси слід проводити згідно з умовою нормування

$$m_1^2 \equiv Z_\phi^{-1} m^2 = \Gamma_0^{(2)} \left(0; m_0^2 + \frac{1}{2} v_0 M_0^2 Z_2 Z_{1v}^{-1}, u_0, v_0 \right) \Big|_{n=0}, \quad (2.70)$$

яка приходить зараз на зміну звичайній умові (2.5). При цьому пара ефективних параметрів розкладу (u, v) залишається тією ж самою, що й визначена в (2.8).

Щоб отримати універсальні комбінації критичних амплітуд термодинамічних функцій, ми повинні порівнювати певні фізичні величини при температурах, вищих і нижчих за критичну, при одній і тій самій величині відхилення $t \sim |T - T_c|$ в обидвох фазах. При $T > T_c$ в масивній теорії поля відстань до критичної температури контролюється змінною m_1^2 , а взаємозв'язок між t і m_1^2 визначається рівнянням (2.56). При наближенні до критичної точки параметр m_1^2 перетворюється в нуль, а одночасно з цим перенормовані константи зв'язку u і v прямують до нерухомої точки (u^*, v^*) . Останнє залишається справедливим і при $T < T_c$, але сам параметр m_1^2 визначається тут з модифікованої умови нормування (2.70). Через її відмінність від “високотемпературної” умови нормування (2.17), одній і тій самій масі m_1^2 у двох різних фазах відповідають два різні відхилення від критичної точки, t_+ і t_- .

Таким чином, якщо ми визначаємо якусь фізичну величину, нехай $\Psi(t)$, при одному і тому ж самому наборі параметрів $\{m_1^2, u, v\}$ при $T > T_c$ і $T < T_c$, то це означає, що ми розглядаємо її як

$$\Psi_+(m_1^2, u, v) = \Psi(t_+) \simeq C_\Psi^+ t_+^{-x_\Psi} \quad \text{і} \quad \Psi_-(m_1^2, u, v) = \Psi(t_-) \simeq C_\Psi^- |t_-|^{-x_\Psi}$$

з $t_+ \neq |t_-|$ у різних фазах. Формуючи відношення цих двох величин і переходячи до критичної границі $m_1^2 \rightarrow 0$ ми отримуємо наступне правило для визначення відношення критичних амплітуд:

$$\frac{C_\Psi^+}{C_\Psi^-} = \frac{\Psi_+(u^*, v^*)}{\Psi_-(u^*, v^*)} \cdot \left| \frac{t_+}{t_-} \right|^{x_\Psi}. \quad (2.71)$$

Тут x_Ψ — критичний показник фізичної величини $\Psi(t)$, а $\Psi_+(u^*, v^*)$ і $\Psi_-(u^*, v^*)$ — звичайні ряди ТЗ за степенями перенормованих констант зв'язку, розраховані в різних фазах і взяті у нерухомій точці.

Нам залишилося означити відношення $|t_+/t_-|$, що фігурує у формулі (2.71). Для цього зауважимо, що із рівнянь (2.14) і (2.17) випливає, що

$$\frac{dm_{0+}^2}{dm_1^2} = Z_2 \quad \text{при} \quad T > T_c, \quad (2.72)$$

тоді як з (2.14) і (2.70) слідує співвідношення

$$\frac{dm_{0-}^2}{dm_1^2} = Z_2 \left[1 - Z_2^{-1} \frac{d}{dm_1^2} \left(X_0 \frac{Z_2}{Z_{1v}} \right) \right], \quad \text{де} \quad X_0 \equiv \frac{v_0 M_0^2}{2}, \quad \text{при} \quad T < T_c. \quad (2.73)$$

Порівнюючи два останні рівняння ми отримуємо

$$\frac{dm_{0-}^2}{dm_{0+}^2} = 1 - \mathcal{U}, \quad \text{де} \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(u, v) = Z_2^{-1} \frac{d}{dm_1^2} \left[X_0 \frac{Z_2}{Z_{1v}} \right]. \quad (2.74)$$

При розрахунку універсальних відношень критичних амплітуд нас цікавить тільки найближчий окіл T_c і ми нехтуємо поправками до скейлінгу. Тому в формулах типу (2.71) ми можемо використовувати щойно отримане співвідношення у вигляді

$$\frac{t_-}{t_+} = 1 - \mathcal{U}(u^*, v^*) \quad (2.75)$$

Оскільки відносні відхилення температур t_+ і t_- мають протилежні знаки, права сторона рівняння (2.75) повинна бути від'ємною. Це насправді підтверджується явними розрахунками функції $\mathcal{U}(u, v)$.

Як проілюстровано в (2.71), знання співвідношення (2.75) дозволяє нам розраховувати різні комбінації критичних амплітуд у вигляді подвійних рядів за степенями змінних u і v .

2.6.3. Термодинамічні функції

Для виконання явних розрахунків універсальних комбінацій термодинамічних критичних амплітуд ми повинні повернутися до теорії збурень, сформульованої в пункті 2.6.1. На основі описаного там ЕГ (2.69) ми запишемо розклади

ТЗ для термодинамічного потенціалу, рівняння стану, намагніченості, розглянемо термодинамічні функції, що представлятимуть для нас інтерес.

У двопетльовому наближенні термодинамічний потенціал $\Gamma(M_0)$, який є функцією намагніченості і температури, в нашому випадку має вигляд

$$\Gamma(M_0) = \frac{1}{2} m_0^2 M_0^2 + \frac{v_0}{4!} M_0^4 + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left[\begin{array}{cccc} \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{(e)} & \text{(f)} & \text{(g)} & \text{(h)} \end{array} \right]$$

У цій формулі задіяно 8 діаграм Фейнмана, тоді як аналогічний вираз для термодинамічного потенціалу впорядкованих ізінгівських систем включає в себе тільки три діаграми, (a), (c), і (d). У випадку ідеальних систем перехід до наступного наближення ТЗ потребує додаткового залучення п'яти трипетльових діаграм. Для розрахунку ж функції $\Gamma(M_0)$ домішкової моделі ми повинні були розглянути ще 24 додаткові діаграми. Вони зображені на Рисунку 2.5 і протабульовані в Табл. II нашої роботи [53]. Для більшості з цих діаграм нами були знайдені явні вирази.

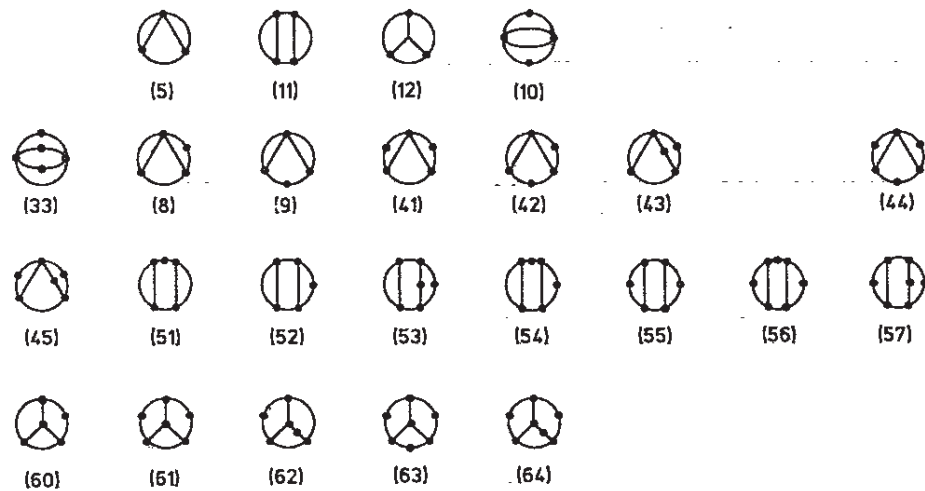


Рис. 2.5. Трипетльові діаграми вільної енергії $\Gamma_0(M_0)$.

Для ілюстрації наведемо явний двопетльовий вираз для $\Gamma(M_0)$, де діаграми з Рисунку 2.5 до уваги не беруться:

$$\Gamma_0(M_0) = \frac{1}{2} m_0^2 M_0^2 + \frac{v_0}{4!} M_0^4 + \frac{1}{2} \int d^3k \ln(k^2 + r_0) + \frac{u_0 M_0^2}{6} J_1(r_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t_1}{8}(J_1(r_0))^2 - \frac{t_1}{12} \frac{u_0 M_0^2}{8\pi\sqrt{r_0}} J_1(r_0) + \frac{v_0}{72} \left(\frac{u_0 M_0^2}{8\pi\sqrt{r_0}} \right)^2 - \\
& - \frac{t_2}{12} M_0^2 J_2(r_0) + \frac{v_0}{36} (3v_0 + 4u_0) u_0 M_0^4 I(r_0) - \frac{v_0^2}{36} u_0^2 M_0^6 K(r_0). \quad (2.76)
\end{aligned}$$

Тут $J_1(r_0)$ і $J_2(r_0)$ — звичайні інтеграли Фейнмана масивної теорії поля, що відповідають діаграмам (b), і (d). Тільки ці два інтеграли є розбіжними в тривимірному просторі, а стандартне перенормування маси приводить до віднімань пов'язаних з ними розбіжностей. $I(r_0)$ і $K(r_0)$ відповідають діаграмам (g) і (h), вони пов'язані з похідними від функції $J_2(r_0)$ за її аргументом r_0 . Величини t_1 і t_2 — це тензорні множники діаграм $\bigcirc$ і $\ominus$, взяті в реплічній границі $n = 0$ (порівн. з (2.59)):

$$\begin{aligned}
t_1 &= v_0 + \frac{2}{3}u_0, \\
t_2 &= v_0^2 + 2u_0v_0 + \frac{2}{3}u_0^2. \quad (2.77)
\end{aligned}$$

Рівняння стану отримується з вільної енергії диференціюванням за намагніченістю M_0 :

$$H_0 = \frac{d\Gamma_0(M_0)}{dM_0}. \quad (2.78)$$

У нашій роботі [53] ми отримали рівняння стану для неупорядкованих ізінгівських систем у трипетльовому наближенні. Не вдаючись у подробиці доволі громіздких розрахунків вищих порядків, наведемо тут лише просту формулу однопетльового наближення:

$$\frac{H_0}{M_0} = m_0^2 + \frac{v_0}{3!} + \left(\frac{v_0}{2} + \frac{u_0}{3} \right) J_1(r_0) - \frac{u_0 v_0}{48\pi\sqrt{r_0}} M_0^2 + O(v_0^2, u_0^2, v_0 u_0). \quad (2.79)$$

Декілька перших членів (однопетльове наближення) рівняння стану, отриманого описаним способом, мають вигляд

$$\frac{H_0}{M_0} = m_1^2 - \frac{2}{3}X_0 - X_0(Z_2 Z_{1v}^{-1} - 1) - \frac{u_1}{3}X_0, \quad (2.80)$$

де, як і в (2.73) використовується скорочене позначення

$$X_0 = \frac{v_0 M_0^2}{2}. \quad (2.81)$$

Розв'язок рівняння стану на критичній ізохорі $H_0 = 0$ визначає спонтанну намагніченість M_0^S через комбінацію X_0^S . З рівняння (2.81) ми отримуємо

$$X_0^S = m_1^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{9}{4} \left(v_1 + \frac{4}{3} u_1 \right) \right]. \quad (2.82)$$

У виразі для величини X_0^S зручно виділити критичну сингулярність, як це робилося в [292]:

$$X_0^S = \frac{3}{2} m_1^2 Z_{1v} Y(u, v), \quad (2.83)$$

де функція $Y(u, v)$ є несингулярною в НТ (u^*, v^*) .

У двопетльовому наближенні отримується дуже простий результат для функції $Y(u, v)$:

$$Y = 1 + \frac{u}{24} (3v + 4u) + O(u^3, v^3, \dots). \quad (2.84)$$

Повний же вираз для цієї функції в наступному трипетльовому наближенні досить громіздкий, з ним можна ознайомитися в додатку D нашої роботи [53].

2.6.4. Універсальні комбінації критичних амплітуд

Після проведеної роботи ми вже маємо можливість безпосередньо перейти до нашого головного завдання — обрахунку універсальних комбінацій критичних амплітуд неупорядкованої моделі Ізінга безпосередньо у тривимірному просторі.

Першим і найпростішим об'єктом є відношення критичних амплітуд магнітної сприйнятливості $\chi \simeq \Gamma_{\pm} |t|^{-\gamma}$. У симетричній фазі ($T > T_c$), за означенням частково перенормованої маси m_1^2 в (2.17), ми маємо просто $\chi_+^{-1} = m_1^2$. При $T < T_c$ обернена магнітна сприйнятливість на критичній ізохорі визначається як друга похідна термодинамічного потенціалу за намагніченістю M_0 , що береться при ненульовій спонтанній намагніченості M_0^S :

$$\chi_-^{-1} = \left. \frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial M_0^2} \right|_{M_0=M_0^S}. \quad (2.85)$$

За своєю вимірністю ця величина теж пропорційна m_1^2 , і тому повинна мати вигляд $\chi_-^{-1} = m_1^2 \mathcal{S}(u, v)$. Безрозмірна функція $\mathcal{S}(u, v)$ отримується в ТЗ на основі описаних у попередньому параграфі розкладів для $\Gamma_0(M_0)$ (див. (2.76)) і $Y(u, v)$ (див. (2.83)). Беручи до уваги сказане в п. 2.6.2, зокрема, використовуючи формули (2.71) і (2.75), ми отримуємо відношення амплітуд

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = \mathcal{S}(u^*, v^*) |1 - \mathcal{U}(u^*, v^*)|^{-\gamma}. \quad (2.86)$$

Коефіцієнти подвійних рядів ТЗ для функцій $\mathcal{S}$, $\mathcal{U}$, Y і, нарешті, Γ_+/Γ_- протабільовані в таблиці III нашої роботи [53]. Остаточні чисельні оцінки для цього відношення критичних амплітуд ми наведемо нижче.

Як відомо (див. (2.54)), питома теплоємність $C(t) \simeq A_{\pm} |t|^{-\alpha} / \alpha + C_0$ включає в себе постійний аддитивний доданок C_0 , присутність якого не дає можливості визначити відповідне відношення амплітуд A_+/A_- таким самим простим чином, як у попередньому випадку. Для цього ми повинні використати похідну $C'(t) \simeq -A_{\pm} |t|^{-1-\alpha}$, і таким чином ми приходимо до формули

$$\frac{A_+}{A_-} = \left[\frac{\partial^3 \Gamma_{0+}}{(\partial m_0^2)^3} \Big/ \frac{\partial^3 \Gamma_{0-}}{(\partial m_0^2)^3} \right] |1 - \mathcal{U}|^{-\alpha-1} \quad (2.87)$$

де позначення Γ_{0+} і Γ_{0-} відповідають вільним енергіям високо- низькотемпературної фаз. У правій частині (2.87) ми повинні виконати перенормування всіх параметрів теорії і оцінити значення отриманих рядів у НТ.

Перейдемо до універсальної комбінації R_C , яка охоплює критичні амплітуди різних термодинамічних функцій при $T > T_c$ і $T < T_c$: питомих теплоємності, магнітної сприйнятливості та спонтанної намагніченості $M_0^S = B |t|^\beta$. Ця величина походить з робіт [293, 294] і має вигляд

$$R_C = \frac{A_+ \Gamma_+}{B^2}. \quad (2.88)$$

Використовуючи означення відповідних термодинамічних функцій і скейлінгове співвідношення $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$, ми отримуємо

$$R_C = - \frac{C'_+ \chi_+}{(M_0^S)^2} \left| \frac{t_-}{t_+} \right|^{2\beta} t_+^3. \quad (2.89)$$

Подібно як і в формулі (2.55) для універсальної комбінації R_{ξ}^+ , тут виникає явна залежність від зведеної температури t_+ , для якої можна використати ф-лу (2.56). Температурна залежність повністю зникне, якщо розділити вираз (2.89) на третій степінь величини R_{ξ}^+ і утворити нову універсальну комбінацію критичних амплітуд

$$r \equiv \frac{R_C}{(R_{\xi}^+)^3} = \Gamma_+(\xi_0^+)^{-3} B^{-2} = -\frac{16v}{9Y} |1 - \mathcal{U}|^{2\beta} \quad (2.90)$$

Чисельні дані для коефіцієнтів розкладів усіх розглянутих у цьому параграфі комбінацій критичних амплітуд за степенями перенормованих констант зв'язку u і v наведені в табл. III нашої роботи [53].

Не повторюючи тут цього не дуже інформативного масиву чисел, в наступному параграфі ми перелічимо ті чисельні оцінки розглянутих вище фізичних величин, що з них випливають.

2.6.5. Чисельні оцінки універсальних комбінацій амплітуд

У попередньому параграфі ми отримали ряди ТЗ для декількох універсальних відношень і комбінацій критичних амплітуд тривимірної розведеної моделі Ізінга, для виводу яких був необхідним розгляд теорії в упорядкованій низькотемпературній фазі. Ці подвійні ряди за степенями перенормованих констант зв'язку u і v включають в себе всі степені цих змінних до третього степеня включно. Чисельні значення фізичних величин, що їм відповідають, отримуються в НТ ($u = u^*, v = v^*$). Оскільки розклади, з якими ми маємо справу, не є збіжними, при переході до чисельних оцінок ми повинні застосовувати до них певні додаткові засоби. Так, в роботі [53] остаточні розрахунки ми провели з використанням апроксимант типу Паде для подвійних рядів.

Ми розглянули декілька видів апроксимант, що залежать від двох змінних, і переконалися в тому, що найстійкіші результати отримуються при використанні апроксимант типу $[2,2/1,1]$ і $[1,1/2,2]$, таких, які вже використовувалися раніше в роботах [93] і [32] при визначенні критичних показників. В остаточних розрахун-

Табл. 2.3. Чисельні оцінки універсальних комбінацій критичних амплітуд домішкової моделі Ізінга.

	DIM	$\sqrt{\varepsilon}$	Експ	CRPV	МІ
Γ_+/Γ_-	3.05 ± 0.32	> 2	2.8 ± 0.2^a	5.5(1.0)	4.77 ± 0.30
A_-/A_+	0.17 ± 0.16	< 0	0.625^b	0.625	1.848
R_C	0.070 ± 0.002	0.03		0.08(2)	0.0594 ± 0.0011
r	2.8 ± 0.9			3.57	2.998

DIM — величини, отримані в нашій роботі [53].

$\sqrt{\varepsilon}$ — дані $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу з [113]; тут $A_+/A_- < -1/2$.

Експ — експериментальні дані (a — з [295], b — величина, обернена до 1.6(3) з [296])

CRPV — результати роботи [47]; тут $A_+/A_- = 1.6(3)$, як і в [296].

МІ — комбінації амплітуд чистої моделі Ізінга з [292].

ках ми використовували значення перенормованих констант зв'язку $v^* = 2.26212$ і $u^* = -0.74537$ в НТ, вперше правильно розрахованих у трипетльовому наближенні в наших роботах [32, 94]⁸. Наші результати, отримані в [53], представлені в табл. 2.3. Наведені похибки вказують на чутливість чисельних оцінок щодо вибору різних видів апроксимант.

У роботі [114] для розглянутих комбінацій амплітуд ми виконали також пересумування типу Паде-Бореля. При цьому ми використовували апроксиманти типу $[1,1/2,2]$, подібно, як ми робили це в [32, 94]. Ці апроксиманти є простими у застосуванні, вони добре зарекомендували себе при розрахунках критичних показників у [32, 94], а також давали стійкі оцінки при виводі даних таблиці 2.3. Результати пересумувань Паде-Бореля з [114] добре узгоджуються з цими даними, в основному потрапляючи в область, обмежену зазначеними похибками.

Так, наприклад, для універсального відношення амплітуд магнітної сприйнятливості (3.05 ± 0.32 у табл. 2.3) метод Паде-Бореля дає оцінку

⁸Ці координати НТ, а також відповідні критичні показники розведеної моделі Ізінга $\gamma = 1.328$ і $\nu = 0.671$ були отримані в [32, 94] у результаті коректного врахування всіх трипетльових діаграм. В аналогічних розрахунках попередніх робіт [91, 93] були зроблені помилки, що вплинули на остаточні результати. Наші результати були згодом відтворені в [46], а також у ході розрахунків вищих порядків [95].

$\Gamma_+/\Gamma_- \simeq 3.38$. Для порівняння можна згадати $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад [113]

$$\Gamma_+/\Gamma_- = 2(1 - 0.136\sqrt{\varepsilon} + 1.083\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}) > 2, \quad (2.91)$$

а також експериментальний результат $\Gamma_+/\Gamma_- = 2.8 \pm 0.2$ [295]. Зауважимо, що для чистої моделі Ізінга теоретико-польові розрахунки дають майже у два рази більшу величину $\Gamma_+/\Gamma_- = 4.77 \pm 0.30$ [292].

Величину $R_C = 0.070 \pm 0.002$ з табл. 2.3 ми теж можемо порівняти з її $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладом [113]

$$R_C = 0.056\sqrt{\varepsilon} - 0.072\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}) \simeq 0.03 \quad (2.92)$$

та її аналогом для чистих систем $R_C = 0.0594 \pm 0.0011$ [292]. Для неї ми не маємо інформації про експериментальні дані.

Головною мотивацією роботи, описаної в розділі 2.6, було знаходження універсального відношення амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- невідпорядкованих систем і, зокрема, визначення знаку цієї величини. Причиною для цього була існуюча розбіжність між результатами теоретичних розрахунків [112, 113] і експериментальних вимірювань [296, 297] для A_+/A_- . Теорія та експеримент давали різні знаки цього відношення, що передбачало різні форми залежностей питомої теплоємності від температури $C(T)$ в околі T_c .

Зокрема, однопетльовий розрахунок [112] дав від'ємне значення $A_+/A_- = -1/2 + O(\sqrt{\varepsilon})$, а результат двопетльового наближення [113] не виявив тенденції до зміни знаку цієї величини:

$$A_+/A_- = -2^{\alpha-1}(1 + \frac{3}{2}\sqrt{6/53}\sqrt{\varepsilon}) + O(\varepsilon) \simeq -\frac{1}{2} - 0.136\sqrt{\varepsilon} < -\frac{1}{2}, \quad (2.93)$$

де критичний показник $\alpha = -\sqrt{6/53}\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon)$. Нерівність $A_+/A_- < 0$ разом з $\alpha < 0$ передбачає, що критична температура відповідає точці перегину кривої $C(T)$, тоді як максимум питомої теплоємності досягається при якійсь іншій температурі, відмінній від T_c [113, 298].

З іншого боку, експериментальні дані роботи [296] екстраполювалися у припущенні, що максимум $C(T)$ відповідає критичній температурі, а отже має вигляд

піку. Такий підхід передбачає додатність відношення A_+/A_- і *a priori* виключає можливість $A_+/A_- < 0$. На нашу думку, щоб уникнути такої неоднозначності в інтерпретації експериментальних даних, що стосуються питомої теплоємності, яка в домішковій моделі Ізінга є скінченною при $T = T_c$, слід проводити прецизійне визначення положення критичної температури з розгляду якоїсь іншої фізичної величини (наприклад, магнітної сприйнятливості), яка має яскраво виражену степеневу розбіжність в точці переходу. Це мало б дати змогу від самого початку визначити, яка частина кривої $C(T)$ відповідає околу критичної точки: її максимум, чи ділянка її швидкого спадання.

Нажаль, через погану збіжність ряду ТЗ, що визначає відношення амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- , і його невелику довжину, ми не змогли отримати надійну чисельну оцінку цієї важливої величини. Проблема фактично зводилася до визначення знаку малої величини A_-/A_+ , для якої ми отримали приблизну оцінку $A_-/A_+ \simeq 0.17 \pm 0.16$. Для звичайного відношення A_+/A_- це давало $A_+/A_- \simeq 6$ — велике додатне значення, але не виключало зміни знаку цієї величини на від’ємний при врахуванні вищих порядків ТЗ.

2.7. Висновки

У цьому розділі ми виконали дослідження неупорядкованих систем з замороженим безладом за допомогою методу “масивної” теорії поля Парізі у фіксованих вимірностях простору d . При цьому ми вперше реалізували ідею Парізі у випадку *нецілих* вимірностей d , і у двопетльовому наближенні отримали плавні залежності критичних показників неупорядкованих ізінгівських систем від d . Хоч і виведені в досить низькому наближенні ТЗ, наші результати мають задовільну чисельну точність. Вони добре узгоджуються з даними більш ранніх, а також і пізніших робіт інших авторів.

Двопетльові інтеграли Фейнмана і ренормгрупові функції розраховані в явному вигляді і виражені в термінах гіпергеометричних функцій Гауса ${}_2F_1$. Проведене детальне порівняння отриманих результатів з даними, опублікованими в

літературі з фізики високих енергій.

Також виконано нетривіальне узагальнення масивної теорії поля на випадок тривимірних невідпорядкованих ізінгівських систем, що перебувають у *низькотемпературній* фазі з ненульовим параметром порядку. У три- і чотирипетльовому наближенні розраховано ряд універсальних комбінацій критичних амплітуд і відношень їх величин при $T > T_c$ і $T < T_c$. Зроблено висновок про те, що теоретичне значення відношення критичних амплітуд питомої теплоємності A_+/A_- при $d = 3$ може бути додатним всупереч передбаченням ε -розкладу біля $d = 4$.

Підходи наших робіт [52] і [53] використовувалися різними авторами при розрахунках вищих наближень для величини R_ξ^+ [47, 51], а також для критичних показників при нецілих вимірностях простору [46, 284, 285].

РОЗДІЛ 3

ПОВЕРХНЕВА КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА НАПІВБЕЗМЕЖНИХ СИСТЕМ

Як вже згадувалося вище, на початку 80-років минулого століття методи квантової теорії поля почали успішно застосовуватися в теорії поверхневих критичних явищ (див. [115, 125]). Головним методом розрахунків був ε -розклад [9, 10], і результати отримувалися у вигляді коротких (до першого і другого порядків) рядів за степенями ε . Для отримання з таких рядів чисельних даних у реальному тривимірному просторі була необхідна екстраполяція до $\varepsilon = 1$. Ця процедура не завжди приводила до надійних чисельних оцінок. Так було у випадку кросоверного поверхневого показника Φ , який на 20-30% відрізнявся від даних симуляцій Монте Карло — див. [34, 61, 115].

У наших роботах, описаних у цьому розділі, ми узагальнюємо масивну теорію поля на випадок напівбезмежних ізотропних систем з короткосяжними взаємодіями, обмежених однією плоскою поверхнею. Таке узагальнення дає можливість досліджувати поверхневу критичну поведінку безпосередньо у фізичній вимірності простору $d = 3$. Насправді, наш метод є більш загальним: сформульована нами масивна теорія працює у довільних вимірностях простору d в межах $2 \leq d < 4$. Використовуючи розроблену нами схему розрахунку ми, зокрема, отримуємо чисельні значення поверхневих критичних показників для двох типів поверхневих фазових переходів: звичайного (“ordinary”) [34, 61] і спеціального [34, 61, 74]. Наші результати в ряді випадків поправляють попередні оцінки, отримані з ε -розкладу, і добре узгоджуються як з даними експериментальних робіт¹, так і з найкращими результатами чисельних досліджень методами Монте Карло.

¹Короткий огляд експериментальної ситуації і порівняння з теоретичними результатами можна знайти в роботі [34].

3.1. Модель

Критична поведінка напівбезмежних систем з n -компонентним параметром порядку та ізотропними короткосяжними взаємодіями описується ЕГ Ландау-Гінзбурга-Вільсона [115]

$$\mathcal{H}[\phi] = \int_V \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 |\phi|^2 + \frac{1}{4!} u_0 (|\phi|^2)^2 \right] + \int_{\partial V} \left(\frac{1}{2} c_0 |\phi|^2 \right). \quad (3.1)$$

На відміну від звичайних об'ємних систем, в даному випадку система “займає” верхню половину d -вимірного простору $V = \mathbb{R}_+^d \equiv \{\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z) \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}, z \geq 0\}$, обмежену плоскою поверхнею ∂V при $z = 0$. Поле n -компонентного параметра порядку описується змінною $\phi = \{\phi^a(\mathbf{x}), a = 1, \dots, n\}$. Початковими, неперенормованими параметрами теорії є: “маса” m_0^2 — лінійна функція температури, константа зв'язку $u_0 > 0$, що характеризує флуктуації полів в об'ємі системи, і c_0 — локальний поверхневий параметр, що описує відхилення сили поверхневих взаємодій від об'ємних (“surface enhancement” в англійській літературі).

Нас цікавитимуть критичні явища, що відбуваються у приповерхневому шарі напівбезмежної системи, коли в її об'ємі при температурі Кюрі T_c відбувається фазовий перехід другого роду. В залежності від сили поверхневих взаємодій c_0 можливі різні типи переходів у таких системах:

1) якщо величина c_0 більша за певну спеціальну величину c_0^{sp} , то поверхневі взаємодії не достатньо сильні для того, щоб на поверхні могло виникнути самостійне впорядкування при $T = T_c$. Поверхня з такими властивостями називається “вільною” поверхнею. У цій ситуації критичні особливості локальних поверхневих фізичних величин “індукуються” флуктуаціями параметра порядку в об'ємі V системи, що наближається до впорядкованого стану при зниженні температури до величини T_c . В критичному режимі поле параметра порядку на поверхні перетворюється в нуль, тобто задовольняє граничним умовам Діріхле. Такий поверхневий перехід називається звичайним.

2) коли $c_0 = c_0^{\text{sp}}$ і $T \rightarrow T_c$ (тобто $m_0^2 \rightarrow m_{0c}^2$), поверхня ∂V і об'єм V системи впорядковуються одночасно. При цьому поверхневий фазовий перехід називається

спеціальним. “Спеціальна” точка фазової діаграми (m_{0c}^2, c_0) є мультикритичною.

3) при $c_0 < c_0^{\text{sp}}$ поверхневі взаємодії є достатньо сильними для виникнення поверхневого впорядкування при температурах, вищих за критичну. Як наслідок, при подальшому зниженні температури до $T = T_c$, фазовий перехід в об’ємі системи відбувається вже в присутності далекосяжного впорядкування на поверхні. Такий перехід називається екстраординарним.

Зауважимо, що два останні типи поверхневих фазових переходів можливі тільки в тому випадку, коли вимірність поверхні $d-1$ перевищує нижню граничну вимірність $d_\ell(n)$ (залежну від числа компонент параметра порядку n), при якій поява фази з поверхневим упорядкуванням стає неможливою. Більше деталей подано в роботах [34, 115, 125]. Відповідна фазова діаграма зображена на Рисунку 1.2 (стор. 52).

Звичайний і спеціальний переходи є “досяжними” з високотемпературної, повністю неупорядкованої фази. Тому їх теоретичний опис є значно простішим за опис екстраординарного переходу. У цьому останньому випадку необхідно мати справу з ненульовим, просторово змінним профілем параметра порядку $\langle \phi(z) \rangle$ (як при $T < T_c$, так і при $T \geq T_c$), що суттєво ускладнює розрахунки.² А для звичайного і спеціального переходів парна кореляційна функція наближення молекулярного поля (вільний пропагатор) має відносно простий вигляд

$$\hat{G}(p; z, z') = \frac{1}{2\kappa_0} \left[e^{-\kappa_0|z-z'|} - \frac{c_0 - \kappa_0}{c_0 + \kappa_0} e^{-\kappa_0(z+z')} \right], \quad (3.2)$$

де

$$\kappa_0 = \sqrt{p^2 + m_0^2}. \quad (3.3)$$

Корелятор (3.2) записаний у т.зв. pz -представленні, тобто це — Фур’є-образ координатного представлення кореляційної функції $G(\mathbf{r}; z, z')$ відносно координат $\mathbf{r}$, паралельних до поверхні, тобто напрямів, у яких зберігається трансляційна інваріантність:

$$G(x, x') = \int_{\mathbf{p}} \hat{G}(p; z, z') e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad \text{де} \quad \int_{\mathbf{p}} \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}}. \quad (3.4)$$

²Дуже детальний розгляд екстраординарного переходу можна знайти в найновіших роботах автора [42] і [37].

При цьому $\mathbf{p}$ — відповідний $(d - 1)$ -вимірний “паралельний” хвильовий вектор. Перший доданок у правій частині рівняння (3.2) представляє собою pz -представлення вільного об’ємного трансляційно-інваріантного пропагатора. Розклади за теорією збурень з пропагатором (3.2) можуть бути регуляризовані за допомогою процедури “обрізання” — покладаючи $\hat{G}(\mathbf{p}; z, z') = 0$ для $|\mathbf{p}| > \Lambda$, або за допомогою приписів вимірної регуляризації, яких ми дотримуємося в цій роботі.

3.2. Перенормування

Головною метою перенормувань в теорії критичних явищ є формування т.зв. “перенормованої теорії”, теорія збурень для якої є вільною від ультрафіолетових чи інфрачервоних розбіжностей і не залежною від довільного імпульса обрізання Λ . Нашою теперішньою метою є дослідження поверхневої критичної поведінки напівбезмежних систем, що визначаються ЕГ (3.1), при температурах, близьких до об’ємної критичної температури T_c . Це означає, що наша теорія повинна включати в себе стандартну поведінку об’ємних кореляційних функцій, що описують поведінку полів, віддалених від поверхні.

3.2.1. Об’ємні кореляційні функції

Для об’ємних кореляційних функцій N полів ϕ і I вставок типу ϕ^2 ми вибираємо стандартні умови нормування масивної теорії поля в безмежних системах [77] (див. (2.5) — (2.8)):

$$\Gamma_R^{(2)}(k; u, m) \Big|_{k=0} = m^2, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k; u, m) \Big|_{k=0} = 1, \quad (3.6)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k, Q; u, m) \Big|_{k=Q=0} = 1, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(\{\mathbf{k}_i\}; u, m) \Big|_{\{\mathbf{k}_i=0\}} = m^\varepsilon u. \quad (3.8)$$

Ці умови нормування, як звичайно, стосуються вершинних функцій $\Gamma^{(N,I)}$ і визначають об'ємні ренормалізаційні Z -фактори, які входять у взаємозв'язки між початковими і перенормованими параметрами теорії,

$$\phi = [Z_\phi(u)]^{1/2} \phi_R, \quad \phi^2 = [Z_{\phi^2}(u)]^{-1} [\phi^2]_R, \quad u_0 = Z_u(u) m^\varepsilon u, \quad (3.9)$$

а також перенормовану масу m^2 . У перенормованій теорії критична границя $T \rightarrow T_c$ досягається при $m^2 \rightarrow 0$, що фізично відповідає розбіжності об'ємної кореляційної довжини при наближенні до критичної точки. У цій границі перенормована константа зв'язку u переходить в інфрачервоно-стійку нерухому точку $u^* > 0$.

3.2.2. Поверхневі кореляційні функції

Введемо зв'язні кореляційні функції (кумулянти), що включають в себе як об'ємні, так і поверхневі поля ($N, M, I, I_1 \geq 0$):

$$G^{(N,M;I,I_1)}(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{X}_l\}, \{\mathbf{R}_m\}; m_0^2, u_0, c_0) = \left\langle \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{x}_i) \prod_{j=1}^M \phi_s(\mathbf{r}_j) \prod_{l=1}^I \frac{1}{2} [\phi(\mathbf{X}_l)]^2 \prod_{m=1}^{I_1} \frac{1}{2} [\phi_s(\mathbf{R}_m)]^2 \right\rangle_{\text{cum}} \quad (3.10)$$

Далі використовуватимемо також скорочені позначення

$$G^{(N,M)} \equiv G^{(N,M;I=0,I_1=0)}. \quad (3.11)$$

Для перенормування кореляційних функцій, що включають поверхневі поля, нам необхідно ввести нові ренормалізаційні фактори Z_1 і $Z_{\phi_s^2}$, що визначають взаємозв'язки між початковими і перенормованими поверхневими полями,

$$\phi_s = [Z_\phi Z_1]^{1/2} [\phi_s]_R, \quad (\phi_s)^2 = [Z_{\phi_s^2}]^{-1} [(\phi_s)^2]_R. \quad (3.12)$$

Також необхідно визначити перенормовану поверхневу константу зв'язку c , зв'язану з початковим параметром теорії c_0 через зміщення δc . Таким чином, перенормовані кореляційні функції визначатимуться співвідношеннями

$$G_R^{(N,M;I,I_1)}(; m, u, c) = Z_\phi^{-(N+M)/2} Z_1^{-M/2} [Z_{\phi^2}]^I [Z_{\phi_s^2}]^{I_1} G^{(N,M;I,I_1)}(; m_0, u_0, c_0). \quad (3.13)$$

Вони матимуть скінченні границі при $\Lambda \rightarrow \infty$ після відповідної репараметризації величин m_0 , u_0 і c_0 , що входять в початковий ЕГ (3.1).

Для визначення нових ренормгрупових функцій Z_1 , $Z_{\phi_s^2}$ і c ми записуємо нові умови нормування для поверхневих кореляційних функцій:

$$\hat{G}_R^{(0,2)}(p; m, u, c) \Big|_{p=0} = \frac{1}{m+c}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \hat{G}_R^{(0,2)}(p; m, u, c) \Big|_{p=0} = -\frac{1}{2m(m+c)^2}, \quad (3.15)$$

$$\hat{G}_R^{(0,2;0,1)}(p, P; m, u, c) \Big|_{p=P=0} = (m+c)^{-2}. \quad (3.16)$$

Рівняння (3.14) разом з визначенням (3.13) визначає перенормовану поверхневу константу зв'язку c і її взаємозв'язок з вихідним параметром c_0 . Разом з (3.5) ця умова нормування забезпечує те, що спеціальний поверхневий фазовий перехід відбувається при $m = c = 0$. Звичайний перехід відповідає границі $m \rightarrow 0$ при фіксованому $c > 0$. У цьому режимі перенормована локальна поверхнева сприйнятливість

$$\chi_{11R} \equiv \hat{G}_R^{(0,2)}(p=0) \rightarrow c^{-1} \quad (3.17)$$

і залишається, як і повинно бути, скінченною в точці переходу.

Дві останні умови нормування (3.15) і (3.16) визначають нові поверхневі ренормалізаційні фактори Z_1 і $Z_{\phi_s^2}$:

$$Z_1 Z_\phi = -2m(m+c)^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \hat{G}^{(0,2)}[p; m_0(m, u), u_0(m, u), c_0(c, m, u)] \Big|_{p=0}, \quad (3.18)$$

$$Z_{\phi_s^2}^{-1} = -[Z_1 Z_\phi]^{-1} (m+c)^2 \frac{\partial}{\partial c_0} \hat{G}^{(0,2)}[0; m_0(m, u), u_0(m, u), c_0] \Big|_{c_0=c_0(c, m, u)}. \quad (3.19)$$

Підкреслимо, що наш вибір “поверхневих” умов нормування (3.14) — (3.16) передбачає, що поверхневі Z -фактори, взагалі кажучи, є функціями як перенормованої константи зв'язку, так і безрозмірної змінної c/m . Таке загальне формулювання дозволяє, в принципі, охопити як граничні випадки спеціального і звичайного фазових переходів, так і кросоверну область між ними.

3.2.3. Структура сингулярностей теорії збурень

Сформульований нами підхід до дослідження поверхневої критичної поведінки в напівбезмежних системах дозволяє уникнути суттєвих труднощів, які явно проявляли б себе при спробі побудувати безмасову (критичну) теорію поверхневих переходів при $d = 3$ чи, взагалі кажучи, для вимірностей d , не близьких до $d = 4$.

Як відомо [299], величина m_{0c}^2 неперенормованої маси при $T = T_c$, необхідна для побудови критичної суперперенормованої теорії при $d < 4$, має загальний вигляд

$$m_{0c}^2 = u_0^{2/\varepsilon} \mathcal{M}(\varepsilon) , \quad (3.20)$$

де функція $\mathcal{M}$ має прості полюси при $\varepsilon = \varepsilon_k \equiv 2/k$, $k \in N$, тобто, при $d \geq 2$. Подібно, для напівбезмежних систем спеціальна величина поверхневої константи зв'язку [61]

$$c_0^{\text{sp}} = u_0^{1/\varepsilon} \mathcal{C}(\varepsilon) , \quad (3.21)$$

де функція $\mathcal{C}$ має полюси при $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}$ а отже, при $d \geq 2$.³ Через неаналітичну залежність величин m_{0c}^2 і c_0^{sp} від константи зв'язку u_0 функції $\mathcal{M}$ і $\mathcal{C}$ неможливо визначити за допомогою теорії збурень.

Дійсно, розраховуючи явно [34, п. 2.3] однопетльовий внесок $O(u_0)$ в розкладі $\chi_{11}^{-1} = [\hat{G}^{(0,2)}(p = 0)]^{-1}$, ми виділяємо полюс, що з'являється при $\varepsilon = 1$. Мінімальне віднімання цього полюса шляхом зміщення поверхневого параметра δc_0 приводить до появи логарифма константи зв'язку u_0 , так що утворена в результаті функція не є регулярною при $u_0 = 0$.

Проблеми такого характеру не виникають у вибраному нами підході, яким ми користуємося і надалі.

³Специфічні залежності від ε степеневих показників u_0 в (3.20) і (3.21) базуються на підрахунку вимірностей: імпульсна вимірність $[u_0] = \varepsilon$, а константа зв'язку u_0 залишається єдиним вимірним параметром у вимірно регуляризованій безмасовій теорії з безмежним імпульсом обрізання і $\varepsilon > 0$.

3.3. Спеціальний перехід

Для опису спеціального переходу ми працюємо в околі мультикритичної точки, яка досягається при $c = 0$. Покладання $c = 0$ в нашій теорії не приводить до будь-яких проблем, за умови, що попередньо було виконано перенормування поверхневої константи зв'язку c_0 . При $c = 0$ ми отримуємо ренормалізаційні фактори

$$Z_1^{\text{sp}}(u) Z_\phi(u) = -2m^3 \frac{\partial}{\partial p^2} \hat{G}^{(0,2)}[p; m_0(m, u), u_0(m, u), c_0^{\text{sp}}(m, u)] \Big|_{p=0}, \quad (3.22)$$

$$\left[Z_{\phi_s^2}^{\text{sp}}(u) \right]^{-1} = -m^2 [Z_1^{\text{sp}}(u) Z_\phi(u)]^{-1} \frac{\partial}{\partial c_0} \hat{G}^{(0,2)}[0; m_0(m, u), u_0(m, u), c_0] \Big|_{c_0=c_0^{\text{sp}}} \quad (3.23)$$

за допомогою яких визначаються перенормовані кореляційні функції $G_{\text{R,sp}}^{(N,M;I,I_1)}$ при $c = 0$ (чи $c_0 = c_0^{\text{sp}}$ — див. р-ня (3.13)). Ренормалізаційні фактори $Z_1^{\text{sp}}(u)$ і $Z_{\phi_s^2}^{\text{sp}}(u)$ забезпечують скінченність перенормованої теорії при спеціальному переході і в його околі.

3.3.1. Рівняння Каллана-Симанзіка

Критична поведінка при спеціальному переході отримується шляхом дослідження асимптотичної поведінки результуючої масивної теорії з $c = 0$ в границі $m \rightarrow 0$. У цьому випадку перенормовані кореляційні функції $G_{\text{R,sp}}^{(N,M)}$ задовольняють диференціальним рівнянням з частковими похідними, які є узагальненням відомих рівнянь Каллана-Симанзіка (див. напр. [77]),

$$\left[m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(u) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{N+M}{2} \eta_\phi(u) + \frac{M}{2} \eta_1^{\text{sp}}(u) \right] G_{\text{R,sp}}^{(N,M)}(; m, u) = \Delta G_R, \quad (3.24)$$

де

$$\Delta G_R \equiv -[2 - \eta_\phi(u)] m^2 \int_V d^d X G_{\text{R,sp}}^{(N,M;1,0)}(; m, u). \quad (3.25)$$

Коефіцієнтні ренормгрупові функції у цих рівняннях є

$$\beta(u) = m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_0 u, \quad (3.26)$$

$$\eta_\phi(u) = m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_0 \ln Z_\phi(u) = \beta(u) \frac{d \ln Z_\phi(u)}{du} \quad (3.27)$$

i

$$\eta_1^{\text{sp}}(u) = m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_0 \ln Z_1^{\text{sp}}(u) = \beta(u) \frac{d \ln Z_1^{\text{sp}}(u)}{du} . \quad (3.28)$$

Перші дві з них — стандартні об'ємні функції, а $\eta_1^{\text{sp}}(u)$ — додаткова, специфічна для проблеми, що розглядається. Символ $|_0$ означає, що похідні беруться при фіксованих неперенормованих параметрах (і імпульсі обрізання Λ). Для дослідження асимптотичної границі достатньо розглядати однорідні рівняння (3.24) з $\Delta G_R = 0$.

Для визначення кросоверного показника Φ потрібно розглядати відхилення від мультикритичної точки, $\Delta c_0 = c_0 - c_0^{\text{sp}}$, і виконати розклад кореляційних функцій до першого порядку за цим малим відхиленням. При цьому не виникають інфрачервоні розбіжності оскільки теорія, що використовується, є масивною. Аналогом величини Δc_0 у перенормованій теорії виступатиме

$$\Delta c \equiv \left[Z_{\phi_s^2}^{\text{sp}}(u) \right]^{-1} \Delta c_0 . \quad (3.29)$$

Перенормовані кореляційні функції залежатимуть від додаткової безрозмірної змінної

$$c \equiv \Delta c / m , \quad (3.30)$$

а ренормгрупові рівняння для них матимуть у лівій частині додатковий диференціальний оператор

$$- [1 + \eta_c^{\text{sp}}(u)] c \frac{\partial}{\partial c} , \quad (3.31)$$

з новою коефіцієнтною функцією

$$\eta_c^{\text{sp}}(u) = m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_0 \ln Z_{\phi_s^2}^{\text{sp}}(u) = \beta(u) \frac{d}{du} \ln Z_{\phi_s^2}^{\text{sp}}(u) . \quad (3.32)$$

3.3.2. Скейлінгова поведінка в околі спеціального переходу

Розв’язки узагальнених рівнянь Каллана-Симанзіка (3.24) визначають асимптотичні скейлінгові форми кореляційних функцій поблизу мультикритичної точки. Ми використовуємо відомі співвідношення об’ємної масивної теорії поля

$$m \sim (m_0^2 - m_{0c}^2)^\nu \sim \tau^\nu, \quad (3.33)$$

$$Z_\phi \sim (u - u^*)^{\eta/\omega} \sim m^\eta, \quad (3.34)$$

де $\tau \equiv (T - T_c)/T_c$ — мале відносне відхилення від критичної температури, а ν — критичний показник кореляційної довжини. Як звичайно, $u - u^* \sim m^\omega$, де $\omega = \beta'(u^*) > 0$ — критичний показник поправок до скейлінгу, а η — малий критичний індекс.

Аналогічним чином поведуть себе і нові “поверхневі” Z -фактори:

$$Z_1^{\text{sp}} \sim (u - u^*)^{\eta_1^{\text{sp}}(u^*)/\omega} \sim m^{\eta_1^{\text{sp}}(u^*)}, \quad (3.35)$$

$$Z_c^{\text{sp}} \sim (u - u^*)^{\eta_c^{\text{sp}}(u^*)/\omega} \sim m^{\eta_c^{\text{sp}}(u^*)} \quad (3.36)$$

при $u \rightarrow u^*$ разом з $m \rightarrow 0$. Використання цих асимптотичних залежностей приводить до співвідношень

$$\Delta_c \sim m^{-\eta_c^{\text{sp}}(u^*)} \Delta_{c_0}, \quad c \sim m^{-[1+\eta_c^{\text{sp}}(u^*)]} \Delta_{c_0}, \quad (3.37)$$

з яких випливає ідентифікація скейлінгової змінної $\tau^{-\Phi} \Delta_{c_0}$ і кросоверного показника

$$\Phi = \nu[1 + \eta_c^{\text{sp}}(u^*)]. \quad (3.38)$$

З розв’язків рівнянь Каллана-Симанзіка і наведених вище результатів випливають наступні асимптотичні скейлінгові форми кореляційних функцій в околі спеціального переходу:

$$G^{(N,M)}(\mathbf{x}, \mathbf{r}; m_0, u_0, c_0) \sim m^{(N\beta + M\beta_1^{\text{sp}})/\nu} \Psi^{(N,M)}\left(m\mathbf{x}, m\mathbf{r}, m^{-\Phi/\nu} \Delta_{c_0}\right). \quad (3.39)$$

Тут β і β_1^{sp} — стандартні об’ємний і поверхневий показники відповідних намагніченостей. Останній пов’язаний з поверхневим кореляційним показником $\eta_{\parallel}$ скейлінговим співвідношенням

$$\beta_1 = \frac{\nu}{2} (d - 2 + \eta_{\parallel}) , \quad (3.40)$$

де у випадку спеціального переходу $\eta_{\parallel}^{\text{sp}}$ визначається через ренормгрупову функцію $\eta_1^{\text{sp}}(u)$:

$$\eta_{\parallel}^{\text{sp}} = \eta(u^*) + \eta_1^{\text{sp}}(u^*) . \quad (3.41)$$

3.3.3. Ренормгрупові функції — явні вирази

Відповідно до сформульованої вище загальної схеми перенормувань ми виконали явні розрахунки ренормгрупових функцій, що визначають поверхневі критичні показники спеціального переходу. Було використано двопетльове наближення масивної теорії поля безпосередньо у фізичній вимірності простору $d = 3$. Громізких деталей розрахунків за теорією збурень та обчислень відповідних інтегралів Фейнмана ми не наводимо, вони докладно описані в роботі [34]. Зупинимось на наших результатах.

Двопетльові ренормгрупові η -функції, що безпосередньо визначають критичні показники спеціального переходу, є

$$\eta_{\parallel}^{\text{sp}}(u) = -\frac{n+2}{2(n+8)}u + \frac{12(n+2)}{(n+8)^2} \left[2A - \frac{n+2}{6} (1 - \ln 2) \ln 2 + \frac{n-10}{48} \right] u^2 + O(u^3) \quad (3.42)$$

і

$$\begin{aligned} \eta_c^{\text{sp}}(u) = & -\frac{n+2}{n+8} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) u - \frac{24(n+2)}{(n+8)^2} \left[A - B - \frac{n+1}{2} \ln 2 \right. \\ & \left. + \frac{n+2}{3} \ln^2 2 + \frac{17n+22}{96} \right] u^2 + O(u^3), \end{aligned} \quad (3.43)$$

де $A = 0.202428$ і $B = 0.678061$ — чисельні значення інтегралів Фейнмана, пов’язаних з двопетльовою діаграмою з трьома еквівалентними внутрішніми лініями, які не вдалося розрахувати аналітично, на відміну від усіх інших внесків.

3.3.4. Поверхневі критичні показники спеціального переходу

Виходячи з розкладів (3.42) і (3.43) для $\eta_{\parallel}^{\text{sp}}(u)$ і $\eta_c^{\text{sp}}(u)$, а також відомих об'ємних функцій $\eta(u)$ і $\nu(u)$ (див. (2.22), (2.25)–(2.26)) ми генеруємо аналогічні ряди теорії збурень для інших поверхневих показників, використовуючи відомі скейлінгові співвідношення [115]

$$\Delta_1 = \frac{\nu}{2} (d - \eta_{\parallel}) , \quad (3.44)$$

$$\eta_{\perp} = \frac{\eta + \eta_{\parallel}}{2} , \quad (3.45)$$

$$\beta_1 = \frac{\nu}{2} (d - 2 + \eta_{\parallel}) , \quad (3.46)$$

$$\gamma_{11} = \nu (1 - \eta_{\parallel}) , \quad (3.47)$$

$$\gamma_1 = \nu (2 - \eta_{\perp}) , \quad (3.48)$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta}{\beta_1} = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta_{\parallel}} , \quad (3.49)$$

$$\delta_{11} = \frac{\Delta_1}{\beta_1} = \frac{d - \eta_{\parallel}}{d - 2 + \eta_{\parallel}} , \quad (3.50)$$

$$\alpha_1^{\text{sp}} = \alpha + \nu - 1 + \Phi = 1 - \nu [d - 2 - \eta_c^{\text{sp}}(u^*)] , \quad (3.51)$$

$$\alpha_{11}^{\text{sp}} = \alpha + \nu - 2 + 2\Phi = -\nu [d - 3 - \eta_c^{\text{sp}}(u^*)] . \quad (3.52)$$

Зауважимо, що скейлінгові співвідношення (3.44)–(3.50) виконуються не тільки для поверхневих критичних показників спеціального переходу. Вони справедливі також і в випадку звичайного переходу, і будуть використовуватися для виводу відповідних показників у розд. 3.4 і 3.5.

Як відомо з більш дослідженої об'ємної теорії, розклади такого типу є асимптотичними. Для отримання надійних чисельних оцінок критичних показників з таких рядів, до них необхідно застосовувати спеціальні процедури пересумування. Для кожного ряду теорії збурень (3.44)–(3.52) і для оберненого йому ряду ми будемо відповідну таблицю Паде, а також, де це можливо, виконуємо пересумування типу Паде-Бореля. Результати чисельних розрахунків наведені у вигляді таблиць у роботах [34, 61, 74], поряд із докладним описом способів їх отримання. Тут, у Таблиці 3.1 ми згадуємо тільки деякі приклади наших чисельних оцінок,

порівнюючи їх з результатами інших робіт, отриманими переважно чисельними методами типу Монте Карло, а додаткові дані — до 2004 р. — містяться в таблиці 3 огляду [300].

Табл. 3.1. Величини поверхневих критичних показників спеціального переходу у тривимірних полімерних ($n = 0$) та ізінгівських ($n = 1$) системах станом на 1998 рік.

	$\eta_{\parallel}$	$\eta_{\perp}$	β_1	γ_{11}	γ_1	Φ
	<u>$n = 0$</u>					
[34, 61, 74]	-0.133	-0.053	0.255	0.666	1.207	0.518
[301] 1988				0.805(15)	1.304(6)	0.530(7)
[302] 1994				0.714(6)	1.230(2)	0.496(4)
	<u>$n = 1$</u>					
[34, 61, 74]	-0.165	-0.067	0.263	0.734	1.302	0.539
[303] 1990			0.18(2)	0.96(9)	1.41(14)	0.59(4)
[304] 1992			0.22			0.74
[305] 1993			0.237(5)			0.461(15)
[306] 1995			0.2375(15)	0.788(1)	1.328(1)	

Наша чисельна оцінка критичного показника поверхневої теплоємності $\alpha_{11}^{\text{sp}}(n = 1) = -0.182$ означає виконання нерівності

$$\alpha_{11}^{\text{sp}} < 0 \quad (3.53)$$

для ізінгівських систем. Ця нерівність є, фактично, критерієм несуттєвості [307] слабкої короткосяжно корельованої замороженої неупорядкованості на поверхні для систем такого типу у тривимірному просторі при спеціальному переході. Цей фізичний висновок, зроблений у нашій статті [34], підтверджений симуляціями Монте Карло в [308].

Наші результати, отримані для кросоверного показника $\Phi(n)$ зі скейлінгових співвідношень, $\Phi(0) = 0.518$ (клас універсальності полімерних систем), і $\Phi(1) = 0.539$ (клас універсальності моделі Ізінга) добре узгоджувалися з найновішими результатами комп'ютерного моделювання на час виконання робіт [34, 61, 74]: $\Phi(0) = 0.530 \pm 0.007$ [301], $\Phi(0) = 0.496 \pm 0.005$ [302], і $\Phi(1) = 0.461 \pm 0.015$

[305, 309]. Вони суттєво покращували попередні, явно завищені оцінки [115, 124], виведені з ε -розкладу для $\Phi(n)$ прямою підстановкою величини $\varepsilon = 1$, $\Phi(0) \approx 0.67$ і $\Phi(1) \approx 0.68$.

Згодом однак виявилось, що насправді найкращими теоретичними оцінками кросоверного показника Φ є не згадані вище $\Phi(0) = 0.518$ і $\Phi(1) = 0.539$, а результати пересумувань за Паде-Борелем безпосередніх рядів теорії збурень масивної теорії при $d = 3$ для $\Phi(n)$, а саме

$$\Phi(0) = 0.474 \quad \text{і} \quad \Phi(1) = 0.463. \quad (3.54)$$

Ці величини записані у Таблицях 3 і 4 нашої роботи [34] у стовпчиках, названих R і R_i^{-1} .

В [34] ми також показали, що подібні чисельні дані отримуються і з ε -розкладу для $\Phi(n)$, виведеного в [124], за допомогою аналогічних пересумувань Паде-Бореля (див. формули (6.7)–(6.9) і Таблицю 7 в [34]):

$$\Phi(0) = 0.482, \quad 0.483 \quad \text{і} \quad \Phi(1) = 0.474, \quad 0.475. \quad (3.55)$$

Зауважимо, що в обидвох випадках (3.54) та (3.55) виконується нерівність

$$\Phi(0) > \Phi(1),$$

яка впливає з аналізу високоточних даних сучасного комп'ютерного моделювання (див. Таблицю 3.2), але не виконується для пари чисел $\Phi(0) = 0.518$ і $\Phi(1) = 0.539$, яку ми вважали найкращою в 1998 році.

Насправді, з часу опублікування роботи [34] і до останніх років визначенню величини кросоверного показника Φ приділялася дуже велика увага [300, 310–316]. При цьому особливий інтерес цей показник представляє у випадку полімерних систем [310–312, 314, 316]. У відповідній літературі точилася багатолітня дискусія щодо його величини, зокрема, відносно класичного значення 0.5 (див. відповідний розділ в огляді [314]).

У Таблиці 3.2 ми даємо перелік чисельних оцінок кросоверного показника $\Phi(n)$, отриманих протягом останніх 10-15 років і порівнюємо їх з нашими резуль-

Табл. 3.2. Кросоверний показник $\Phi(n)$ за даними роботи [34] і новіші результати комп'ютерного моделювання

$n = 0$	[34] $d=3$	[34] ε -розкл	[310] 2004	[311] 2004	[312] 2005	[316] 2013
$\Phi(0)$	0.474	0.482	0.59	0.5005(36)	0.484(2)	0.483(3)
$n = 1$	[34] $d=3$	[34] ε -розкл			[313] 2005	[315] 2011
$\Phi(1)$	0.463	0.474			0.451(1)	0.452(2)
$n = 2$	[34] $d=3$	[34] ε -розкл			[313] 2005	
$\Phi(2)$	—	—			0.407	

татами (3.54) та (3.55). На даний час для кросоверного показника $\Phi(0)$ найкращими вважаються результати робіт [312] і [316] в останніх двох стовпчиках таблиці, які є суттєво меншими за більш ранні оцінки, і, зокрема, меншими за $1/2$. Вони є дуже близькими до наших значень $\Phi(0)$, наведених у лівій частині таблиці. Те ж саме можна сказати і про кросоверний показник $\Phi(1)$. За даними Таблиці 3.2 ми бачимо, що із зростанням числа компонент параметра порядку величина $\Phi(n)$ зменшується. Ця тенденція спостерігається як у результатах чисельних експериментів, так і в наших даних. При $n = 2$ кросоверний показник Φ нами не розраховувався, оскільки згідно з теоремою Мерміна-Вагнера-Гоемберга, двовимірна поверхня тривимірної напівбезмежної системи не може утворити фази із спонтанним порушенням неперервної симетрії при $T > 0$, а отже при $n = 2$ і $d = 3$ класичний спеціальний перехід відсутній.

На завершення зауважимо, що в недавній роботі [44] розглядалися специфічні переходи в тривимірних напівбезмежних n -векторних моделях з $O(n)$ -симетричним параметром порядку, на поверхні яких при $n = 2$ і певній температурі відбувається впорядкування типу Березинського-Костерліца-Таулеса. Подібні явища спостерігалися також в чисельних експериментах типу Монте Карло при дослідженні випадку $d = n = 3$ [45].

3.3.5. Довільні вимірності простору: явний розрахунок

Оскільки наша масивна теорія є вільною від інфрачервоних розбіжностей, вона може застосовуватися для всіх вимірностей простору d , $d_\ell(n) < d < 4$, що представляють інтерес. Загальні вирази для ренормгрупових функцій з довільним d можливо отримати явно в однопетльовому наближенні [74]. Для випадку спеціального переходу ми маємо:

$$\eta_1^{\text{sp}}(u^*) = -\frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (3.56)$$

і

$$\eta_c^{\text{sp}}(u^*) = \frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[1 - 2^{\frac{1+\varepsilon}{2}} {}_2F_1\left(\frac{3-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}; \frac{3+\varepsilon}{2}; \frac{1}{2}\right) \right], \quad (3.57)$$

де $\varepsilon = 4-d > 0$ не обов'язково безмежно мале, а ${}_2F_1(\dots)$ - звичайна гіпергеометрична функція Гауса. З наших формул при $\varepsilon \rightarrow 0$ відтворюються відомі результати ε -розкладу. А при $d = 3$ простою підстановкою $\varepsilon = 1$ можна отримати чисельні оцінки

$$\eta_1^{\text{sp}}(n=0) = \eta_{\parallel}^{\text{sp}}(n=0) = -\frac{1}{8} \simeq -0.13, \quad (3.58)$$

$$\eta_1^{\text{sp}}(n=1) = \eta_{\parallel}^{\text{sp}}(n=1) = -\frac{1}{6} \simeq -0.17 \quad (3.59)$$

і

$$\eta_c^{\text{sp}}(n=0) = \frac{1}{8} (1 - 4 \ln 2) \simeq -0.22, \quad (3.60)$$

$$\eta_c^{\text{sp}}(n=1) = \frac{1}{6} (1 - 4 \ln 2) \simeq -0.30. \quad (3.61)$$

Величини, отримані в цьому найпростішому наближенні для η_1^{sp} , дуже добре узгоджуються з результатами наших складних двопетльових розрахунків. Гіршим є узгодження у випадку η_c^{sp} : як виявляється, ряд теорії збурень для цієї функції поводить себе набагато гірше, і для надійних чисельних оцінок необхідно переходити до вищих наближень і застосовувати спеціальні методи пересумувань.

3.4. Звичайний перехід. Особливості теоретичного опису

Як вже згадувалося в розділі 3.2.2, у випадку звичайного переходу необхідно розглядати граничний режим $m \rightarrow 0$ при скінченному фіксованому $c > 0$, тобто при $c/m \rightarrow \infty$. Це пов'язане з відомою трудністю. Справа в тому, що завдяки граничній умові Діріхле,

$$\phi(\mathbf{r}, z)|_{z=0} \equiv \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.62)$$

якій задовольняють поверхневі поля при звичайному переході, в границі $c/m = \infty$ кореляційні функції $G^{(N,M)}$ з $M > 0$, що включають хоч одне поле на поверхні, то-тожньо обертаються в нуль. Але, оскільки при граничних умовах Діріхле ведучим “оператором” поверхневого операторного розкладу (boundary-operator expansion BOE) [115, 125]⁴ поля $\phi(\mathbf{r}, z \rightarrow 0)$ є нормальна похідна цього поля на поверхні

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right|_{z=0} \equiv \partial_n \phi(\mathbf{r}), \quad (3.63)$$

то необхідна інформація може бути отримана з розгляду нових кумулянтних середніх

$$\mathcal{G}^{(N,M)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{r}_M) \equiv \left\langle \left[\prod_{j=1}^N \phi^{a_j}(\mathbf{x}_j) \right] \left[\prod_{k=1}^M \partial_n \phi^{b_k}(\mathbf{r}_k) \right] \right\rangle_c. \quad (3.64)$$

Кореляційні функції $\mathcal{G}^{N,M}$ не зникають при $c_0 = \infty$, і дають таким чином можливість [61] визначити скейлінгову вимірність поля $\partial_n \phi(\mathbf{r})$, пов'язану з критичним показником поверхневих кореляцій при звичайному переході, $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}$. При цьому як в початковій, так і в перенормованій теоріях поверхневі поля задовольняють ГУ Діріхле, справедливим в нерухомій точці, що описує звичайний перехід.

Схема розрахунку наступна. Вводиться перенормоване поверхневе поле

$$(\partial_n \phi)_R = [Z_{1,\infty} Z_\phi]^{-1/2} \partial_n \phi \quad (3.65)$$

і перенормовані кореляційні функції

$$\hat{\mathcal{G}}_{\infty,R}^{(N,M)}(\{\mathbf{p}\}; \{z_j\}; m, u) = Z_\phi^{-(N+M)/2} Z_{1,\infty}^{-M/2} \left[\hat{\mathcal{G}}_\infty^{(N,M)}(\{\mathbf{p}\}; \{z_j\}) - \delta_{N,0}^{M,2} \hat{\mathcal{G}}_\infty^{(0,2)}(0) \right] \quad (3.66)$$

⁴В термінах перенормованих величин цей розклад має вигляд $\phi_R(\mathbf{r}, z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} C_{\partial_n \phi}(z) (\partial_n \phi)_R(\mathbf{r})$

Новий ренормалізаційний фактор $Z_{1,\infty}(u)$, що перенормовує величину $\partial_n \phi$, ми визначаємо з умови нормування

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \hat{\mathcal{G}}_{\infty, R}^{(0,2)}(p; m, u) \Big|_{p=0} = -\frac{1}{2m}, \quad (3.67)$$

права сторона якої відповідає нульовому порядку теорії збурень для кореляційної функції $\hat{\mathcal{G}}_{\infty, R}^{(0,2)}(p; m, u)$. Звідси випливає, що

$$Z_{1,\infty} Z_\phi = -\lim_{p \rightarrow 0} \frac{m}{p} \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{G}^{(0,2)}(p; m, u). \quad (3.68)$$

У роботі [34], використовуючи асимптотичний аналіз при $c/m \rightarrow \infty$ наших загальних умов нормування з розділу 3.2.2, ми показали, що Z -фактор $Z_{1,\infty}(u)$ і Z -фактор $Z_1(u, c/m)$, що відповідає за перенормування поверхневих полів ϕ_s , пов'язані між собою нетривіальним співвідношенням

$$Z_{1,\infty}(u) = Z_\phi^{-2}(u) \lim_{c/m \rightarrow \infty} [Z_1(u, c/m)]^{-1}, \quad (3.69)$$

яке залишається справедливим в будь-якому порядку теорії збурень. З використанням цього співвідношення продемонстровано також, що в режимі $c/m \rightarrow \infty$ кожне поверхнєве поле $\phi(\mathbf{r})$ вносить свій фактор $m^{(d-2+\eta_\parallel^{\text{ord}})/2}$ в асимптотичну поведінку кореляційних функцій $G^{(N,M)}$ з (3.11). Таким чином показано, що в околі звичайного переходу кореляційні функції $\mathcal{G}_\infty^{(N,M)}$ з M нормальними похідними $\partial_n \phi$ і $G^{(N,M)}$ з M поверхневими полями $\phi(\mathbf{r})$ мають однакову асимптотичну критичну поведінку, а запропонована нами нова “ c -залежна” схема перенормувань успішно працює у всіх необхідних граничних режимах.

3.4.1. Критичні показники і їх значення в тривимірному просторі

Для практичного розрахунку поверхневих критичних показників звичайного переходу необхідно розглянути парну кореляційну функцію $\hat{\mathcal{G}}_\infty^{(0,2)}(p; m_0, u_0)$ і її перенормування. Діаграмний розклад цієї функції у двопетльовому наближенні має вигляд

$$\mathcal{G}_\infty^{(0,2)}(p; m_0, u_0) = -\kappa_0 + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---}. \quad (3.70)$$

Внутрішнім лініям відповідають пропагатори Діріхле

$$\hat{G}_D(p; z, z') = \frac{1}{2\kappa_0} \left[e^{-\kappa_0|z-z'|} - e^{-\kappa_0(z+z')} \right] \quad \text{з} \quad \kappa_0 = \sqrt{p^2 + m_0^2}, \quad (3.71)$$

які є границями вільних пропагаторів (3.2) при $c_0 \rightarrow \infty$. Вільні кінці пунктирних зовнішніх ліній “лежать” на поверхні $z = 0$; коли ці лінії приєднані до внутрішньої точки з координатою z_i , то їм відповідає множник $e^{-\kappa_0 z_i}$. Типові об’ємні сингулярності на близьких відстанях, які є присутніми в графічному розкладі (3.70), віднімаються після перенормування маси $m_0^2 \rightarrow m^2$ згідно з (2.5) і (2.30). Після цих віднімань внески від останніх двох діаграм з (3.70) взаємно знищуються, що явно продемонстровано в додатку “В” роботи [34].

Далі без особливих зусиль ми можемо скористатися правилом (3.68), щоб знайти комбінацію Z -факторів $Z_{1,\infty} Z_\phi$,

$$\begin{aligned} Z_{1,\infty} Z_\phi = & 1 + \frac{n+2}{12} u_0 D(m^2; 3) - 2m \frac{\partial}{\partial p^2} \Big|_{p=0} \left\{ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\kappa} \frac{n+2}{18} u_0^2 \left[J(m^2, 0; 3) - m^2 \frac{\partial}{\partial k^2} J(m^2, k^2; 3) \Big|_{k^2=0} \right] \right\} + O(u_0^3). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Як і в початковій формулі (3.70), зображена тут діаграма повинна розраховуватися в напівбезмежному просторі з використанням пропагаторів Діріхле, $\kappa = \sqrt{p^2 + m^2}$, а позначення D і J відповідають *об’ємним* інтегралам Фейнмана з рівнянь (2.32) і (2.29) пункту 2.3. З використанням останньої формули ми визначаємо ренормгрупову функцію

$$\eta_{1,\infty}(u) = m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_0 \ln Z_{1,\infty}(u) = \beta(u) \frac{\partial \ln Z_{1,\infty}(u)}{\partial u} \quad (3.73)$$

і відповідний показник поверхневих критичних кореляцій

$$\eta_{\parallel}^{\text{ord}} = 2 + \eta_{1,\infty}(u^*) + \eta_\phi(u^*) . \quad (3.74)$$

Таким чином, у двопетльовому наближенні явний вираз для ренормгрупової функції $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}(u)$, яка визначає поверхневий критичний показник $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}$ звичайного

переходу, має вигляд

$$\eta_{\parallel}^{\text{ord}}(u) = 2 - \frac{n+2}{2(n+8)}u - \frac{24(n+2)}{(n+8)^2} \left(C + \frac{n+14}{96} \right) u^2 + O(u^3), \quad (3.75)$$

де $C = -0.105063$ — чисельне значення комбінації двопетльових інтегралів Фейнмана, яку нам не вдалося розрахувати в явному вигляді в роботі [34]. Ряди теорії збурень для інших поверхневих показників звичайного переходу впливають із скейлінгових співвідношень (3.44)–(3.50). Остаточні чисельні результати для критичних показників отримуються з цих розкладів в нерухомій точці $u^* = u^*(n)$, яка відома в даному наближенні з робіт [92, 264].

Табл. 3.3. Величини поверхневих критичних показників звичайного переходу в тривимірних системах при $n = 0$ та $n = 1$. Дані до 1998 р.

	$\eta_{\parallel}$	$\eta_{\perp}$	β_1	γ_{11}	γ_1	δ_1
$n = 0$						
[34, 61]	1.660	0.843	0.782	−0.388	0.680	1.870
[301] Meirovitch Livne 1988				−0.38(2)	0.687(5)	
[317] De’Bell... 1990				−0.353(17)	0.694(4)	
[302] Hegger Grassberger ’94				−0.383(5)	0.679(2)	
$n = 1$						
[34, 61]	1.528	0.779	0.796	−0.333	0.769	1.966
[318] Kikuchi Okabe 1985			0.79(2)			2.00(8)
[303] Landau Binder 1990			0.78(2)		0.78(6)	
[306] Ruge Wagner 1995			0.807(4)		0.760(4)	
[308] Pleimling Selke 1998			0.80(1)	−0.25(10)	0.78(5)	

У своїй більшості “показникові” ряди за степенями перенормованої константи з’язку u виявилися знакопостійними на відміну від випадку спеціального переходу розглянутого вище і, отже, непридатними для пересумувань за методом Паде-Бореля. Те ж саме стосувалося також і обернених рядів. Тому чисельні оцінки для поверхневих показників звичайного переходу були отримані переважно з аналізу Паде-апроксимант $[1/1]$. Не вдаючись у розрахункові подробиці, в Таблиці 3.3 ми наводимо (жирним шрифтом) найкращі результати наших чисельних оцінок, взяті з останніх стовпчиків таблиць 8 і 9 роботи [34]. Для порівняння

тут наведені також результати інших авторів, отримані за допомогою чисельних методів з указанням року їх публікації.

Наші оцінки $\gamma_{11}^{\text{ord}} = -0.388$ і $\gamma_1^{\text{ord}} = 0.680$ для класу універсальності полімерів ($n = 0$) прекрасно узгоджуються з найновішими в 1998р., і, очевидно, найточнішими на цей час даними розрахунків типу Монте Карло [302] $\gamma_{11}^{\text{ord}}(0) = -0.383(5)$ і $\gamma_1^{\text{ord}}(n = 0) = 0.679(2)$. Подібно, для класу універсальності ізінгівських систем наші величини $\beta_1^{\text{ord}}(1) = 0.796$ і $\gamma_1^{\text{ord}}(1) = 0.769$ є дуже близькими до оцінок методами Монте Карло [306] $0.807(4)$ і $0.760(4)$. Чисельні оцінки роботи [308] співпадають, в межах їх точності, з нашими.

В роботі [34] (див. таблиці 10 і 11) ми запропонували також чисельні оцінки аналогічної якості для поверхневих критичних показників систем з вищими вимірностями параметра порядку, $n = 2$ і $n = 3$. Наведені тут оцінки поверхневих показників при $n = 2$ і $n = 3$ добре узгоджуються з давнішими теоретичними результатами ε -розкладу, зібраними в таблиці VI (стор. 186) оглядової роботи [115]. Для прикладу беремо з цієї таблиці величину $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}(n = 2) \simeq 1.38$. Вона є дуже близькою до нашої оцінки $\simeq 1.42$, яку ми вважаємо найкращою. Для таких систем є дуже мало альтернативних літературних даних, що пов'язано, очевидно, з труднощами їх комп'ютерного моделювання. Так, на час появи роботи [34] нам була відома тільки одна стаття [319], в якій методами Монте Карло досліджувалася поверхнева критична поведінка XY-моделі (що відповідає випадку $n = 2$). В ній були отримані результати $\beta_1 = 0.84$ і $\gamma_1 \simeq 2/3$. Для цих показників ми отримали $\beta_1 = 0.810$ і $\gamma_1 = 0.851$. Для порівняння з результатами високотемпературних розкладів у випадках $n = 2$ і $n = 3$ можна звернутися до таблиці VII роботи [115] та оригінальної статті [320].

У даному контексті хочеться звернути увагу на роботу [135]. Тут для випадку $n = 3$ оцінки поверхневих критичних показників були отримані на основі вимірних розкладів як біля нижньої ($d_{\ell} = 2$), так і біля верхньої ($d^* = 4$) граничних вимірностей та їх спільної екстраполяції до $d = 3$ за допомогою двоточкових апроксимант Паде. Таким чином було знайдено $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}(n = 3) \simeq 1.39 \pm 0.02$ і

$\beta_1^{\text{ord}}(n=3) \simeq 0.84 \pm 0.01$. Наші величини $\eta_{\parallel}^{\text{ord}}(n=3) \simeq 1.34$ і $\beta_1^{\text{ord}}(n=3) \simeq 0.82$ гарно узгоджуються з даними роботи [135].

Наші чисельні оцінки добре узгоджуються також з наявними експериментальними даними. Можливі порівняння для систем з однокомпонентним параметром порядку детально обговорювалися в нашій роботі [34]. Тут ми наведемо лише один приклад для $n = 3$. Наше значення $\beta_1^{\text{ord}}(3) = 0.824$ практично співпадає з класичною експериментальною величиною $\beta_1 = 0.825_{-0.040}^{+0.025}$, отриманою у 1982р. на поверхні (100) нікелю методом дифракції низькоенергетичних спінополяризованих електронів [321].

Табл. 3.4. Величини деяких поверхневих критичних показників звичайного переходу при $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$. Теорія і чисельний експеримент.

	β_1	$y_{h_1} = \Delta_1/\nu$
$n = 1$		
[34, 61]	0.796	0.737
[313] Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	0.796(1)	0.7374(15)
[322] Lin, Zheng 2008 Monte Carlo	0.795(6)	—
[323] Hasenbusch 2011 Monte Carlo	—	0.7249(6)
[35] Gliozzi, Liendo, Meineri, Rago 2015 Bootstrap	—	0.724(2)
[36] Gliozzi 2016 Bootstrap	—	0.72558(18)
$n = 2$		
[34, 61]	0.810	0.788
[313] Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	—	0.781(2)
$n = 3$		
[34, 61]	0.824	0.825
[313] Deng, Blöte, Nightingale 2005 Monte Carlo	—	0.813(2)

Нарешті, в Таблиці 3.4 ми наводимо порівняння результатів нашої роботи [34] з даними деяких статей, що вийшли пізніше. Останні в більшості отримані методом Монте Карло, за винятком робіт 2015-16 років, де застосовувалися методи сучасного конформного бутстрапу, і які стосуються тільки випадку $n = 1$ (деякі додаткові дані можна знайти також у таблиці 2 огляду [300]). Для порівняння з результатами інших робіт, значення показника $y_{h_1} = \Delta_1/\nu$ ми обчислювали з наших даних для $\Delta_1(n)$, взятих з Таблиць 9-11 статті [34]. При цьому перера-

хунку ми використовували величини $\nu(1) = 0.630$, $\nu(2) = 0.670$ і $\nu(3) = 0.710$ для об'ємного показника ν (див. напр. огляд [324]). Як бачимо, узгодження між даними різних підходів є дуже добрим.

Наші чисельні оцінки показують також хорошу стабільність по відношенню до зміни способу остаточного підрахунку. Так, наприклад, величину $y_{h_1} = \Delta_1/\nu$ можна розрахувати безпосередньо з наших даних для кореляційного критичного показника $\eta_{||}$ за формулою $y_{h_1} = (d - \eta_{||})/2$ [34, (6.1a)]. При $n = 1$, з $\eta_{||} = 1.528$ з [34, Табл. 9] це дає $y_{h_1} = 0.736$, значення, дуже близьке до вказаного вище. Власне значення РГ y_{h_1} можна записати також як $y_{h_1} = d - 1 - \hat{\Delta}$, де $\hat{\Delta} = (d - 2 + \eta_{||})/2$ — скейлінгова вимірність головного поверхневого оператора операторного розкладу на малих відстанях від поверхні (в англomовній літературі — BOE — boundary operator expansion, див. напр., огляд в [42]). В даному випадку звичайного переходу, таким оператором є $\partial_n \phi$, нормальна похідна поля на поверхні, і при $d = 3$ формула $y_{h_1} = d - 1 - \Delta_{\partial_n \phi}$ якраз і фігурує в верхній частині таблиці 1 роботи [36]. Незрозумілим залишається тільки те, яким чином автор цієї роботи отримав, користуючись за нашими даними, число 0.714 для y_{h_1} . Рухаючись у зворотньому напрямку, з оцінки $y_{h_1} = 0.72558$ за допомогою співвідношення $\eta_{||} = d - 2y_{h_1}$, ми отримуємо $\eta_{||} = 1.5488$ для порівняння з нашим двопетльовим результатом $\eta_{||} = 1.528$.

3.5. Невпорядкованість і поверхнева критична поведінка

У роботі [68] було проведено дослідження критичної поведінки напівбезмежних систем з *об'ємною* “замороженою” невластивістю при звичайному переході. Для цієї мети був використаний метод масивної теорії поля, розроблений в [34, 61], а також розклад за малим відхиленням $\sqrt{\varepsilon}$ від верхньої граничної вимірності простору $d^* = 4$. Останній варіант розрахунку узагальнив до порядку $O(\sqrt{\varepsilon}^2)$ результати роботи [126], отримані раніше для відповідних критичних показників з точністю до $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Практичні розрахунки проводились на основі ЕГ

$$\mathcal{H}[\phi] = \int_0^\infty dz \int d^{d-1}r \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla\phi)^2 + m_0^2 |\phi|^2] + \frac{u_0}{4!} (|\phi|^2)^2 + \frac{v_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^n \phi_\alpha^4 \right\}. \quad (3.76)$$

Тут, на відміну від ЕГ, записаного в (2.1), об'ємне інтегрування проводиться у півпросторі з координатами $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z)$, де $z \geq 0$,⁵ а величина $(d-1)$ -вимірних векторів $\mathbf{r}$, паралельних до поверхні $z = 0$, залишається необмеженою. Як і раніше, розглядається векторне поле $\phi = \phi(r, z)$ з компонентами ϕ_α , $\alpha = 1, \dots, n$ в реплічній границі $n = 0$. Стандартна константа зв'язку теорії $v_0 \phi_d^4$ є додатною, $v_0 > 0$. Константа зв'язку u_0 , пов'язана з конфігураційним усередненням, є від'ємною: $u_0 < 0$. Ці самі знаки повинні мати і відповідні координати нерухомої точки (v^*, u^*) .

Як і в стандартному описі звичайного переходу в напівбезмежних системах (див. розд. 3.4), на поверхні з $z = 0$ поле $\phi(r, z)$ задовольняє граничним умовам Діріхле, тобто $\phi(r, 0) = 0$. Ця умова залишається незмінною і в перенормованій теорії, тому, як і зазвичай, при описі звичайного переходу немає потреби в явному введенні поверхневого члена в ЕГ, як це робилося в (3.1) і було необхідним для розгляду спеціального переходу.

В рамках масивної теорії поля, відповідно до розрахункової схеми запропонованої в наших роботах [34, 61], на основі ЕГ (3.76) було визначено базовий ренормалізаційний фактор $Z_{\partial\phi}$. Ця величина визначає співвідношення між нормальними похідними $\partial_n \phi$ полів на поверхні в неперенормованій і перенормованій теоріях згідно з формулою $(\partial_n \phi)_R = Z_{\partial\phi}^{-1/2} \partial_n \phi$ (у відповідній формулі (3.4) в [68] є опечатка: опущений знак мінус в показнику степеня $Z_{\partial\phi}$). Порівнюючи останнє співвідношення з (3.65), бачимо, що ренормалізаційний фактор $Z_{\partial\phi}$ відповідає добутку $Z_{1,\infty} Z_\phi$, який фігурує в цьому рівнянні.

Подальша схема розрахунку є аналогічною до представленої в розд. 3.4, всі деталі можна знайти також в [68]. У двопетльовому наближенні вона приводить до рядів другого порядку за перенормованими константами зв'язку u і v , які дають інформацію про поверхневі критичні показники. Обробка цих рядів за допомогою

⁵Ще суттєвіше обмеження інтегрування за координатою z має місце в розд. 7, див. (7.4).

апроксимант типу Паде привела в роботі [68] до наступних результатів: Для поверхневих критичних показників звичайного переходу в напівбезмежних системах з однокомпонентним параметром порядку в присутності замороженого безладу

$$\begin{aligned}\eta_{\parallel} &= 1.36, & \Delta_1 &= 0.53, & \eta_{\perp} &= 0.74, & \beta_1 &= 0.88, \\ \gamma_{11} &= -0.24, & \gamma_1 &= 0.83, & \delta_1 &= 2.1, & \delta_{11} &= 0.69.\end{aligned}\quad (3.77)$$

Отримані показники кількісно відрізняються від їх аналогів в ідеальних ізінгівських системах (див. Табл. 3.3), що, очевидно, відповідає зміні класу універсальності в таких системах при появі замороженої неупорядкованості.

В роботі [68] для розглянутих критичних показників були виведені також розклади за малим параметром $\sqrt{\varepsilon}$ у порядку $O(\sqrt{\varepsilon}^2)$. Вони покращують на один порядок результати роботи [126], отримані з точністю до $O(\sqrt{\varepsilon})$. Наприклад, для показників поверхневих кореляцій ми знайшли

$$\eta_{\parallel} = 2 - \sqrt{\frac{6\varepsilon}{53}} + \frac{756\zeta(3) - 5}{2 \cdot 53^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (3.78)$$

$$\eta_{\perp} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6\varepsilon}{53}} + \frac{378\zeta(3) - 29}{2 \cdot 53^2} \varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (3.79)$$

де $\zeta(a)$ — дзета-функція Рімана (див. (7.75) нижче). Було перевірено, що вони задовольняють скейлінговому співвідношенню $\eta_{\perp} = (\eta + \eta_{\parallel})/2$ (див. (3.45)) з правильною величиною $\eta = -\varepsilon/106 + O(\varepsilon^{3/2})$ об'ємного кореляційного показника неупорядкованих ізінгівських систем [82].

В [68, (6.8)–(6.10)] наведені також явні вирази для $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладів поверхневих показників γ_{11} , γ_1 і β_1 , отримані за допомогою скейлінгових співвідношень (3.46)–(3.48). Очевидно, всі вони відрізняються від відомих аналогічних показників чистих напівбезмежних систем ([40, 115]) і відповідають новому класу універсальності неупорядкованих систем. Чисельні оцінки для них, отримані за допомогою апроксимант Паде $[1/1]$, є наступними:

$$\eta_{\parallel} = 1.772, \quad \eta_{\perp} = 0.884, \quad \beta_1 = 0.793, \quad \gamma_{11} = -0.441, \quad \gamma_1 = 0.636. \quad (3.80)$$

Вони дещо відрізняються від величин, записаних в (3.77), але в загальному з ними узгоджуються. З огляду на те, що $\sqrt{\varepsilon}$ -розклади не відрізняються доброю

збіжністю, а ряди масивної теорії при фіксованій вимірності простору $d = 3$ зарекомендували себе добре в багатьох відомих випадках, у виборі між (3.77) і (3.80) слід, очевидно, віддавати перевагу результатам (3.77).

Зауважимо, однак, що між результатами для показника $\eta_{\parallel}$ в (3.77) і (3.80) є суттєва якісна відмінність: перший з них є меншим, а другий — більшим за $\eta_{\parallel} = 1.528$ чистої системи. Насправді, питання про те, чи критичний показник паралельних кореляцій $\eta_{\parallel}$ неупорядкованої моделі є меншим чи більшим за аналогічний показник чистої моделі є цікавим. На нього було б корисно отримати відповідь, тим більше, що таке питання може виникати в різних цікавих контекстах — див., наприклад, [325], і зокрема поклики на наші результати на стор. 7 цієї роботи.

3.6. Висновки

У третьому розділі за допомогою методів теорії поля проведене дослідження поверхневої критичної поведінки в напівбезмежних системах:

— досліджена загальна структура “поверхневих” сингулярностей в рядах перенормованої теорії збурень

— шляхом узагальнення стандартної масивної теорії поля на випадок систем, обмежених у півпросторі, розроблена загальна схема перенормувань поверхневих кореляційних функцій, яка дозволяє отримувати теорію, скінченну і застосовну при довільних вимірностях простору $d_{\ell}(n) \leq d < 4$. При цьому

- запропоновані умови нормування для перенормованих поверхневих кореляційних функцій
- визначені ренормалізаційні фактори, які перенормовують теорію спеціального і звичайного поверхневих переходів
- записані ренормгрупові рівняння типу Каллана-Симанзіка для обидвох типів переходів
- визначена скейлінгова поведінка кореляційних функцій напівбезмежних систем в околі спеціального і звичайного переходів, ідентифіковані поверхневі

критичні показники

- функціонування розробленого методу проілюстровано явними розрахунками в однопетльовому наближенні у довільних фіксованих вимірностях d
- ренормгрупові функції розраховані у двопетльовому наближенні при $d = 3$
- за допомогою пересумувань методами Паде і Паде-Бореля визначені чисельні значення поверхневих критичних показників, що характеризують спеціальний і звичайний поверхневі переходи
- проведене порівняння отриманих результатів з даними чисельних розрахунків типу Монте Карло і експериментальних робіт

Розроблений нами теоретико-польовий підхід застосований до дослідження поверхневої критичної поведінки напівбезмежних систем з об'ємною неупорядкованістю при звичайному переході. Отримано результати для поверхневих критичних показників у двопетльовому наближенні при $d = 3$. Крім цього, для цих показників виведені $\sqrt{\varepsilon}$ -розклади в порядку $\sqrt{\varepsilon}^2$.

Зроблено висновок про те, що неупорядкованість поверхні не впливає на особливості спеціального переходу, а неупорядкованість об'єму змінює показники звичайного переходу.

Отримані нами в [34] чисельні оцінки поверхневих критичних показників цитуються практично всіма роботами, присвяченими критичним явищам в напівбезмежних системах, зокрема вони використовуються в найновіших дослідженнях методами конформного бутстрапу [33, 35, 36].

РОЗДІЛ 4

СИЛЬНО АНІЗОТРОПНІ СИСТЕМИ В ТОЧЦІ ЛІФШИЦА

В наших роботах [62–66, 69], виконаних в основному на початку 2000-х років, було досягнуто значного прогресу у вивченні критичної поведінки сильно анізотропних систем у точці Ліфшица (див. п. 1.3). Зокрема, в роботах [62] і [63] ми вперше в повному обсязі сформулювали відповідну теорію в околі верхньої граничної вимірності простору $d^*(m) = 4 + m/2$. Це включало в себе розрахунок усіх критичних показників з точністю до $O(\varepsilon^2)$ (де $\varepsilon = d^*(m) - d$) в найбільш загальному випадку m -вісних ТЛ з довільним числом осей анізотропії $0 \leq m \leq d$. Були розв’язані труднощі та неузгодженості ранніх розрахунків критичних показників ТЛ. Наші результати, записані в загальному вигляді для довільних m і d , відтворювали відомі вирази для критичних показників відповідних ізотропних систем у граничних випадках $m = 0$ і $m = d$.

Ми звертаємо особливу увагу на математичну строгість і адекватність опису критичних властивостей анізотропних систем в ТЛ. З одного боку, це важливо і актуально з огляду на аналогії з іншими фізичними системами, які підпорядковуються загальним законам анізотропного скейлінгу. Адже певні їх фізичні властивості та характерні особливості математичного опису є спільними з тими, що проявляються в ТЛ. З іншого боку, це необхідно у зв’язку з появою у свій час неправильних з математичної та фізичної точок зору робіт [185–187]. Відповідним коментарям та роз’ясненням ми присвятили окремі статті [64–66].

4.1. Ефективний гамільтоніан

Теоретичний опис критичної поведінки в ТЛ базується на розгляді ЕГ типу Гінзбурга-Ландау-Вільсона [137]

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \left[\frac{\tau_0}{2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2} (\Delta_{\parallel} \phi)^2 + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right], \quad (4.1)$$

де $\phi = \phi(\mathbf{x})$ класичне n -компонентне поле параметра порядку, а взаємодія описується звичайним $O(n)$ -симетричним членом типу ϕ^4 .

Важливим тут є те, що фізичні властивості анізотропних систем, які описуються ЕГ (4.1), суттєво відрізняються вздовж різних просторових осей, і ці відмінності не можуть бути усунуті простими змінами величин параметрів теорії. Відповідно, d -вимірний координатний простір $\mathbb{R}^d$ розділяється на Евклідові підпростори $\mathbb{R}^{d-m}$ і $\mathbb{R}^m$. У теорії кількість осей анізотропії m змінюється неперервно у проміжку $0 \leq m \leq d$. Кожен радіус-вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-m} \times \mathbb{R}^m$ має $(d-m)$ -вимірну “перпендикулярну” компоненту $\mathbf{x}_{\perp}$ і m -вимірну “паралельну” компоненту, $\mathbf{x}_{\parallel}$. Градієнтні оператори $\nabla_{\perp}$ і $\nabla_{\parallel}$ діють у підпросторах $\mathbb{R}^{d-m}$ і $\mathbb{R}^m$, відповідно, а $\Delta_{\parallel} \equiv \nabla_{\parallel}^2$ є лапласіаном, що діє у паралельних напрямках. Член $(\Delta_{\parallel} \phi)^2$ є обертово симетричним в $\mathbb{R}^m$. Але, взагалі кажучи, ЕГ (4.1) дозволяє включення також і додаткових менш симетричних доданків четвертого порядку за похідними, які порушують ізоτροпію модуляційного підпростору $\mathbb{R}^m$ при $m > 1$ [69]. Вплив таких доданків, і, зокрема, додаткових членів з кубічною симетрією досліджувався в нашій роботі [69]. Результати будуть представлені в розд. 4.6.

Зменшуючи число осей анізотропії m до нуля ми відтворюємо стандартну ізотропну теорію ϕ_d^4 з верхньою граничною вимірністю простору $d^* = 4$ і маємо справу із звичайною поведінкою у критичній точці. В іншому граничному випадку, $m = d$, всі d просторових осей є осями модуляції. Відповідна теорія $\phi_{m=d}^4$ з $d^* = 8$ дає опис ізотропної (d -вісної) ТЛ [66, 137, 148]. У загальному випадку з $m \in [0, d]$, верхня гранична вимірність задається прямою лінією

$$d^* = d^*(m) = 4 + m/2. \quad (4.2)$$

Константа зв'язку u_0 члена типу ϕ^4 , а також параметр анізотропії σ_0 , є додатними константами, тоді як величини τ_0 і ρ_0 можуть міняти знак. Як зазвичай, τ_0 є лінійною функцією температури. Параметр ρ_0 — пов'язаний з додатковим неупорядковуючим полем g , специфічним для конкретної системи, що розглядається, і контролює кросоверні явища поблизу ТЛ (див. фазову діаграму на стор. 56 а також огляд [138]).

Точці Ліфшица відповідають значення τ_0^{LP} і ρ_0^{LP} затравочних параметрів τ_0 і ρ_0 . У наближенні Ландау $\tau_0^{LP} = \rho_0^{LP} = 0$. Подібно, у перенормованій теорії ТЛ реалізується при $\tau = \rho = 0$, де τ і ρ — пренормовані величини, що відповідають початковим параметрам τ_0 і ρ_0 .

При розгляді критичної поведінки ЕГ (4.1) в околі ТЛ вимагається, щоб члени $(\nabla_{\perp}\phi)^2$ і $\sigma_0(\Delta_{\parallel}\phi)^2$ поводити себе однаково в асимптотичному скейлінговому режимі. Таким чином, у теорії, регуляризованій ультрафіолетовим обрізанням, інтегрування за перпендикулярними і паралельними імпульсами $\mathbf{k}_{\perp}$ і $\mathbf{k}_{\parallel}$ мусять обмежуватися асиметричним чином: $|\mathbf{k}_{\perp}| \leq \Lambda$ і $|\mathbf{k}_{\parallel}| \leq \sigma_0^{-1/4}\Lambda^{1/2}$. При великих значеннях параметра обрізання Λ величини τ_0^{LP} і ρ_0^{LP} поведуть себе, відповідно, як $\propto \Lambda^2$ і $\propto \Lambda$. У теорії з вимірною регуляризацією (див. напр. [77, 326]), яку ми використовуватимемо надалі, вони тотожно обертаються в нуль.

Відповідний модифікований аналіз вимірностей (порівн. з [62, 182, 191]) передбачає наступні співвідношення:

$$[\tau_0] = -2[x_{\perp}], \quad [x_{\parallel}] = \frac{1}{2}[x_{\perp}] + \frac{1}{4}[\sigma_0], \quad [\phi] = -\frac{1}{2}[d^d x] + [x_{\perp}] = \frac{1}{2}(d - \frac{m}{2} - 2)[\mu] - \frac{m}{8}[\sigma_0],$$

$$[\rho_0] = 2[x_{\parallel}/x_{\perp}] = -[x_{\perp}] + \frac{1}{2}[\sigma_0], \quad [u_0] = [\mu^{\varepsilon}] + \frac{m}{4}[\sigma_0], \quad \text{де} \quad [\mu] = -[x_{\perp}],$$

μ — довільна величина імпульсу, що задає масштаб. Як завжди, вимірність константи зв'язку u_0 пов'язана з відхиленням ε вимірності простору d від верхньої граничної вимірності d^* : ми маємо $\varepsilon \equiv d^*(m) - d = 4 + m/2 - d$. Розмірний параметр $\sigma_0^{1/4}$ задає масштаб “вимірювання” відстаней у паралельному підпросторі. Його класичною вимірністю є $[\sigma_0^{1/4}] = [x_{\parallel}/x_{\perp}^{1/2}]$. Безрозмірна комбінація $v \equiv \sigma_0^{-1/4} x_{\parallel} x_{\perp}^{-1/2}$ проявляється як аргумент скейлінгової функції вільного пропа-

гатора, записаного у скейлінговому вигляді

$$G(x) = x_{\perp}^{-2+\varepsilon} \sigma_0^{-m/4} \Phi(v), \quad v = \sigma_0^{-1/4} \frac{x_{\parallel}}{\sqrt{x_{\perp}}}. \quad (4.3)$$

Ефективний параметр розкладу $\bar{u}_0 \equiv u_0 \sigma_0^{-m/4}$ має звичайну μ -вимірність $[\mu^\varepsilon]$ і стає граничним при $d = d^*(m)$. Подібним чином нормоване поле $\phi(\mathbf{x}) \sigma_0^{m/8}$ стає безрозмірним у нижній граничній вимірності [138, 160] $d_\ell(m) = 2 + m/2$ моделей з неперервною обертовою симетрією $O(n)$ у випадку $n > 1$. Критична поведінка таких систем у ТЛ буде розглядатися в рамках $1/n$ -розкладу в розділі 6.

4.2. Вільний пропагатор у координатному представленні

Як згадувалося вище, при роботі з ЕГ (4.1) потрібно враховувати поділ d -вимірних радіус-векторів $\mathbf{x}$ на перпендикулярну і паралельну складові, $\mathbf{x}_{\perp}$ і $\mathbf{x}_{\parallel}$. Надалі, при описі конкретних розрахунків, ми будемо дотримуватись скороченого запису $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{z})$, де $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_{\perp} \in \mathbb{R}^{d-m}$ і $\mathbf{z} \equiv \mathbf{x}_{\parallel} \in \mathbb{R}^m$. Перетворення Фур'є, визначені в кожному з підпросторів $\mathbb{R}^{d-m}$ і $\mathbb{R}^m$ ставлять у відповідність просторовим компонентам $\mathbf{r}$ і $\mathbf{z}$ перпендикулярні і паралельні імпульси $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$. Так, в оберненому просторі ми маємо $\mathbf{k} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ за аналогією до запису $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{z})$.

В імпульсному представленні пропагатор, що відповідає вільній теорії в околі ТЛ, має, на перший погляд, відносно простий вигляд:

$$G(p, q) = (\tau_0 + p^2 + \rho_0 q^2 + \sigma_0 q^4)^{-1}. \quad (4.4)$$

Проте, четвертий степінь імпульсної змінної $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ приводить до суттєвих труднощів у виконанні необхідних розрахунків навіть у безмасовій теорії з $\tau_0 = \rho_0 = 0$, тобто, безпосередньо в ТЛ.

Щоб створити певне уявлення про розрахункові труднощі, з якими доводиться тут стикатися, згадаємо для порівняння, що вільний безмасовий пропагатор теорії ізотропної критичної точки в імпульсному представленні має вигляд $G(k) = 1/k^2$. Тут зручно працювати і в координатному представленні, в якому ізотропний пропагатор також має вигляд простого степеня: $G(x) \sim x^{2-d}$.

Натомість, вільний пропагатор координатного представлення безмасової теорії ТЛ з $\tau_0 = \rho_0 = 0$ визначається перетворенням Фур'є

$$G(\mathbf{x}) \equiv G(r, z) = \int_{\mathbf{k}}^{(d)} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{iqz}}{p^2 + \sigma_0 q^4}, \quad (4.5)$$

де ми вводимо наступні позначення для інтегралів за імпульсами $\mathbf{k} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{d-m}$:

$$\int_{\mathbf{k}}^{(d)} \equiv \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \quad \text{з} \quad \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \equiv \int_{\mathbb{R}^{d-m}} \frac{d^{d-m} p}{(2\pi)^{d-m}} \quad \text{і} \quad \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \equiv \int_{\mathbb{R}^m} \frac{d^m q}{(2\pi)^m}. \quad (4.6)$$

Заміни змінних інтегрування $\mathbf{p}\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$ в (4.5) і $\mathbf{q}\sigma_0^{1/4}\sqrt{r} \rightarrow \mathbf{q}$ приводять до скейлінгової форми вільного пропагатора (порівн. з [181, 222])

$$G(r, z) = r^{-2+\epsilon} \sigma_0^{-m/4} \Phi(v), \quad \epsilon = 4 + m/2 - d, \quad (4.7)$$

зі скейлінговою функцією

$$\Phi(v) \equiv \Phi(v; m, d) = \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{1}} e^{iqv}}{p^2 + q^4}, \quad \text{де} \quad \mathbf{v} = \sigma_0^{-1/4} \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{r}} \quad (4.8)$$

— безрозмірна скейлінгова змінна, а $\mathbf{1} \equiv \mathbf{r}/r$ — довільний $(d-m)$ -компонентний вектор одиничної довжини.

Виконуючи в інтегральному представленні (4.8) інтегрування за змінною $\mathbf{p}$ і за кутовими залежностями змінної $\mathbf{q}$ ми отримуємо [62, (15)] для скейлінгової функції $\Phi(v)$ представлення у вигляді однократного інтеграла

$$\Phi(v) = i_{\mu\nu}(v) = (2\pi)^{-d/2} v^{-\mu} \int_0^\infty dq q^{2-\epsilon} J_\mu(qv) K_\nu(q^2), \quad (4.9)$$

де J і K — функції Бесселя у звичайних позначеннях (див. напр., [327, Розд. 10]). Це — стандартний інтеграл [328, 2.16.2.2], що при довільних значеннях параметрів μ і ν виражається в термінах узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_2F_3$; в роботі [329] (див. стор. 2276) він був записаний в термінах функції Фокса-Райта (Fox-Wright) (4.11). В нашому випадку $\mu = (m-2)/2$ і $\nu = (d-m)/2 - 1$, і ми отримуємо з (4.9) скейлінгову функцію $\Phi(v)$ у вигляді ряду Тейлора [63, (12)]

$$\Phi(v) = C_\Phi \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{n}{2})} \left(-\frac{v^2}{4}\right)^n \quad \text{з} \quad C_\Phi(m, \epsilon) = 2^{-2-m} \pi^{-\frac{d-1}{2}}. \quad (4.10)$$

Розклад в ряд Тейлора такого типу представляє собою частковий випадок функції Фокса-Райта [330–332]

$${}_p\Psi_q(\{a_i, A_i\}, \{b_j, B_j\}; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + A_i n)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + B_j n)} z^n, \quad (4.11)$$

де p і q — невід’ємні цілі числа, a_i і b_j — довільні комплексні числа, а параметри A_i і B_j вважаються дійсними і додатними. Загальні властивості цієї функції, її співвідношення з іншими спеціальними функціями, часткові випадки та застосування широко обговорюються в сучасній математичній літературі [270, 329, 333–338]. Функція Фокса-Райта (4.11) є подальшим узагальненням узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_pF_q$ з p параметрами чисельника і q параметрами знаменника, оскільки останні з точністю до множника отримуються з функції (4.11), коли в ній всі параметри $A_i = B_j = 1$.

Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_pF_q(z)$ визначаються степеневим рядом (див. напр., [270, 327, 339, 340])

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_n}{\prod_{j=1}^q (b_j)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (4.12)$$

Параметри $a_i \in \mathbb{C}$ з $i = 1, \dots, p$ можуть бути довільними комплексними числами, а $b_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ з $j = 1, \dots, q$ не можуть бути нулем і цілими від’ємними числами щоб знаменники в (4.12) не оберталися в нуль. Як звичайно, $(a)_n$ і $(b)_n$ — символи Похгаммера, що представляють собою добутки n множників: $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$, причому вважається, що $(0)_0 = 1$. В термінах гамма-функцій Ейлера маємо $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. Останній запис дає доступ до узагальнення символу Похгаммера, в якому допускається, що індекс n , взагалі кажучи, не є цілим числом (див. напр., [5]); так в математиці часто розглядається означення символу Похгаммера у вигляді

$$(a)_\nu := \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & \nu = 0; a \in \mathbb{C} \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & \nu = n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{C} \end{cases}. \quad (4.13)$$

У випадку $p = q + 1$, який є найбільш поширеним і буде часто зустрічатися в подальшому, степеневий ряд (4.12) збігається при $|z| < 1$ і розбігається, коли $|z| > 1$. На одиничному колі $|z| = 1$ достатньою умовою збіжності (4.12) є додатність “параметричного надлишку” (parametric excess) $\Re(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i) > 0$. Для більших величин z використовується аналітичне продовження. Якщо $p > q + 1$, ряд (4.12) є розбіжним при всіх z окрім точки $z = 0$. Нарешті, коли $p \leq q$, степеневий ряд (4.12) збігається при всіх скінченних значеннях z і визначає цілу функцію; саме з такими функціями ми маємо справу в цьому пункті.

Коли йдеться про скейлінгову функцію $\Phi(v)$ з (4.10) ми маємо $z = v^2/4$, $p = q = 1$, $a = 1 - \varepsilon/2$, $b = 1/2 + m/4$, і $A = B = 1/2$, і таким чином (порівн. з [63, (10)-(13)] [329, (2.3a)]),

$$\Phi(v) = C_{\Phi} {}_1\Psi_1 \left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{4}, \frac{1}{2}\right); -\frac{v^2}{4} \right]. \quad (4.14)$$

Розділяючи суму за n в (4.10) на дві частини з парними і непарними індексами сумування, ми отримуємо $\Phi(v)$ в термінах узагальненої гіпергеометричної функції ${}_1F_2$:

$$\begin{aligned} \Phi(v) = & C_{\Phi}(m, \varepsilon) \left[\frac{\Gamma(1-\frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{m}{4})} {}_1F_2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{m}{4}; \frac{v^4}{64}\right) \right. \\ & \left. - \frac{v^2}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(1+\frac{m}{4})} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}-\frac{\varepsilon}{2}; \frac{3}{2}, 1+\frac{m}{4}; \frac{v^4}{64}\right) \right], \quad C_{\Phi}(m, \varepsilon) = 2^{-2-m} \pi^{-\frac{6+m}{4}} \Gamma(\frac{\varepsilon}{2}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

При $m = 1$ наша скейлінгова функція $\Phi(v)$ узгоджується з аналогічною функцією $\Psi(a, x)$ із [222, (3.1)-(3.2)], як в загальному, так і в часткових випадках. В цій роботі критична поведінка в ТЛ “порядку $L - 1$ ” досліджувалася у сферичній границі $n \rightarrow \infty$; для порівняння з нашою теорією у формулах з [222] слід брати значення $L = 2$. Крім того, порівняння можливе тільки для одновісного випадку з $m = 1$. Це пов’язане з тим, що гамільтоніан сферичної моделі, яка розглядалася в [222], включав у себе (тільки) градієнтний член з гіперкубічною симетрією $\sum_{i=1}^m (\partial_i^2 \phi)^2$. Ми ж розглядаємо зараз модель зі *сферично симетричним* градієнтним членом четвертого порядку $(\Delta_{\parallel} \phi)^2$. Ці два варіанти співпадають між

собою виключно при $m = 1$. Якраз порівняння скейлінгових функцій з [63] і [222] навело нас на думку про дослідження моделі ТЛ з кубічною анізотропією в модуляційному підпросторі [69]. Така модель включає в себе обидва згадані градієнтні доданки. Ми зупинимося на такому варіанті теорії в пункті 4.6.

На завершення цього параграфа запишемо ще одне альтернативне інтегральне представлення [73, (A.29)] скейлінгової функції $\Phi(v)$,

$$\Phi(v) = \frac{2C_\Phi}{\Gamma(\frac{m}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})} \int_0^1 dt t^{1-\varepsilon} (1-t^2)^{(m-6+2\varepsilon)/4} e^{-tv^2/4}. \quad (4.16)$$

Це представлення було зручним для розкладу функції $\Phi(v)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, який необхідно було виконати в роботі [73]. Розкладаючи експоненту в ряд і виконуючи почленне інтегрування, з цієї формули ми отримуємо $\Phi(v)$ у вигляді степеневого розкладу (4.10).

4.2.1. Асимптотична поведінка скейлінгової функції $\Phi(v)$

Аналіз асимптотичної поведінки функцій Фокса-Райта традиційно проводився на основі теорем Райта [331, 332] (як у вищезгаданій роботі [222]). Зовсім недавно ці теореми були переглянуті та доповнені в роботах [337, 338]. Ми ж мали в нашому розпорядженні інтегральні представлення (4.8), (4.9) потрібної нам функції ${}_1\Psi_1$ з (4.14). Прості мультиплікативні заміни змінних в інтегралі (4.8) дозволили нам одразу ж побачити головну степеневу поведінку скейлінгової функції $\Phi(v)$ при $v \rightarrow \infty$: ми маємо

$$\Phi(v) \equiv \Phi(v; m, d) = v^{-4+2\varepsilon} \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{1} v^{-2}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_v}}{p^2 + q^4}, \quad (4.17)$$

де $\mathbf{e}_v = \mathbf{v}/v$ — одиничний вектор довільного напрямку в модуляційному підпросторі $\mathbb{R}^m$. Поява степеня $v^{-4+2\varepsilon}$ узгоджується з передбаченнями теорем Райта, а також з даними асимптотичного аналізу, проведеного в роботі [222]. В границі $v \rightarrow \infty$ збіжний інтеграл в (4.17) визначає константу пропорційності знайденої степеневі поведінки, $\Phi_\infty(m, d)$ (див. [62, (B1)-(B4)]),

$$\Phi_\infty(m, d) = 2^{2d-2m-5} \pi^{-\frac{d-1}{2}} \frac{\Gamma(d - \frac{m}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{m+3-d}{2})}. \quad (4.18)$$

Подальший розклад інтеграла з (4.17) за від'ємними степенями змінної v приводить нас до повного асимптотичного розкладу скейлінгової функції $\Phi(v)$ при $v \rightarrow \infty$:

$$\Phi(v \rightarrow \infty) = C_\Phi \left(\frac{v}{2}\right)^{-4+2\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2\Gamma(2-\varepsilon+2k)}{\Gamma(\frac{m}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}-k)} \left(\frac{v}{2}\right)^{-4k}. \quad (4.19)$$

Така форма асимптотичного розкладу $\Phi(v)$ справедлива для довільних вимірностей m і $d = 4 + m/2 - \varepsilon$ з області визначення нашої теорії, яка детально розглядається в пункті 6.5.3. Проте існують такі співвідношення між m і d , при яких відбувається виродження розкладу (4.19), а одночасно і ряду Тейлора (4.10). Так, коли виконується співвідношення $d = m + 3$ (див. Рисунок 6.1), в коефіцієнтах ряду (4.10) відбувається повне скорочення гамма-функцій, а в (4.19) аргументи гамма-функцій в знаменниках коефіцієнтів розкладу зводяться до $\Gamma(-k)$. Це приводить до повного зникнення степеневого розкладу (4.19), а сама функція $\Phi(v)$ при великих аргументах стає експотенціально малою згідно з результатом, до якого приводить сумування ряду (4.10), див. (4.20).

Коли ми маємо $d = m + 1$, в асимптотичному розкладі (4.19) зникають всі доданки крім першого, який і визначає головну асимптотичну поведінку в цьому спеціальному випадку. Далі йде експотенціально мала поправка, що визначається сумою відповідно спрощеного ряду в (4.10). Явні вирази наведені в (4.21), (4.22).

Підкреслимо, що спадна степенева асимптотична поведінка функції $\Phi(v)$ виникає в результаті віднімання двох безмежних рядів, кожен з яких характеризується експотенціальним зростанням при великих значеннях змінної v . Таке віднімання відбувається в знакозмінному ряді, визначеному формулами (4.10), (4.14), воно показане явно у формулі (4.15), де ми маємо справу з різницею двох узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_1F_2$. Ці функції належать до класу узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_pF_q$ з (4.12) із співвідношенням параметрів $p \leq q$, в даному випадку $p = q - 1$. Асимптотична поведінка функцій ${}_1F_2(z^2)$ визначається частковим випадком загальної формули [341, стор. 203, р-ня (5)]. Вони експотенціально зростають при великих значеннях їх (додатнього) аргумента.¹

¹Прикладом може бути частковий випадок ${}_1F_2(1; 1/2, 1; x/4) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$. Степенева асимптотична поведінка

Така особливість функції $\Phi(v)$ приводить до труднощів у її чисельному розрахунку при великих аргументах. Відповідно, чисельні розрахунки інтегралів від (степенів) цієї функції стають проблематичними при зростанні верхньої межі інтегрування. Тому при чисельних оцінках таких величин як $j_\phi(m)$, $j_\sigma(m)$, $j_\rho(m)$, $j_u(m)$ з (4.57)-(4.61) ми повинні були використовувати інформацію з асимптотичного розкладу (4.19) (див. [62, додатки В, Е]). Без заміни підінтегральної функції на її асимптотику при великих аргументах, отримання чисельних даних для критичних показників ТЛ у випадках, де явні вирази для $\Phi(v)$ невідомі, було б неможливими.

4.2.2. Спрощення функції $\Phi(v)$ в часткових випадках

Як ми вже згадували в попередньому пункті, при деяких часткових значеннях параметрів d і m відбуваються суттєві спрощення функції $\Phi(v)$. Деякі з них були записані та використовувалися в [54, 63, 70, 159, 183]. Так, коли виконується співвідношення $d = m + 3$, гамма-функції Ейлера в коефіцієнтах розкладу (4.10) скорочуються, і $\Phi(v)$ зводиться до простої експоненти:

$$\Phi(v) = (4\pi)^{-\frac{m+2}{2}} e^{-v^2/4}, \quad d = m + 3. \quad (4.20)$$

Подібне скорочення гамма-функцій з відмінними на одиницю аргументами приводить до спрощення $\Phi(v)$ при $d = m + 1$:

$$\Phi(v) = \frac{v^{2-m}}{8\pi^{m/2}} \gamma\left(\frac{m-2}{2}, \frac{v^2}{4}\right), \quad d = m + 1, \quad (4.21)$$

де $\gamma(a, x)$ — неповна гамма-функція [267]. Коли d стає рівним верхній граничній вимірності d^* , див. (4.2), а саме $d = 7$ при $m = 6$, останній вираз зводиться до елементарних функцій:

$$\Phi(v) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{v^4} \left[1 - \left(1 + \frac{v^2}{4} \right) e^{-v^2/4} \right], \quad m = 6, \quad d = d^* = 7. \quad (4.22)$$

Ця формула, як і (4.20) з $m = 2$, активно використовувались нами в роботах [62] і [63] для виводу результатів ε -розкладу в явному аналітичному вигляді.

функції ${}_1F_2(a; c, d; x)$, наведена в таблиці [342, стор. 146], не відповідає дійсності.

З іншого боку, ще деякі інші часткові випадки $\Phi(v)$ можуть бути також цікавими у контексті $1/n$ розкладу, який розглядається в Розділі 6. Наприклад, при $d = 5$ і $m = 4$ формула (4.21) зводиться до

$$\Phi(v; m = 4, d = 5) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{v^2} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}v^2}\right). \quad (4.23)$$

Для інших значень параметра m , що відрізняються від 0, 2, 6 і d , при тому що $d = d^*(m)$, жодних суттєвих спрощень скейлінгової функції пропагатора нам знайти не вдалося. Тому, для найцікавішого з практичної точки зору значення $m = 1$, а також при $m = 3, 4, 5, 7$ для отримання остаточних результатів ε -розкладів біля верхньої граничної вимірності простору потрібні інтегрування довелося виконувати чисельно.

Зауважимо, що в [63, (21)] ми також записали $\Phi(v)$ при $d = d^*(m)$ в термінах модифікованих функцій Бесселя і Струве (див. напр. [267]) для довільних значень m .

4.2.3. Інші скейлінгові функції

Ще одна важлива скейлінгова функція $Y(v)$ пов'язана із згорткою двох вільних пропагаторів у координатному просторі (порівн. з [63, (D.4)] [57, (B.1)-(B.2)]):

$$H(x) = H(r, z) = (G * G)(x) \equiv \int d^d y G(y) G(x-y) = \int_p^{(d-m)} \int_q^{(m)} \frac{e^{ipr} e^{iqz}}{(p^2 + q^4)^2} = r^\varepsilon Y(v). \quad (4.24)$$

Ми маємо

$$Y(v) = \int_p^{(d-m)} \int_q^{(m)} \frac{e^{ipr} e^{iqv}}{(p^2 + q^4)^2} = \frac{C_\Phi}{4} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{k}{2})} \left(-\frac{v^2}{4}\right)^k. \quad (4.25)$$

Константа C_Φ вже була означена в (4.10), а безмежний ряд справа дуже подібний до ряду з (4.10), що визначає скейлінгову функцію вільного пропагатора $\Phi(v)$. Різниця полягає тільки у відсутності доданка 1 в аргументі Γ -функції в чисельнику. Але ця відмінність стає критичною, якщо ми цікавимося поведінкою функції $Y(v)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$: коли $\varepsilon = 0$, то член суми з $k = 0$ в (4.25) стає сингулярним.

У зв'язку з цією аномалією при розрахунку термодинамічних критичних показників ТЛ у двопетльовому наближенні (див. п. 4.4, р-ня (4.61)) з'являється ще одна функція, $\Theta(v, m)$. Вона визначається у вигляді ряду Тейлора наступним чином [57, (B.5)] (тут ми виправляємо аналогічну формулу з [63, (D.5)]):

$$\Theta(v; m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[2^{4+m} \pi^{\frac{d-1}{2}} Y(v) - \frac{\Gamma(-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(\frac{2+m}{4})} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{k! \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{k}{2})} \left(-\frac{v^2}{4} \right)^k. \quad (4.26)$$

Фактично ми знов маємо справу з функцією Фокса-Райта ${}_1\Psi_1$, але з такою її модифікацією, в означенні якої відсутній доданок ряду з $k = 0$. Подібно як і в (4.15), цю функцію можна представити у вигляді комбінації узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_1F_2$ і ${}_2F_3$ [63, (29)]. Зауважимо також, що чисельний множник $2^{4+m} \pi^{(d-1)/2} = 4/C_\Phi$, де C_Φ — коефіцієнт з формули (4.10).

Диференціюючи степеневий розклад (4.26) функції $\Theta(v, m)$ за змінною v і порівнюючи отриманий результат з аналогічним рядом (4.10) для $\Phi(v)$, ми приходимо до наступного співвідношення між цими двома функціями:

$$\frac{\partial \Theta(v; m)}{\partial v} = \frac{1}{v} \frac{4}{C_\Phi^*} [\Phi(v; m, d^*) - \Phi(0; m, d^*)], \quad (4.27)$$

де C_Φ^* — коефіцієнт C_Φ при $\epsilon = 0$. Підставляючи сюди асимптотичний розклад функції $\Phi(v; m, d^*)$ з (4.19) та виконуючи почленне інтегрування ми отримуємо повний асимптотичний розклад для функції $\Theta(v, m)$, який включає в себе *логарифмічний* член:

$$\Theta(v; m) \underset{v \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-4 \ln v + C_\Theta(m)}{\Gamma(\frac{m+2}{4})} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2 \Gamma(2k)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{m}{4} - k)} \left(\frac{v}{2} \right)^{-4k}. \quad (4.28)$$

Тут $C_\Theta(m)$ — константа інтегрування, яку неважко визначити розглядаючи граничну поведінку інтегрального представлення функції $Y(v)$ з (4.25) при $v \rightarrow \infty$ і виконуючи граничний перехід $\epsilon \rightarrow 0$ з (4.26). Так ми приходимо до (див. [64, додаток D])

$$C_\Theta(m) = \psi\left(\frac{m+2}{4}\right) - C_E + 4 \ln 2, \quad (4.29)$$

де $C_E = -\psi(1) \simeq 0.5772 \dots$ — константа Ейлера, а $\psi(z)$ — псі-функція, логарифмічна похідна гамма-функції Ейлера (див., напр., [267, 281]). Декілька перших доданків асимптотичного розкладу (4.28) наведені в явному вигляді в [63, (30)].

Цікаво навести приклади функції $\Theta(v, m)$. В часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$ вона зводиться до [63, (31), (32)]

$$\Theta(v, 2) = -2 \left[C_E + \ln \frac{v^2}{4} + E_1 \left(\frac{v^2}{4} \right) \right] \quad (4.30)$$

і

$$\Theta(v, 6) = 1 - 2 C_E - \ln \frac{v^4}{16} - 2 E_1 \left(\frac{v^2}{4} \right) + \frac{8 e^{-v^2/4}}{v^2} + 32 \frac{e^{-v^2/4} - 1}{v^4}. \quad (4.31)$$

Тут $E_1(x)$ — експотенціальний інтеграл, див. [327, Розд. 6]. При великих аргументах ця функція поводить себе як e^{-x}/x . Таким чином, у двох останніх формулах ми бачимо функції з цікавими асимптотиками, в яких одночасно присутні логарифмічні, експотенціальні, і степеневі внески.

Ще одна функція, $\Xi(v)$, була введена в [62] для розрахунку кросоверного і модуляційного показників φ і β_q . В координатному представленні вона визначається згорткою $-(\nabla_{\parallel} G * \nabla_{\parallel} G)(x)$. При переході до інтегралів Фур'є ми маємо

$$-(\nabla_{\parallel} G * \nabla_{\parallel} G)(x) = \int_p^{(d-m)} \int_q^{(m)} q^2 \frac{e^{ipr} e^{iqz}}{(p^2 + q^4)^2} = r^{-1+\varepsilon} \Xi(v). \quad (4.32)$$

Інтегральне представлення $\Xi(v)$ через функції Бесселя можна знайти в [62, (30)], а вираз в термінах лінійної комбінації узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_1F_2$ — в [62, (A3)]. При $d = d^*$ ця комбінація зводиться до різниці функції Бесселя I і функції Струве $\mathbf{L}$ [63, (24)].

Скейлінгові функції $\Phi(v)$ і $\Xi(v)$, а також деякі інтеграли від них, подібні до (4.57)–(4.61), досліджувалися в математичній роботі [329]. Зокрема, в [329, (2.3b)] скейлінгова функція $\Xi(v)$ записана у вигляді функції Фокса-Райта ${}_1\Psi_1$.

Взагалі, послідовне використання вільного пропагатора в координатному представленні при побудові необхідних розкладів за теорією збурень дозволили нам вперше отримати правильні результати для критичних показників ТЛ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ [62, 63] і досягнути значного прогресу при побудові $1/n$ розкладу.

4.3. Перенормування теорії

При побудові ε -розкладів на основі ЕГ (4.1) в наших роботах [62] і [63] ми використовували відповідно адаптовані методи вимірної регуляризації і мінімальних віднімань вимірних полюсів в околі верхньої граничної вимірності $d^*(m) = 4 + m/2$.

Нехай

$$G_{i_1, \dots, i_N}^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \langle \phi_{i_1}(\mathbf{x}_1) \dots \phi_{i_N}(\mathbf{x}_N) \rangle^{\text{cum}} \quad (4.33)$$

— зв'язні N -точкові кореляційні функції (кумулянти), а $\Gamma_{i_1, \dots, i_N}^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$ — відповідні вершинні функції. Ці функції виявляють ультрафіолетові сингулярності при наближенні вимірності простору d до верхньої граничної $d^*(m)$. Для забезпечення їх скінченності при $d < d^*(m)$ ми використовуємо схему перенормувань безмасової теорії, що базується на вимірній регуляризації, мінімальних віднімань полюсів і використанні ε -розкладу. Репараметризація теорії

$$\tau_0 - \tau_0^{LP} = \mu^2 Z_\tau (\tau + \rho^2 A_\tau), \quad (\rho_0 - \rho_0^{LP}) \sigma_0^{-1/2} = \mu Z_\rho \rho, \quad (4.34)$$

$$\phi = Z_\phi^{1/2} \phi_R, \quad \sigma_0 = Z_\sigma \sigma, \quad u_0 \sigma_0^{-m/4} F_{m, \varepsilon} = \mu^\epsilon Z_u u \quad (4.35)$$

ліквідує ультрафіолетові розбіжності у кореляційних функціях ізолюючи вимірні полюси $\propto \varepsilon^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 4 + m/2 - d$ у ренормалізаційних факторах $Z_\iota = Z_\iota(u, \varepsilon)$, де $\iota = \phi, u, \tau, \sigma, \rho$. Як звичайно, довільний параметр μ задає масштаб імпульсів у теорії.

Для перенормованих кореляційних функцій (4.33) ми маємо (порівн. з (2.9))

$$G_R^{(N)}(\{\mathbf{x}\}; \tau, \rho, \sigma, u) = Z_\phi^{-N/2} G^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N; \tau_0, \rho_0, \sigma_0, u_0), \quad (4.36)$$

де параметри $\tau_0, \dots, u_0$ виражаються за допомогою співвідношень (4.34)–(4.35) через аналогічні величини перенормованої теорії. Ренормалізаційні Z -фактори Z_ι мають вигляд рядів Лорана

$$Z_\iota = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^r a_{\iota, p}^{(r)}(m, n) \frac{u^r}{\varepsilon^p}, \quad (4.37)$$

коефіцієнти яких залежать тільки від кількості осей анізотропії в системі m та числа компонент параметра порядку n .

У нашій розрахунковій схемі, як ми вже згадували в попередньому пункті, величини зміщень τ_0^{LP} і ρ_0^{LP} , що визначають положення ТЛ у неперенормованій теорії і фігурують у співвідношеннях (4.34), тотожно обертаються в нуль. Зауважимо, що в теорії, регуляризованій шляхом обмеження великих імпульсів параметром обрізання Λ , величини τ_0^{LP} і ρ_0^{LP} розбігалися б при $\Lambda \rightarrow \infty$ як $\sim \Lambda^2$ і $\sim \Lambda$, відповідно.

Перше рівняння в (4.34) записане в найбільш загальному випадку, коли допускаються відхилення від ТЛ одночасно за двома змінними, τ і ρ , які при цьому можуть бути не інфінітезимально малими [69, 196]. Функція $A_\tau(u, \varepsilon)$ усуває незалежні від імпульсів полюси, пропорційні до ρ^2 , з двоточкових кореляторів. Явний вираз для цієї функції з точністю до $O(u)$ можна знайти в [196, (17)]. Оскільки ми не цікавитимемось такими відхиленнями від ТЛ, в подальшому доданок $A_\tau \rho^2$ у формулі перенормування маси братися до уваги не буде. Його наявність, зокрема, не впливає на розрахунки критичних показників у ТЛ, виконані нами в [62] і [63].

У перенормуванні вершини, записаному в останньому рівнянні з (4.35), використовується нормування перенормованої константи зв'язку u , прийняте в [63]. Константа нормування $F_{m,\varepsilon}$ пов'язана з безмасовим інтегралом Фейнмана $I(p, q)$ (див. (5.35)), що відповідає однопетльовій чотириточковій діаграмі $\asymp$. Цей інтеграл пропорційний $1/\varepsilon$, і $F_{m,\varepsilon}$ є коефіцієнтом пропорційності для діаграми з зовнішнім імпульсом одиничної довжини і довільного напрямку в перпендикулярному підпросторі:

$$\int_p^{(d-m)} \int_q^{(m)} \frac{1}{(p^2 + q^4)[(\mathbf{p} + \mathbf{1})^2 + q^4]} = I(1, 0) = \frac{F_{m,\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{c_{-1}}{\varepsilon} + O(1) . \quad (4.38)$$

Лишок полюса $\sim 1/\varepsilon$, константа c_{-1} , зустрічатиметься у подальшому (див. напр. (6.20)). Інтеграл $I(p, q)$ з повними залежностями від імпульсів p і q відіграватиме важливу роль при розрахунку скейлінгової функції енергія-енергія в пп. 5.4 і 5.5, а також критичних показників ТЛ методом $1/n$ -розкладу в розд. 6.

Ми маємо $F_{m,\varepsilon} = F_{0,\varepsilon} C_m$, де

$$F_{0,\varepsilon} = 2 \frac{\Gamma(1 + \varepsilon/2) \Gamma^2(1 - \varepsilon/2)}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2} \Gamma(2 - \varepsilon)} = \frac{1}{8\pi^2} + O(\varepsilon) \quad \text{і} \quad C_m = \frac{(4\pi)^{-\frac{m}{4}} \Gamma(m/4)}{2\Gamma(m/2)}. \quad (4.39)$$

Тут $F_{0,\varepsilon}$ є величиною $F_{m,\varepsilon}$ при $m = 0$, тобто у границі ізотропної КТ, що співпадає з аналогічним коефіцієнтом діаграми $\asymp$ у звичайній безмасовій теорії ϕ^4 , див. напр. [343, (12.33)], чи [268, (A9-13)]. Константа C_m буде доволі часто зустрічатися в конкретних розрахунках, див. напр. (7.32)–(7.38).

Рівняння ренормалізаційної групи отримуються з (4.34)–(4.35) і (4.36) при зміні параметра μ з використанням того факту, що неперенормовані кореляційні функції в правій частині співвідношення (4.36) від цієї величини не залежать. Нехай

$$\mathcal{D}_\mu = \mu \partial_\mu + \sum_{g=u,\sigma,\rho,\tau} \beta_g \partial_g \quad (4.40)$$

— лінійний диференціальний оператор, коефіцієнтами якого є т. зв. бета-функції

$$\beta_g \equiv \mu \partial_\mu |_0 g \quad \text{з} \quad g = u, \sigma, \rho, \tau, \quad (4.41)$$

а $\partial_\mu |_0$ означає часткову похідну за параметром μ при фіксованих константі взаємодії та інших параметрах неперенормованої теорії, u_0 , σ_0 , ρ_0 і τ_0 . Бета-функції β_g можуть бути вираженими в термінах “показникових” η -функцій

$$\eta_g(u) = \mu \partial_\mu |_0 \ln Z_g \quad \text{з} \quad g = \phi, u, \sigma, \rho, \tau, \quad (4.42)$$

а також функції

$$b_\tau(u) = A_\tau [\mu \partial_\mu |_0 \ln A_\tau + \eta_\tau - 2\eta_\rho] \quad (4.43)$$

як

$$\beta_g = \begin{cases} -u[\varepsilon + \eta_u(u)], & g = u, \\ -\sigma \eta_\sigma(u), & g = \sigma, \\ -\rho[1 + \eta_\rho(u)], & g = \rho, \\ -\tau[2 + \eta_\tau(u)] - b_\tau(u) \rho^2, & g = \tau. \end{cases} \quad (4.44)$$

Двопетльові результати для функцій β_u , η_ϕ , η_σ , η_ρ і η_τ визначаються рівняннями (59), (58) і (40)–(50) роботи [63]. Функція $b_\tau(u)$ (яка насправді не буде використовуватися в наступному) записана в першому порядку за u в [197, (40)].

В результаті дії диференціального оператора (4.40) на рівність (4.36) виникають рівняння ренормалізаційної групи для функцій $G_R^{(N)}$, які можуть бути представлені у вигляді

$$\left(\mathcal{D}_\mu + \frac{N}{2} \eta_\phi \right) G_{i_1, \dots, i_N; R}^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = 0. \quad (4.45)$$

Ці рівняння в часткових похідних можуть бути розв'язані стандартним чином з використанням методу характеристик, див. [62, 69, 183, 196, 197]. В результаті отримуються наступні скейлінгові форми для перенормованих N -точкових кореляційних функцій в околі ТЛ:

$$G_R^{(N)}(\{\mathbf{x}\}; g_\tau, \rho, \sigma, u, \mu) = g_\tau^{-\nu_2 N \Delta_\phi} Y_N \left(\left\{ \frac{\mu \mathbf{r}}{g_\tau^{\nu_2}} \right\}, \left\{ \frac{\sqrt{\mu} \mathbf{z}}{\sigma^{1/4} g_\tau^{\nu_4}} \right\}; \frac{\rho}{g_\tau^\varphi} \right). \quad (4.46)$$

Тут

$$\Delta_\phi = \frac{1}{2} (d - m + \theta m - 2 + \eta_2) \quad (4.47)$$

— скейлінгова вимірність поля параметра порядку в ТЛ, а $g_\tau = \tau + O(\rho^2)$ — (нелінійне) скейлінгове поле, в якому головною для нас є його температурна залежність. Для простоти запису неуніверсальні метричні фактори опущені. Аномальна вимірність поля η_2 є подібною до звичайного малого критичного індекса Фішера η , що описує поведінку парної кореляційної функції у критичній точці.

Запис (4.46) враховує відмінності анізотропних систем у різних просторових напрямках і поділ радіус-векторів $\mathbf{x}$ на перпендикулярну і паралельну складові $\mathbf{r}$ і $\mathbf{z}$ (див. початок п. 4.2). Так, поява цих різних просторових компонент супроводжується тут різними степенями величини g_τ з критичними показниками ν_2 і ν_4 . Останні описують температурні залежності кореляційних довжин у перпендикулярному і паралельному підпросторах, відповідно: $\xi_\perp \propto |\tau|^{-\nu_2}$ і $\xi_\parallel \propto |\tau|^{-\nu_4}$. Індекс анізотропії θ відповідає за різну скейлінгову поведінку різних просторових напрямів. Ми маємо співвідношення $\theta = \nu_4/\nu_2$. Нарешті, φ — кросоверний показник, який ми означили ще в п. 1.3.

Критичні показники, що входять у рівняння (4.46), виражаються в термінах величин $\eta_g^* \equiv \eta_g(u^*)$ показникових η -функцій $\eta_g(u)$ в нерухомій точці u^* , яка є

інфрачервоно-стійким нулем бета-функції β_u . Епсилон-розклад величини u^* має вигляд

$$u^* = \frac{2\varepsilon}{3} \frac{9}{n+8} + u_2^* \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.48)$$

Коефіцієнт другого порядку u_2^* можна знайти в [63, (60)]. Для критичних показників ми маємо

$$\eta_2 = \eta_\phi^*, \quad \nu_2 = \frac{1}{2 + \eta_\tau^*}, \quad \nu_4 = \frac{2 + \eta_\sigma^*}{4(2 + \eta_\tau^*)}, \quad \theta = (2 + \eta_\sigma^*)/4, \quad \varphi = \frac{1 + \eta_\rho^*}{2 + \eta_\tau^*}. \quad (4.49)$$

Нарешті, зауважимо, що безпосередньо в самій точці Ліфшица, тобто при $\tau = \rho = 0$, розв'язок ренормгрупового рівняння для парної кореляційної функції $G_R^{(2)}$ має вигляд [73, (4.21)]

$$G_R^{(2)}(p, q) \approx \mu^{-2} (E_\phi^*)^{-2} (p/\mu)^{\eta_2-2} \Psi_{m,d}[(E_\sigma^* \sigma)^{1/4} \mu^{-1/2} q (p/\mu)^{-\theta}], \quad (4.50)$$

де

$$\Psi_{m,d}(\mathbf{k}) = G_R^{(2)}(1, \mathbf{k}; \tau = 0, \rho = 0, \sigma = 1, u^*, \mu = 1). \quad (4.51)$$

На відміну від (4.46), тут ми використовуємо імпульсне представлення парної кореляційної функції, таке, яким ми будемо користуватися нижче, в розділі 5.2. В рівнянні (4.50) $E_\sigma^* = E_\sigma^*(u)$ є неуніверсальною амплітудою, метричним фактором, пов'язаним з величиною параметра σ . Як і його аналоги, $E_\phi^*(u)$ і $E_\tau^*(u)$, він виражається інтегралом вздовж ренормгрупової траєкторії. Ми маємо

$$E_g^*(u) \equiv E_g(u^*, u), \quad E_g(\bar{u}, u) = \exp \left[\int_{\bar{u}}^u du' \frac{\eta_g^* - \eta_g(u')}{\beta_u(u')} \right], \quad g = \sigma, \tau, \phi. \quad (4.52)$$

Далі ми будемо використовувати два спрощені варіанти представлення імпульсних залежностей перенормованої парної кореляційної функції $G_R^{(2)}$ в ТЛ, а саме

$$G_2(p, q) = p^{-2+\eta_2} G_2(1, qp^{-\theta}) = q^{-4+\eta_4} G_2(pq^{-1/\theta}, 1). \quad (4.53)$$

Незалежні між собою кореляційні критичні показники η_2 і η_4 пов'язані з індексом анізотропії θ співвідношенням $\theta = (2 - \eta_2)/(4 - \eta_4)$. В рамках ε -розкладу, η_2 і η_4

є величинами другого порядку за ε , і $\theta = 1/2 + O(\varepsilon^2)$. В $1/n$ -розкладі, яким ми будемо користуватися в розділі 6, ці величини мають порядок $O(1/n)$.

Термодинамічні критичні показники питомої теплоємності α , параметра порядку β і сприйнятливості γ вводяться для ТЛ стандартним чином, аналогічно як і у випадку звичайної критичної точки.

У наступному пункті ми перейдемо до конкретного розрахунку показників, що характеризують m -вісні точки Ліфшица.

4.4. Розрахунок критичних показників

Для розрахунку критичних показників точки Ліфшица з точністю до другого порядку за ε , як і в попередніх розділах, необхідно розглянути три базові кореляційні функції $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(2,1)}$ і $\Gamma^{(4)}$ у двопетльовому наближенні:

$$\Gamma^{(2)}(p, q; \sigma_0, u_0) = p^2 + \sigma_0 q^4 - \text{diagram} + O(u_0^3), \quad (4.54)$$

$$\Gamma^{(4)}(p, q; \sigma_0, u_0) = u_0 - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} + O(u_0^4), \quad (4.55)$$

$$\Gamma^{(2,1)}(p, q; \sigma_0, u_0) = 1 - \text{diagram} - \text{diagram} - \text{diagram} + O(u_0^3). \quad (4.56)$$

Тут ми використовуємо імпульсне представлення. Через зовнішні лінії двоточнової функції $\Gamma^{(2)}$ пробігає імпульс $\mathbf{k} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$. У функції $\Gamma^{(4)}$ ми приймаємо, що імпульси проходять зліва направо через пари зовнішніх ліній, а зовнішній імпульс, що може незалежно йти у вертикальному напрямі по останній двопетльовій діаграмі приймається рівним нулю. Присутність такого імпульса не вплинула б на полюсну структуру цієї діаграми. Більше того, оскільки зовнішні імпульси потрібні тільки для інфрачервоної регуляризації безмасових інтегралів, ми можемо вибрати ненульовими тільки їх компоненти у перпендикулярному підпросторі. Такий вибір суттєво спрощує подальші розрахунки. $\Gamma^{(2,1)}$ представляє собою двоточкову вершинну функцію з вставкою “оператора” ϕ^2 . Тут, подібно як і у випадку з $\Gamma^{(4)}$, ми приймаємо, що ненульовий зовнішній імпульс $\mathbf{p}$ проходить тільки вздовж хвилястої лінії, що відповідає цій вставці.

У роботах [62] і [63] нам вдалося ізолювати потрібні вимірні полюси двопетльових діаграм Фейнмана і знайти їх лишки, як цього вимагають методи вимірної регуляризації та мінімальних відніманих. Робота із скейлінговою формою вільного пропагатора в ТЛ (4.7) дала нам можливість отримати всі необхідні вирази для ренормгрупових функцій і критичних показників у вигляді однократних інтегралів від степенів скейлінгової функції $\Phi(v)$, її аргумента v , та декількох інших, подібних скейлінгових функцій (див. п. 4.2.3), що виникають у процесі розрахунків. Визначальним технічним аспектом тут є те, що полюси діаграм Фейнмана, які походять від сингулярностей на малих відстанях, можуть бути ізольовані тільки за рахунок степеня r з (4.7) (множник $r^{-2+\varepsilon}$ є аналогічним до $x^{-2+\varepsilon}$ у звичних ізотропних системах), а лишки цих полюсів представляються інтегралами, в які входить скейлінгова функція $\Phi(v)$. *Завдяки цьому ключовому спостереженню, автору дисертації вперше вдалося отримати коректні вирази для критичних показників ТЛ з точністю до $O(\varepsilon^2)$.*

Інтеграли в загальних остаточних результатах містять в собі число осей анізотропії m як параметр. Змінюючи цей параметр в підінтегральних функціях ми отримали — з єдиних формул — результати для критичних показників ТЛ у всій області допустимих значень $0 \leq m \leq d$, включно з правильними граничними випадками в крайніх точках цього інтервалу, при $m = 0$ і $m = d$.

Ми наведемо для ілюстрації декілька явних формул такого типу. Але для початку означимо згадані вище інтеграли, які входять в потрібні ренормгрупові β - і η -функції, і введемо наступні позначення:

$$j_\phi(m) \equiv B_m \int_0^\infty dv v^{m-1} \Phi^3(v; m, d^*) , \quad (4.57)$$

$$j_\sigma(m) \equiv B_m \int_0^\infty dv v^{m+3} \Phi^3(v; m, d^*) , \quad (4.58)$$

$$j_\rho(m) \equiv B_m \int_0^\infty dv v^{m+1} \Phi^2(v; m, d^*) \Xi(v; m, d^*) , \quad (4.59)$$

$$J_u(m) = 1 - \frac{C_E + \psi\left(2 - \frac{m}{4}\right)}{2} + j_u(m) . \quad (4.60)$$

Як і раніше, $C_E = -\psi(1) \simeq 0.5772 \dots$ — константа Ейлера, і $\psi(z)$ — псі-функція (див., напр., [267, 281]). Нарешті,²

$$j_u(m) \equiv \frac{B_m}{2^{4+m} \pi^{(6+m)/4}} \int_0^\infty dv v^{m-1} \Phi^2(v; m, d^*) \Theta(v; m) . \quad (4.61)$$

Множник B_m задається формулою

$$B_m \equiv \frac{S_{4-\frac{m}{2}} S_m}{F_{m,0}^2} = \frac{2^{10+m} \pi^{6+\frac{3m}{4}} \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(2-\frac{m}{4}) \Gamma^2(\frac{m}{4})} , \quad (4.62)$$

де $S_D = 2 \pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$ є площею поверхні D -вимірної сфери одиничного радіуса, а константа $F_{m,0}$ була означена в (4.38)–(4.39).

Скейлінгова функція $\Phi(v; m, d)$ детально описана в п. 4.2, а функції $\Xi(v; m, d^*)$ і $\Theta(v, m)$, остання з яких пов'язана із згорткою двох вільних пропагаторів у координатному просторі (4.24), означені в п. 4.2.3.

Ренормгрупова β -функція двопетльового наближення має вигляд

$$\begin{aligned} \beta_u(u) = & -\varepsilon u + \frac{3n+8}{2} \frac{u^2}{9} - \left\{ 3 \frac{5n+22}{27} J_u(m) \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \frac{n+2}{3} \left[\frac{j_\sigma(m)}{8(m+2)} - j_\phi(m) \right] \right\} u^3 + O(u^4) . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Вона визначає інфрачервоно-стійку нерухому точку u^* з точністю до $O(\varepsilon^2)$:

$$u^* = \frac{6\varepsilon}{n+8} + \frac{8\varepsilon^2}{27} \left(\frac{9}{n+8} \right)^3 \left\{ 3 \frac{5n+22}{27} J_u(m) + \frac{1}{24} \frac{n+2}{3} \left[\frac{j_\sigma(m)}{8(m+2)} - j_\phi(m) \right] \right\} + O(\varepsilon^3) . \quad (4.64)$$

В цій нерухомій точці ми визначаємо потрібні нам критичні показники з відповідних ренормгрупових η -функцій. Так, кореляційні показники записуються як

$$\eta_2 = \frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{2j_\phi(m)}{8-m} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) , \quad (4.65)$$

$$\eta_4 = -\frac{n+2}{(n+8)^2} \frac{j_\sigma(m)}{2m(m+2)} + O(\varepsilon^3) , \quad (4.66)$$

а показник анізотропії θ —

$$\theta = \frac{2-\eta_2}{4-\eta_4} = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2(n+8)^2} \left[\frac{j_\sigma(m)}{8m(m+2)} + \frac{j_\phi(m)}{8-m} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) . \quad (4.67)$$

²В аналогічній формулі [57, (6.3)] помилка друку: функція $\Phi(u; m, 0)$ повинна мати степінь 2.

Критичний показник кореляційної довжини в перпендикулярному підпросторі ν_2 визначається за формулою

$$\nu_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{n+2}{n+8} \varepsilon + \frac{1}{8} \frac{n+2}{(n+8)^2} \left\{ n+2 + 4 \frac{7n+20}{n+8} J_u(m) + \frac{m(n+2) + 4(4-n)}{(n+8)(8-m)} j_\phi(m) + \frac{n+2}{n+8} \frac{j_\sigma(m)}{8(m+2)} \right\} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.68)$$

Для аналогічного показника кореляційної довжини в модуляційному (паралельному) підпросторі ν_4 маємо

$$\nu_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \frac{n+2}{n+8} \varepsilon + \frac{1}{16} \frac{n+2}{(n+8)^2} \left\{ n+2 + 4 \frac{7n+20}{n+8} J_u(m) - \frac{n+2}{n+8} j_\phi(m) - \left[1 - \frac{m}{4} \frac{n+2}{n+8} \right] \frac{j_\sigma(m)}{2m(m+2)} \right\} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.69)$$

За останньою формулою з (4.49), знаючи величину

$$\eta_\rho^* = \frac{n+2}{(n+8)^2} \left[\frac{j_\sigma(m)}{8m(m+2)} - \frac{3j_\rho(m)}{m} - \frac{j_\phi(m)}{8-m} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (4.70)$$

ми можемо з легкістю визначити кросоверний показник φ .

Нарешті, для критичного показника поправок до скейлінгу, який є важливим для аналізу експериментальних даних, ми отримали

$$\omega_2 \equiv \beta'_u(u^*) = \varepsilon - \frac{36 \varepsilon^2}{(n+8)^2} \left\{ 3 \frac{5n+22}{27} J_u(m) + \frac{1}{24} \frac{n+2}{3} \left[\frac{j_\sigma(m)}{8(m+2)} - j_\phi(m) \right] \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (4.71)$$

Ми назвали цей аналог звичайного показника Вегнера ω_2 тому, що цей показник описує поправки до скейлінгу, які є слабшими за ведучі інфрачервоні сингулярності завдяки множнику $\xi_\perp^{-\omega_2} \sim |\tau|^{\nu_2 \omega_2}$.³ Оскільки ж $\xi_\perp^{-\omega_2} \sim \xi_\parallel^{-\omega_2/\theta}$, природньо також ввести інший показник поправок до скейлінгу,

$$\omega_4 \equiv \frac{\omega_2}{\theta}. \quad (4.72)$$

³Показник ω_2 зводиться до показника Вегнера ω ізотропних систем в граничному випадку $m = 0$.

У випадку ізотропної ТЛ (див. [66] і пункт 4.4.2), в якій $m = d$, і з двох кореляційних довжин залишається тільки одна, а саме $\xi_{\parallel}$, критичний показник ω_4 не втрачає свого змісту, а стає єдиним аналогом показника Вегнера ω .

4.4.1. Часткові випадки $m = 2$ і $m = 6$

З універсальних загальних формул, наведених вище, можливо отримати явні вирази для критичних показників ТЛ у часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$. Зокрема,

$$\eta_2(m=2) = \frac{4}{9} \frac{n+2}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \eta_4(m=2) = -\frac{8}{27} \frac{n+2}{(n+8)^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad (4.73)$$

$$\nu_2(m=2) = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)} \varepsilon + \frac{2(n+2)}{(n+8)^3} \left[\frac{n^2}{16} + \frac{131n}{216} + \frac{35}{27} + \frac{7n+20}{4} \ln \frac{4}{3} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (4.74)$$

$$\nu_4(m=6) = \frac{1}{4} + \frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{8} + \frac{n+2}{4(n+8)^3} \left[\frac{n^2}{4} + \frac{835n}{108} + \frac{1009}{54} - (19n+56) \ln \frac{4}{3} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (4.75)$$

Наші вирази для ν_2 і ν_4 виправляють аналогічні формули статті [183], при виводі яких були зроблені певні алгебраїчні помилки (див. розд. 4.2 нашої роботи [63]). Зауважимо, що при порівнянні результатів [63] і [183] слід враховувати різницю в означеннях відхилення ε від лінії верхніх граничних вимірностей: $\varepsilon \equiv \varepsilon_{[3]} = \varepsilon_{[39]}/2$ (при записі аналогічної формули в першому абзаці п. 4.2 роботи [63] була зроблена технічна помилка).

4.4.2. Ізотропні граничні випадки $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$

Однією з важливих властивостей загальних виразів для критичних показників ТЛ, отриманих в [62] і [63], є те, що в границях $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$ вони дають правильні відомі формули, що відповідають ізотропним системам. Так, зокрема, при $m = 0$ з формули (4.68) для $\nu_2(m)$ отримуються два перші члени ε -розкладу для критичного показника

$$\nu \equiv \nu_2(m=0) = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)} \varepsilon + \frac{n+2}{8(n+8)^3} (n^2 + 23n + 60) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (4.76)$$

кореляційної довжини звичайних ізотропних систем в околі критичної точки. Тут, як звичайно, $\varepsilon = 4 - d$.

З другого боку, при $m = d$ ми відтворюємо, наприклад, з аналогічної формули для $\nu_4(m)$ відомий раніше результат [66, 137]

$$\nu_4^{\text{ILP}} \equiv \nu_4(m = d) = \frac{1}{4} + \frac{n+2}{16(n+8)} \varepsilon_\alpha + \frac{(n+2)(15n^2 + 89n + 4)}{960(n+8)^3} \varepsilon_\alpha^2 + O(\varepsilon_\alpha^3). \quad (4.77)$$

ν_4^{ILP} — це критичний показник кореляційної довжини т. зв. ізотропної ТЛ, що відповідає системам, в яких всі просторові осі є осями модуляції. Тут ми зберегли позначення роботи [137] ε_α для відповідного відхилення від верхньої граничної вимірності, $\varepsilon_\alpha \equiv \varepsilon_8 = 8 - d$.

Вивід правильних формул для ізотропних граничних випадків з загальних інтегральних виразів (деталі цих нетривіальних граничних переходів описані в п. 4.4 і 4.5 статті [63]) дає нам додаткову впевненість у достовірності результатів робіт [62] і [63]. Тепер ми можемо з певністю використати їх дані для отримання чисельних оцінок критичних показників анізотропних систем у ТЛ.

4.5. Чисельні оцінки критичних показників при $d = 3$

Очевидно, найбільшу практичну цінність матимуть ті оцінки, що стосуються тривимірних ($d = 3$) однокомпонентних ($n = 1$) систем з одновісною ($m = 1$) анізотропією. Ми звертаємо першочергову увагу на них, оскільки саме для таких систем проводяться реальні експериментальні вимірювання а також інтенсивні чисельні дослідження. У випадку $d = 3$, $m = 1$, $n = 1$ існує також можливість порівняння з результатами високотемпературних розкладів.

Відтворюємо таблицю 5 з нашої роботи [63]. Отримані тут чисельні оцінки виділені жирним шрифтом. Для порівняння наведені узагальнені дані експериментальних робіт, взяті зі статті [180]. Результати високотемпературних розкладів — з роботи [145]. Результати чисельних експериментів позначені буквами МС.

Таблиця 4.1 показує дуже добре узгодження наших оцінок з результатами, отриманими чисельними методами типу Монте Карло. Особливо це стосується

Табл. 4.1. Величини критичних показників одновісних ($m = 1$) ТЛ в тривимірних ($d = 3$) системах з одно- ($n = 1$) та двокомпонентним параметром порядку ($n = 2$) за станом на 2001 рік.

	ν_4	α	β	γ	φ	β_q
	$n = 1$					
[63]	0.348	0.160	0.220	1.399	0.677	0.514
Exp[180]		0.4-0.5			0.60-0.64	0.44-0.49
НТЕ[145]	0.41±0.03	0.20±0.15		1.62±0.12		0.5
МС[141]			0.21±0.03	1.36±0.005		
МС[344]	0.33±0.03	0.2	0.19±0.02	1.4±0.06		
МС[143]		0.18±0.03	0.235±0.005	1.36±0.03		
	$n = 2$					
[63]	0.372	-0.047	0.276	1.495	0.725	0.521
МС[142]		0.1±0.14	0.20±0.02	1.5±0.1		

найновішої та найточнішої на той час роботи [143]. Узгодження з експериментальними даними — не таке переконливе. Особливо добре це видно у випадку показника α . Очевидно, експериментальне визначення критичних показників потребує вищої точності.

У таблиці 4.2, поряд з даними нашої роботи [63], ми показуємо результати, отримані після появи цієї статті. В тому числі — жирним шрифтом виділені наші нові чисельні оцінки, отримані в [57] з $1/n$ -розкладів (див. розд. 6) для критичних показників з $n = 3$. Прийнято вважати, що низькі порядки $1/n$ -розкладів не можуть давати добрих чисельних оцінок. Тому й не дивно було отримати з них для ν_2 і ν_4 числа, майже у два рази більші за ті, що дає ε -розклад. Але наскільки цікаво було довідатися, що саме з цими числами найкраще узгоджуються найновіші результати ренормгрупових розрахунків роботи [2]! Тут вже з'являється інтрига: якими все ж таки насправді мають бути величини показників ν_2 і ν_4 ?

Порівнюючи таблиці 4.1 і 4.2 ми бачимо, що до визначення критичних показників ТЛ зберігається інтерес. Застосовуються нові розрахункові методи, визначаються показники, які до нас ніхто чисельно не оцінював. Зокрема, з'явилися деякі результати для ТЛ з двовісною анізотропією — для $m = 2$ [144]. В роботі [144] опублікований результат для величини $z = 1/\theta = 2.3(3)$, звідки слідує ве-

Табл. 4.2. Критичні показники тривимірних систем у ТЛ. Рік 2013.

	ν_2	ν_4	α	β	γ	φ	β_q	ω_2
				$m = 1, n = 1$				
[63]	0.746	0.348	0.160	0.220	1.399	0.677	0.514	0.870
MC[345]			0.18(2)	0.238(5)	1.36(3)			
RG[226]	0.6335					0.7322		0.8916
MC[346]			0.195	0.271	1.384			
MC[347]	0.618(4)			0.229(2),				
				$m = 1, n = 2$				
[63]	0.757	0.372	-0.047	0.276	1.495	0.725	0.521	
HT[146]	0.805(15)	0.40(3)	-0.02(2)		1.535(25)	1.00(4)	0.40(2)	
				$m = 1, n = 3$				
[63]	0.798	0.392	-0.178	0.301	1.576	0.765	0.521	
1/n[57]	1.575	0.755		0.48				
RG[2]	1.655(5)	0.78(1)						
				$m = 2, n = 1$				
[63]	1.230	0.482	0.226	0.131	2.02	0.688		1.161
HT[144]	1.104(27)	0.45(10)				0.7(2)		

личина критичного індекса анізотропії $\theta = 0.435$ для випадку $m = 2, n = 1$. З даних нашої роботи [62] для $\theta(m = 2, n = 1)$ отримується досить близька величина 0.478. (Для індекса θ в [62] нами була наведена лише оцінка $\theta = \nu_4/\nu_2 = 0.488$ у випадку одновісної анізотропії, $m = 1, n = 1$.)

4.6. Роль кристалічної структури в ТЛ

Як уже згадувалося вище, фазові переходи, що відбуваються в критичних точках Ліфшица, мають ряд нових рис у порівнянні з переходами в класичних критичних точках. Однією з таких особливостей виявився вплив просторової анізотропії на фізичні системи поблизу ТЛ. Зауважимо, що аналогічне питання для статистичних систем поблизу звичайної критичної точки по суті не піднімається. Це пов'язане з тим, що вже класичний підрахунок степенів виявляє несуттєвість тонких особливостей кристалічної структури для перебігу фазових переходів в ізотропних системах. На відміну від цієї стандартної ситуації, наш ренормгруповий аналіз [69] виявив, що для систем з m -вісною ТЛ наявність анізотропії у

виділених m просторових напрямках може відігравати суттєву роль.

4.6.1. Узагальнення ефективного гамільтоніана

У роботі [69] ми узагальнили стандартну теоретико-польову модель типу ϕ^4 [137], яка є загальноприйнятою для опису m -вісних точок Ліфшица. Ця модель з ЕГ (4.1) передбачає, що в m -вимірному “паралельному” підпросторі (в якому при $T < T_L$ виникає модуляція параметра порядку), як і в $(d-m)$ -вимірному “перпендикулярному” підпросторі d -вимірного простору $\mathbb{R}^d$ присутня обертова симетрія. В цьому є певна аналогія до опису фазового переходу в звичайній критичній точці. Але припущення про обертову симетрію обидвох підпросторів не є обов’язковим для теорії, що описує ТЛ. Більше того, воно є, взагалі кажучи, невиправданим для реальних кристалічних систем, в яких з необхідністю різні просторові напрями не є еквівалентними.

З огляду на це ми змоделювали порушення просторової обертової симетрії в твердих тілах шляхом введення в ЕГ (4.1) додаткового члена

$$\Delta H_{LP}^{(\text{cub})}[\phi] = \frac{w_0}{2} \int d^d x \sum_{\alpha=1}^m (\partial_{\alpha}^2 \phi)^2 \quad (4.78)$$

з кубічною симетрією в m -вимірному паралельному підпросторі, де, як звичайно, $\phi = \phi(x)$ — n -компонентне поле параметра порядку. Запишемо результат такої модифікації повністю:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}[\phi] = \int d^d x \left[\frac{\tau_0}{2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2} (\nabla_{\parallel} \phi)^2 + \right. \\ \left. \frac{\sigma_0}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \partial_{\alpha}^2 \phi \right)^2 + \frac{w_0}{2} \sum_{\alpha=1}^m (\partial_{\alpha}^2 \phi)^2 + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Для зручності порівняння ми покомпонентно розписали дію оператора Лапласа $\Delta_{\parallel}$ в доданку $(\Delta_{\parallel} \phi)^2$ початкового ЕГ (4.1).

По суті, таке узагальнення теоретико-польової моделі (4.1) є аналогічним до узагальнення відомої граткової ANNNI моделі з $m = n = 1$ на випадок граткової

системи з довільним числом осей анізотропії m і n -компонентним спіном у вузлах відповідної (гіперкубічної) ґратки.

4.6.2. Аналіз стійкості

Завданням, яке ми ставили перед собою в роботі [69], було виявити, чи модифікація звичайної моделі (4.1) шляхом введення в неї збурення (4.78) приведе до змін у критичній поведінці системи при переході через ТЛ.

Звичним способом з'ясування таких питань є т. зв. лінійний аналіз стійкості системи до включення збурення. Його суть полягає в наступному. В системі, що описується ЕГ $\mathcal{H}$ вводиться збурення $g \int \mathcal{O}(\nabla, \phi)$ з константою зв'язку g , яка вважається малою. “Оператор” $\mathcal{O}$ є функцією полів $\phi(x)$ і їх просторових похідних. Спочатку підраховується гаусова скейлінгова вимірність $y_{\mathcal{O}}^G$ збурення, що визначає відповідну скейлінгову вимірність затравки g , $y_{\mathcal{O}}^G = [g]$. Далі розглядається ефект від включення збурення $g \int \mathcal{O}(\nabla, \phi)$ в кореляційну функцію $\Gamma^f = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}} f(\phi) / \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}}$, а саме — розраховується середнє

$$\Gamma_{\mathcal{O}}^f = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}}} \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}} f(\phi) g \int \mathcal{O}(\nabla, \phi). \quad (4.80)$$

Вводиться ренормалізаційний фактор $Z_g = 1 + a_g/\varepsilon + \dots$, пов'язаний з появою нового $1/\varepsilon$ -полюса з лишком a_g , і стандартним чином розраховується повна скейлінгова вимірність $y_{\mathcal{O}}$ введеного збурення

$$y_{\mathcal{O}} = y_{\mathcal{O}}^G + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \bigg|_0 \ln Z_g \bigg|_{u=u^*} = y_{\mathcal{O}}^G + O(\varepsilon, \varepsilon^2) \quad (4.81)$$

в нетривіальній нерухомі точці теорії $u^* \neq 0$.

Зауважимо тепер, що до включення в початкову теорію збурення $g \int \mathcal{O}$, величина Γ^f в критичній області мала вигляд, наприклад, $\Gamma^f = t^{-y_f} F(\dots)$, де $t > 0$ — зведена температура, $F(\dots)$ — скейлінгова функція, а три крапки позначають присутність певних скейлінгових змінних незбуреної теорії. Включення збурення $g \int \mathcal{O}$ приводить до появи у скейлінговій функції $\Gamma_{\mathcal{O}}^f$ нової змінної, пропорційної

константі зв'язку g ,

$$\Gamma_{\mathcal{O}}^f = t^{-y_f} F(\dots; g t^{-\nu y_{\mathcal{O}}}) \sim t^{-y_f} \left[1 + g t^{-\nu y_{\mathcal{O}}} + \dots \right], \quad (4.82)$$

де величина $y_{\mathcal{O}}$ визначена в (4.81), а $\nu > 0$ — звичайний показник кореляційної довжини. Розклад скейлінговій функції $F(\dots; g t^{-\nu y_{\mathcal{O}}})$ в лінійному порядку за g показує, що включення збурення $\sim g$ приводить до появи нового температурного доданка зі степенем $t^{-\nu y_{\mathcal{O}}}$. Тут важливого значення набуває знак повної скейлінгової вимірності $y_{\mathcal{O}}$. Якщо $y_{\mathcal{O}} < 0$, то поправка $g t^{-\nu y_{\mathcal{O}}} = g t^{\nu |y_{\mathcal{O}}|}$ з (4.82) зникає при малих t , і її показник визначає показник поправки до скейлінгу, пов'язаної з несуттєвою змінною g . Якщо ж $y_{\mathcal{O}} > 0$, то доданок $g t^{-\nu y_{\mathcal{O}}}$ з (4.82) безмежно росте при $t \rightarrow 0$, і приводить до зміни характеру головної сингулярності величини $\Gamma_{\mathcal{O}}^f$. Таким чином ми маємо справу з явищем т. зв. кросоверу, а відповідний кросоверний показник ϕ визначається як $\phi = \nu y_{\mathcal{O}} > 0$.

4.6.3. Кросоверний показник

Застосовуючи цю загальну схему, в роботі [69] ми розраховували кросоверний показник ϕ_{cub} , пов'язаний з появою додаткового члена (4.78) з кубічною симетрією в ефективному гамільтоніані ТЛ (4.79),

$$\phi_{\text{cub}}(m) = 27 \frac{n+2}{(n+8)^2} C_{\text{cub}}(m) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (4.83)$$

де $C_{\text{cub}}(m)$ — коефіцієнт при ε^2 кросоверного показника $\phi_{\text{cub}}(m)$ при $n = 1$, тобто

$$C_{\text{cub}}(m) = \frac{1}{27m(m+2)} \left[\frac{48 i_w(m)}{(m+4)(m+6)} + \frac{j_{\sigma}(m)}{8} \right]. \quad (4.84)$$

Тут $j_{\sigma}(m)$ — інтеграл, визначений в (4.58), а новий інтеграл $i_w(m)$ має вигляд

$$i_w(m) = B_m \int_0^{\infty} dv v^{m+7} \Phi^2(v; m, d^*) Y^{\text{iv}}(v; m, d^*), \quad (4.85)$$

де $Y^{\text{iv}}(v; m, d^*)$ — похідна четвертого порядку за змінною v від скейлінгової функції $Y(v^2)$, визначеної в рівнянні (4.25).

Ми чисельно розраховували значення коефіцієнта $C_{\text{cub}}(m)$ для цілих m від 2 до 6 і отримали $C_{\text{cub}}(2) \simeq 0.00309$, $C_{\text{cub}}(3) \simeq 0.00380$, $C_{\text{cub}}(4) \simeq 0.00444$, $C_{\text{cub}}(5) \simeq 0.00501$, $C_{\text{cub}}(6) \simeq 0.00552$. В часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$, як і в (4.73)–(4.75), отримано аналітичні вирази

$$C_{\text{cub}}(2) = \frac{1}{324}, \quad C_{\text{cub}}(6) = \frac{1}{81} \left(4 \ln \frac{4}{3} - \frac{19}{27} \right). \quad (4.86)$$

Як бачимо, при всіх цих числах m значення $C_{\text{cub}}(m)$ є додатніми, так що в порядку $O(\varepsilon^2)$ кросоверний показник $\phi_{\text{cub}}(m)$ є додатнім для всіх вимірностей m “перпендикулярного” підпростору $\mathbb{R}^m$, де потенційно міг би проявлятися ефект кубічної анізотропії. Це означає, що принаймні при незначних відхиленнях ε від верхньої граничної вимірності, кубічна анізотропія є суттєвим фізичним фактором, який може привести до значних змін у критичній поведінці в ТЛ. Зокрема, не виключено, що дестабілізація звичної нерухомої точки може привести навіть до появи фазового переходу першого роду.

Задача про вплив просторової анізотропії на фазовий перехід в ТЛ, як і цей доволі несподіваний фізичний висновок, було зроблено в роботі [69] вперше. Методами чисельного моделювання типу Монте Карло його без особливих труднощів можна було б перевірити на відповідній ґратковій моделі [69], яка б давала відповідне узагальнення відомої моделі ANNNI для одновісної ТЛ.

4.7. Напівбезмежні системи в точці Ліфшица

Наступним узагальненням наших робіт [62, 63] стало застосування розвинутої нами теорії до дослідження просторово обмежених анізотропних систем в ТЛ. Як ми вже згадували в п. 1.3, для поверхневої критичної поведінки напівбезмежної анізотропної системи суттєве значення має орієнтація поверхні в просторі відносно напрямів осей анізотропії. В роботі [67] ми розглянули напівбезмежні системи з m -вісною анізотропією, поверхня яких зорієнтована перпендикулярно до одного з m напрямів модуляції. Дослідження таких систем методами ренормалізаційної групи та ε -розкладу виконувалося тут вперше. До цього часу в роботах

[195–197] в ТЛ досліджувалися напівбезмежні системи з поверхнею, паралельною до всіх осей модуляції. В них також використовувалися методи, запропоновані нами в [62, 63], та математичні дані про скейлінгові функції, опубліковані в цих статтях.

4.7.1. Загальний розгляд

Для опису напівобмежених сильно анізотропних систем з поверхнею, орієнтованою перпендикулярно до однієї з осей модуляції, в роботі [67] було запропоновано ЕГ типу Гінзбурга-Ландау-Вільсона. Він складається з двох частин: об’ємної та поверхневої. Об’ємна частина ЕГ — подібна до записаної в формулі (4.1). Різниця полягає у виділенні одного з модуляційних напрямів, z (тут — це напрям з номером m), поряд з обмеженням інтегрування за ним розміщенням поверхні $z = 0$:

$$\mathcal{H}_{\infty/2}[\phi] = \int d^{d-1}r \int_0^\infty dz \left[\frac{1}{2} \sum_{\beta=m+1}^d (\partial_\beta \phi)^2 + \frac{\rho_0}{2} \sum_{\alpha=1}^m (\partial_\alpha \phi)^2 + \frac{\sigma_0}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha^2 \phi \right)^2 + \frac{\tau_0}{2} |\phi|^2 + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right].$$

З іншого боку, тут, як і в (3.1), усі координати, паралельні до поверхні, позначені як $\mathbf{r}$. При цьому ті з них, що є паралельними до осей модуляції, традиційно мають індекс α , а перпендикулярні до них — індекс β .

Поверхнева частина ЕГ має вигляд

$$\mathcal{H}_{\text{Surf}}[\phi] = \int d^{d-1}r \left\{ \frac{c_\perp}{2} |\phi|^2 + b \phi \partial_n \phi + \sum_{\alpha=1}^{m-1} \left[\frac{\lambda_\parallel}{2} (\partial_\alpha \phi)^2 + f (\partial_\alpha \phi) \partial_n \partial_\alpha \phi \right] + \frac{\lambda_\perp}{2} (\partial_n \phi)^2 \right\}, \quad (4.87)$$

де індекс n означає нормальну до поверхні похідну приповерхневих полів. Зараз, на відміну від попередньої формули, ми не пишемо додаткових індексів “0” біля затравочних поверхневих констант зв’язку, щоб уникнути перевантаженості у позначеннях. Присутній тут доданок з константою зв’язку f , який не можна

виключити з розгляду, відрізняє останню формулу від її аналога, запропонованого в роботі [348]. Оскільки наявність поверхні ламає симетрію між α -напрямами, паралельними до неї, і до напрямку z , константи зв'язку $\lambda_{\parallel}$ і $\lambda_{\perp}$ повинні бути різними. Натомість, внески, які б порушували обертову симетрію $m - 1$ компонент α -напрямів, паралельних до поверхні, і розглядалися в попередньому пункті, зараз до уваги не беруться.

З розгляду варіації $\delta\mathcal{H}$ ефективного гамільтоніана $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\infty/2} + \mathcal{H}_{\text{Surf}}$ ми вивели класичне польове рівняння

$$\left[\sigma (\partial_{\alpha} \partial_{\alpha})^2 - \rho \partial_{\alpha} \partial_{\alpha} - \partial_{\beta} \partial_{\beta} + \tau + \frac{u}{6} \phi^2 \right] \phi = 0 \quad (4.88)$$

і граничні умови на поверхні,

$$\left\{ \sigma \partial_n^3 + (b - \rho) \partial_n + c_{\perp} - [\lambda_{\parallel} + (f - \sigma) \partial_n] \sum_{\alpha=1}^{m-1} \partial_{\alpha}^2 \right\} \phi = 0 \quad (4.89)$$

і

$$\left\{ -\sigma \partial_n^2 + \lambda_{\perp} \partial_n + b - (f + \sigma) \sum_{\alpha=1}^{m-1} \partial_{\alpha}^2 \right\} \phi = 0. \quad (4.90)$$

Ці ГУ є справедливими в теорії Ландау. У взаємодіючій теорії вони справджуються під знаком усереднення. З розгляду ГУ (4.89) і (4.90) випливає, що трійка поверхневих операторів $\mathcal{O}_1 = \phi \partial_n^2 \phi$, $\mathcal{O}_2 = (\partial_n \phi) \partial_n^2 \phi$, і $\mathcal{O}_3 = \phi \partial_n^3 \phi$, які могли б бути потенційними кандидатами на входження в поверхневий ефективний гамільтоніан (4.87), насправді є зайвою (redundant), і формула (4.87) є самодостатньою.

З умови (4.88) слідує, що “ pz -представлення” (порівн. з (3.4)) $\hat{G}(p, \hat{q}; z, z')$ вільного пропагатора сформульованої теорії задовольняє диференціальному рівнянню четвертого порядку

$$[\sigma (\hat{q}^2 - \partial_z^2)^2 + p^2 + \rho (\hat{q}^2 - \partial_z^2) + \tau] \hat{G}(p, \hat{q}; z, z') = \delta(z - z'). \quad (4.91)$$

Тут, як звичайно, мається на увазі, що ми працюємо в неупорядкованій надкритичній фазі з нульовим профілем параметра порядку, $\langle \phi(x) \rangle = 0$. Як і в (3.4), функція $\hat{G}(p, \hat{q}; z, z')$ є Фур'є-образом координатного представлення кореляційної

функції $G(r_\beta, \hat{r}_\alpha; z, z')$ відносно всіх координат $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\beta, \hat{\mathbf{r}}_\alpha)$, паралельних до поверхні, тобто напрямів, у яких зберігається трансляційна інваріантність. На відміну від (3.4), зараз ситуація є такою, що до “паралельних” координат належать як $d - m$ β -векторів $\mathbf{r}_\beta$, так і $m - 1$ векторів $\hat{\mathbf{r}}_\alpha$ модуляційного підпростору. Те, що число таких напрямів є саме $m - 1$, а не m , як це було при розгляді ТЛ в безмежному об’ємі, ми позначили “дашком” над вектором $\mathbf{r}_\alpha$. Аналогічне позначення ми використовуємо і для спряженого хвильового вектора $\hat{\mathbf{q}}$, який має також $m - 1$ α -компонент на відміну від m -компонентного вектора $\mathbf{q}$, що використовувався в пункті 4.2.

Розв’язок рівняння (4.91) повинен задовольняти парі ГУ (порівн. з (4.89)–(4.90))

$$\left\{ \sigma \partial_z^3 + [b + (f - \sigma) \hat{q}^2 - \rho] \partial_z + c_\perp + \lambda_\parallel \hat{q}^2 \right\} \hat{G}(p, \hat{q}; z, z')|_{z=0} = 0, \quad (4.92)$$

$$[-\sigma \partial_z^2 + \lambda_\perp \partial_z + b + (f + \sigma) \hat{q}^2] \hat{G}(p, \hat{q}; z, z')|_{z=0} = 0, \quad (4.93)$$

за умови, що в границі $z, z' \rightarrow \infty$ при фіксованій різниці $z - z'$ мусить відтворюватися аналогічне змішане представлення об’ємного пропагатора в ТЛ,

$$\hat{G}_b(p, \hat{q}; z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{(k^2 + \hat{q}^2)^2 + p^2} \quad (4.94)$$

$$= \frac{e^{-\kappa_+ |z|}}{4\kappa_+ \kappa_- (\kappa_+^2 + \kappa_-^2)} [\kappa_- \cos(\kappa_- |z|) + \kappa_+ \sin(\kappa_- |z|)]. \quad (4.95)$$

Величини κ_- і κ_+ входять у вирази для коренів знаменника інтеграла Фур’є в (4.95), $\pm \kappa_- \pm i\kappa_+$, і мають вигляд

$$\kappa_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\hat{q}^4 + p^2} \pm \hat{q}^2}. \quad (4.96)$$

Крім цього, для того щоб найвища похідна ∂_z^4 давала δ -функцію в рівнянні (4.91), потрібно, щоб обидві функції $\hat{G}(p, \hat{q}; z, z')$ і $\hat{G}_b(p, \hat{q}; z, z')$ задовольняли умову стрибка

$$[\sigma \partial_z^3 \hat{G}(p, \hat{q}; z, z')]_{z=z'-0}^{z=z'+0} = 1. \quad (4.97)$$

У роботі [67] ми виконали всі розрахунки, необхідні для визначення загального вигляду вільного пропагатора $\hat{G}(p, \hat{q}; z, z')$ безпосередньо в точці Ліфшица,

тобто при $\rho = \tau = 0$. Не дивлячись на це спрощення, результат виявився не дуже придатним для практичних обчислень, і ми не записуємо явних виразів через їх громіздкість (всю необхідну інформацію можна знайти в [67, Розд. 3]). У зв'язку з цим в [67, Розд. 4-5] ми перейшли до розгляду *звичайного* переходу в ТЛ у випадку, коли одна з осей анізотропії обмежується вільною поверхнею з ГУ типу Діріхле.

4.7.2. “Звичайний” перехід в точці Ліфшица

Вільний пропагатор, що обговорювався в попередньому пункті, можна реально використовувати для розрахунку кореляційних функцій анізотропних систем, обмежених вільною поверхнею, тобто, коли поверхневі поля задовольняють узагальненим асимптотичним граничним умовам типу Діріхле,

$$\phi(\mathbf{r}; z = 0) = \partial_n \phi(\mathbf{r}; z)|_{z=0} = 0. \quad (4.98)$$

Ці ГУ відповідають “звичайному” переходу (порівн. з Розд. 3.4 і 7.2.2) і узагальнюють звичайну формулу (3.62) відповідно до ускладнень в теорії, яку ми зараз розглядаємо. Згідно з (4.98), відповідний вільний пропагатор $\hat{G}_{00}(p, \hat{q}; z, z')$ задовольнятиме ГУ

$$\hat{G}_{00}(p, \hat{q}; z, z')|_{z=0} = \partial_z \hat{G}_{00}(p, \hat{q}; z, z')|_{z=0} = 0. \quad (4.99)$$

У явному вигляді ми отримуємо

$$\hat{G}_{00}(p, \hat{q}; z, z') = \hat{G}_b(p, \hat{q}; |z - z'|) - \hat{G}_b(p, \hat{q}; z + z') - \frac{\sin(\kappa_- z) \sin(\kappa_- z')}{2\kappa_-^2 \kappa_+} e^{-\kappa_+(z+z')}, \quad (4.100)$$

де $\hat{G}_b(p, \hat{q}; z)$ — pz -представлення об'ємного пропагатора вільної теорії в ТЛ, (4.95). Різниця об'ємних пропагаторів у перших двох доданках є аналогічною до формули (3.71) для пропагатора Діріхле в критичній точці. Останній доданок в (4.100) є специфічним чисто поверхневим внеском. Наявні в (4.100) математичні спрощення дозволяють отримати деякі результати навіть в аналітичному вигляді.

В теперішній ситуації операторний розклад на близьких відстанях від поверхні має вигляд (порівн. з Розд. 3.4)

$$\phi_R(\mathbf{r}, z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} C_{\partial_n^2 \phi}(z) (\partial_n^2 \phi)_R(\mathbf{r}), \quad (4.101)$$

а скейлінговою вимірністю поверхневого оператора з двома нормальними похідними є $\Delta[\partial_n^2 \phi] = \beta_{L1}^{\perp \text{ord}} / \nu_2$, де ν_2 — об'ємний критичний показник перпендикулярної кореляційної довжини в ТЛ, а $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}}$ — поверхневий показник параметра порядку. Подібно як і в п. 3.4, особливості критичної поведінки нашої моделі отримуються з розгляду $(N + M)$ -точкових кумулянтів (порівн. з (3.64))

$$\mathcal{G}_{a_1 \dots b_M}^{(N, M)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{r}_M) = \left\langle \left[\prod_{j=1}^N \phi^{a_j}(\mathbf{x}_j) \right] \left[\prod_{k=1}^M \partial_n^2 \phi^{b_k}(\mathbf{r}_k) \right] \right\rangle_c. \quad (4.102)$$

Для усунення ультрафіолетових розбіжностей, присутніх в пертурбативних розкладах кореляційних функцій $\mathcal{G}^{(N, M)}$, вводиться новий ренормалізаційний фактор $\hat{Z}_2$. Він входить у визначення перенормованого поверхневого оператора $(\partial_n^2 \phi)_R$,

$$\partial_n^2 \phi = [Z_2 Z_\phi]^{1/2} (\partial_n^2 \phi)_R = \hat{Z}_2^{1/2} \partial_n^2 \phi_R, \quad (4.103)$$

а також перенормованих кореляційних функцій:

$$\mathcal{G}_R^{(N, M)} = Z_\phi^{-(N+M)/2} \hat{Z}_2^{-M/2} \mathcal{G}^{(N, M)}. \quad (4.104)$$

За допомогою методу вимірної регуляризації та мінімальних віднімань ми розраховували відповідну аномальну вимірність $\hat{\eta}_2^*$ другої нормальної похідної поверхневих полів у першому нетривіальному порядку ε -розкладу. Для цього в однопетльовому наближенні була розглянута кореляційна функція двох полів — об'ємного ϕ і $\partial_n^2 \phi$ на поверхні. Її сингулярність при $\varepsilon \rightarrow 0$ визначила величину $\hat{\eta}_2^*$ як

$$\hat{\eta}_2^* = g_0(m) \frac{n+2}{n+8} \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2), \quad (4.105)$$

де коефіцієнт $g_0(m)$ має вигляд

$$g_0(m) = 2 - m - \frac{3}{4-m} \left[2 - m + \frac{24}{m+2} - \frac{\sqrt{2\pi}}{8} (2m-5)(m-1) \frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma(m/2 + 1/2)} \right]$$

$$+ \frac{1}{m} {}_2F_1\left(2, \frac{m-1}{2}; \frac{m+2}{2}; -1\right) \Big] \quad (4.106)$$

для довільного числа осей анізотропії m ; у випадку ТЛ з одновісною анізотропією маємо $g_0(1) = -9$.

Це дало нам можливість визначити критичний показник поверхневої намагніченості звичайного переходу в ТЛ як

$$\begin{aligned} \beta_{L1}^{\perp \text{ord}} &= \beta_L + \frac{\nu_2}{2} (4\theta + \hat{\eta}_2^*) = \frac{\nu_2}{2} [4 - \varepsilon + \hat{\eta}_2^*] + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \frac{\varepsilon}{4(n+8)} \left[n - 4 + \frac{n+2}{2} g_0(m) \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4.107)$$

де $\beta_L = \frac{1}{2}\nu_2[d - 2 + \eta_2 + m(\theta - 1)]$ — об'ємний показник намагніченості⁴, $\theta = 1/2 + O(\varepsilon^2)$ — індекс анізотропії, а $\nu_2 = 1/2 + O(\varepsilon)$ і $\eta_2 = O(\varepsilon^2)$ — відповідно показник кореляційної довжини і кореляційний критичний показник в β -підпросторі об'ємної системи в ТЛ.

В роботі [67] ми також ідентифікували поверхневий критичний показник паралельних кореляцій як

$$\eta_{L\parallel}^{\perp \text{ord}} = 5\theta - 1 + \eta_2 + \hat{\eta}_2^* = \frac{3}{2} + \hat{\eta}_2^* + O(\varepsilon^2). \quad (4.108)$$

Ця формула, у свою чергу, дає доступ до критичного показника поверхневої сприйнятливості в ТЛ $\gamma_{L11}^{\perp \text{ord}}$ через звичайне скейлінгове співвідношення $\gamma_{11} = \nu_2(1 - \eta_{\parallel})$, яке залишається справедливим у системі, що розглядається [199].

Для випадку ізінгівських ($n = 1$) одновісних ($m = 1$) систем, що відповідають відомій ґратковій моделі ANNNI, критичний показник (4.107) зводиться до $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}} = 1 - (11/24)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Проста екстраполяція ε -розкладу до фізичної вимірності $d = 3$ дає чисельне значення 0.31 для цього показника, тоді як апроксиманта Паде $[0,1]$ $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}} = [1 + (11/24)\varepsilon + O(\varepsilon^2)]^{-1}$ дає оцінку $\beta_{L1} = 0.59$. Такий розкид даних є нормальним для лінійного за ε наближення, тим більше при великому значенні $\varepsilon=3/2$. У кожному разі, чисельне значення 0.59 є дуже близьким до результату розрахунків методом Монте Карло [201], 0.62(1). Таким чином, наші

⁴У відповідній (стандартній) формулі з [67, стор. 7937] внаслідок технічної помилки опущений множник $1/2$

результати дають фізично правильну тенденцію до зменшення величини $\beta_{L1}^{\perp \text{ord}}$ від класичного значення 1, задовільно узгоджуються з даними чисельного експерименту, і можуть бути доброю точкою відліку для подальших теоретичних досліджень, а також майбутніх експериментів з реальними системами.

4.8. Висновки

У четвертому розділі описаний новий підхід, запропонований для розрахунку критичних показників, що описують критичну поведінку сильно анізотропних систем в околі точки Ліфшица. Вперше отримано правильні ε -розклади всіх показників ТЛ з довільною кількістю осей анізотропії m в порядку $O(\varepsilon^2)$ з $\varepsilon = 4 + m/2 - d$. При цьому виявлено та виправлено значну кількість помилок в аналогічних розрахунках інших авторів. Зроблено висновок про те, що у взаємодіючій теорії індекс анізотропії θ є некласичним $\forall m \in]0, d[$.

Наші загальні інтегральні представлення для критичних показників ТЛ відтворюють відомі $\varepsilon = 4 - d$ -розклади показників ізотропних систем в критичній точці, коли анізотропія зникає в границі $m \rightarrow 0$. У частковому випадку ізотропної ТЛ з $m = d$ і $\varepsilon = 8 - d$ також отримуються відомі формули. Існує узгодження з $1/n$ -розкладом, який буде розглянуто нижче, в спільній області застосовності $\{\varepsilon, 1/n\} \rightarrow 0$. Коректність граничних випадків дає впевненість у правильності аналітичних виразів у часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$, а також чисельних результатів при $m = 1$. На основі останніх — виконані чисельні оцінки критичних показників при $d = 3$, які ми порівнюємо з низкою даних інших робіт.

Поставлено задачу про вплив кристалічної структури (а саме кубічної анізотропії) модуляційного підпростору на критичну поведінку m -вісних ТЛ. В рамках другого порядку ε -розкладу розраховано відповідний кросоверний показник і зроблено висновок про те, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.

Сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних сильно анізотропних систем, обмежених поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей модуляції. В

першому порядку за ε розраховані некласичні поверхневі показники звичайного переходу, що відбуваються в таких системах у ТЛ. Проведено відповідні чисельні оцінки та порівняння з наявними даними чисельного експерименту.

Наші формулювання теорії сильно анізотропних систем в точці Ліфшица і технологічні засоби, які при цьому використовуються, з певністю є корисними для квантових теорій поля з порушенням Лоренцівської інваріантності [55, 56] (деякі математичні аспекти таких теорій ґрунтовно досліджувалися в нашій роботі [6]). Запропоновані нами способи розрахунку критичних показників є суттєво ефективнішими за всі попередні і можуть адаптовуватися для дослідження інших складних систем.

РОЗДІЛ 5

КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ ЛІФШИЦА І ГІПОТЕЗА ЛОКАЛЬНОЇ СКЕЙЛІНГОВОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ

Даний розділ присвячений критичному перегляду т. зв. гіпотези локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ), запропонованої М. Генкелем в роботах [173, 181, 229] і порівнянню її передбачень з розрахованими нами епсилон-розкладами для парних кореляційних функцій m -вісних анізотропних систем у мультикритичній точці Ліфшица [73, 349]. З цією метою в роботі [73] ми виконали перевірку математичного підґрунтя ГЛСІ, а також провели ґрунтовне дослідження математичної структури парних кореляційних функцій у ТЛ. Ми показали, що передбачення ГЛСІ Генкеля, строго кажучи, є справедливими тільки у випадку теорій, вільних від взаємодій. При цьому вони дають добрі кількісні результати в тих випадках, коли врахування флуктуацій приводить до невеликих чисельних поправок.

5.1. Гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності М. Генкеля

На сьогоднішній день добре відомо, що крупномасштабні фізичні властивості систем у КТ описуються масштабно-інваріантними континуальними теоріями поля [9, 350, 351]. У звичному випадку об'ємних ізотропних систем з короткосяжними взаємодіями, скейлінгова інваріантність, разом із трансляційною інваріантністю і обертовою симетрією передбачають інваріантність відносно більш широкої групи перетворень, яка називається конформною [227, 228]. Конформну інваріантність можна розглядати як узагальнення цього набору глобальних симетрій

на більш широку групу локальних перетворень, які теж залишають незмінними властивості системи, яка перебуває у критичному стані. Ці перетворення відповідають локальним комбінаціям зміщень, поворотів і масштабних перетворень з масштабним фактором $\ell(\mathbf{x})$, що залежить від просторової координати $\mathbf{x}$.

У своїх роботах [143, 173, 181, 229] Генкель поставив собі завдання зробити подібне узагальнення для асимптотичної анізотропної скейлінгової інваріантності, присутньої в сильно анізотропних системах, коли вони перебувають у критичному стані. Таким чином виникла його гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності — ГЛСІ, яку ми коротко розглянемо в цьому розділі. При цьому ми будемо обмежуватися виключно розглядом т. зв. систем “типу Γ ” в термінології Генкеля, коли ця гіпотеза стосується, зокрема, m -вісних анізотропних систем у точці Ліфшица, критичні властивості яких ми досліджували в попередніх розділах.

Нагадаємо, що глобальна анізотропна масштабна інваріантність означає, що локальні скейлінгові оператори $\mathcal{O}_j(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{O}_j(\mathbf{r}, \mathbf{z})$ зі скейлінговими вимірностями Δ_j при масштабних перетвореннях координат $\mathbf{r}' = \ell \mathbf{r}$, $\mathbf{z}' = \ell^\theta \mathbf{z}$ задовольняють правилу перетворення $\mathcal{O}_j(\ell \mathbf{r}, \ell^\theta \mathbf{z}) = \ell^{-\Delta_j} \mathcal{O}_j(\mathbf{r}, \mathbf{z})$, де $\theta \neq 1$ — знайомий нам з розділу 4 індекс анізотропії. Відповідно до цього, парні кумулянтні кореляційні функції $G_{jk}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle \mathcal{O}_j(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_k(\mathbf{x}_2) \rangle$ поведуть себе при таких змінах масштабів координат як

$$G_{jk}(\ell \mathbf{r}_1, \ell^\theta \mathbf{z}_1, \ell \mathbf{r}_2, \ell^\theta \mathbf{z}_2) = \ell^{-(\Delta_j + \Delta_k)} G_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{z}_2). \quad (5.1)$$

У свою чергу, для систем з трансляційною інваріантністю в кожному підпросторі з координатами $\mathbf{r}$ і $\mathbf{z}$ це означає, що парні кореляційні функції є узагальненими однорідними функціями. Вони представляються в скейлінговому вигляді

$$G_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = r^{-2\Delta} \Omega_{jk}(z r^{-\theta}), \quad \text{де} \quad \Delta \equiv (\Delta_j + \Delta_k)/2, \quad (5.2)$$

а $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ і $z = |\mathbf{z}| = |\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2|$. Тут характерною для систем з анізотропною скейлінговою інваріантністю є поява скейлінгових функцій $\Omega_{jk}(v)$ залежних від скейлінгової змінної $v \equiv z/r^\theta$.

Постулюючи ряд “аксіом локальної скейлінгової інваріантності”, Генкель записав набір локальних диференціальних генераторів перетворень координат, які певним чином узагальнюють відомі конформні перетворення на випадок d -вимірного анізотропного простору з одновісною анізотропією, $\mathbb{R}_\beta^{d-1} \times \mathbb{R}_\alpha^1$. Аналізуючи дію цих генераторів на кореляційні функції (5.2) він прийшов до висновку, що скейлінгові функції $\Omega(v)$ з $j = k$ повинні задовольняти диференціальному рівнянню

$$(\alpha \partial_v^{N-1} - v^2 \partial_v - v N \Delta) \Omega^{(N)}(v) = 0 \quad \text{з} \quad N \equiv 2/\theta \quad (5.3)$$

і ненульовим неуніверсальним масштабним параметром α , розглядаючи його на інтервалі $v \in [0, \infty)$ з граничними умовами

$$\Omega^{(N)}(0) = \omega_0^{(N)} \quad \text{і} \quad \Omega^{(N)}(v) \underset{v \rightarrow \infty}{\approx} \omega_\infty^{(N)} v^{-N\Delta}, \quad \text{де} \quad \omega_0^{(N)} \neq 0 \quad \text{і} \quad \omega_\infty^{(N)} \neq 0. \quad (5.4)$$

При цьому, якщо розглядаються натуральні числа N , що забезпечує цілочисельність порядків похідних ∂_v^{N-1} , то на індекс анізотропії θ вводиться обмеження. Тоді для нього дозволяються тільки дробові значення $\theta_N \equiv 2/N$ з $N \in \mathbb{N}$, а відповідна скейлінгова функція Ω позначається індексом N . Коли $N = 4$, величина $\theta_4 = 1/2$ співпадає з індексом анізотропії вільної теорії m -вісних ТЛ. Надалі, як і в роботі [73], ми розглядаємо виключно цілі значення чисел N , не вникаючи в проблематику узагальнення порядків похідних на нецілі величини.

Розв’язуючи диференціальне рівняння (5.3) з ГУ (5.4) безпосередньо в координатному просторі, Генкель отримав його загальний розв’язок у вигляді

$$\Omega^{(N)}(v) = \sum_{p=0}^{N-3} b_p^{(N)} \left[v^p \mathcal{F}_p(v) - a_p^{(N)} (\alpha/N^2)^{(p+2-N)/N} v^{N-2} \mathcal{F}_{N-2}(v) \right], \quad (5.5)$$

який включає $N - 2$ вільні параметри $b_p^{(N)}$ з $p = 0, \dots, N - 3$ і стільки ж відомих у явному вигляді констант $a_p^{(N)}$. Функції $\mathcal{F}_p(v)$ — це узагальнені гіпергеометричні функції, задані формулами

$$\mathcal{F}_p(v) \equiv {}_2F_{N-1} \left(\frac{N\Delta + p}{N}, 1; 1 + \frac{p}{N}, 1 + \frac{p-1}{N}, \dots, \frac{p+2}{N}; \frac{v^N}{N^{N-2}\alpha} \right) \quad (5.6)$$

В роботі [73] ми провели альтернативний аналіз диференціального рівняння (5.3). Застосовуючи нове інтегральне представлення його розв'язків і досліджуючи їх асимптотичну поведінку при великих аргументах ми показали, що розв'язки (5.5) задовольняють ГУ на $+\infty$ тільки при $N = 3, 4$ і 5 . У випадку $N = 6$, який є особливим, скейлінгова функція $\Omega^{(6)}$, задана формулою (5.5) з довільними коефіцієнтами $b_p^{(6)}$, $p = 0, \dots, 3$, не задовольняє заданій ГУ при $v \rightarrow \infty$, а навпаки — алгебраїчно розбігається в цій границі. Усунення цієї розбіжності зменшує кількість вільних параметрів в $\Omega^{(6)}$ з 4 до 3. При цілих $N \geq 7$, в $\Omega^{(N)}(v)$ залишаються експонентно зростаючі члени при великих v . Для їх ліквідації необхідно накладати додаткові обмеження на коефіцієнти $b_p^{(N)}$, що знов приводить до зменшення їх кількості. Зокрема, при $N = 7$ загальний розв'язок рівняння (5.3), що задовольняє ГУ (5.4), повинен мати тільки три, а не п'ять констант інтегрування $b_p^{(7)}$.

Розглянемо більш детально найважливіший для нас випадок $N = 4$, оскільки саме він має безпосереднє відношення до наших розрахунків у точці Ліфшица. Згідно з формулою (5.5), розв'язок диференціального рівняння (5.3) повинен мати вигляд лінійної комбінації

$$\Omega^{(4)}(v) = b_0^{(4)}\Omega_0^{(4)}(v) + b_1^{(4)}\Omega_1^{(4)}(v), \quad (5.7)$$

в якій

$$\Omega_0^{(4)}(v) = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(\zeta/4)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l/2 + \zeta/4)}{l! \Gamma(l/2 + 3/4)} \left(\frac{-v^2}{2\alpha^{1/2}} \right)^l, \quad (5.8)$$

де для компактності запису введено позначення $\zeta = N\Delta$, і

$$\Omega_1^{(4)}(v) = \frac{v\sqrt{\pi/2}}{\Gamma[(\zeta + 1)/4]} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma[(l + 1 + \zeta)/4] s(l)}{\Gamma(l/4 + 1) \Gamma[(l + 3)/2]} \left[\frac{-v}{(4\alpha)^{1/4}} \right]^l, \quad (5.9)$$

де $s(l) = 2^{-1/2} [\cos(l\pi/4) + \sin(l\pi/4)] \cos(l\pi/4)$.

Функція $\Omega^{(4)}(v)$ з (5.7)–(5.9) використовувалася в роботах [143, 173, 181, 229] в якості теоретичного передбачення ГЛСІ для парної кореляційної функції параметра порядку тривимірних систем у ТЛ. Крім того, в роботі [143] були представлені результати чисельних симуляцій методом Монте Карло для тривимірної моделі ANNNI, які дуже добре узгоджувалися з цим передбаченням.

У зв'язку з цим ми з особливою уважністю підійшли до виводу функції $\Omega^{(4)}(v)$ в рамках ГЛСІ. Ми пішли від самого початку, звернувшись до постульованих Генкелем рівнянь інваріантності (див. [173], р-ня (3.65), (3.85) і [73], р-ня (2.3)-(2.8)). Вони були сформульовані в термінах одновимірної “часової” змінної t , яка є аналогом осі анізотропії z при $m = 1$, і “просторових” змінних $\mathbf{r}$. На жаль, в роботах [173, 181, 229] так і не було явно вказано, в яких межах повинна розглядатися “часово-подібна” змінна t .

Проте, в контексті розгляду анізотропних систем з одновісною анізотропією в ТЛ, очевидним є те, що запропоновані рівняння повинні працювати в повному d -вимірному просторі $\mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\beta^{d-1}$ з $t \in]-\infty, \infty[$, і при цьому немає підстав обмежувати змінну t тільки додатньою піввіссю, як це було зроблено Генкелем при розгляді рівняння (5.3). Таким чином, початкові рівняння, що виражають ГЛСІ, можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є, що приводить до результату

$$G(\mathbf{p}, q) = [p^2 + 4\alpha N^{-2}(iq)^N]^{-\tilde{\Delta}} \quad \text{з} \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{N} - \Delta + \frac{d-1}{2} \quad (5.10)$$

і $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $q \in \mathbb{R}$, для Фур'є-образу $G(\mathbf{p}, q)$ кореляційної функції $G(\mathbf{r}, t)$ з (5.2).

За умови додатності коефіцієнта $4\alpha i^N/N^2$ при q^N , яка виконується для кратних 4 цілих чисел $N \geq 4$, виходячи із отриманої функції $G(\mathbf{p}, q)$ ми можемо за допомогою зворотнього Фур'є-переходу знайти координатне представлення скейлінгової функції

$$\Omega^{(N)}(v) = C_N(\zeta, \alpha) \int_0^\infty d\kappa \kappa^{(\zeta-1)/2} \cos \left[\left(\frac{N^2}{4|\alpha|} \right)^{1/n} v \kappa \right] K_{(\zeta-1)/N}(\kappa^{N/2}), \quad (5.11)$$

де $K_\nu(z)$ — звичайна функція Бесселя другого роду, і

$$C_N(\zeta, \alpha) = \frac{\pi^{-(d+1)/2} 2^{2-d+(\zeta-1)/N}}{\Gamma[(d-1)/2 - (\zeta-1)/N]} \left(\frac{N^2}{4|\alpha|} \right)^{1/n}. \quad (5.12)$$

За побудовою, функція (5.11) з точністю до постійних множників є єдиною скейлінговою функцією, що задовольняє постульованим рівнянням ГЛСІ у повному d -вимірному просторі змінних $(t, \mathbf{r})$. Одночасно, щойно знайдена функція $\Omega^{(N)}(v)$ є частковим розв'язком рівняння (5.3).

У випадку $N = 4$, останнє є звичайним диференціальним рівнянням третього порядку. Відповідно, існують три лінійно незалежні розв'язки цього рівняння з $\alpha > 0$, записані в термінах узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_1F_2$ в рівнянні (3.8) нашої роботи [73]:

$$\{f_j(v)\} = \left\{ {}_1F_2\left(\frac{\zeta}{4}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{v^4}{16\alpha}\right), {}_1F_2\left(\frac{\zeta}{4} + \frac{1}{4}; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{v^4}{16\alpha}\right) v, {}_1F_2\left(\frac{\zeta}{4} + \frac{1}{2}; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{v^4}{16\alpha}\right) v^2 \right\}, \quad (5.13)$$

$j = 1, 2, 3$. Два з них є парними функціями, а один — непарною. Оскільки інтеграл в (5.11) представляє собою парну функцію від v , розв'язок рівняння (5.3) з $N = 4$, який йому відповідає, повинен бути лінійною комбінацією тільки двох парних лінійно незалежних розв'язків з (5.13). Безпосередній розрахунок інтеграла (5.11) якраз і приводить до такої лінійної комбінації:

$$\Omega^{(4)}(v) = C_4(\zeta, \alpha) 2^{(\zeta-3)/4} \Gamma(5/4) \Gamma(\zeta/4) \Omega_0^{(4)}(v), \quad (5.14)$$

де

$$\Omega_0^{(4)}(v) = f_1(v) - \frac{2 \Gamma(3/4) \Gamma[(\zeta+2)/4]}{\sqrt{\alpha} \Gamma(1/4) \Gamma(\zeta/4)} f_3(v). \quad (5.15)$$

Функція $\Omega_0^{(4)}(v)$ з (5.14) насправді співпадає з аналогічною функцією (5.8), отриманою іншим способом в роботі [173].

З іншого боку, неважко переконатися в тому, що функція $\Omega_1^{(4)}(v)$ з (5.9) є лінійною комбінацією

$$\Omega_1^{(4)}(v) = f_2(v) - \frac{(2\pi)^{1/2} \Gamma[(\zeta+2)/4]}{\alpha^{1/4} \Gamma(1/4) \Gamma[(\zeta+1)/4]} f_3(v), \quad (5.16)$$

в яку входить непарна функція $f_2(v)$. Оскільки остання не має права входити в розв'язок $\Omega^{(4)}(v)$, то й функція $\Omega_1^{(4)}(v)$ не повинна давати туди свого внеску. Це означає, що коли ГЛСІ формулюється в необмеженому $(t, \mathbf{r})$ -просторі $\mathbb{R}_\alpha^1 \times \mathbb{R}_\beta^{d-1}$, то рівняння (5.3) теж повинно розглядатися при всіх $v \in]-\infty, \infty[$, а коефіцієнт $b_1^{(4)}$ в записі (5.7) функції $\Omega^{(4)}(v)$ повинен дорівнювати нулю. При цьому, будучи парною за v , функція $\Omega_0^{(4)}(v)$ автоматично забезпечує необхідне спадання розв'язку рівняння (5.3) при $v \rightarrow -\infty$ як $\sim |v|^{-\zeta}$.

Є ще й інша причина, з якої функція $\Omega_1^{(4)}(v)$ є недопустимою в розв'язку рівняння (5.3). Хоч вона, як і $\Omega_0^{(4)}(v)$, поводить себе $\sim v^{-\zeta}$ при $v \rightarrow +\infty$, задовольняючи цим відповідну ГУ з (5.4), її асимптотична поведінка при $v \rightarrow -\infty$ є експонентно розбіжною $\sim |v|^{(\zeta-3)/2} e^{v^2/4}$, що є неприйнятним з фізичних міркувань. Разом з цим, таке зростання скейлінгової функції $\Omega^{(4)}(v)$ на $-\infty$ робить неможливим перетворення Фур'є відповідної парної кореляційної функції.

Таким чином, при бажанні зберегти повну скейлінгову функцію Генкеля $\Omega^{(4)}(v)$ в її оригінальному вигляді (5.7) з ненульовим коефіцієнтом $b_1^{(4)}$, ми musiли б поправити її нефізичну поведінку при $v \rightarrow -\infty$. Досягнути цього найпростішим способом можна, записуючи її у вигляді

$$\bar{\Omega}^{(4)}(v) \equiv b_0^{(4)} \Omega_0^{(4)}(v) + b_1^{(4)} \Omega_1^{(4)}(|v|). \quad (5.17)$$

Тут при заміні аргумента функції $\Omega_1^{(4)}$ з v на $|v|$ ліквідовується її експонентна розбіжність при $v \rightarrow -\infty$, а замість неї симетричним чином встановлюється “добре” степеневе спадання $\sim |v|^{-\zeta}$ з області $v \rightarrow +\infty$. Зрозуміло, така штучна конструкція має і свій недолік: в точці $v = 0$ утворюється злам, і через це один із генераторів координатних перетворень ГЛСІ, $\mathbf{Y}_{-1}$, при дії на кореляційну функцію $G(t, r) = r^{-2\Delta} \bar{\Omega}^{(4)}(v)$ дає замість нульового результату δ -подібну особливість.

Потрібне неоднорідне диференціальне рівняння можна розв'язати використовуючи перехід до імпульсного представлення і шукаючи розв'язок у скейлінговому вигляді

$$G(\mathbf{p}, q) = p^{-2\tilde{\Delta}} g(p^2 q^{-4}). \quad (5.18)$$

Результат для скейлінгової функції $g(w)$ може бути записаний як

$$g(w) = \left(1 + \frac{\alpha}{4w}\right)^{-\tilde{\Delta}} \left[a + \frac{\alpha}{2} b_1^{(4)} A (1 - 2\tilde{\Delta}) w^{-1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 - \tilde{\Delta}; \frac{3}{2}; -\frac{\alpha}{4w}\right) \right], \quad (5.19)$$

де $a = a_0 b_0^{(4)} + a_1 b_1^{(4)}$ — константа, що лінійно залежить від коефіцієнтів $b_0^{(4)}$ і $b_1^{(4)}$,

а

$$A \equiv \int d^{d-1} r \, r^{-(4\Delta+1)/2} e^{-i\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}}, \quad (5.20)$$

де $\mathbf{e}$ — одиничний вектор довільної орієнтації в $(d-1)$ -вимірному β -підпросторі $\mathbb{R}_\beta^{d-1}$. Нагадаємо, що співвідношення між скейлінговими вимірностями Δ і $\tilde{\Delta}$ записане в (5.10).

У підсумку, строго кажучи, на основі нашого аналізу ми можемо говорити лише про один варіант передбачень ГЛСІ для випадку $N = 4$ і $m = 1$. Це — парна кореляційна функція $G(\mathbf{r}, z) \equiv \langle \mathcal{O}(\mathbf{r}, z) \mathcal{O}(\mathbf{0}, 0) \rangle^{\text{cum}}$, що записується в скейлінговому вигляді $G(\mathbf{r}, z) = r^{-2\Delta} \Omega^{(4)}(v)$, де $\Omega^{(4)}(v)$ -парна функція змінної $v = z r^{-\theta_4}$, наведена в явному вигляді в (5.14)–(5.15). Внаслідок обмеження $\theta_N \equiv 2/N$ з $N \in \mathbb{N}$, індекс анізотропії θ_4 має класичне значення $\theta_4 = 1/2$. При цьому скейлінгова вимірність Δ оператора $\mathcal{O}$ може відрізнятися від класичної. Наприклад, при розгляді корелятора двох полів параметра порядку $\phi(\mathbf{x})$, ми матимемо $\Delta_\phi = (d - 5/2 + \eta_2)/2$, де η_2 — кореляційний критичний показник з (4.47). У випадку невзаємодіючої теорії $\eta_2 = 0$, і відповідна кореляційна функція $G(\mathbf{r}, z)$ з точністю до масштабних множників зводиться до вільного пропагатора (4.7) в ТЛ з $m = 1$.

Фур'є-образ $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ функції $G(\mathbf{r}, z)$ з довільним числом осей анізотропії m також визначається формулами (5.10) зі скейлінговим представленням (5.18). Фактично такі передбачення є справедливими тільки для певного типу ефективних безмасових гаусових теорій поля, вільних від взаємодій. Ці теорії можна представити в загальному вигляді ефективним гамільтоніаном

$$\mathcal{H}_{m,d}^{\text{free}}[\mathcal{O}] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{k}}^{(m)} (p^2 + k^4)^{\tilde{\Delta}} \mathcal{O}_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \mathcal{O}_{-\mathbf{p},-\mathbf{k}}. \quad (5.21)$$

З точністю до нормування, функція $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ представляє собою саме вільний пропагатор такої теорії поля. Зокрема, у випадку $\mathcal{O} = \phi$, $\tilde{\Delta}_\phi = 1 - \eta_2/2$, а якщо йдеться про густину енергії, то $\mathcal{O} = \mathcal{E} = \phi^2/2$ і $\tilde{\Delta}_\mathcal{E} = \alpha_L/(2\nu_2) = 2/\nu_2 - (d-m) - \theta m$. В останньому випадку двоточкова незвідна кореляційна функція матиме вигляд

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{\mathbf{k}',\mathbf{p}'} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\mathbf{p}} \rangle^{\text{cum}} &= p^{-2\tilde{\Delta}} \Upsilon_{m,d}^{\text{free}}(kp^{-\theta_4}) (2\pi)^d \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}'), \\ \Upsilon_{m,d}^{\text{free}}(\mathbf{k}) &= (1 + k^4)^{-\tilde{\Delta}}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

де $\Upsilon_{m,d}^{\text{free}}(\mathbf{k})$ — відповідна скейлінгова функція — порівн. з (5.33).

З іншого боку, формули, записані в оригінальних статтях Генкеля [143, 173, 181, 229] і відтворені вище в рівняннях (5.7)–(5.9), містять додатковий вільний параметр $b_1^{(4)}$. Пов'язані з ним внески мають нефізичну поведінку в певних областях аргументів. Це однаково стосується як функції (5.7), так і її Фур'є-образу, наведеного в (5.19).

В наступних розділах ми зупинимося на конкретних розрахунках кореляційних функцій сильно анізотропних систем в точці Ліфшица. Де можливо, будемо робити порівняння з розглянутими вище передбаченнями ГЛСІ.

5.2. Парні кореляційні функції в теорії ϕ^4

Для порівняння передбачень гіпотези локальної скейлінгової інваріантності Генкеля з результатами теорії, що явно враховує взаємодії та флуктуації, в роботі [73]¹ ми виконали необхідні розрахунки в рамках теоретико-польової моделі ϕ^4 і епсилон-розкладу біля верхньої граничної вимірності простору. Тут були детально розглянуті парні кореляційні функції типу (параметр порядку)–(параметр порядку) та енергія–енергія m -вісних анізотропних систем у мультикритичній точці Ліфшица. Було виконано загальний ренормгруповий аналіз цих кореляційних функцій, а також отримано ряд нових результатів у явному вигляді.

5.3. Парна кореляційна функція полів параметра порядку

Для явного розрахунку кореляційної функції двох полів зручно працювати в імпульсному представленні і розглядати величину, обернену до кумулянтного середнього $\langle \phi_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{p},-\mathbf{q}} \rangle_{\text{cum}}$,

$$[G_R^{(2)}(p, q)]^{-1} = Z_\phi [G^{(2)}(p, q)]^{-1} = Z_\phi [p^2 + \sigma_0 q^4 - \bigcirc + O(\varepsilon^3)]. \quad (5.23)$$

Тут у квадратних дужках ми маємо справу з діаграмним розкладом, який вже розглядався на початку п. 4.4. Його полюсні внески віднімаються шляхом мульт-

¹Деякі поправки до роботи [73] опубліковані в [349].

типлікативного перенормування з ренормалізаційним Z -фактором Z_ϕ з (4.35) і (4.36). З точністю до стандартних комбінаторних множників, які ми відтворимо нижче в (5.26), двопетльовій діаграмі з (5.23) відповідає функція зовнішніх імпульсів $p^{2-2\varepsilon} I_3(s)$, де пов'язана з ними скейлінгова змінна має вигляд $s = \sigma_0^{1/4} q / \sqrt{p}$, а для інтеграла Фейнмана $I_3(s)$ ми маємо

$$I_3(s) = \int d^{d-m} r \int d^m z G^3(r, z) e^{i\mathbf{1}r} e^{isz} = \varepsilon^{-1} (c_2 + c_4 s^4) + R_0^{(3)}(s) + O(\varepsilon). \quad (5.24)$$

Головною величиною, яка цікавитиме нас у подальшому, є скінченна частина цього інтеграла, функція $R_0^{(3)}(s)$. Поліусні коефіцієнти c_2 і c_4 були важливою складовою частиною розрахунків, що обговорювалися в п. 4.4, вони визначають величини кореляційних критичних показників η_2 і η_4 з (4.65). Вичерпна інформація щодо вільного пропагатора $G(r, z)$ є в п. 4.2.

У точці Ліфшица перенормована парна кореляційна функція $G_R^{(2)}(p, q)$ записується в скейлінговому вигляді як

$$G_R^{(2)}(p, q) = p^{-2+\eta_2} \Psi(qp^{-\theta}), \quad (5.25)$$

де θ — індекс анізотропії з (4.67). Скейлінгова функція $\Psi^{-1}(\mathbf{k})$, яка має безпосереднє відношення до формул (5.23) і (5.24), записується у вигляді

$$\Psi^{-1}(\mathbf{k}) = 1 + \mathbf{k}^4 - 2\varepsilon^2 \frac{n+2}{(n+8)^2} R_0^{(3)}(\mathbf{k}) + O(\varepsilon^3) \quad \text{де} \quad \mathbf{k} = qp^{-\theta}. \quad (5.26)$$

Скейлінгова змінна $\mathbf{k}$ відрізняється від її аналога $s = \sigma_0^{1/4} q / \sqrt{p}$ з (5.24) тим, що при визначенні $\mathbf{k}$ параметр σ_0 увійшов у нормування хвильового вектора q , а в степені імпульса p з'явилася нетривіальна поправка до класичного значення $1/2$, яка міститься в індексі анізотропії θ .

Загальний вигляд функції $R_0^{(3)}(\mathbf{k})$ для довільного числа осей анізотропії m наведений в [349, (5.16)]. Цей вираз виправляє неправильну формулу (5.16) з [73]. У цей вираз входить ряд складних інтегралів із степенями скейлінгової функції вільного пропагатора $\Phi(v; m, d^*)$ з (4.8), подібних до тих, що фігурують в (4.57)–(4.61). Для виводу формули [349, (5.16)] для $R_0^{(3)}(\mathbf{k})$ ми повинні повернутися до

інтеграла $I_3(\mathbf{k})$ з (5.24). Використовуючи в ньому скейлінгове представлення вільного пропагатора (4.7)–(4.8) і виконуючи заміну змінної інтегрування $\mathbf{z} = \mathbf{v}\sqrt{r}$, ми записуємо $I_3(\mathbf{k})$ у вигляді

$$I_3(\mathbf{k}) = \int d^{d-m}r r^{-6+m/2+3\varepsilon} e^{i(\mathbf{1}\cdot\mathbf{r})} \int d^m v \Phi^3(v; m, d) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\sqrt{r}}. \quad (5.27)$$

Як і в роботі [73], ми виконуємо тут кутові інтегрування в зовнішньому інтегралі за змінною $\mathbf{r}$ наступним чином. Формально тимчасово позначимо результат внутрішнього інтегрування за змінною $\mathbf{v}$ як $F(r)$. Тоді ми маємо

$$I_3(\mathbf{k}) = (2\pi)^{(d-m)/2} \int_0^\infty dr r^{-3+2\varepsilon} r^{-\nu} J_\nu(r) F(r), \quad \text{де } \nu := (d-m)/2 - 1, \quad (5.28)$$

і $J_\nu(r)$ — функція Бесселя першого роду.

Нам не вдалося розрахувати їх у явному вигляді при довільних значеннях параметра m . Тому для отримання результатів у явному вигляді ми були змушені звернутися до розгляду певних часткових випадків, які передбачають деякі математичні спрощення.

Такі явні вирази для кореляційних функцій типу (параметр порядку)-(параметр порядку) були отримані в рамках епсилон-розкладу в наших роботах [73, 349]. Розрахунки були виконані з точністю до $O(\varepsilon^2)$ в околі точки $(m = 2, d = 5)$, причому ε -розклади були зроблені у двох різних напрямках на (m, d) -площині: вздовж лінії $m = 2$ (при цьому $d = 5 - \varepsilon$) і лінії $d = m + 3$ (у цьому випадку зберігаються співвідношення $m = 2 - 2\varepsilon$ і $d = 5 - 2\varepsilon$). Було показано, що внески порядку $O(\varepsilon^2)$ є різними для цих двох варіантів розрахунку.

При $d = m + 3$, завдяки максимальному спрощенню скейлінгової функції $\Phi(v; m, d)$ (див. (4.20)), ми отримали безпосередньо з (5.24) відносно простий вираз для коефіцієнта $R_0^{(3)}(\mathbf{k})$, а саме

$$R_0^{(3)}(\mathbf{k})|_{d=m+3} = \frac{1}{27} \left(5 - 3 \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{\mathbf{k}^4}{3} - 1 \right) - \frac{2}{9} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right)^3 \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right) \right]. \quad (5.29)$$

При фіксованому значенні $m = 2$ ситуація більш складна. Скейлінгова функція $\Phi(v; 2, d)$ зводиться до експоненти (4.20) лише у верхній граничній вимірності, тобто при $d = d^* = 5$. При відхиленні вимірності d від цього граничного значення

функція $\Phi(v; 2, d - \varepsilon)$ має, взагалі кажучи, вигляд (4.10) чи (4.15) з $m = 2$, що не передбачає видимих математичних спрощень. Таке спостереження передбачає, що й результати розрахунків, які беруть до уваги поведінку скейлінгової функції $\Phi(v; m, d)$ в деякому малому околі $d = d^*$, відрізнятимуться один від одного в залежності від того, яким чином ми виконуємо ε -розклад: при фіксованому $d - m = 3$, чи фіксованому $m = 2$. І дійсно, при $m = 2$ формула для $R_0^{(3)}(\mathbf{k})$ відрізняється від (5.29). Вона має вигляд [349, (5.38)] (аналогічне рівняння статті [73] записане помилково)

$$R_0^{(3)}(\mathbf{k})|_{m=2} = \frac{1}{3} \left(2 \ln \frac{4}{3} - 1 \right) + \frac{\mathbf{k}^4}{9} \left(\frac{167}{36} - 14 \ln \frac{4}{3} \right) - \frac{2}{9} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right)^3 \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right) \right] \quad (5.30)$$

Останні доданки в (5.29) і (5.30) однакові, вони містять функцію, яку в чисто дійсному вигляді можна переписати як

$$\operatorname{Im} \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right)^3 \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{3} + i \right) \right] = \mathbf{k}^2 \left(\frac{\mathbf{k}^4}{27} - 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{3}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{k}^4}{3} - 1 \right) \ln \left(\frac{\mathbf{k}^4}{9} + 1 \right). \quad (5.31)$$

Решта початкових доданків є різними, і таким чином ми вперше отримали явні аналітичні результати для універсальних величин m -вісних ТЛ, що демонструють залежність від напрямів, вздовж яких виконуються їх епсилон-розклади: адже коефіцієнт $R_0^{(3)}(\mathbf{k})$ є головною складовою частиною універсальної скейлінгової функції $\Psi(\mathbf{k})$ з (5.25)–(5.26). На рівні двопетльового наближення, в якому виконувалися розрахунки робіт [62] і [63], подібної залежності критичних показників від “направів” ε -розкладів не спостерігалось. Це пов’язане тим, що у формулах для показників не з’являються інтеграли від похідних скейлінгових функцій за ε взятих при $\varepsilon = 0$, як це сталося при розрахунку скейлінгових функцій (див. (5.16) і дві наступні формули з [349]).

З іншого боку, для важливого випадку одновісної ТЛ, розрахунки з $m = 1$ не вдалося до кінця виконати в аналітичному вигляді. Тут довелося обмежитися досить складними інтегральними представленнями для коефіцієнтів епсилон-розкладів у другому порядку за ε . Зате, на основі підготовчих розрахунків була опублікована стаття [11], де виводяться нові співвідношення між деякими функціями Апелля та гіпергеометричними функціями Гауса. Результати роботи [11]

важливі також у контексті $1/n$ -розкладу.

5.4. Парна кореляційна функція енергія-енергія

У цій частині ми зупинимося на явних розрахунках парної кореляційної функції густини енергії. В термінах теоретико-польового підходу ми будемо мати справу з кумулянтним середнім квадратів полів параметра порядку,

$$G^{(0,2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left\langle \frac{1}{2}\phi^2(\mathbf{x}) \frac{1}{2}\phi^2(\mathbf{x}') \right\rangle_{\text{cum}}.$$

Перенормування такого середнього вимагає як мультиплікативного так і аддитивного перенормування. Останнє полягає у відніманні від початкової кореляційної функції її значення в деякій довільній “точці перенормування”. Працюючи (як і в попередньому параграфі) в імпульсному представленні, для перенормованої кореляційної функції густини енергії ми запишемо

$$G_R^{(0,2)}(p, q) = Z_{\phi^2} [G^{(0,2)}(p, q) - G^{(0,2)}(\boldsymbol{\mu}, 0)]. \quad (5.32)$$

В останньому доданку $\boldsymbol{\mu}$ — довільний $(d - m)$ -компонентний вектор у підпросторі $\mathbb{R}^{d-m}$. Віднімання величини $G^{(0,2)}(\boldsymbol{\mu}, 0)$ забезпечує знищення ультрафіолетових розбіжностей в $G^{(0,2)}(p, q)$, які не усуваються при мультиплікативному перенормуванні з використанням звичайного перенормовуючого фактора Z_{ϕ^2} (див. (2.10)). Ренормгруповий аналіз перенормованої кореляційної функції $G_R^{(0,2)}(p, q)$ (див. [73, розд. 4.2-4.3]) передбачає, що суттєва залежність цієї функції від імпульсів визначається скейлінговою формою

$$G_R^{(0,2)}(p, q) = C_1 p^{-\alpha/\nu_2} \Upsilon(qp^{-\theta}) + C_2, \quad \text{де} \quad \frac{\alpha}{\nu_2} = \frac{4-n}{n+8} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (5.33)$$

Тут, і як завжди, α і ν_2 — критичні показники питомої теплоємності і кореляційної довжини в немодуляційному підпросторі $\mathbb{R}^{d-m}$, C_1 і C_2 константи, а θ — індекс анізотропії.

У неперенормованій теорії діаграмне представлення кореляційної функції $G^{(0,2)}(p, q)$ має вигляд

$$G^{(0,2)}(p, q) = \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\bigcirc\text{---} + O(\varepsilon^2). \quad (5.34)$$

Однопетльовій діаграмі відповідає інтеграл Фейнмана (див. також (4.38), (6.11), (6.13))

$$I(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{p'^2 + q'^4} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}' + \mathbf{q}|^4}. \quad (5.35)$$

Для зручності у подальшому, формально запишемо ε -розклад цього інтеграла у вигляді

$$\frac{I(p, q)}{F_{m, \varepsilon}} = \varepsilon^{-1} + R_0^{(2)}(s) + \varepsilon R_1^{(2)}(s) + O(\varepsilon^2), \quad s = \frac{q}{\sqrt{p}}, \quad (5.36)$$

де фігурує величина $F_{m, \varepsilon} = \varepsilon I(1, 0)$ (див. (4.38)–(4.39)), яка нормує константу зв'язку u в (4.35). З наведених формул випливає, що ε -розклад скейлінгової функції Υ з (5.33) має вигляд

$$\begin{aligned} \Upsilon(qp^{-\theta}) &= \Upsilon_{m, d^* - \varepsilon}(\mathbf{k}) = 1 + \frac{\alpha}{\nu_2} \left\{ R_0^{(2)}(\mathbf{k}) + \varepsilon R_1^{(2)}(\mathbf{k}) - \varepsilon \frac{n+2}{n+8} [R_0^{(2)}(\mathbf{k})]^2 \right\} + O(\varepsilon^3) \\ &= \left[1 + R_0^{(2)}(\mathbf{k}) \varepsilon + R_1^{(2)}(\mathbf{k}) \varepsilon^2 \right]^{\alpha/(\nu_2 \varepsilon)} + O(\varepsilon^3) \propto [I(1, \mathbf{k})]^{\alpha/(\nu_2 \varepsilon)} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (5.37)$$

де в останньому рядку виконане експотенціювання з використанням значення α/ν_2 з (5.33).

Таким чином, для отримання ε -розкладу скейлінгової функції Υ з точністю до ε^2 потрібно мати у розпорядженні перші коефіцієнти розкладу інтеграла $I(p, q)$ з (5.36). Розрахунок цих коефіцієнтів є нетривіальним завданням, і для довільних вимірностей підпросторів $d - m$ і m вони і досі залишаються невідомими. Проте, завдяки суттєвим математичним спрощенням, наявним при $d - m = 3$ і ($m = 2, d = 5$), у цих випадках величини $R_0^{(2)}$ і $R_1^{(2)}$ були розраховані у явному вигляді. Так, за умови $d - m = 3$ потрібні коефіцієнти виражаються в термінах уявних частин елементарних функцій:

$$R_0^{(2)}(\mathbf{k})|_{d=m+3} = \Im \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2} - i \right) \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2} - i \right) \right] = -\frac{\mathbf{k}^2}{2} \arctg \frac{2}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\mathbf{k}^4}{4} \right), \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} R_1^{(2)}(\mathbf{k})|_{d=m+3} &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Im \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2} + i \right) \ln^2 \left(\frac{\mathbf{k}^2}{2} + i \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{8} \ln^2 \left(1 + \frac{\mathbf{k}^4}{4} \right) + \frac{\mathbf{k}^2}{4} \arctg \frac{2}{\mathbf{k}^2} \ln \left(1 + \frac{\mathbf{k}^4}{4} \right) - \frac{1}{2} \arctg^2 \frac{2}{\mathbf{k}^2}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

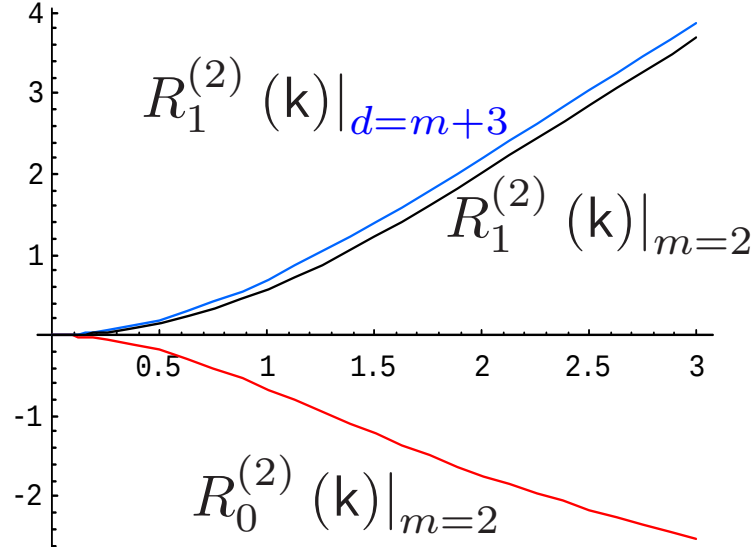


Рис. 5.1. Графіки функцій $R_0^{(2)}(k)|_{m=2} = R_0^{(2)}(k)|_{d=m+3}$ (червона лінія), $R_1^{(2)}(k)|_{m=2}$ (чорна лінія), $R_1^{(2)}(k)|_{d=m+3}$ (синя лінія).

При фіксованому $m = 2$ ми маємо $R_0^{(2)}(k)|_{m=2} = R_0^{(2)}(k)|_{d=m+3}$ для скінченної частини інтеграла $I(p, q)$ з (5.36), тоді як аналогічний результат для $R_1^{(2)}(k)$ є більш громіздким і складним:

$$\begin{aligned} R_1^{(2)}(k)|_{m=2} = & \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4} \vartheta(k^2/2) - \vartheta^2(k^2/2) + \frac{\vartheta(k^2/2) - \vartheta(k^2)}{k^2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4+4k^4}{4+k^4}\right) \\ & + \frac{1}{8} \ln^2(4+k^4) - \frac{k^2}{4} [\vartheta(k^2/2) - \vartheta(k^2)] \ln\left(\frac{4+k^4}{k^4}\right) + \frac{k^2}{2} \vartheta(k^2/2) \ln\left(\frac{4+k^4}{8}\right) \\ & - \frac{1}{4} \text{Li}_2(-k^4/4) + \frac{1}{4} \text{Li}_2(-k^4) + \Re\left[\text{Li}_2\left(\frac{i}{2i+k^2}\right)\right] \\ & - \frac{k^2}{2} \text{Cl}_2[2\vartheta(k^2/2)] + \frac{k^2}{4} \text{Cl}_2[2\vartheta(k^2)] + \frac{k^2}{4} \text{Cl}_2[2\vartheta(k^2/2) - 2\vartheta(k^2)]. \end{aligned}$$

У ньому з'являються інтеграл Клаузена і дилогарифмічна функція, математичні об'єкти, які вже зустрічалися раніше (див. (2.42) і (2.62)). Крім цього, для компактності введене скорочене позначення

$$\vartheta(z) = \text{arctg}(1/z).$$

На Рисунку 5.1 показані графіки залежностей функцій $R_0^{(2)}(k)$ і $R_1^{(2)}(k)$ при $m = 2$, а також їх аналогів при $d = m + 3$. Як було зазначено вище, $R_0^{(2)}(k)|_{d=m+3} = R_0^{(2)}(k)|_{m=2}$, а коефіцієнти наступного порядку, $R_1^{(2)}(k)$, вже від-

різняються між собою. Тут ситуація дещо відрізняється від тієї, яка була в ε -розкладі інтеграла $I_3(s)$ з (5.24). У випадку $I_3(s)$ відмінність між результатами при переході від $d - m = 3$ до $m = 2$ проявилася на рівні $R_0^{(3)}$, тобто при знаходженні скінченної частини цього інтеграла. Аналогічна відмінність між коефіцієнтами $R^{(2)}$ вперше виникає в порядку $O(\varepsilon)$ розкладу $I(p, q)$ (див. (5.36)), тобто між $R_1^{(2)}|_{d=m+3}$ і $R_1^{(2)}|_{m=2}$.

5.4.1. Деякі особливості інтегрування в $I(p, q)$

Оскільки експотенційована форма епсилон-розкладу кореляційної функції енергія-енергія (5.37) містить як головну складову частину однопетльовий інтеграл $I(p, q)$ з (5.35), головна увага роботи [73] в даному контексті була присвячена дослідженню цього інтеграла. При цьому важливе значення мали попередні результати, отримані автором раніше в [11].

Зауважимо, перш за все, що внутрішній інтеграл за змінною $\mathbf{p}'$ в (5.35) відповідає стандартному $d - m := D$ -вимірному двоточковому однопетльовому інтегралу Фейнмана $J_D(p; m_1, m_2)$ з різними масами m_1^2 і m_2^2 і ненульовим зовнішнім імпульсом $\mathbf{p}$,

$$J_D(p; m_1, m_2) = \int_{\mathbf{p}'}^{(D)} \frac{1}{p'^2 + m_1^2} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|^2 + m_2^2} = \int_{\mathbf{p}'}^{(D)} \frac{1}{|\mathbf{p}' - \frac{\mathbf{p}}{2}|^2 + m_1^2} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \frac{\mathbf{p}}{2}|^2 + m_2^2}. \quad (5.40)$$

Згідно з записом (5.35), маси m_1^2 і m_2^2 ідентифікуються як $m_1^2 = q'^4$ і $m_2^2 = |\mathbf{q}' + \mathbf{q}|^4$. Але, оскільки змінна зовнішнього інтегрування $\mathbf{q}'$ може бути зміщена на будь-яку сталу величину, ми можемо вибрати симетризований запис $m_1^2 = |\mathbf{q}' - \mathbf{q}/2|^4$ і $m_2^2 = |\mathbf{q}' + \mathbf{q}/2|^4$. Аналогічну симетризацію інтегрування за $\mathbf{p}'$ ми виконали також у другій формі інтеграла $J_D(p; m_1, m_2)$ в (5.40).

Ми приділяємо так багато уваги симетрії, через те, що тільки найпростіший і найсиметричніший результат для $J_D(p; m_1, m_2)$ може бути придатним для подальшого його інтегрування згідно з формулою (5.35). Беручи до уваги визначення m_1^2 і m_2^2 з попереднього абзацу, видно, що для цієї мети неможливо було б

скористатися відомим виразом з [352], який визначається формулами

$$J_D(p; m_1, m_2) = p^{D-4} \gamma_D \hat{I}(m_1^2/p_x^2, m_2^2/p_x^2) \quad \text{з} \quad \gamma_D = (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}), \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}(m_1^2, m_2^2) = & \frac{m_1^{D-4}}{D-2} (1 + m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\Delta}) {}_2F_1\left(1, 2 - \frac{D}{2}; \frac{D}{2}; -\frac{(1+m_2^2-m_1^2-\sqrt{\Delta})^2}{4m_1^2}\right) \\ & + (m_1^2 \leftrightarrow m_2^2) + \frac{\Gamma^2(D/2 - 1)}{\Gamma(D - 2)} \sqrt{\Delta}^{D-3}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\Delta = (m_1^2 + m_2^2 + 1)^2 - 4m_1^2 m_2^2 = [(m_1 + m_2)^2 + 1][(m_2 - m_1)^2 + 1], \quad (5.43)$$

де $(m_1^2 \leftrightarrow m_2^2)$ означає наявність доданка, що за формою співпадає з попереднім при заміні мас m_1^2 і m_2^2 одна на одну.

Потрібно було отримати новий, принципово інший результат. Для цього автор відмовився від традиційних застосувань інтегралів Мелліна-Барнса (як в [352]) і параметризації Фейнмана (як в [353]), а натомість використав розщеплення підінтегральної функції в (5.35) на прості дроби,

$$\frac{1}{A_- A_+} = \frac{1}{A_- + A_+} \left(\frac{1}{A_-} + \frac{1}{A_+} \right), \quad (5.44)$$

інтегрування за кутами і низку маніпуляцій з подвійними рядами. Таким чином вперше вдалося отримати компактні вирази для $J_D(p; m_1, m_2)$ в термінах гіпергеометричних функцій Аппеля (що залежать від двох змінних) F_4 і F_1 , які самі по собі є явно симетричними відносно перестановок $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$. Одним з таких результатів у вигляді *однієї* функції Аппеля F_1 з явно симетричними аргументами є

$$J_D(p; m_1, m_2) = \gamma_D \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right)^{D-4} F_1\left(2 - \frac{D}{2}; 1, \frac{3}{2} - \frac{D}{2}; \frac{3}{2}; \frac{-p^2}{(m_1 + m_2)^2}, \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}\right), \quad (5.45)$$

де функція Аппеля F_1 визначається (див. напр., [270]) подвійним степеневим рядом

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_{k+n} (b)_k (b')_n}{(c)_{k+n}} \frac{x^k}{k!} \frac{y^n}{n!}, \quad |x| < 1, |y| < 1. \quad (5.46)$$

Порівнюючи отримані вирази з формулами (5.41)–(5.42) в термінах гаусових гіпергеометричних функцій ${}_2F_1$, ми отримали в [11] тотожності, які є новими результатами в теорії спеціальних функцій.

У розділі 2.1 роботи [4] ми детально обговорюємо взаємозв'язок формули (5.45) з результатами інших авторів і з квадратичним перетворенням функції Апелля з роботи Карлсона [354, Eq.(4.2)]. Фактично, в роботі [11] автор вперше отримав явно симетричні вирази для інтеграла Фейнмана $J_D(p; m_1, m_2)$ з (5.40), в яких не фігурує симетризація остаточного результату у вигляді $F(m_1, m_2) + F(m_2, m_1)$ (як в (5.41)–(5.42) з [352]), і які не потребують додаткових маніпуляцій для виявлення очевидної симетрії відносно заміни $m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$, як формула

$$J_D(p; m_1, m_2) = \gamma_D m_1^{D-4} F_1\left(1; 2 - \frac{d}{2}, 2 - \frac{d}{2}; 2; \frac{1}{r_-}, \frac{1}{r_+}\right) \quad (5.47)$$

з [355, (1.6)], де $r_{\mp} = (p^2 + m_2^2 - m_1^2 \mp \sqrt{\Delta})/2p^2$ і $\Delta = (p^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 + 4m_1^2 p^2$, чи як пізніший результат [353, р-ня (7)], отриманий за допомогою звичайної, не-симетризованої параметризації Фейнмана (див. перше рівняння в (7.85)).²

Насправді, в роботі [4] ми вперше звернули увагу на те, що порівнюючи вирази (5.45) та (5.47) для одного і того ж інтеграла (??), ми приходимо до нетривіального відношення між залученими функціями Апелля F_1 . Це особливий випадок квадратичного перетворення [354, (4.2)], що виражається в наших позначеннях як

$$F_1\left(a; b, b; 2a; \frac{1}{r_-}, \frac{1}{r_+}\right) = \left(\frac{x+y}{2x}\right)^{-2b} F_1\left(b; a, b - a + \frac{1}{2}; a + \frac{1}{2}; \frac{-1}{(x+y)^2}, \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right),$$

де $r_{\mp} = (1 + y^2 - x^2 \pm \sqrt{\Delta})/2$, $\Delta = (1 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2$, і приймаються $a = 1$ і $b = 2 - D/2$.

У контексті досліджень критичної поведінки в ТЛ і, зокрема, даного розділу, найважливішим тут є те, що отримання виразу (5.45) для внутрішнього інтеграла з (5.35) дозволило нам провести і зовнішнє інтегрування за змінною $\mathbf{q}$ у цій формулі.

²На нашу думку, застосування *симетризованої* версії параметризації Фейнмана з другої рівності в (7.85) може привести до результатів подібної якості як (5.45) для більш загальних інтегралів Фейнмана з довільними степенями множників у знаменнику, таких як розглядалися, зокрема, в роботі [353].

5.5. Кореляційна функція енергія-енергія одновісних систем

У випадку одновісних систем, які представляють переважний інтерес з експериментальної точки зору, ми маємо в розпорядженні результат застосування ГЛСІ, гіпотези, яка детально розглядалася на початку глави, а також дані чисельних досліджень методом Монте Карло. Для порівняння нам потрібна інформація, яку ми можемо отримати в рамках теорії ϕ^4 в d -вимірному просторі з одновісною анізотропією, тобто з $m = 1$. Епсилон-розклади, які отримуються в такому теоретико-польовому підході, потребують екстраполяції до вимірності фізичного простору $d = 3$. Величина відхилення від верхньої граничної вимірності в даному випадку є $\varepsilon = 3/2$. Тут, нажаль, на відміну від часткових випадків, розглянутих у попередніх параграфах, специфічний вибір $m = 1$ не приводить до явних математичних спрощень. Тому отримання потрібних результатів було пов'язане з громіздкими математичними розрахунками, деякі аспекти яких розглянуті в попередньому пункті.

Надалі ми не будемо вдаватися в розрахункові деталі. Зазначимо тільки, що саме з використанням результату (5.45) в роботі [73] були розраховані коефіцієнти A_n розкладу

$$I(p, 1) \propto \sum_{n \geq 0} A_n p^{2n}. \quad (5.48)$$

Ці коефіцієнти виражаються через узагальнені гіпергеометричні функції ${}_3F_2$ з одиничним аргументом:

$$A_n = \frac{2 \sin(\pi \lambda)}{\lambda \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2 + 2\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2\lambda)} \frac{(-1)^n (\varepsilon)_{2n}}{(1 - \lambda)_n (\frac{3}{2})_n} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \varepsilon + 2n, -\lambda, \frac{1}{2} \\ 1 - \lambda + n, \frac{3}{2} + n \end{matrix} ; 1 \right). \quad (5.49)$$

Тут, поряд з відхиленням від верхньої граничної вимірності простору $\varepsilon = 4 + m/2 - d$, для компактності запису введений параметр $\lambda = 1/4 - \varepsilon/2$. Повна залежність функції $I(p, q)$ від зовнішнього імпульса q відтворюється з першого із “скейлінгових” співвідношень

$$I(p, q) = q^{-2\varepsilon} I\left(\frac{p}{q^2}, 1\right) = p^{-\varepsilon} I\left(1, \frac{q}{\sqrt{p}}\right), \quad (5.50)$$

яким задовольняє ця функція.

Функція Клаузена ${}_3F_2$ в (5.49) є частковим випадком узагальненої гіпергеометричної функції ${}_3F_2$ з цілими від'ємними різницями параметрів чисельника і знаменника, ${}_3F_2(a, b, c; b+1+m, c+1+n; 1)$, з $m = n$. Такі ряди Клаузена досліджувалися в роботах [356] і [3]. Тут для функцій такого типу були записані компактні і дуже симетричні формули сумування

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ b+1+m, c+1+n \end{matrix}; 1\right) \frac{1}{(b)_{m+1}(c)_{n+1}} = \quad (5.51)$$

$$\frac{B(1-a, b)}{(c-b)_{n+1} m!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -m, b, b-c-n \\ 1+b-a, 1+b-c \end{matrix}; 1\right) + \frac{B(1-a, c)}{(b-c)_{m+1} n!} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, c, c-b-m \\ 1+c-a, 1+c-b \end{matrix}; 1\right).$$

Подібні формули зведення для гіпергеометричних функцій Аппеля розглядалися в нашій роботі [5].

Зрештою, в роботі [6] розклад функції $I(p, q)$ в ряд Тейлора за степенями змінної $X = 4p^2/q^4$ був виконаний для довільних вимірностей $D = d - m$ і m в області його збіжності, зображеної на Рисунку 6.1. Форма коефіцієнтів розкладу залишилася тою ж самою, що і в (5.49), з тим що параметрами гіпергеометричної функції ${}_3F_2$ стали $\varepsilon + 2n, b_m, 1/2; b_m + 1 + n; 3/2 + n$ з $0 \leq m \leq d$ і параметром $b_m = -1/2 + m/4 + \varepsilon/2$ (який зводиться до $-\lambda$ в частковому випадку $m = 1$). У [6, розд. 4] було також виведено повний асимптотичний розклад функції $I(p, q)$ за степенями $1/X$ при $X \rightarrow \infty$.

Крім узагальнення ряду Тейлора (5.48) з коефіцієнтами (5.49) на загальне число осей анізотропії m , в роботі [6] ми виконали його аналітичне продовження на область $X > 1$ за допомогою простої запропонованої нами формули "пересумування"

$$(-X)^k = \frac{(1+X)^{-\alpha}}{(\alpha)_k} \sum_{r \geq k} \frac{(-r)_k (\alpha)_r}{r!} \zeta^r \quad \text{з} \quad \zeta = \frac{X}{1+X}, \quad (5.52)$$

яка виконується для всіх $X > 0$, $\alpha > 0$, і невід'ємних цілих чисел k . Таким чином було отримане представлення

$$I(p, q) = q^{-2\varepsilon} A_{D,m} (1+X)^{-\varepsilon/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon/2)_k}{k!} \Upsilon_k \left(\frac{X}{1+X} \right)^k, \quad (5.53)$$

де

$$\Upsilon_k := \sum_{r=0}^k \frac{(-k)_r(\varepsilon)_{2r}4^{-r}}{(\varepsilon/2)_r(3/2)_r(b_m+1)_r} {}_3F_2\left(\begin{matrix} \varepsilon+2r, b_m, \frac{1}{2} \\ b_m+1+r, \frac{3}{2}+r \end{matrix}; 1\right), \quad (5.54)$$

параметр $b_m = -1/2 + m/4 + \varepsilon/2$ вже використовувався в попередньому абзаці, і

$$A_{D,m} = \frac{8}{(16\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(b_m+1)}. \quad (5.55)$$

Для коефіцієнтів A_n (де ми повертаємося до часткового випадку $m = 1$) з (5.49) в роботі [73] були виведені рекурентні співвідношення

$$A_{n+2} = \frac{(4\lambda - 1 - 4n)(3 + 4n - 4\lambda)(n - 2\lambda)}{2(1+n)(2+n)(5+2n+2\lambda)} A_n - \frac{35 + 54n + 20n^2 - 26\lambda - 12n\lambda - 8\lambda^2}{2(2+n)(5+2n+2\lambda)} A_{n+1}$$

а також було показано, що функція $I(p, 1)$ задовольняє диференціальному рівнянню Фукса третього порядку, яке може бути записане у вигляді

$$(2-2\lambda+\hat{D})(1-2\lambda+\hat{D})(\hat{D}-2\lambda)I(w) = \left[a_0 + a_1(\hat{D}-2\lambda) + a_2(1-2\lambda+\hat{D})(\hat{D}-2\lambda) \right] I(w).$$

Тут диференціальний оператор $\hat{D} \equiv w d/dw$, змінна $w = p^2$, а явний вигляд коефіцієнтів a_0 , a_1 і a_2 наведений в [73, (5.56-58)]. Це рівняння має чотири регулярні сингулярні точки при $w = 0, -1/4, -1, \infty$. Таким чином гарантовано те, що розклад у ряд Тейлора (5.48), який є регулярним в початку координат, збігається всередині диска $|w| < 1/4$. Тут проявляється ще одне неузгодження передбачення гіпотези ЛСІ з ε -розкладом в теорії ϕ^4 : скейлінгова функція ГЛСІ $g(w)$ з рівняння (5.19) має тільки одну нетривіальну сингулярну точку $w = 1/4$. Нарешті, було виведено також представлення функції (5.48) у вигляді контурного інтеграла в комплексній площині.

З використанням отриманої інформації була виконана екстраполяція експоненційованого ε -розкладу (5.37) скейлінгової функції $\Upsilon(\mathbf{k})$ з (5.33) до $\varepsilon = 3/2$. В результаті була отримана крива залежності $\Upsilon_{1,3}(\mathbf{k})$, зображена на рисунку 5.2. Індеси 1, 3 означають що розрахунок виконаний для одновісної системи з $m = 1$

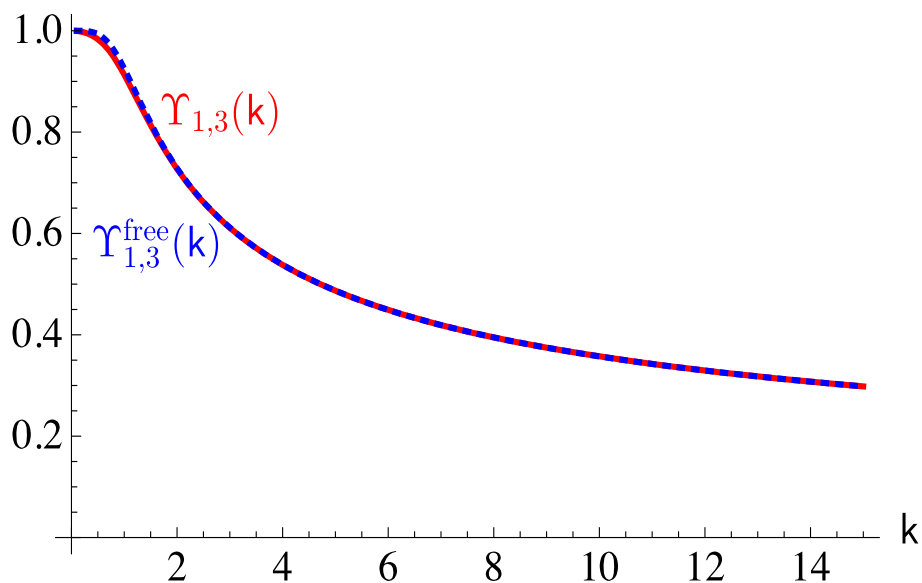


Рис. 5.2. Графіки скейлінгових функцій $\Upsilon_{1,3}(k)$ (червона лінія) і $\Upsilon_{1,3}^{\text{free}}(k)$ (синя лінія).

у тривимірному просторі $d = 3$. Як видно з рисунка, ця крива дуже мало (до 2%) відрізняється від аналогічної скейлінгової функції $\Upsilon_{1,3}^{\text{free}}(k)$ з (5.22), що відповідає гіпотезі ЛСІ. Врахування поправок з ненульовим відхиленням вимірності простору від верхньої граничної вимірності ϵ не привело до суттєвих змін у порівнянні з результатом теорії з відсутністю взаємодій.

5.6. Висновки

В роботі М. Генкеля Nucl. Phys. B 641, 405 (2002) була запропонована гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ), метою якої було формулювання аналога конформної інваріантності для систем з сильною анізотропією. Оскільки вона безпосередньо стосувалася критичної поведінки сильно анізотропних систем в точці Ліфшица, яка в тривалий час була об'єктом наших інтенсивних теоретичних досліджень, ця гіпотеза представляла для нас значний інтерес.

Перш за все, ми перевірили самі математичні основи ГЛСІ. Докладний аналіз запропонованих диференціальних рівнянь та їх розв'язків виявив певні математичні неточності і показав, що остаточні формулювання ГЛСІ для скейлінгових функцій потребують корекцій.

З іншого боку, використовуючи методи РГ та епсилон-розкладу, ми виконали явні розрахунки саме тих кореляційних функцій, яких стосувалася ця гіпотеза, і порівняли отримані результати з її передбаченнями. При цьому ми дослідили математичну структуру цих функцій за допомогою представлення у вигляді контурного інтеграла і визначили типи її особливостей в комплексній площині, дослідили диференціальне рівняння, якому вони задовольняють, визначили загальний вигляд коефіцієнтів їх розкладу як за малими імпульсами і в асимптотичній області великих імпульсів, виконали екстраполяцію епсилон-розкладу до фізичної вимірності простору $d = 3$. У процесі розрахунків було отримано новий вираз для стандартного D -вимірного двоточкового однопетльового інтеграла Фейнмана з двома різними масами m_1^2 і m_2^2 і ненульовим зовнішнім імпульсом p в термінах *однієї* функції Апеля F_1 з явно вираженою симетрією відносно перестановок ($m_1^2 \leftrightarrow m_2^2$).

Порівняння отриманих результатів з передбаченнями ГЛСІ показало, що диференціальне рівняння і кількість та види особливостей у комплексній площині в обидвох випадках є різними, і що, взагалі кажучи, ГЛСІ є справедливою тільки для певного типу ефективних неваємодіючих гаусових теорій поля, але не для реальних систем. При цьому порівняння чисельних результатів при $d = 3$, в тому числі і з даними розрахунків типу Монте-Карло для тривимірної спінової моделі ANNNI (див. стор. 57), дало добре узгодження. Це пояснюється чисельною малістю флуктуаційних поправок, врахованих у даному випадку повною взаємодіючою теорією.

РОЗДІЛ 6

1/ N -РОЗКЛАД ДЛЯ M -ВІСНИХ ТОЧОК ЛІФШИЦА

В роботах [70] і [57] ми виконали розрахунок критичних показників в ТЛ методом $1/n$ -розкладу з використанням рівнянь самоузгодження типу Швінгера-Дайсона, а в [71] — у загальному вигляді показали, що ці нові результати повністю узгоджуються з отриманими нами раніше (див. Розд. 4) епсилон-розкладами.

Розклад в ряд за оберненими степенями великого числа n компонент параметра порядку — відомий теоретичний підхід до вивчення критичної поведінки модельних систем. $1/n$ -розклад не потребує додаткових “вимірних” розкладів (як за степенями ε) і є застосовним у будь-яких вимірностях простору між верхньою і нижньою граничними. До дослідження критичної поведінки ТЛ з довільним числом осей модуляції m ($0 \leq m \leq d$) цей підхід був застосований нами вперше. Зокрема, наші результати дають можливість прослідковувати залежності критичних показників ТЛ від вимірності простору в цілій смузі між лініями граничних вимірностей $d^* = 4 + m/2$ і $d_\ell = 2 + m/2$ — див. Рисунок 6.1.

Відомі літературні дані стосувалися виключно границі сферичної моделі $n \rightarrow \infty$ [157, 220–222], або поправок порядку $1/n$ для $m = d$ -вісної ізотропної ТЛ [148, 223, 224].

Нам вдалося знайти в загальному вигляді перші нетривіальні поправки порядку $1/n$ для двох незалежних кореляційних критичних показників η_2 і η_4 і пов’язаного з ними індекса анізотропії θ , а також критичних показників кореляційних довжин, ν_2 і ν_4 , і основних термодинамічних функцій, α_L , β_L , і γ_L . У випадку одновісної ТЛ, який представляє найбільший інтерес з фізичної точки зору, досліджено залежності цих показників від вимірності простору d . Зроблено

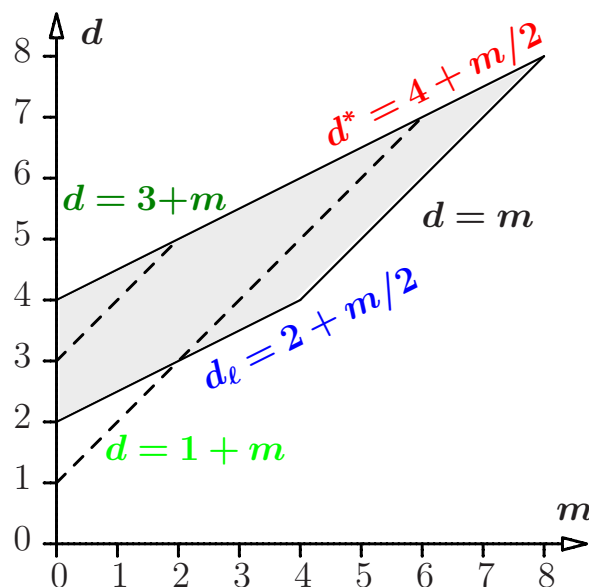


Рис. 6.1. Область застосування $1/n$ -розкладу, а також збіжності інтеграла (6.11), і лінії, що її обмежують.

важливий висновок про те, що характерний для анізотропних ТЛ показник η_4 повинен змінювати свій знак при зміні d . Ми передбачаємо додатне значення цього показника у фізичній вимірності простору $d = 3$.

Для підтвердження правильності наших теоретичних підходів ми перевірили узгодження отриманих загальних виразів з відомими результатами у чотирьох різних граничних режимах. Так, ми явно показали, що в границях $m = 0$ і $m = d$ відтворюються $1/n$ -розклади кореляційних показників для ізотропної критичної точки та ізотропної точки Ліфшица. Також, при малих відхиленнях ε і ε_ℓ від верхньої граничної вимірності d^* і нижньої граничної вимірності d_ℓ , нам вдалося отримати узгодження з відомими раніше результатами вимірних ε і ε_ℓ -розкладів біля обидвох цих граничних вимірностей для анізотропних m -вісних ТЛ.

6.1. Рівняння самоузгодження і кореляційні критичні показники ТЛ в (m, d) -площині

Розрахунок кореляційних критичних показників η_2 і η_4 методом $1/n$ -розкладу був виконаний нами в роботі [70] з використанням рівнянь самоузгодження типу Швінгера-Дайсона безпосередньо в ТЛ.

Ми виходили з розгляду максимально спрощеного ЕГ типу Гінзбурга-Ландау-Вільсона (порівн. з (4.1))

$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d-m} r \int d^m z [(\partial_r \phi)^2 + (\partial_z^2 \phi)^2] + \frac{\lambda}{8} \int d^d x (|\phi|^2)^2, \quad (6.1)$$

де збережені лише ті доданки, присутність яких є необхідною для опису самої ТЛ без врахування можливих відхилень від цієї точки на фазовій діаграмі. Як звичайно, ми маємо справу з теоретико-польовою моделлю типу ϕ^4 , де $\phi = \phi(x)$ — n -компонентне векторне поле параметра порядку з компонентами $\phi_\alpha(x)$, де $\alpha = 1, \dots, n$. Число компонент параметра порядку n є неперервним параметром, який може набувати безмежно великих значень.

Як і в Розділі 4, головною особливістю ЕГ (6.1) є те, що поряд із звичайним градієнтним членом $(\partial_r \phi)^2$, він містить також доданок $(\partial_z^2 \phi)^2$ четвертого порядку за просторовими похідними. При цьому просторові похідні діють у цих двох градієнтних членах у різних підпросторах d -вимірного простору $\mathbb{R}^d$: m -вимірному “паралельному” і $(d - m)$ -вимірному “перпендикулярному”, так що $x = (r, z)$.

Для отримання рівнянь самоузгодження для кореляційних функцій, а з них — $1/n$ -розкладів для їх критичних показників, ми використовували відомий метод Васильєва, Пісьмака і Хонконена [208, 357]. Вводиться додаткове скалярне поле $\psi = \psi(x)$ і фактор Больцмана $\exp(-\mathcal{H}_{\text{int}}[\phi])$, пов’язаний з взаємодією типу ϕ^4 , записується як

$$e^{-\mathcal{H}_{\text{int}}[\phi]} = \text{const} \int \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x [\psi^2 - i\sqrt{\lambda} \phi^2 \psi]}. \quad (6.2)$$

Таким чином, з точністю до несуттєвої аддитивної константи, повний ЕГ записується у вигляді

$$\mathcal{H}[\phi, \psi] = \mathcal{H}_0[\phi] + \frac{1}{2} \int d^d x [\psi^2 - i\sqrt{\lambda} \phi^2 \psi], \quad (6.3)$$

де $\mathcal{H}_0[\phi]$ відповідає першому доданку з (6.1), що описує “вільну” теорію без взаємодій.

У переформульованій таким чином теорії можна записати рівняння

Швінгера-Дайсона для повних парних кореляційних функцій полів ϕ і ψ ,

$$G_{\phi}^{-1} = G_{\phi}^{(0)-1} - \Sigma_{\phi} = G_{\phi}^{(0)-1} - \text{---}\bigcirc\text{---} - \dots, \quad (6.4)$$

$$G_{\psi}^{-1} = G_{\psi}^{(0)-1} - \Sigma_{\psi} = G_{\psi}^{(0)-1} - \text{---}\bigcirc\text{---} - \dots, \quad (6.5)$$

де суцільні лінії відповідають повним пропагаторам $G_{\phi}(x) = \langle \phi_{\alpha}(0)\phi_{\beta}(x) \rangle \delta_{\alpha\beta}$ і $G_{\psi}(x) = \langle \psi(0)\psi(x) \rangle$. В (6.4) і (6.5), Σ_{ϕ} і Σ_{ψ} позначають відповідні власноенергетичні функції. Діаграми найнижчих порядків, з яких починаються безмежні ряди для Σ_{ϕ} і Σ_{ψ} , потрібні для визначення поправок порядку $1/n$ до кореляційних критичних показників ТЛ.

Розв'язок рівнянь самоузгодження (6.4)–(6.5) може бути зображеним у графічній формі як

$$[G_{\phi}(p, q)]^{-1} = \frac{2}{n} \text{---}\bigcirc\text{---}^{-1}. \quad (6.6)$$

З урахуванням того, що в ТЛ парна кореляційна функція $G_{\phi}(p, q)$ має скейлінгову форму (4.53), де

$$\eta_2 = \frac{\eta_2^{(1)}}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = \frac{\eta_4^{(1)}}{n} + O(n^{-2}) \quad \text{і} \quad \theta = \frac{1}{2} + \frac{\theta^{(1)}}{n} + O(n^{-2}), \quad (6.7)$$

розв'язування рівняння (6.6) з $q = 0$ і з $p = 0$ дає наступні результати для коефіцієнтів $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ поправок порядку $1/n$ двох незалежних кореляційних критичних показників η_2 і η_4 ,

$$\eta_2^{(1)} = 2 \frac{K_{d-m}}{d-m} \int_q^{(m)} \frac{4 - (d-m)(1+q^4)}{(1+q^4)^3} \frac{1}{I(1, q)}, \quad (6.8)$$

$$\eta_4^{(1)} = \frac{2K_m}{m(m+2)} \int_p^{(d-m)} \frac{\mathcal{P}_2(p^2)}{(p^2+1)^5} \frac{1}{I(p, 1)}, \quad (6.9)$$

$$\mathcal{P}_2(p^2) = 3(8-m)(6-m) + 5(m^2+2m-96)p^2 + (m^2+50m+144)p^4 - m(m+2)p^6.$$

Для пов'язаного з ними індекса анізотропії $\theta = (2 - \eta_2)/(4 - \eta_4)$ маємо

$$\theta^{(1)} = -\eta_2^{(1)}/4 + \eta_4^{(1)}/8. \quad (6.10)$$

Функція

$$I(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{p'^2 + q'^4} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}' + \mathbf{q}|^4} \quad (6.11)$$

представляє собою "елементарну бульбашку" [207] в ТЛ. Вона відповідає однопетльовій діаграмі Фейнмана $\times$ звичайної теорії типу ϕ^4 . В розд. 4.3 (див. (4.38)) ми вже мали справу з частковим випадком інтеграла (6.11) при $q = 0$, а в пп. 5.4 і 5.5 цей інтеграл був важливим інгредієнтом розрахунку скейлінгової функції енергія-енергія в ТЛ.

Всі імпульсні інтеграли нормовані наступним чином:

$$\int_{\mathbf{k}}^{(D)} f(k^2) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(k^2) = K_D \int_0^\infty dk k^{D-1} f(k^2), \quad \text{де} \quad K_D = 2 \frac{(4\pi)^{-D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (6.12)$$

Величина K_D , пов'язана з кратністю інтеграла і виконанням у ньому інтегрування за напрямками, є стандартним "геометричним фактором", який часто зустрічається в літературі.

Як видно з (6.8)–(6.9) а також (6.38)–(6.40), критичне значення для можливості виконання розрахунків за цими загальними формулами має наявність результатів для інтеграла $I(p, q)$, означеного в (6.11) (а також $J(p, q)$ з (6.41) коли йдеться про термодинамічні критичні показники). Інтеграл $I(p, q)$ з (6.11) в координатному представленні записується як

$$I(p, q) = \int d^{d-m} r \int d^m z [G(r, z)]^2 e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}}, \quad (6.13)$$

де $G(r, z)$ — вільний пропагатор з (4.5), функціональні властивості якого детально обговорюються в розділі 4.2. Таким чином, успіх в розрахунку інтеграла $I(p, q)$ залежить від можливостей інтегрування квадрата скейлінгової функції вільного пропагатора (див. (4.8), (4.15)), або успішності безпосереднього розгляду імпульсного представлення (6.11).

Виходячи з формули (6.13) і користуючись її суттєвими спрощеннями в деяких часткових випадках, ми отримали явні вирази для функції $I(p, q)$ і відповідні

результати для критичних показників, що представлені в пункті 6.4. Розрахунку інтеграла $I(p, q)$ з (6.11) і дослідженню спеціальних функцій, що при цьому виникають, присвячена серія статей [3, 4, 6, 11]. Деякі математичні результати отримані в цих роботах, будуть представлені нижче. А зараз ми повертаємося до подальшого дослідження формул (6.8) і (6.9).

Загальні вирази (6.8) і (6.9) для кореляційних критичних показників η_2 і η_4 (як і формула (6.38) для ν_2 і похідні результати представлені нижче) отримані в цілій смузі між лініями граничних вимірностей $d_\ell(m) = 2 + m/2$ і $d^*(m) = 4 + m/2$, додатково обмежених лініями $m = 0$ і $m = d$. Ця область визначення для наших результатів зображена на Рисунку 6.1. Складність підінтегральних функцій не дозволяє явного розрахунку присутніх інтегралів, крім деяких часткових випадків. Не дивлячись на це, із наших загальних формул було отримано багато корисної і цікавої інформації.

Для підтвердження правильності наших розрахунків ми перевірили узгодження отриманих загальних виразів з відомими результатами у чотирьох різних граничних режимах. Так, ми явно показали, що в границях $m = 0$ і $m = d$ відтворюються $1/n$ -розклади кореляційних показників для ізотропної критичної точки та ізотропної точки Ліфшица. Також, при малих відхиленнях ε і ε_ℓ від верхньої і нижньої граничних вимірностей $d^*(m)$ і $d_\ell(m)$, нам вдалося отримати узгодження з відомими раніше результатами вимірних ε і ε_ℓ -розкладів біля обидвох цих граничних вимірностей для анізотропних m -вісних ТЛ. Таким чином ми отримали додаткові свідчення щодо правильності використовуваних нами теоретичних підходів. Це було особливо важливо, зважаючи на кількість неправильних результатів у теорії критичної поведінки в ТЛ і наявних дискусій у літературі (див. [62, 64, 65]).

6.2. Контакт з $1/n$ -розкладами

В роботі [70] ми в явному вигляді продемонстрували, як наші загальні вирази (6.8) і (6.9) для кореляційних критичних показників η_2 і η_4 зводяться у відповід-

них граничних режимах до відомих результатів $1/n$ -розкладів для ізотропних КТ і ТЛ. В [57] аналогічні результати були отримані виходячи з формули (6.38) для ν_2^{-1} , а також для критичних показників ν_4 і γ . Розрахунки такого типу базуються на граничному переході до нульової кратності d -вимірного інтеграла [70],

$$\lim_{D \rightarrow 0} \int d^D x g(x; D) = \lim_{D \rightarrow 0} S_D \int dx x^{D-1} g(x; D) = g(0; 0), \quad (6.14)$$

де $S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ — площа поверхні D -вимірної сфери одиничного радіуса.

Так, при $m = 0$ в системі зникає анізотропія, і з (6.8) для η_2 , а також з (6.38) для ν_2^{-1} впливають відомі формули $1/n$ -розкладів для індекса Фішера $\eta = \eta^{(1)}/n + O(n^{-2})$ і оберненого показника кореляційної довжини ν^{-1} , справедливі для вимірностей простору d в проміжку $2 \leq d \leq 4$ [207, 358]. Наприклад, з (6.8) слідує

$$\lim_{m \rightarrow 0} \eta_2^{(1)} = \frac{2}{d} K_d \lim_{m \rightarrow 0} \frac{4 - d(1 + q^4)}{I(1, 0)} = \frac{4(4 - d)\Gamma(d - 2)}{d\Gamma(2 - d/2)\Gamma^2(d/2 - 1)\Gamma(d/2)} = \eta^{(1)}. \quad (6.15)$$

В границі $m \rightarrow d$, що відповідає ізотропній ТЛ, з двох кореляційних критичних показників η_2 і η_4 фізичний зміст зберігає тільки показник η_4 . Відповідно, з (6.9) і (6.14) ми отримуємо

$$\lim_{m \rightarrow d} \eta_4^{(1)} = \frac{2K_d}{d(d + 2)} \lim_{m \rightarrow d} \frac{\mathcal{P}_2(0)}{I(0, 1)} = 3(8 - d) 2^{d-2} \frac{\sin(\pi d/2) \Gamma[(d - 3)/2]}{\pi^{3/2} d(d + 2) \Gamma(d/2)} = \eta_{\text{ILP}}^{(1)} \quad (6.16)$$

а саме, відомий результат для коефіцієнта порядку $1/n$ кореляційного показника ізотропної ТЛ η_{ILP} з [148].

Цікаво відзначити, що для окремо взятих величин η_2 і ν_2 граничні переходи $m \rightarrow d$ не мають змісту, оскільки ці величини не є означеними в ізотропній ТЛ. Але критичний показник γ , який є комбінацією цих величин через скейлінгове співвідношення $\gamma = \nu_2(2 - \eta_2)$, має фізичний зміст в ізотропній ТЛ і отримується з цієї комбінації в границі $m \rightarrow d$. При цьому, як і в (6.16), відтворюється відомий аналітичний вираз для показника γ , виведений безпосередньо в ізотропній ТЛ в роботі [148]. Деталі цього граничного переходу — в нашій статті [57].

6.3. Контакт з епсилон-розкладами

1. Біля верхньої граничної вимірності: $\varepsilon = d^*(m) - d \rightarrow 0$. Перші кроки до того, щоб показати взаємну узгодженість отриманих в [70] $1/n$ -розкладів з опублікованими нами раніше ε -розкладами для критичних показників ТЛ були зроблені в роботі [70]. Тут у загальному вигляді було виведено доданки порядку ε^2 , що впливають з інтегральних представлень (6.8) і (6.9) для $1/n$ -коефіцієнтів кореляційних показників. Проте, на той час довести їх узгодженість з результатами робіт [62, 63] для довільного числа осей анізотропії m не вдалося, і ми задоволювалися лише проведенням явних розрахунків у частковому випадку $m = 2$. Тут, як і у випадку координатного представлення роботи [62], всі остаточні результати можливо отримати в аналітичному вигляді, і ми переконуємося, що

$$\eta_2 = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon^2}{n} + O\left(\frac{\varepsilon^3}{n}, \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right) \quad \text{і} \quad \eta_4 = -\frac{8}{27} \frac{\varepsilon^2}{n} + O\left(\frac{\varepsilon^3}{n}, \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right). \quad (6.17)$$

Легко бачити, що отримані чисельні коефіцієнти при ε^2/n узгоджуються з відповідними границями великих n правильних результатів ε -розкладу з [63, 159, 183] при порівнянні їх з формулами (4.73).

Безпосередній контакт імпульсних представлень (6.8) і (6.9) для $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ з відповідними формулами координатного представлення, вперше отриманими в [62, 63], був продемонстрований в нашій роботі [71]. Тут було показано, що формули (6.8)–(6.9) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} \eta_2^{(1)} &= \frac{K_m}{2(d-m)} \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \frac{1}{I(\mathbf{p}, 1)} \nabla_{\mathbf{p}}^2 \frac{1}{p^2 + 1} \\ &= -\frac{K_m}{8-m} \frac{\varepsilon^2}{c_{-1}^2} \int_{\mathbf{p}}^{(4-m/2)} \frac{1}{p^2 + 1} \nabla_{\mathbf{p}}^2 I(\mathbf{p}, 1) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (6.18)$$

і

$$\begin{aligned} \eta_4^{(1)} &= \frac{K_{d-m}}{2m(m+2)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \frac{1}{I(1, \mathbf{q})} \nabla_{\mathbf{q}}^4 \frac{1}{1 + q^4} \\ &= -\frac{K_{4-m/2}}{2m(m+2)} \frac{\varepsilon^2}{c_{-1}^2} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} \frac{1}{1 + q^4} \nabla_{\mathbf{q}}^4 I(1, \mathbf{q}) \Big|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (6.19)$$

де диференціальні оператори ∇_p і ∇_q діють у відповідних $(d - m)$ - і m -вимірних підпросторах кожен. В обидвох останніх рівняннях вирази справа отримані з попередніх шляхом інтегрування частинами з врахуванням формального ε -розкладу функції $I(p, q)$ (порівн. з (4.38))

$$[I(p, q)]^{-1} = \frac{\varepsilon}{c_{-1}} [1 + \varepsilon \mathcal{I}_0(p, q) + O(\varepsilon^2)], \quad (6.20)$$

де константа c_{-1} є лишком полюса функції $I(p, q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\mathcal{I}_0(p, q)$ — її скінченна частина.

Використовуючи в підінтегральній функції $I(p, q)$ (див. (6.11)) Фур'є представлення для вільних безмасових пропагаторів ТЛ (4.5), (4.7), ми отримуємо з (6.18) і (6.19) потрібні границі (4.65) і (4.66) при великих n . Ці формули ми вивели раніше [62] в координатному представленні з використанням мінімальних віднімачів та вимірної регуляризації.

Відзначимо, що таким чином в (6.18)–(6.19) ми фактично вперше отримали правильні вирази імпульсного представлення для коефіцієнтів другого порядку ε -розкладів кореляційних критичних показників $\eta_2(m)$ і $\eta_4(m)$. Дотепер коректно розрахувати ці показники для довільного числа осей анізотропії m у такому представленні не вдавалося: це питання детально обговорювалося в [62, 65].

Подібне формальне доведення взаємної узгодженості $1/n$ - і ε -розкладів для температурних критичних показників було виконане в розділі 6 нашої роботи [57]. Тут же описані також відповідні явні розрахунки в частковому випадку $m = 2$.

2. Біля нижньої граничної вимірності: $\epsilon_\ell = d - d_\ell(m) \rightarrow 0$. $1/n$ -розклади кореляційних критичних показників η_2 і η_4 повинні бути справедливими при зменшенні вимірності простору d аж до нижньої граничної вимірності $d_\ell(m) = 2 + m/2$, де фазовий перехід в ТЛ зникає (або змінює свій характер) [70, 138, 160]. Розглядаючи в них вимірності $d = d_\ell + \epsilon_\ell$, трошки вищі за d_ℓ , ми можемо робити додаткові розклади за малою величиною ϵ_ℓ . З іншого боку, наявні ϵ_ℓ -розклади можна розглянути в границі великих n . Такі пари подвійних розкладів за $1/n$ і ϵ_ℓ повинні узгоджуватися між собою так само як і розглянуті вище розклади при $1/n \rightarrow 0$ і $\varepsilon = d^* - d \rightarrow 0$, де $d^* = 4 + m/2$ — верхня гранична

вимірність (див. Рисунок 6.1).

Літературних даних, з якими можна було б встановити контакт, небагато: це — однопетльові результати [160] для m -вісних ТЛ з $m = 1, 2$ і 4 , а також стандартні дані ϵ_ℓ -розкладів для критичної точки з [359], що відповідають ізотропному випадку $m = 0$.

Поведінка інтегральних представлень (6.8)–(6.9) при $\epsilon_\ell = d - d_\ell \rightarrow 0$ є подібною як і в границі $\varepsilon = d^* - d \rightarrow 0$, оскільки інтеграл $I(p, q)$ також і при $\epsilon_\ell \rightarrow 0$ має полюс $\sim 1/\epsilon_\ell$:

$$I(p, q) = \frac{E_m}{\epsilon_\ell (p^2 + q^4)} + O(1), \quad \text{де} \quad E_m = 2 (4\pi)^{-1-\frac{m}{4}} \frac{\Gamma(\frac{m}{4})}{\Gamma(\frac{m}{2})} = 4 \frac{(16\pi)^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}}{\Gamma(\frac{m}{4} + \frac{1}{2})}. \quad (6.21)$$

Підкреслимо, що лишок c_{-1} ультрафіолетового полюса $\sim 1/\varepsilon$ функції $I(p, q)$ в (6.20) є константою, не залежною від зовнішніх імпульсів p і q . На відміну від цього, лишок полюса $\sim 1/\epsilon_\ell$, який є інфрачервоним, пропорційний до функції імпульсів $(p^2 + q^4)^{-1}$. Дві версії запису чисельного коефіцієнта E_m в (6.21) отримуються одна з одної за допомогою відомої формули Лежандра для гамма-функції Ейлера від подвійного аргумента, $\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2})$ (див., напр., [281, стор. 774]).

Зауважимо при цьому, що в записі формули, аналогічної до (6.21), в [70, (58)] а також в [6, (69)] сталися помилки. Так, в [70, (58)] опущений множник $(p^2 + q^4)^{-1}$ (що не вплинуло на подальші результати і висновки). Натомість, у формулах (68)–(69) і (71) з [6] фігурує величина E_D , в якій не вся залежність від ϵ_ℓ перетворена в нуль: вона ще залишається у величині $D = 2 - m/2 + \epsilon_\ell$. Таким чином, коректний запис цих формул ми отримали б при підстановці в них $D = 2 - m/2$, що привело б нас до (6.21) і до безпосереднього узгодження із залежним від m коефіцієнтом з [70, (58)]. Подібне зауваження стосується також і формули [6, (72)], яка в околі верхньої граничної вимірності зберігає надлишкову залежність від ε (ϵ' в позначеннях [6]) у величині $D = 4 - m/2 - \varepsilon$. Покладаючи тут $\varepsilon = 0$ і підставляючи $D = 4 - m/2$ у формулу [6, (72)], ми отримаємо повне її узгодження з полюсними членами [63, (39)] і [70, (B.8), (B.23)].

Використовуючи (6.21), імпульсні інтегрування в (6.8) і (6.9) можна довести до кінця. Зараз, на відміну від випадку малих $\varepsilon = d^* - d$, в η_2 і η_4 з'являються ненульові внески лінійні за ϵ_ℓ . Проте в комбінації, що формує θ , вони скорочуються, і ми отримуємо

$$\eta_2 = \frac{\eta_4}{2} + O\left(\frac{\epsilon_\ell^2}{n}, \frac{\epsilon_\ell}{n^2}\right) = \frac{\epsilon_\ell}{n} + O\left(\frac{\epsilon_\ell^2}{n}, \frac{\epsilon_\ell}{n^2}\right) \quad \text{і} \quad \theta = \frac{1}{2} + O\left(\frac{\epsilon_\ell^2}{n}, \frac{\epsilon_\ell}{n^2}\right). \quad (6.22)$$

Ці результати узгоджуються як з [160] так і з [359].

З огляду на структуру ϵ_ℓ -розкладів, зрозуміло, що члени порядку $O(\epsilon_\ell)$ в (6.22) повинні бути обернено пропорційними до $n - 2$. Оскільки рівняння (6.22) були виведені з загальних виразів, справедливих при будь-яких m , ми можемо узагальнити результати [160] для $m = 1, 2$ і 4 записуючи їх як

$$\eta_2(m) = \frac{1}{2}\eta_4(m) + O(\epsilon_\ell^2) = \frac{\epsilon_\ell}{n-2} + O(\epsilon_\ell^2), \quad \theta(m) = \frac{1}{2} + O(\epsilon_\ell^2), \quad (6.23)$$

що є справедливим для довільних $0 \leq m \leq d$. Те, що в порядку $O(\epsilon_\ell)$ ці показники насправді від m не залежать, є спільним з незалежністю від m усіх критичних показників m -вісних ТЛ в порядку $O(\varepsilon)$ вимірного розкладу біля верхньої граничної вимірності.

6.4. Часткові випадки

Як вже згадувалося вище, найважливішим з точки зору фізики є частковий випадок одновісної анізотропії $m = 1$ в реальному тривимірному просторі $d = 3$. Але нажаль, при цих значеннях параметрів теорія виявляється надто складною з точки зору математики. Ми повернемося до цієї ситуації згодом. А поки що розглянемо ті випадки, де математичні спрощення дозволяють отримати певні результати в аналітичному вигляді.

$m = 1, d = 4$. Точка $(m, d) = (1, 4)$ належить лінії $d = 3 + m$, зображеній на Рисунку 6.1. На цій лінії, як це було виявлено ще в роботах [159] і [183], суттєво спрощується функціональна форма вільного пропагатора ТЛ у прямому просторі (див. (4.20)). Теорія спрощується також і в імпульсному предсталенні. Таким

чином, виявилося можливим виконати всі необхідні розрахунки в явному вигляді та отримати остаточні вирази для критичних показників ТЛ з $d = 4$ і $m = 1$ в аналітичному вигляді. Зокрема, функція $I(p, q)$, присутня в знаменниках (6.38) і (6.40) з $(m, d) = (1, 4)$ легко визначається з (6.13):

$$I(1, q) = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{q^4 + 4} - q^2} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{q^4 + 4} + q^2}}. \quad (6.24)$$

Використовуючи цей результат ми без проблем отримуємо [70] критичні показники парної кореляційної функції та індекс анізотропії у явному вигляді:

$$\eta_2 = \frac{5}{9\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = -\frac{2}{27\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{4}{27\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (6.25)$$

З огляду на обговорення залежностей коефіцієнтів $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ від d , пов'язане з Рисунком 6.2, для нас цікаві також чисельні значення: $\eta_2 = 0.1021/n + O(n^{-2})$, $\eta_4 = -0.0136/n + O(n^{-2})$, $\theta = 1/2 - 0.272/n + O(n^{-2})$. Аналогічна до (6.25) формула для оберненого критичного показника кореляційної довжини ν_2^{-1} наведена в (6.75).

Цікаво зазначити, що чотиривимірні теорії, подібні до розглянутої в цьому пункті, останнім часом надзвичайно інтенсивно розвиваються у фізиці високих енергій, елементарних частинок, гравітації та космології (див. наш огляд в [57] і цитовану там літературу). Це — різні варіанти т. зв. квантової теорії поля з порушенням Лорецівської інваріантності. Зокрема, для чотиривимірного простору-часу з $d=4=3+1$ в роботі [55] за допомогою $1/n$ -розкладу розраховувалися фізичні величини, які є безпосередніми аналогами критичних показників ТЛ з $m = 1$ і $d = 4$. Тут в інших позначеннях були відтворені наші результати для η_2 і η_4 з (6.25).

$m = 4, d = 5$. Точка $(m, d) = (4, 5)$ належить лінії $d = m + 1$ (див. Рисунок 6.1), де вільний пропагатор в ТЛ має досить простий вигляд (4.21) і виражається через неповну гамма функцію. Розрахунок інтеграла $I(p, q)$ на лінії $d = m + 1$ і дослідженню спеціальних функцій, що при цьому виникають, присвячена наша стаття [4]. У самій же точці $(m, d) = (4, 5)$ скейлінгова функція пропагатора

(4.21) зводиться до алгебраїчної функції, показаної в (4.23). З її використанням інтеграл $I(p, q)$ розраховується за формулою (6.13) і зводиться в частковому випадку $(m, d) = (4, 5)$ до

$$I(1, q) = \frac{1}{32\pi^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{2}{q^2(3 + q^4)} + \frac{1}{q^2} \ln \frac{1 + q^4}{1 + q^4/4} \right]. \quad (6.26)$$

На відміну від елементарного випадку з (6.24), цю функцію обернути неможливо, і коефіцієнти $1/n$ -розкладу доводиться розраховувати чисельно:

$$\eta_2 = 0.314 \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = 0.045 \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \theta = \frac{1}{2} - 0.073 \frac{1}{n} + O(n^{-2}) \quad (6.27)$$

Звертаємо увагу на те, що при $m = 4$ і $d = 5$ ми маємо $\varepsilon = 1$, і коефіцієнт біля $1/n$ в η_4 є додатнім на відміну від від'ємних величин, що отримуються біля верхньої граничної вимірності при $\varepsilon \rightarrow 0$ а також при $\varepsilon = 1/2$ у випадку $(m, d) = (1, 4)$.

$m = 1, d = 3$. У випадку одновісної ТЛ у фізичній вимірності простору $d = 3$ аналітична робота теж була доведена до рівня, зручного для чисельного розрахунку. Проте, оскільки в даному частковому випадку ми не виявили жодних суттєвих математичних спрощень у координатному представленні вільного пропагатора, функцію $I(p, q)$ розраховували за формулою (6.11). В ній $d - m = 2$ -вимірне внутрішнє інтегрування за перпендикулярним імпульсом $\mathbf{p}'$ приводить до результату

$$I(1, q) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq' A^{-1/2} \ln \left[\frac{2q'^4(q' + q)^4 + A + [q'^4 + (q' + q)^4 + 1] A^{1/2}}{2q'^4(q' + q)^4} \right], \quad (6.28)$$

де скорочене позначення A означає вираз

$$A = A(q', q) = [1 + (q' + q)^4]^2 + (1 + q'^4)^2 - 2q'^4(q' + q)^4 - 1. \quad (6.29)$$

Інтегрування за q' можна виконати в комплексній площині¹. Таким чином інтеграл (6.28) зводиться до вигляду

$$I(1, q) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{\frac{i}{2q}} \frac{dq'}{\sqrt{(1 + 4q'^2 q^2) [1 + \frac{1}{4}(4q'^2 + q^2)^2]}}. \quad (6.30)$$

¹На прохання автора цей непростий розрахунок виконав С. Руткевич

У свою чергу, останній інтеграл виражається через гіпергеометричну функцію Гауса як

$$I(1, q) = \frac{1}{4}(4 + q^4)^{-1/4}(1 + q^4)^{-1/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (6.31)$$

де

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3 + q^4}{(1 + q^4)(1 + 4/q^4)^{1/2}} \right]. \quad (6.32)$$

Відомі формули квадратичного і лінійного перетворень функції ${}_2F_1$, такі як [267, (15.30.30), (15.3.4)], дозволяють отримати шуканий інтеграл в наступних двох еквівалентних формах:

$$I(1, q) = \frac{1}{4\sqrt{2}} u^{1/4} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; u\right), \quad \text{де} \quad u = \frac{4}{(1 + q^4)^2(4 + q^4)}, \quad (6.33)$$

і

$$I(1, q) = \frac{1}{4\sqrt{2}} w^{1/4} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; -w\right), \quad \text{де} \quad w = \frac{4}{q^4(3 + q^4)^2}. \quad (6.34)$$

Використовуючи отримані явні вирази для інтеграла $I(1, q)$, за допомогою програмного пакету Mathematica [280] ми отримали [70] для кореляційних критичних показників чисельні результати

$$\eta_2 = 0.306 \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \eta_4 = 0.223 \frac{1}{n} + O(n^{-2}), \quad \theta = \frac{1}{2} - 0.049 \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (6.35)$$

При цьому були відтворені дані, отримані нами раніше безпосередньо з формул (6.8) і (6.9) за допомогою мови Fortran.

Знов, як і в попередньому випадку з $m = 4$, $d = 5$, на протилежність передбаченням ε -розкладу біля верхньої граничної вимірності, ми маємо додатній коефіцієнт розкладу показника η_4 при $1/n \rightarrow 0$. Порівняння результатів для η_4 при $\varepsilon \rightarrow 0$ (див. напр. (4.73)), $\varepsilon = 1/2$ (6.25), $\varepsilon = 1$ (6.27), і $\varepsilon = 3/2$ (6.35) наводить на думку про те, що цей показник змінює свій знак з від'ємного на додатній при віддаленні від лінії верхніх граничних вимірностей $d^*(m) = 4 + m/2$. Більш детально залежності кореляційних критичних показників від вимірності простору d ми обговоримо в пункті 6.7.

6.5. Температурні критичні показники в порядку $O(1/n)$

Для того, щоб отримати аналогічні результати для критичних показників кореляційних довжин ν_2 і ν_4 , а також сприйнятливості γ_L , питомої теплоємності α_L і температурної залежності параметра порядку β_L , необхідно розглянути рівняння Швінгера-Дайсона (6.4)–(6.5) вже не безпосередньо в ТЛ, а з врахуванням можливого відхилення від цієї точки за температурою. На рівні ЕГ (6.1) таке відхилення реалізується шляхом додавання до нього доданка (порівн. з (4.1))

$$\Delta\mathcal{H}_\tau[\phi] = \frac{\tau}{2} \int d^d x |\phi(x)|^2. \quad (6.36)$$

Присутність у теорії додаткової температурної змінної приводить до появи у виразі для парної кореляційної функції відповідної нової скейлінгової змінної. Так, скейлінгова функція парного корелятора (4.53) узагальнюється до

$$G_\phi(p, q; \tau) = p^{-2+\eta_2} G_\phi(1, qp^{-\theta}; \tau p^{-1/\nu_2}). \quad (6.37)$$

Згідно з методом, запропонованим в [357], ми повинні розглянути інфінітезимальні температурні відхилення від критичної теорії, описаної вище, і слідувати змінам, які вони створюють у рівняннях самоузгодження. Деталі цієї роботи та її результати опубліковані в нашій статті [57].

Подібно як і в випадку (6.8) і (6.9), нові загальні результати теж представляються повторними однократними інтегралами, параметризованими величинами m і d . $1/n$ -розклад для (оберненого) показника кореляційної довжини отримано у вигляді

$$\nu_2^{-1} = d - \frac{m}{2} - 2 + \frac{1}{n} \left[\eta_2^{(1)} + m\theta^{(1)} + 2\mathcal{N}_2 - 4\mathcal{N}_J \right] + O(n^{-2}). \quad (6.38)$$

Тут $\eta_2^{(1)}$ і $\theta^{(1)}$ — коефіцієнти першого порядку з (6.8) і (6.10), а $\mathcal{N}_2$ і $\mathcal{N}_J$ — інтеграли, означені наступним чином:

$$\mathcal{N}_k \equiv K_{d-m} \int_q^{(m)} \frac{1}{(1+q^4)^k} \frac{1}{I(1, q)}, \quad k \text{ ціле число} \geq 2; \quad (6.39)$$

$$\mathcal{N}_J \equiv K_{d-m} \int_q^{(m)} \frac{1}{1+q^4} \frac{J(1, q)}{[I(1, q)]^2}. \quad (6.40)$$

У підінтегральній функції $\mathcal{N}_J$ поряд з інтегралом $I(p, q)$ з (6.11) додатково з'являється інтеграл

$$J(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{(p'^2 + q'^4)^2} \frac{1}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}' + \mathbf{q}|^4}. \quad (6.41)$$

Виходячи з інформації про ν_2 , η_2 і η_4 , за допомогою відомого скейлінгового співвідношення [137]

$$\gamma_L = \nu_2(2 - \eta_2) = \nu_4(4 - \eta_4) \quad (6.42)$$

ми вивели аналогічні результати для критичних показників сприйнятливості γ_L і кореляційної довжини в паралельному підпросторі ν_4 . Так, з першої рівності з (6.42) ми отримали

$$\gamma_L = \frac{2}{d - m/2 - 2} \left(1 - \frac{2}{d - m/2 - 2} C_\gamma \frac{1}{n} \right) + O(n^{-2}), \quad (6.43)$$

де

$$C_\gamma = \frac{d - m}{4} \eta_2^{(1)} + \frac{m}{16} \eta_4^{(1)} + \mathcal{N}_2 - 2\mathcal{N}_J \quad (6.44)$$

є коефіцієнтом $1/n$ -розкладу оберненої величини $\gamma_L^{-1} = (d - m/2 - 2)/2 + C_\gamma/n + O(n^{-2})$. Критичний показник ν_4 отримується з другої рівності в (6.42):

$$\nu_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{d - m/2 - 2} \left(1 - \frac{2}{d - m/2 - 2} C_{\nu_4} \frac{1}{n} \right) + O(n^{-2}) \quad (6.45)$$

де

$$C_{\nu_4} = \frac{d - m}{4} \eta_2^{(1)} - \frac{1}{8} (d - m - 2) \eta_4^{(1)} + \mathcal{N}_2 - 2\mathcal{N}_J. \quad (6.46)$$

Аналогічні результати для критичних показників питомої теплоємності α_L і намагніченості β_L випливають з гіперскейлінгового співвідношення [137]

$$\alpha_L = 2 - (d - m)\nu_2 - m\nu_4 = 2 - (d - m + \theta m)\nu_2, \quad (6.47)$$

яке узагальнює відоме співвідношення $\alpha = 2 - d\nu$ дійсне в критичній точці, а також із взаємозв'язку між критичними показниками [137] $\beta_L = (2 - \gamma_L - \alpha_L)/2$.

Нижче наші результати будуть перевірені у двох граничних випадках $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$, а також в ε -розкладі з точністю до $O(\varepsilon^2)$. В найважливішому частковому випадку $m = 1$ будуть отримані аналітичні вирази при $d = 4$ і чисельні дані при $d = 3$.

6.5.1. Ізотропні границі $1/n$ -розкладів

У цьому пункті, подібно як і в 6.2, ми розглянемо границі $m \rightarrow 0$ і $m \rightarrow d$. В обидвох цих випадках система втрачає свою просторову анізотропію і ми відтворюємо відомі раніше результати $1/n$ -розкладів для критичних показників термодинамічних функцій.

При $m = 0$ ми отримуємо випадок системи з ізотропними короткосяжними взаємодіями в околі звичайної критичної точки. Таким самим чином, як і в пункті 6.2, за допомогою формули граничного переходу (6.14) ми отримуємо з рівняння (6.38)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \nu_2^{-1} = d - 2 + \eta + 2K_d \lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{1}{I(1, 0)} - 2 \frac{J(1, 0)}{I^2(1, 0)} \right] \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (6.48)$$

Тут $\eta = \eta^{(1)}/n + O(n^{-2})$ — малий показник Фішера в КТ; записуючи останню формулу ми використали результат $\lim_{m \rightarrow 0} \eta_2^{(1)} = \eta^{(1)}$ з (6.15).

Границя $m \rightarrow 0$ зводить $I(1, 0)$ і $J(1, 0)$ з квадратних дужок в (6.48) до стандартних інтегралів типу

$$\int_{\mathbf{k}}^{(D)} k^{-2a} |\mathbf{k} + \mathbf{1}|^{-2b} \equiv V_D(a, b). \quad (6.49)$$

В вимірній регуляризації

$$V_D(a, b) = (4\pi)^{-D/2} \frac{\Gamma(D/2 - a)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(D/2 - b)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a + b - D/2)}{\Gamma(D - a - b)}. \quad (6.50)$$

Таким чином, $I(1, 0)$ і $J(1, 0)$ ідентифікуються як $V_d(1, 1)$ і $V_d(2, 1)$, і ми отримуємо з (6.48)

$$\lim_{m \rightarrow 0} \nu_2^{-1} = \nu^{-1} = d - 2 + 2 \frac{(d-1)(d-2)}{4-d} \eta^{(1)} \frac{1}{n} + O(n^{-2}). \quad (6.51)$$

Це співпадає з відомим результатом $1/n$ -розкладу для ν , звичайного критичного показника кореляційної довжини, див., напр., [207], чи [208, (4.294)–(4.295)].

Аналогічним чином в границі $m \rightarrow 0$ відтворюється також критичний показник сприйнятливості γ ,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} \gamma_L = \gamma &= \frac{2}{d-2} \left\{ 1 - \frac{2}{d-2} \left[\frac{d}{4} \eta^{(1)} + \frac{K_d}{V_d(1,1)} - 2K_d \frac{V_d(2,1)}{V_d^2(1,1)} \right] \frac{1}{n} \right\} + O(n^{-2}) \\ &= \frac{2}{d-2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{d}{4-d} \eta^{(1)} \frac{1}{n} \right] + O(n^{-2}), \end{aligned} \quad (6.52)$$

$1/n$ -розклад якого відомий ще з роботи [207].

Границя $m = d$ дає ним можливість зробити порівняння з результатами, отриманими раніше для ізотропної ТЛ в [148] (див. також [224]),

$$\gamma_{\text{ILP}} = \frac{4}{d-4} - \frac{1}{n} \frac{C_{HLS}}{(d/4-1)^2} \left[1 + \frac{3(d-8)(d-6)}{4(d+2)} + \frac{(10-d)(d-5)}{3} \right] + O(n^{-2}). \quad (6.53)$$

Коефіцієнт

$$C_{HLS} \equiv \frac{\Gamma(d-4)}{\Gamma(d/2)\Gamma^2(d/2-2)\Gamma(4-d/2)} \quad (6.54)$$

співпадає з коефіцієнтом перед квадратними дужками в рівнянні (3) роботи [148]. Таким чином, головним нашим завданням є отримання границі $m \rightarrow d$ комбінації C_γ з (6.44) і порівняння її з коефіцієнтом при $-(d/4-1)^{-2}/n$ в (6.53).

Найсуттєвішим є розгляд нетривіальної поведінки інтегралів $\mathcal{N}_2$ і $\mathcal{N}_J$ при $m \rightarrow d$. Тут слід зауважити, що функції $I(1, q)$ і $J(1, q)$ в їх підінтегральних функціях є однорідними і задовольняють співвідношенням

$$I(1, q) = q^{-2\varepsilon} I(q^{-2}, 1) \quad \text{і} \quad J(1, q) = q^{-4-2\varepsilon} J(q^{-2}, 1) \quad (6.55)$$

для довільних m і d з $\varepsilon = 4 + m/2 - d$, величина якого зараз не є малою. З огляду на це ми можемо записати

$$\mathcal{N}_2 = K_{d-m} K_m \int_0^\infty dq \frac{q^{-2(d-m)-1}}{(1+q^{-4})^2} \frac{1}{I(q^{-2}, 1)}, \quad (6.56)$$

а також подібний вираз для $\mathcal{N}_J$. В підінтегральній функції $\mathcal{N}_2$ з (6.56) при $d-m \rightarrow 0$ і $q \rightarrow \infty$ множник $q^{-2(d-m)-1}$ приводить до логарифмічної сингулярності, в той

час як все інше залишається регулярним. Тому

$$\lim_{m \rightarrow d} \mathcal{N}_2 = \lim_{m \rightarrow d} K_{d-m} K_m \frac{1}{2(d-m)} \frac{1}{I(0,1)} = \frac{K_d}{2V_d(2,2)} = C_{HLS}, \quad (6.57)$$

де явна величина $V_d(2,2)$ визначається формулою (6.50). Подібним чином для $\mathcal{N}_J$ ми отримуємо

$$\lim_{m \rightarrow d} -2\mathcal{N}_J = -K_d \frac{V_d(4,2)}{[V_d(2,2)]^2} = \frac{1}{3}(10-d)(d-5)C_{HLS} \quad (6.58)$$

у згоді з останнім внеском в (6.53).

З формул (6.45)–(6.46) ми також отримали аналогічну границю для критичного показника кореляційної довжини в модуляційному просторі ν_4 ізотропної ТЛ.

Таким чином, $1/n$ -розклад критичного показника сприйнятливості γ_L анізотропної m -вісної ТЛ (6.43)–(6.44) має правильні границі КТ і повністю ізотропної d -вісної ТЛ для довільних величин d , дозволених у цих двох випадках.

6.5.2. Узгодження з ε -розкладом

У цьому пункті ми обговоримо еквівалентність $1/n$ і ε -розкладів для критичного показника ν_2 в їх спільній області застосовності. Аналогічний результат для інших температурних критичних показників ТЛ впливає зі стандартних скейлінгових співвідношень, таких як (6.42) і (6.47) (див. також [137], [62]).

Критичний показник поперечної кореляційної довжини ν_2 був отриманий з точністю до $O(\varepsilon^2)$ в [63] з використанням вимірної регуляризації і мінімальних віднімань вимірних полюсів $\sim 1/\varepsilon$ при $n \in [0, \infty[$ і $m \in [0, d]$. При безмежно великих n цей результат для ν_2 зводиться до

$$\nu_2^{-1} = 2 - \varepsilon + \frac{6}{n}\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2n} \left[\frac{m-4}{8-m} j_\phi(m) + \frac{j_\sigma(m)}{8(m+2)} + 28J_u(m) \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3, n^{-2}). \quad (6.59)$$

Функції $j_\phi(m)$, $j_\sigma(m)$, і $J_u(m)$ визначені у вигляді однократних інтегралів у формулах (4.57)–(4.61). Явні вирази для них у часткових випадках $m = 2$ і $m = 6$ можна знайти в п. 3.2 роботи [63].

Результат (6.59) можна представити у вигляді, де явним чином фігурують кореляційні критичні показники, а саме,

$$\nu_2^{-1} = 2 - \varepsilon + 6\frac{\varepsilon}{n} + \eta_2 + m\left(\theta - \frac{1}{2}\right) - 14J_u(m)\frac{\varepsilon^2}{n} + O(\varepsilon^3, n^{-2}). \quad (6.60)$$

Останній вираз має структуру, дуже близьку до представлення ν_2^{-1} в (6.38). Комбінація $(\theta - 1/2) \sim \varepsilon^2/n$ є неklasичною, аномальною частиною індекса анізотропії θ . Доданок, до якого вона входить, так само як і η_2 , присутні також і безпосередньо в (6.38).

В теорії збурень, яка використовувалася при побудові ε -розкладу критичного показника ν_2 , інтеграл $J_u(m)$ походить частково від нетривіального двопетльового перенормування константи зв'язку члена ϕ^4 , в якому бере участь діаграма Фейнмана  вершинної функції Γ_4 . Ще одним джерелом його появи є подібна діаграма Фейнмана з об'єднаними зовнішніми лініями зліва, яка є внеском в діаграмний розклад двоточної вершинної функції з включенням ϕ^2 , $\Gamma^{(2,1)}$ — див. (4.55)–(4.56). Згідно з формулами (4.60) і (4.61),

$$J_u(m) = 1 - \frac{1}{2} C_E - \frac{1}{2} \psi(2 - \frac{m}{4}) + B_m b_m \int dv v^{m-1} \Phi^2(v; m, d^*) \Theta(v; m), \quad (6.61)$$

де $b_m = 2^{-4-m} \pi^{-3/2-m/4}$.

Порівнюючи рівняння (6.38) і (6.60) для ν_2^{-1} ми бачимо, що еквівалентність цих формул при великих n і малих ε забезпечується тоді, коли ε -розклад комбінації $2\mathcal{N}_2 - 4\mathcal{N}_J$ з (6.38) має вигляд

$$2\mathcal{N}_2 - 4\mathcal{N}_J = 6\varepsilon - 14J_u(m)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (6.62)$$

Нагадаємо, що інтеграли $\mathcal{N}_2$ і $\mathcal{N}_J$ означені в (6.39) і (6.40). Доведення цього нетривіального співвідношення можна знайти на стор. 90–92 нашої роботи [57].

В п. 6.2 роботи [57] досить формальні математичні викладки для довільного числа осей анізотропії m були проілюстровані явними розрахунками для часткового випадку $m = 2$. Тут, виходячи з описаних вище інтегральних представлень, ми крок за кроком отримали прості явні вирази, що узгоджуються в подвійній границі ($n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$) з відомими раніше результатами.

Підкреслимо, що доведення еквівалентності розкладів величини ν_2^{-1} , як і η_2 і η_4 в 6.3, при одночасному прямуванні $n \rightarrow \infty$ і $\varepsilon \rightarrow 0$ має важливе і принципове значення. Воно доводить правильність ε - і $1/n$ -розкладів критичних показників ТЛ, отриманих нами за допомогою різних підходів і різних представлень (координатного та імпульсного) в областях, де обидва варіанти теорії повинні давати повне співпадіння. Отримання такого узгодження дає нам усі підстави бути переконаними у правильності всіх наших загальних виразів, а також будь-яких часткових випадків, які з них випливають. Це важливий крок у теорії критичних явищ в ТЛ, оскільки до появи наших робіт коректно розрахувати критичні показники ТЛ для довільного числа осей анізотропії m чи довільної вимірності простору d нікому не вдавалося.

6.5.3. Область застосовності, вимірна регуляризація та аналітичне продовження

У цьому пункті ми розглянемо область застосовності наших результатів (6.38)–(6.46) для температурних критичних показників і пов'язані з цим питання вимірної регуляризації та аналітичного продовження.

Почнемо з того, що інтегральні представлення кореляційних критичних показників η_2 і η_4 в такому вигляді, як вони записані в (6.8) і (6.9), є безпосередньо застосовними у всій фізичній області застосовності теорії, де ці показники мають нетривіальні неklasичні величини. Це — область вимірностей простору, зображена на Рисунку 6.1. Вона обмежена лініями $m = 0$ і $m = d$, тому що число осей анізотропії m фізично не може бути від'ємним, а також, очевидно, не може перевищувати повну вимірність простору d . Фізичні обмеження лініями граничних вимірностей $d_\ell(m) = 2 + m/2$ і $d^*(m) = 4 + m/2$ полягають в тому, що при $d = d_\ell$ фазовий перехід в системі зникає при будь-яких температурах $T > 0$ (див. [138, стор. 278-279]), а при $d \geq d^*$ стає застосовною теорія Ландау, яка характеризується класичними критичними показниками. Підкреслимо також, що в рамках $1/n$ -розкладу число компонент параметра порядку обмежене областю $n > 2$.

З іншого боку, фізична область існування (некласичних) кореляційних показників η_2 і η_4 , визначена нерівностями $d_\ell(m) < d < d^*(m)$ і $0 \leq m \leq d$, точно співпадає з областю збіжності інтеграла $I(p, q)$, що входить в підінтегральну функцію інтегральних представлень (6.8) і (6.9). Самі інтеграли з (6.8) і (6.9) що визначають η_2 і η_4 , є також збіжними в зазначеній області. Таким чином, в будь якій точці (m, d) з двовимірної області $\{2 + m/2 < d < 4 + m/2, 0 \leq m \leq d\}$, зображеної на Рисунку 6.1, де просторові вимірності m і d розглядаються як неперервні змінні, критичні показники $\eta_2(m, d)$ і $\eta_4(m, d)$ можуть бути розраховані чисельно, наприклад, за допомогою мови Fortran. У процесі підготовки роботи [70] ми насправді виконали такий розрахунок η_2 і η_4 у випадку одновісної ТЛ ($m = 1$) у фізичному просторі $d = 3$. Згодом, з отриманням явного виразу (6.31)–(6.34) для $I(p, q)$ при $m = 1, d = 3$, ці чисельні результати були відтворені за допомогою пакету Mathematica [280].

У випадку температурних критичних показників ситуація є дещо іншою. Результати для них були виведені безпосередньо в ТЛ в рамках безмасової теорії з використанням вимірної регуляризації. Це передбачало роботу з нульовими коефіцієнтами $\tau_0 = \rho_0 = 0$ в доданках $\tau_0 \phi^2$ і $\rho_0 (\Delta_z \phi)^2$ з ЕГ (4.1) (що суттєво спрощує інтеграли з якими потрібно працювати), а також, наступне аналітичне продовження отриманих результатів до потрібної області. У цьому відношенні використаний підхід точно відтворює успішну розрахункову схему отримання $1/n$ -розкладів, прийняту в роботі [360].

Вище ми розглянули три ситуації, де вимірна регуляризація без проблем приводить до правильних результатів. Це розрахунки критичних показників у КТ при $m \rightarrow 0$ і в ізотропній ТЛ при $m \rightarrow d$, а також епсилон-розкладів біля верхньої та нижньої граничних вимірностей для m -вісних ТЛ в анізотропних системах. У всіх цих часткових випадках результати були отримані раніше за допомогою різних підходів, але переважно також з використанням вимірної регуляризації.

Зазвичай вимірна регуляризація передбачає потребу в певному аналітичному продовженні (див. напр. [326, Розд. 4], [361]). В теорії ізотропних КТ більшість результатів (принаймні в наближеннях невисокого порядку) можливо отри-

мати в явному вигляді. Тут дуже часто зустрічаються гамма-функції Ейлера з від'ємними аргументами, які потребують аналітичного продовження. На практиці для цього використовується просте співвідношення

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)/\alpha \quad \text{для} \quad -1 < \alpha < 0. \quad (6.63)$$

Наприклад, коефіцієнт $\eta^{(1)}$ з [360, (28)] містить функцію $a(2) = \Gamma(d/2 - 2)$, де $d/2 - 2 < 0$ саме в області $d < 4$, яка представляє інтерес. Описана процедура дає в цьому випадку гамма-функцію $\Gamma(d/2 - 1)$, аргумент якої вже є додатнім у фізичній області $d > 2$. Але, якби співвідношення (6.63) відомим не було, то аналітичного продовження гамма-функції Ейлера можна було б досягнути використовуючи формулу Коші-Заальшютца² (див. [362, Розд. 12], [363, Розд. 1]) виходячи з її інтегрального представлення

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} \left[e^{-t} - \sum_{j=0}^k \frac{(-t)^j}{j!} \right], \quad (6.64)$$

де інтеграл Ейлера з відніманнями в підінтегральній функції є збіжним при $-k - 1 < \Re \alpha < -k$.

Подібну ситуацію ми маємо з нашими результатами для температурних критичних показників (6.38)–(6.46). Вони представлені повторними інтегралами, які в загальному вигляді неможливо розрахувати явно. Крім того, ми не можемо чисельно розрахувати інтеграл $\mathcal{N}_J$ з (6.40) через те, що в підінтегральній функції він містить внутрішній інтеграл $J(p, q)$ з (6.41), який є розбіжним у всій потрібній нам фізичній області визначення критичних показників. Для того, щоб могли виконати такі чисельні розрахунки для температурних критичних показників (наприклад при $m = 1$, $d = 3$) виходячи з вимірно регуляризованих формул (6.38)–(6.46), ми повинні забезпечити їх відповідне аналітичне продовження.

Зазначені розбіжності інтеграла $J(p, q)$ з (6.41) є інфрачервоними. Вони виникають тоді, коли знаменники підінтегральної функції $J(p, q)$ обертаються в

²Альтернативна версія аналітичного продовження гамма-функції Ейлера за формулою Вейєрштаса розглядається в [361, розд. II.A]

нуль. Це відбувається при нульових (або скінченних) значеннях змінних інтегрування в (6.41).³ Як відомо, інфрачервоні проблеми стають дедалі більш серйозними при зменшенні вимірності простору d . Щоб отримати результати, які б коректно визначали $1/n$ -розклади температурних критичних показників у всій їх області визначення, ми повинні модифікувати означення (6.41) функції $J(p, q)$ таким чином, щоб вона задавалася вільним від інфрачервоних розбіжностей інтегралом, що збігається у всьому потрібному нам інтервалі $0 < \varepsilon < 2$.

Усвідомлюючи те, що інфрачервоні проблеми є типовими я безмасових теорій, ми виконали інший розрахунок критичного показника γ_L з використанням масивної теорії. Ми використали метод Ма [207], де при виводі $1/n$ -розкладів розрахунки виконуються не безпосередньо в точці переходу, а в деякому її околі. При цьому виконується асимптотичний аналіз теорії для інфінітезимально малої, але незникаючої “маси”, роль якої відіграє обернена сприйнятливність (ми вже вводили подібні температурні змінні в Розд. 2 і 3). Таким чином ми вивели результати для температурних критичних показників ТЛ, які за формою співпадають з отриманими раніше. Суттєва відмінність з’являється тільки в інтегральному представленні функції $J(p, q)$. Масивна теорія “згенерувала” віднімання в підінтегральній функції $J(p, q)$, подібні до тих, що фігурують у формулі аналітичного продовження гамма-функції (6.64). Це забезпечило аналітичне продовження $J(p, q)$ такого типу, як обговорюється в [326, Розд. 4.2]. В проміжку $0 < \varepsilon < 1$ ми маємо, замість (6.41),

$$J^{(1s)}(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{(p'^2 + q'^4)^2} \left[\frac{1}{(\mathbf{p}' + \mathbf{p})^2 + (\mathbf{q}' + \mathbf{q})^4} - \frac{1}{p^2 + q^4} \right]. \quad (6.65)$$

Для більших величин ε віднімання $1/(p^2 + q^4)$ не є достатнім, і інтеграл (6.65) знов розбігається при малих імпульсах. В доповнюючому проміжку $1 < \varepsilon < 2$ з’являється ще одне додаткове віднімання, і ми повинні використовувати формулу

$$J^{(2s)}(p, q) = \int_{\mathbf{q}'}^{(m)} \int_{\mathbf{p}'}^{(d-m)} \frac{1}{(p'^2 + q'^4)^2} \left[\frac{1}{(\mathbf{p}' + \mathbf{p})^2 + (\mathbf{q}' + \mathbf{q})^4} - \frac{1}{p^2 + q^4} - q'^2 S_2(p, q) \right], \quad (6.66)$$

³Подібні проблеми із збіжністю інтеграла $I(p, q)$ біля нижньої граничної вимірності обговорювалися в розд. 6 і додатку В нашої роботи [6].

де функція $S_2(p, q)$ має вигляд

$$S_2(p, q) = \frac{2}{m} \frac{q^2}{(p^2 + q^4)^3} [(6 - m)q^4 - (2 + m)p^2]. \quad (6.67)$$

У свою чергу, ця формула з подвійним відніманням не може бути використана при $\varepsilon < 1$, оскільки в цьому проміжку останній доданок з (6.66) спричинить ультрафіолетову розбіжність. Величина $\varepsilon = 1$ є особливою. При $\varepsilon = 1$ інтеграл $J(p, q)$ може бути отриманий шляхом граничного переходу $\varepsilon \rightarrow 1$ як з (6.65), так і з (6.66). При таких граничних переходах можуть з'являтися логарифмічні члени. Зауважимо, що величині $\varepsilon = 1$ відповідає лінія $d = 3 + m/2$ в (m, d) -площині, яка є паралельною до ліній нижньої та верхньої граничних вимірностей і розміщена рівно посередині між ними (див. Рисунок 6.1).

У підсумку, для неінфінітезимально малих величин ε з проміжку $0 < \varepsilon < 2$, у формулах (6.40)–(6.46) функцію $J(p, q)$ з (6.41) слід замінити на відповідну її версію з відніманням, $J^{(1s)}(p, q)$ чи $J^{(2s)}(p, q)$ з (6.65) чи (6.66). Звідси впливають результати для критичних показників ν_2 , ν_4 і γ_L , які є справедливими, як і η_2 і η_4 з [70], для довільних m -вісних ТЛ з $0 < m \leq d$ у всій їх області визначення $2 + m/2 < d < 4 + m/2$ між лініями нижньої та верхньої граничних вимірностей.

Використовуючи аналітичне продовження $J(1, q)$, визначене формулами (6.66) і (6.67), ми розраховували коефіцієнти порядку $1/n$ для одновісних систем ($m = 1$) безпосередньо при $d = 4$ і $d = 3$, де $\varepsilon = 1/2$ і $\varepsilon = 3/2$, відповідно. Ці результати ми обговоримо в наступних пунктах.

6.5.4. Частковий випадок $m = 1$, $d = 4$

У цьому пункті ми розглянемо частковий випадок чотиривимірних систем з одновісною анізотропією. Як вже згадувалося вище, цей випадок має відношення до квантових теорій поля з порушенням Лоренцівської інваріантності. На щастя, при $d = 4$ і $m = 1$ всі розрахунки для критичних показників в порядку $O(1/n)$ можливо провести в явному вигляді. Як деталі розрахунків, так і результати можна порівняти з даними роботи Ансельмі [55].

У випадку $m = 1$, $d = 4$ ми маємо $\varepsilon = 1/2 \in (0, 1)$, і для функції $J(1, q)$ в інтегралі $\mathcal{N}_J$ з (6.40) ми повинні використовувати формулу (6.65). Працюючи таким чином в одній виділеній точці (m, d) -площини ми не звертаємося до узагальнення цілочисельних просторових вимірностей на нецілі величини (dimensional continuation), а маємо справу з кратними інтегралами, визначеними класичним чином. Так, внутрішній інтеграл за p' в (6.65) зараз є тривимірним (точка $m = 1$, $d = 4$ належить лінії $d - m = 3$). Його частина, що включає в себе перший доданок з квадратних дужок цієї формули має вигляд

$$\int_{p'}^{(3)} \frac{1}{(p'^2 + q'^4)^2} \frac{1}{(\mathbf{p}' + \mathbf{p})^2 + (\mathbf{q}' + \mathbf{q})^4} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{q'^2} \frac{1}{[q'^2 + (\mathbf{q}' + \mathbf{q})^2]^2 + p^2}. \quad (6.68)$$

Підставляючи результат внутрішнього інтегрування в (6.65), ми отримуємо не-власний однократний інтеграл

$$J^{(1s)}(p, q) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \left\{ \frac{1}{[x^2 + (x + q)^2]^2 + p^2} - \frac{1}{p^2 + q^4} \right\}. \quad (6.69)$$

Тут віднімання останнього доданка у фігурних дужках забезпечує збіжність інтеграла при $x \rightarrow 0$. Прості алгебраїчні перетворення приводять останній інтеграл до вигляду

$$J^{(1s)}(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \left[q^2 \frac{q^4 - p^2}{q^4 + p^2} J_0(p, q) - \frac{1}{2} J_2(p, q) - \frac{2}{q^4 + p^2} J_6(p, q) \right], \quad (6.70)$$

де $J_k(p, q)$ з $k = 0, 2, 6$ визначаються формулою

$$J_k(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{A_- A_+} \quad \text{з} \quad A_{\pm} \equiv \frac{1}{[x^2 + (x \pm q)^2]^2 + p^2}. \quad (6.71)$$

Інтеграли $J_k(p, q)$ можна розрахувати в комплексній площині шляхом обчислення лишків. Наприклад,

$$J_0(p, q) = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}} p^{-1} \frac{q^4 + q^2 \sqrt{4p^2 + q^4} - 2p^2}{(2q^4 - p^2)(p^2 + q^4) \sqrt{4p^2 + q^4}} \sqrt{\sqrt{4p^2 + q^4} - q^2}. \quad (6.72)$$

Для всієї комбінації (6.70) результатом є $J^{(1s)}(p, q) = p^{-5/2} J^{(1s)}(1, q/\sqrt{p})$, де⁴

$$J^{(1s)}(1, q) = \frac{1}{8\sqrt{2} \pi} \frac{(q^4 - 1) \sqrt{\sqrt{4 + q^4} + q^2} - 2q^2 \sqrt{\sqrt{4 + q^4} - q^2}}{(1 + q^4)^2 \sqrt{4 + q^4}}. \quad (6.73)$$

⁴В аналогічній формулі перед [57, (8.6)] помилка друку: опущений множник $1/\sqrt{p}$ в аргументі $J^{(1s)}$

Цю функцію можна розпізнати в другому доданку [55, (C.2)] після усунення додаткової “маси” m^2 , штучно введеної в цю формулу для уникнення інфрачервоних розбіжностей при розрахунку діаграми “скалярний трикутник” в термінології роботи [55, (C.2)].

В додатку С роботи [57] ми показали також як отримати результат (6.73) в координатному представленні з використанням аналітичного продовження і без віднімань, аналогічних до описаних вище.

Тепер, використовуючи $I^{-1}(1, q) = 4\pi\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{4+q^4}+q^2}$ (див. (6.24)) разом з (6.73), ми отримуємо

$$\mathcal{N}_2 = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \quad \text{і} \quad \mathcal{N}_J = -\frac{7}{24\pi\sqrt{3}}. \quad (6.74)$$

Ці величини узгоджуються з доданками (b) і (c) з [55, (8.3)]. Далі беремо до уваги $\eta_2^{(1)} = 5/(9\pi\sqrt{3})$ і $\theta^{(1)} = -4/(27\pi\sqrt{3})$ з (6.25) і отримуємо з рівняння (6.38) остаточний вираз для оберненого критичного показника кореляційної довжини

$$\nu_2^{-1}(m=1, d=4) = \frac{3}{2} + \frac{301}{54\pi\sqrt{3}} \frac{1}{n} + O(n^{-2}) \quad (6.75)$$

в чотиривимірних одновісних системах.

Явні розрахунки критичних показників анізотропних систем з $d=4$ і $m=1$ були проведені і опубліковані нами у всіх деталях [57] як в імпульсному так і в координатному представленнях. Таку особливу увагу цей специфічний частковий випадок заслужив у зв’язку з підвищеним інтересом до аналогічних моделей і розрахунків у квантовій теорії поля з порушенням Лоренцівської інваріантності. В статті [57] ми вперше зробили огляд теорії ТЛ, що охоплює літературу як статистичної фізики, так і фізики високих енергій. При цьому наш літературний огляд суттєво відрізняється від основної маси вступів до статей, де згадуються майже виключно роботи свої і свого найближчого наукового оточення.

Зокрема, способи розрахунку застосовані нами в [70] і [57] і представлені тут результати були співставлені з їх аналогами з роботи Ансельмі [55]. Порівняння внеску порядку $O(1/n)$ в нашому результаті (6.75) з аналогічним результатом [55, (8.4)], а саме $\gamma_\sigma = -83/(9\pi n\sqrt{3})$, показує їх неузгодження. Ми перевірили,

що величина γ_σ отримується як комбінація $\gamma_\sigma = 2[4\mathcal{N}_J - 2\mathcal{N}_2 + \eta_2^{(1)}]$, яка з точністю до загального множника а також знака біля $\eta_2^{(1)}$ входить в нашу формулу (6.38). Таким чином наші результати не співпадають з даними роботи [55]. Проте вони відрізняються тим, що для даного часткового випадку з $m = 1$ і $d = 4$ вони виводяться з надійно апробованих формул, справедливих для всіх фізично допустимих значень параметрів теорії m і d . Очевидно, таке неузгодження результатів з певністю вказує на помилку в розрахунках згаданого автора.

6.6. Одновісні системи в тривимірному просторі: коли $m = 1$ і $d = 3$

Вибір $m = 1$ і $d = 3$, відповідає експериментально досяжному випадку тривимірних систем з одновісною анізотропією, для яких проведено також ряд чисельних симуляцій методом Монте Карло. Тут ми також повинні вдатися до чисельних розрахунків для отримання коефіцієнтів порядку $O(1/n)$ в $1/n$ -розкладах критичних показників ν_2^{-1} , γ_L і ν_4 . Ці показники представлені вище формулами (6.38), (6.43)-(6.44) і (6.45)-(6.46), відповідно.

Інтеграл $\mathcal{N}_2(m=1, d=3)$ з (6.39) включає в собі функцію $I(1, q)$. Вона відома в явному вигляді (див. (6.24), [70, (73)]) і може бути виражена через повний еліптичний інтеграл першого роду $\mathbf{K}$ [364, Розд. 13] як

$$I(1, q) = \frac{1}{2\pi}(1 + q^4)^{-1/2}(4 + q^4)^{-1/4}\mathbf{K}(k), \quad \text{де} \quad k^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q^2}{\sqrt{4 + q^4}} \frac{3 + q^4}{1 + q^4}\right). \quad (6.76)$$

Величина $|k|$ називається модулем еліптичного інтеграла, вона повинна бути меншою за одиницю. В нашому випадку ми маємо $0 \leq k^2 \leq 1/2$, що узгоджується з цією вимогою. Формула, що пов'язує $\mathbf{K}(k)$ з гіпергеометричною функцією Гауса, наведена в (6.78).

При розрахунку інтеграла $\mathcal{N}_J(m=1, d=3)$ (див. (6.40)) ми повинні додатково взяти невластний інтеграл $J^{(2s)}(1, q)$ з (6.66)-(6.67) при $\varepsilon = 3/2$. За допомогою мови Fortran ми обчислили обидва інтеграли $\mathcal{N}_2$ і $\mathcal{N}_J$ і отримали $\mathcal{N}_J(m=1, d=3) \simeq 0.1096$ і $\mathcal{N}_J(m=1, d=3) \simeq 0.1096$. Не зупиняючись на цьому, за допомогою інте-

грування в комплексній площині ми прийшли до явного виразу для інтеграла $J^{(2s)}(1, q)$ (див. [57, (9.3)]):

$$J^{(2s)}(1, q) = \frac{1}{4\pi}(1+q^4)^{-7/2}(4+q^4)^{-3/4} \left\{ q^2(9-46q^4+7q^8) \left[2\mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k) \right] + (1+q^4)(1+7q^4)\sqrt{4+q^4} \mathbf{K}(k) \right\}, \quad (6.77)$$

де $\mathbf{E}(k)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду. Обидві функції $\mathbf{K}(k)$ і $\mathbf{E}(k)$ пов'язані з функцією Гауса співвідношенням [364, Розд. 13], [272, II.16]

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad \mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad |k| < 1. \quad (6.78)$$

Використовуючи формулу (6.77) ми простим чином перевірили чисельну величину $\mathcal{N}_J(m=1, d=3)$ за допомогою пакету Mathematica [365], а також отримали нові чисельні дані для $O(1/n)$ -коефіцієнтів критичних показників ТЛ.

Остаточні чисельні результати для $1/n$ -розкладів термодинамічних критичних показників (і їх обернених величин) сильно анізотропних тривимірних систем з одновісною анізотропією в ТЛ мають вигляд

$$\begin{aligned} \nu_2 &= 2 - 1.274/n + O(n^{-2}), & \nu_2^{-1} &= \frac{1}{2} + 0.319/n + O(n^{-2}) \\ \nu_4 &= 1 - 0.734/n + O(n^{-2}), & \nu_4^{-1} &= 1 + 0.734/n + O(n^{-2}) \\ \gamma_L &= 4 - 3.161/n + O(n^{-2}), & \gamma_L^{-1} &= \frac{1}{4} + 0.198/n + O(n^{-2}) \\ \alpha_L &= -3 + 3.283/n + O(n^{-2}), & \alpha_L^{-1} &= -\frac{1}{3} - 0.365/n + O(n^{-2}) \\ \beta_L &= \frac{1}{2} - 0.0612/n + O(n^{-2}), & \beta_L^{-1} &= 2 + 0.245/n + O(n^{-2}). \end{aligned}$$

Як зауважили Есафі, Ковнацкі і Муана [2], чисельні значення критичних показників ν_2 і ν_4 , що отримуються з наведених $1/n$ -розкладів для випадку Гайзенбергівських спінових моделей з $n = 3$, а саме $\nu_2(d = 3, m = 1; n = 3) = 1.575$ і $\nu_4(d = 3, m = 1; n = 3) = 0.755$, хоч і не є близькими до аналогічних результатів епсилон-розкладу, зате дуже добре узгоджуються з оцінками $\nu_2(d = 3, m = 1; n = 3) = 1.655(5)$ і $\nu_4(d = 3, m = 1; n = 3) = 0.78(1)$ отриманими цими авторами за допомогою наближеного розв'язування точних рівнянь ренормалізаційної групи.

Для порівняння, більша кількість чисельних оцінок критичних показників ТЛ отриманих різними способами наведена в Табл. 4.2.

6.7. Висновки

При великих n , наші загальні результати дали можливість визначати критичні показники m -вісних ТЛ в цілій області між лініями граничних вимірностей $d^*(m) = 4 + m/2$ і $d_\ell(m) = 2 + m/2$ (див. Рисунок 6.1) і прослідкувати їх якісні залежності від вимірності простору d , що принципово не є можливим в розкладах за степенями малих відхилень вимірності простору від кожної з цих граничних ліній.

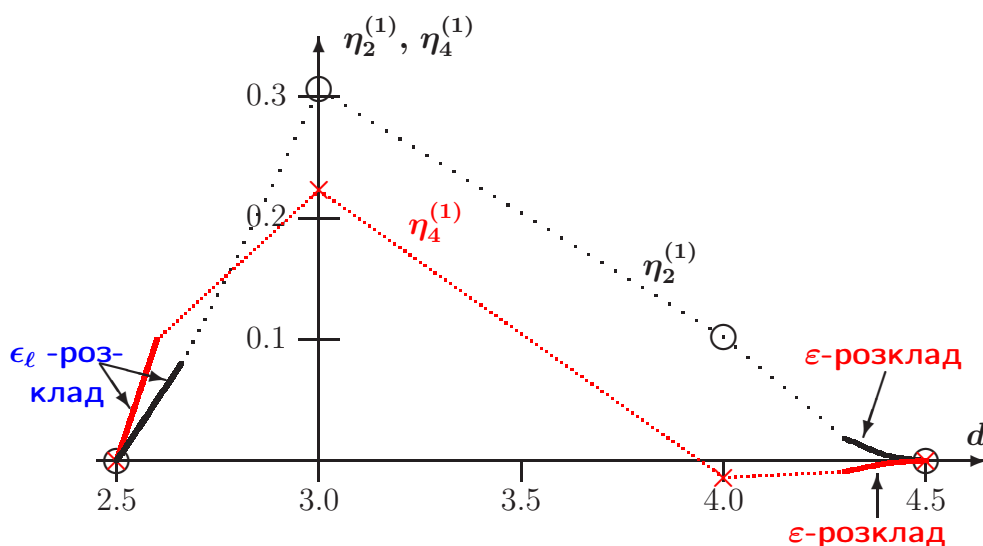


Рис. 6.2. Схематичні залежності коефіцієнтів $1/n$ -розкладів $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ з (6.8) і (6.9) при $m = 1$ від вимірності простору d .

Так, головні порядки епсилон-розкладів біля $d^*(m)$ і $d_\ell(m)$ для довільних величин n задають обов'язкові напрями відхилень критичних показників від їх класичних значень при безмежно малих відхиленнях d від верхньої і нижньої граничних вимірностей, як зображено суцільними лініями на краях Рисунку 6.2. При більших відхиленнях вимірності простору d від цих ліній ми маємо результати $1/n$ -розкладів, отримані безпосередньо для конкретних значень m і d , позначені хрестиками і кільцями. Конкретні чисельні значення $\eta_2^{(1)}$ і $\eta_4^{(1)}$ при $m = 1$ і $d = 4$, $d = 3$ наведені після формул (6.25), а також в (6.35). Схематичні з'єднання

цих відрізків і точок дають нам якісне уявлення про залежності кореляційних критичних показників η_2 і η_4 від вимірності d як при великих, так і довільних n . Окреслюючи криві на Рисунку 6.2, ми виходили з фізично, а також математично, найбільш ймовірного припущення щодо гладкої і неперервної зміни цих спостережуваних величин із зміною d .

Аналізуючи наявну інформацію ми приходимо до важливого висновку про те, що характерний для анізотропних ТЛ показник η_4 повинен змінювати свій знак при переході від вищих до нижчих вимірностей простору, будучи досить складною немонотонною функцією від d (при цьому ми безспідставно припускаємо гладкі та неперервні залежності критичних показників від n). Ми передбачаємо додатне значення η_4 у фізичній вимірності простору $d = 3$, тоді як головний внесок ε -розкладу в η_4 є від'ємним. Натомість, критичний показник поперечних кореляцій η_2 виявляє поведінку досить стандартного типу і зберігає свій додатний знак у всій області визначення. Ми передбачаємо подібну (і можливо монотонну) поведінку між лініями нижньої та верхньої граничних вимірностей також і для термодинамічних критичних показників (6.79)–(6.79).

Якісна поведінка критичних показників при зміні вимірності простору d , передбачена нами в [70], згодом була підтверджена в роботі [2] (див. стор. 63 і [2, Рис. 1]) з використанням зовсім інших методів і міркувань, а саме — розв'язування точних рівнянь ренормалізаційної групи для ТЛ.

Складні розрахунки, виконані нами в роботі [70] у контексті $1/n$ -розкладу для ТЛ, дали нам можливість отримати також певні нові математичні результати. Зокрема, явний розрахунок інтеграла $I(p, q)$, заданого формулою (6.11), привів до нових простих виразів для результату внутрішнього інтегрування за $\mathbf{p}$ в термінах функцій Апелля [11] (див. також [4]). Не дивлячись на те, що цей інтеграл є досить стандартним у теорії поля, наші вирази виявилися новими. Більше того, порівняння їх з результатами інших авторів у термінах гіпергеометричних функцій Гауса ${}_2F_1$, привело в [11] до тотожностей, які виявилися новим результатом в теорії спеціальних функцій.

РОЗДІЛ 7

ФЛУКТУАЦІЙНО ІНДУКОВАНІ СИЛИ В ОБМЕЖЕНИХ СИСТЕМАХ З ПЛІВКОВОЮ ГЕОМЕТРІЄЮ

Наша робота, представлена в цьому розділі, стала новим кроком, який необхідно було зробити з часів піонерських робіт Симанзіка (1981) та Креха і Дітріха (1991) (див. п. 1.4), де амплітуди Казимира визначалися тільки в лінійному за ε наближенні теорії $\phi_{4-\varepsilon}^4$. Нам вперше вдалося просунутися в наступний порядок теорії збурень при розгляді плівкових систем з періодичними та спеціальними граничними умовами. Ми показали, що внаслідок особливостей інфрачервоної поведінки певного типу діаграм Фейнмана, у випадках цих ГУ ε -розклад амплітуд Казимира втрачає аналітичність за межами першого порядку за ε . Всупереч найвісним очікуванням доданка порядку ε^2 , ми виявили поправку порядку $\varepsilon^{3/2}$ і знайшли коефіцієнт цієї нової поправки у явному вигляді. Було також показано, що ε -розклади таких амплітуд, крім цілих степенів ε , включають *нецілі* степені $\varepsilon^{k/2}$ з $k \geq 3$, а також степені $\ln \varepsilon$.

В даному розділі ми представляємо також узагальнення запропонованого нами підходу на випадок просторово анізотропних систем, обмежених двома паралельними поверхнями. Тут проявляються як кількісні так і якісні відмінності від попередньо розглянутих однорідних систем. Зокрема, суттєве значення має орієнтація поверхонь відносно наявних осей анізотропії.

7.1. Ефект Казимира в ізотропних системах

Метою цієї частини роботи є переосмислення побудови теорії збурень і ε -розкладів, пов'язаних з описом ефекту Казимира в статистичній фізиці. Розгляда-

ючи просторово обмежену n -компонентну модель ϕ_d^4 у плівковій геометрії $\infty^{d-1} \times L$ з різними ГУ на поверхнях, ми покажемо, що для деяких з цих ГУ звичайний ε -розклад втрачає сенс при об'ємній критичній температурі T_c . Це стається при виході за рамки двопетльового наближення ТЗ. Причиною цього явища є поява інфрачервоних сингулярностей у певних класах безмасових діаграм Фейнмана вищих порядків. Це стається у тих випадках, коли парна кореляційна функція теорії Ландау має безмасову нульову моду в точці Кюрі, зокрема у плівкових системах з періодичними та спеціальними ГУ.

Як ми показали в роботі [58], правильний підхід до описаних інфрачервоних особливостей передбачає особливий спосіб врахування нульової моди. Це приводить до такої реорганізації ТЗ, що у виразах для критичної сили Казимира з'являються внески типу $(u^*)^{(3-\varepsilon)/2}$, де $u^* \sim O(\varepsilon)$ — значення НТ перенормованої константи зв'язку теорії ϕ^4 в $d = 4 - \varepsilon$ -вимірному просторі. Таким чином, всупереч наївним очікуванням, звичайний розклад за цілими степенями малої величини ε є незастосовним для опису ефекту Казимира в теоріях типу $\phi_{4-\varepsilon}^4$ при накладанні періодичних чи спеціальних ГУ. Крім цілих степенів ε , тут з'являються неаналітичні внески з дробовими степенями $\varepsilon^{k/2}$, де $k \geq 3$, а також степенями $\ln \varepsilon$. Ми представимо явні результати для амплітуд Казимира Δ_{per} and $\Delta_{\text{sp,sp}}$ в порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ і використаємо їх для покращення існуючих чисельних оцінок при $d = 3$.

Для теоретичного опису ефекту Казимира в статистичній фізиці ми будемо розраховувати надлишкову вільну енергію $f_{\text{res}}^{a,b}(L)$ систем, обмежених двома паралельними поверхнями, розміщеними на відстані L . Ця термодинамічна величина визначається наступним виразом для густини вільної енергії таких систем на одиницю площі,

$$f_L \equiv \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F}{Ak_B T} = L f_\infty + f_s^a + f_s^b + f_{\text{res}}^{a,b}(L), \quad (7.1)$$

де F — повна вільна енергія системи в шарі товщини L , A — площа $(d-1)$ -вимірних гіперповерхонь, якими ця система обмежена, f_∞ — густина вільної енергії безмежної системи на одиницю об'єму і $f_s^a + f_s^b$ — густина поверхневої вільної енергії на одиницю площі. Індексом a, b ми позначаємо як самі поверхні, так і

ГУ, вибрані на кожній з них. Ці ГУ можуть бути, в принципі, різними на кожній з поверхонь. Згідно з теорією скінченновимірної скейлінгу, надлишкова вільна енергія $f_{\text{res}}^{a,b}(L)$ повинна мати скейлінгову форму

$$f_{\text{res}}^{a,b}(L) \approx L^{-(d-1)} \Theta_{a,b}(L/\xi_\infty) \quad (7.2)$$

для достатньо великих відстаней L . Тут ξ_∞ — об'ємна кореляційна довжина, а $\Theta_{a,b}(x)$ — універсальна скейлінгова функція, форма якої залежить від типу об'ємного класу універсальності системи, геометрії системи і типів поверхонь, що її обмежують. Коли температура співпадає з критичною температурою безмежної системи T_c і об'ємна кореляційна довжина ξ_∞ стає безмежною, скейлінгова функція $\Theta_{a,b}(x)$ дає амплітуду Казимира $\Delta^{\text{BC}} \equiv \Theta_{a,b}(0)$. Остання є універсальною величиною, тобто залежить тільки від найважливіших загальних характеристик системи, що розглядається, і від типу ГУ накладених на її границях. Цю пару ГУ ми символічно позначатимемо “BC”. В свою чергу, константа Δ^{BC} є пропорційною до величини індукованої далекосяжними флуктуаціями сили, що виникає між поверхнями при критичній температурі і визначається як

$$\frac{\mathcal{F}_C}{k_B T_c} = -\frac{\partial}{\partial L} f_{\text{res}}^{a,b}(L; T = T_c) = (d-1) \Delta^{\text{BC}} L^{-d}. \quad (7.3)$$

Від'ємні значення амплітуд Казимира Δ^{BC} відповідають силам притягання між поверхнями.

Для виконання конкретних розрахунків ми працюватимемо з ЕГ n -компонентної моделі ϕ_d^4 з короткосяжними взаємодіями в шарі товщини L з геометрією $\infty^{d-1} \times L$,

$$\mathcal{H}_L[\phi] = \int_0^L dz \int d^{d-1}r \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{\tau_0}{2} \phi^2 + \frac{u_0}{4!} \phi^4 \right], \quad (7.4)$$

приймаючи до уваги ГУ на поверхнях при $z = 0$ і $z = L$. Розгляд періодичних ГУ не вимагає введення в ЕГ жодних додаткових внесків, тоді як спеціальні ГУ передбачають доповнення ЕГ (7.4) поверхневими членами

$$\mathcal{H}_s[\phi] = \sum_{j=1}^2 \int d^{d-1}r \, \tilde{c}_j \phi_j^2 / 2$$

з $j = \{a, b\}$.

Щоб переконатися в тому, що звичайний ε -розклад втрачає свою застосовність при $T = T_c$ для періодичних і спеціальних ГУ, розгляньмо трипетльову діаграму  з розкладу величини f_L за ТЗ, де лінії представляють вільний пропагатор

$$G_{BC}^{(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_m \frac{\langle z|m \rangle \langle m|z' \rangle}{p^2 + k_m^2 + \tau_0} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (7.5)$$

між точками $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z)$ і $\mathbf{x}' = (\mathbf{r}', z')$. Тут $\langle z|m \rangle$ і k_m^2 є ортонормованими власними функціями і власними значеннями оператора $-d^2/dz^2$ на інтервалі $z \in [0, L]$ при вибраних ГУ. Для періодичних ГУ ми маємо $\langle z|m \rangle = L^{-1/2} e^{ik_m z}$ з $k_m = 2\pi m/L$ і $m \in \mathbb{Z}$, тоді як $\langle z|m \rangle = \sqrt{(2 - \delta_{m,0})/L} \cos(k_m z)$ для СГУ, з $k_m = \pi m/L$, де $m = 0, 1, \dots, \infty$.

Центральною частиною цієї трипетльової діаграми є піддіаграма , яка поводить себе в об'ємному випадку $L = \infty$ як $\tau_0^{-\varepsilon/2}$, і є сингулярною в інфрачервоній області при $\tau_0 = 0$, тобто при $T = T_c$. Але в цьому випадку дві інші замкнені петлі вносять множник $G^{(\infty)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}) \sim \tau_0^{1-\varepsilon/2}$. Тому границя $\tau_0 \rightarrow 0$ для всієї діаграми зникає.

Натомість, коли $L < \infty$, ситуація є іншою. Внески від кожної з зовнішніх петель $G_{BC}^{(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{x})$ є скінченними величинами при $\tau_0 \rightarrow 0$. Ми маємо, зокрема, для випадку періодичних ГУ¹

$$G_{\text{per}}^{(L)}(\mathbf{x}; \mathbf{x})|_{\tau_0=0} = \lim_{\tau_0 \rightarrow 0} I_{1L}(\tau_0) = \frac{\Gamma(1 - \varepsilon/2)}{2\pi^{2-\varepsilon/2}} \frac{\zeta(2 - \varepsilon)}{L^{2-\varepsilon}}, \quad (7.6)$$

де $\zeta(a)$ — відома ζ -функція Рімана (див. (7.75)), а

$$I_{1L}(\tau_0) \equiv \frac{1}{L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{p}}^{(d-1)} \frac{1}{p^2 + k_m^2 + \tau_0} - \int_{\mathbf{k}}^{(d)} \frac{1}{k^2 + \tau_0} \equiv L^{2-d} I_1(\tau_0 L^2), \quad (7.7)$$

$$I_1(y) = \int_{\mathbf{p}}^{(d-1)} \frac{1}{\sqrt{p^2 + y}} \frac{1}{e^{\sqrt{p^2 + y}} - 1}. \quad (7.8)$$

При скінченних L внутрішня піддіаграма  поводить себе як $\sim \tau_0^{-(1+\varepsilon)/2}$. Разом із скінченними внесками від зовнішніх кілець вона спричинює розбіжність трипе-

¹Аналогічна формула для СГУ наведена в [58].

тльової діаграми, яку ми розглядаємо, при $\tau_0 \rightarrow 0$. Подібним чином розбігаються також і діаграми вищих порядків ТЗ з внутрішніми елементами у вигляді кілець з більшими за 2 кількостями точок на лініях. Це робить стандартну теорію збурень поза першим порядком за u_0 разом і з відповідним ε -розкладом незастосовними для плівкових систем з періодичними ГУ чи СГУ на поверхнях.

Взагалі кажучи, аналогічні проблеми будуть спостерігатися і в інших випадках, коли в теорії виникатиме безмасова нульова мода. Фактично причина цих проблем є в теорії Ландау, яка неправильно передбачає фазовий перехід для об'ємних і плівкових систем при одній і тій самій величині критичної температури $\tau_0 = 0$, коли вільний пропагатор включає безмасову нульову моду. Проте, це не стосується плівкових систем з антиперіодичними ГУ, ГУ Діріхле, а також змішаними ГУ, при яких на одній з поверхонь задані спеціальні ГУ, а на іншій — ГУ Діріхле, де працює звичайний ε -розклад.

У випадках, коли звичайна ТЗ втрачає сенс, потрібна її реорганізація. Одним з виходів може бути сумування безмежних рядів діаграм Фейнмана певного типу. Ключовою ідеєю нашої роботи [58], яка забезпечила систематичний підхід до проблеми, є виділення небезпечної нульової моди і утворення пов'язаного з нею ЕГ $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$ шляхом відінтегровування ненульових мод, подібно як це робиться при розгляді безмежних систем при температурах нижчих за критичну чи в теорії скінченновимірного скейлінгу. В результаті такого відінтегровування нульова мода стає масивною при $T = T_c$ для обмеженої системи з товщиною $L < \infty$, як це і повинно бути. Подальший розрахунок надлишкової вільної енергії проводиться в новій, ефективній $(d-1)$ -вимірній теорії поля на основі отриманого польового гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}$.

Перейдімо до більш докладного опису окресленої схеми. Почнемо з розщеплення поля параметра порядку $\phi(\mathbf{x})$ пишучи

$$\phi(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{r}, z) = \varphi(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r}, z), \quad (7.9)$$

де, за означенням, незалежний від координати z внесок $\varphi(\mathbf{r})$, пов'язаний з нульо-

вою модою, є

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{L} \int_0^L dz \phi(\mathbf{r}, z). \quad (7.10)$$

Наслідком останніх двох рівностей є те, що $L^{-1} \int_0^L dz \psi(\mathbf{r}, z) = 0$. Завдяки цій властивості поля ψ в наступних польових гамільтоніанах немає членів лінійних за ψ .

Використовуючи розщеплення (7.9) у вихідному гамільтоніані (7.4), ми отримуємо

$$\mathcal{H}_L[\phi] = \mathcal{H}_L[\psi] + L\mathcal{H}^{(d-1)}[\varphi] + \Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi]. \quad (7.11)$$

Тут $\mathcal{H}_L[\psi]$ співпадає з початковим гамільтоніаном (7.4), визначеним для d -вимірної плівкової системи товщиною L , з точністю до заміни $\phi \rightarrow \psi$. Однак, при перетворенні $\mathcal{H}_L[\psi]$ до імпульсного представлення слід не забути про те, що поле ψ не включає нульової компоненти відповідно до (7.9)–(7.10). Доданок $\mathcal{H}^{(d-1)}[\varphi]$ є $(d-1)$ -вимірною версією *об’ємного* польового гамільтоніана $\mathcal{H}[\phi]$. Він не включає інтегрування вздовж осі z і є функціоналом тільки нульової компоненти поля $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{r})$, що залежить тільки від поздовжніх координат $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Останній доданок в (7.11) представляє собою “змішаний” внесок, що відповідає за взаємодію нульових і ненульових компонент поля $\varphi(\mathbf{r})$ і $\psi(\mathbf{r}, z)$:²

$$\Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi] = \int_0^L dz \int d^{d-1}r \left\{ \frac{u_0}{12} [\varphi^2 \psi^2 + 2(\varphi\psi)^2] + \frac{u_0}{3!} (\varphi\psi) \psi^2 \right\}. \quad (7.12)$$

Тут кожен з доданків представляє собою комбінацію з чотирьох полів, при тому, що поля ψ повинні бути відінтегровані. При цьому інтегруванні виникає ефективний гамільтоніан $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]$, що залежить виключно від пов’язаних з нульовою модою полів φ . Важливим є те, що ведучі внески від перших двох членів, квадратичних за φ , забезпечують масивність поля φ в $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]$ при $T = T_c$. Внески вищих порядків від цих двох доданків з $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]$, а також ведучий внесок вершини $\varphi\psi^3$ порядку $O(u_0^2)$ виходять за рамки точності розрахунків, які будуть описані нижче [58, 249].

²Рівняння (7.12) виправляє формули (10) з [58] і (3.9) з [249], де член з φ^2 був записаний у вигляді, що відповідає випадку *скалярного*, але не *векторного* поля. Тим не менше, ця помилка в записі не вплинула на правильність подальших розрахунків і висновків цитованих робіт.

Конкретний розрахунок вільної енергії F плівкової системи (див. (7.1)) проводиться наступним чином. Відповідно до розщеплення початкового ЕГ (7.11), ми маємо

$$F = -\ln \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_L[\phi]} = -\ln Z_\psi \int \mathcal{D}\varphi e^{-L\mathcal{H}^{(d-1)}[\varphi]} \langle e^{-\Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi]} \rangle_\psi, \quad (7.13)$$

де $\langle \dots \rangle_\psi$ означає усереднення з гамільтоніаном $\mathcal{H}[\psi]$

$$\langle \dots \rangle_\psi \equiv \frac{1}{Z_\psi} \int \mathcal{D}\psi \dots e^{-\mathcal{H}[\psi]}, \quad \text{а} \quad Z_\psi = \int \mathcal{D}\psi e^{-\mathcal{H}[\psi]}. \quad (7.14)$$

Останній функціональний інтеграл дає внесок $F_\psi = -\ln Z_\psi$ в повну вільну енергію F , яку ми записуємо як суму $F = F_\psi + F_\varphi$. Виражаючи середнє за полями ψ в (7.13) із застосуванням кумулянтного розкладу у вигляді експоненти, для величини F_φ ми отримуємо

$$F_\varphi = -\ln \int \mathcal{D}\varphi e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]}, \quad \text{де} \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi] = L\mathcal{H}^{(d-1)}[\varphi] + \langle -\Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi] \rangle_\psi^{\text{cum}}. \quad (7.15)$$

Таким чином, для розрахунку F_φ ми повинні працювати з *ефективною* теорією поля, визначеною в необмеженому $(d-1)$ -вимірному просторі $\mathbb{R}^{d-1}$. Відповідний ЕГ $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]$ є функціоналом поля $\varphi(\mathbf{r})$, пов'язаного з нульовою модою, яка була безмасовою в початковому формулюванні задачі. Кумулянтне усереднення за полями $\psi(\mathbf{r}, z)$ в (7.15) дає безмежний ряд *зв'язних* діаграм, що визначаються рівністю

$$\langle -\Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi] \rangle_\psi^{\text{cum}} = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} \left\langle (-\Delta\mathcal{H}[\varphi, \psi])^l \right\rangle_\psi^{\text{conn}} \equiv \sum_{l \geq 1} \mathcal{H}_{\text{eff}}^{[l]}[\varphi]. \quad (7.16)$$

Із зростанням порядку l , генеруються внески $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{[l]}[\varphi]$ в ЕГ, що мають чимраз більшу кількість полів φ . При цьому в гамільтоніані $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi]$ з'являються як звичайні локальні, так і складні нелокальні ефективні взаємодії. Декілька перших діаграм цього розкладу і їх внески обговорюються в роботах [58] і [249]. Наприклад, однопетльові діаграми найнижчих порядків дають

$$- \varphi \text{---} \bullet \text{---} \varphi + \varphi \text{---} \bullet \text{---} \varphi \text{---} \bullet \text{---} \varphi - \dots, \quad (7.17)$$

де пунктирні лінії представляють вільні пропагатори поля ψ , суцільні зовнішні лінії показують поля φ , а внески з шістьма, вісьмома, і т.д. полями φ опущені. Як у звичайній ТЗ, порядок діаграм визначається кількістю їх вершин, кожна з яких пропорційна константі зв'язку u_0 (див (7.12)).

В найнижчому порядку ТЗ $\sim u_0$, врахування першої з наведених діаграм приводить до того, що в ЕГ $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi] = L\mathcal{H}^{(d-1)}[\varphi] + \mathcal{H}_{\text{eff}}^{[1]}[\varphi]$ змінюється коефіцієнт при φ^2 . Ми отримуємо зміщення температурної змінної

$$\tau_0 \rightarrow \tau_0^{\text{BC}}(L) \equiv \tau_0 + \delta\tau_0^{\text{BC}}(L), \quad \text{де} \quad \delta\tau_0^{\text{per}}(L) = 2^{2-\varepsilon} \delta\tau_0^{\text{sp}}(L) = \frac{u_0}{2} \frac{n+2}{3} I_{1L}(\tau_0) \quad (7.18)$$

а функція $I_{1L}(\tau_0)$ з $I_{1L}(0) > 0$ означена в (7.7)–(7.8). Таким чином, в ЕГ

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi] = L \int d^{d-1}r \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \tau_{0,BC}^{(L)} \varphi^2 + \frac{u_0}{4!} \varphi^4 \right] \quad (7.19)$$

пов'язане з нульовою модою поле $\varphi(\mathbf{r})$ стає *масивним* при $T = T_c$, як це і повинно бути. Це означає, що в новій ефективній теорії з масивним вільним пропагатором $G_\varphi(p) = [L(p^2 + \tau_{0,BC}^{(L)})]^{-1}$ не виникатимуть нефізичні інфрачервоні розбіжності, подібні до описаних вище. Як зазначено в (7.18), температурне зміщення $\delta\tau_{0,BC}^{(L)}$, згенероване відінтегруванням полів ψ , залежить як від товщини плівки L , так і від конкретних ГУ на її поверхнях.

Таким чином, ми готові до подальшого безпроблемного розрахунку ВЕ F з (7.13)–(7.15). Обидві її частини F_ψ і F_φ далі розраховуються за допомогою звичайного петльового розкладу. Розглядається двопетльове наближення, в якому

$$F_{\psi,\varphi} = \bigcirc - \bigcirc \! \! \bigcirc - \dots, \quad (7.20)$$

при чому потрібно враховувати те, що в кожному окремому випадку діаграми Фейнмана мають різні визначення їх ліній і вершин. В результаті такого розрахунку ми отримуємо

$$\frac{L^{d-1}}{n} f_{\text{BC}}^{\text{res}}|_{T_c} = a_{\text{BC}}^{(0)}(\varepsilon) + \frac{n+2}{4!} a_{\text{BC}}^{(1)}(\varepsilon) u_0 L^\varepsilon + A_{\text{BC}}(\varepsilon) \left(\frac{n+2}{4!} u_0 L^\varepsilon \right)^{(3-\varepsilon)/2} + \dots \quad (7.21)$$

де опущені члени порядків $(u_0 L^\varepsilon)^{2-\varepsilon}$, $(u_0 L^\varepsilon)^2$ і старші, а

$$a_{\text{per}}^{(0)}(\varepsilon) = 2^{4-\varepsilon} a_{\text{sp,sp}}^{(0)}(\varepsilon) = -\frac{\Gamma(2-\varepsilon/2)}{\pi^{2-\varepsilon/2}} \zeta(4-\varepsilon),$$

$$\begin{aligned}
a_{\text{per}}^{(1)}(\varepsilon) &= 2^{-2} \pi^{\varepsilon-4} \Gamma^2(1 - \varepsilon/2) \zeta^2(2 - \varepsilon), \\
a_{\text{sp,sp}}^{(1)}(\varepsilon) &= \frac{\pi^{1-\varepsilon}}{4^{3-\varepsilon}} \frac{2 \zeta^2(\varepsilon - 1) + \zeta(2\varepsilon - 2)}{2 \cos^2(\pi\varepsilon/2) \Gamma^2[(3 - \varepsilon)/2]}, \\
A_{\text{per}}(\varepsilon) = 2^{(2-\varepsilon)(3-\varepsilon)/2} A_{\text{sp,sp}}(\varepsilon) &= -\frac{\Gamma[(\varepsilon - 3)/2]}{2^{4-\varepsilon}} \left[\frac{2\Gamma(1 - \varepsilon/2) \zeta(2 - \varepsilon)}{\pi^{(6-\varepsilon)/2}} \right]^{(3-\varepsilon)/2} \quad (7.22)
\end{aligned}$$

Відповідно до загальних вимог РГ, ε -розклади для амплітуд Казимира отримуються з останніх формул при $\mu L = 1$ після перенормування вершини $u_0 \rightarrow u$ з використанням для u її значення $u^* = 3\varepsilon/(n + 8) + O(\varepsilon^2)$ в НТ. Остаточним результатом є вирази

$$\Delta_{\text{per}} = 2^{4-\varepsilon} \Delta_{\text{ord}} - \frac{\pi^2 n}{9\sqrt{6}} \left(\frac{n+2}{n+8} \right)^{3/2} \varepsilon^{3/2} + O(\varepsilon^2), \quad (7.23)$$

$$\Delta_{\text{sp}} = \Delta_{\text{ord}} - \frac{\pi^2 n}{72\sqrt{6}} \left(\frac{n+2}{n+8} \right)^{3/2} \varepsilon^{3/2} + O(\varepsilon^2), \quad (7.24)$$

перші два члени яких визначаються величиною амплітуди Казимира плівкових систем з вільними ГУ у лінійному наближенні за ε ,

$$\Delta_{\text{ord}} = -\frac{\pi^2 n}{1440} \left[1 + \left(\frac{C_E - 1}{2} + \ln(2\sqrt{\pi}) - \frac{\zeta'(4)}{\zeta(4)} - \frac{5n+2}{4n+8} \right) \varepsilon \right] + O(\varepsilon^2). \quad (7.25)$$

Ця величина вперше була отримана Симанзіком [119] в рамках квантової теорії поля, а згодом відтворена в [243] у контексті статистичної фізики. В наведеній формулі $C_E \approx 0.5772$ — константа Ейлера.

Принципово нові члени порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ в (7.23) і (7.24) походять від внесків $\sim u_0^{(3-\varepsilon)/2}$ з (7.21). Очевидно, останні передбачають також наявність членів типу $\varepsilon^{k+3/2} \ln^k \varepsilon$ з $k \in \mathbb{N}$ у вищих порядках ε -розкладів для амплітуд Казимира. Крім того, згадані вище члени з $u_0^{2-\varepsilon}$ приведуть до появи доданків $\sim \varepsilon^{k+2} \ln^k \varepsilon$.

В таблиці 7.1 ми наводимо чисельні оцінки для розрахованих вище величин Δ_{BC}/n у тривимірному просторі, тобто при $\varepsilon = 1$, для деяких значень n , $n = 1, 2, 3, \infty$. Як і в роботах [243, 244], ми включили сюди чисельні значення для Δ_{sp}/n з $n = 2, 3, \infty$. Це зроблено для можливого порівняння, хоча строго кажучи, ці величини є нефізичними, оскільки при $d = 3$ немає спеціальних поверхневих переходів у модельних системах з обертовою симетрією параметра порядку з числом компонент $n \geq 2$.

Табл. 7.1. Чисельні оцінки $\Delta_{\text{BC}}(d, n)/n$ при $d = 3$ і $n = 1, 2, 3, \infty$.

n	1	2	3	∞
$\Delta_{\text{per}}(3, n)/n$	-0.1967	-0.2147	-0.2311	-0.4668
	-0.1105 ^b	-0.1014 ^b	-0.0939 ^b	-0.0192 ^b
	-0.1526 ^c	-0.14 ^d	-0.13 ^d	-0.1531 ^e
$\Delta_{\text{sp}}(3, n)/n$	-0.0224	-0.0252	-0.0278	-0.0619
	-0.0117 ^b	-0.0111 ^b	-0.0106 ^b	-0.0059 ^b

Без індексів — величини, отримані з формул (7.23)–(7.24) при $\varepsilon = 1$ в [58].

^b Результати наближення $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$ з [243, 244].

^c Результат чисельного розрахунку методом Монте Карло з [253].

^d Дані роботи [254].

^e Точне значення $-2\zeta(3)/(5\pi)$ з [366, 367].

Аналізуючи наведені дані, ми бачимо, що для випадку сферичної моделі з $n \rightarrow \infty$ ми не отримали покращення чисельної оцінки в порівнянні з результатом роботи [244]³. Тут ми маємо справу із звичною ситуацією, коли наївні екстраполяції ε -розкладів з прямою підстановкою $\varepsilon = 1$ не приводять до бажаної точності. Натомість, у важливому випадку $n = 1$, врахування нового члена ε -розкладу з $\varepsilon^{3/2}$ дає правильну тенденцію до зменшення величини $\Delta_{\text{per}}(3, 1)$. Тут можна сподіватися, що майбутній розрахунок наступного порядку $\text{TЗ} \sim \varepsilon^2$ приведе до розумного узгодження з результатом роботи [253].

При тому що розрахунки і результати цього розділу представляють безсумнівний академічний інтерес, нажаль вони не можуть бути перевірені на експерименті. Це пов'язане з труднощами у виготовленні реальних плівок з періодичними чи зі спеціальними ГУ. У типових експериментальних ситуаціях очікуються або ГУ Робіна $\partial_n \phi = \hat{c}_j \phi$, які в границі великих масштабів перетворюються в ГУ Діріхле, або ГУ, що порушують симетрію на поверхні, т.зв. symmetry-breaking (+, $\pm$) boundary conditions, які є типовими для класичних рідин).

Ця ситуація компенсується тим, що саме періодичні ГУ є “добрим вибором” для чисельних експериментів, з якими в нас вже була можливість для порівняння.

³При цьому правильність подвійної границі $\varepsilon \rightarrow 0$ з $n \rightarrow \infty$ в (7.23) сумніву не викликає, оскільки аналогічний аналітичний результат отримується і з іншого боку [58, 249]: при розкладі результатів, отриманих в рамках сферичної моделі з $n = \infty$, за $\varepsilon \rightarrow 0$.

А крім того, в методі Монте Карло цілком можливо працювати зі спеціальними ГУ. Прикладом цього може бути робота [308].

Насправді, вже після виходу нашої статті [58] з'явився ряд робіт, присвячених чисельним дослідженням термодинамічних сил Казимира в системах з різними ГУ на поверхнях і з різним числом компонент параметра порядку [255–257, 323, 368–370]. На завершення цього розділу наведемо деякі приклади найновіших результатів, отриманих методами Монте Карло для універсальної амплітуди Казимира $\Delta_{\text{per}}(3, n)$. Це $\Delta_{\text{per}}(3, 1) = -0.1520(2)$ і $\Delta_{\text{per}}(3, 2) = -0.2993(7)$ з [256], а також $\Delta_{\text{per}}(3, 1) = -0.155(3)$ з [370]. Ми бачимо, що всі результати чисельних експериментів добре узгоджуються між собою, і знаходяться приблизно посередині між теоретичними даними, отриманими з епсилон-розкладів порядку $O(\varepsilon)$ і $O(\varepsilon^{3/2})$. Це зовсім нормальна ситуація, і узгодження чисельних результатів з теоретичними може суттєво покращитися з отриманням наступних наближень за степенями ε за допомогою методу, запропонованого нами в [58].

7.2. Ефект Казимира в сильно анізотропних системах

Всі попередні ренормгрупові дослідження флуктуаційно індукованих сил у статистичній фізиці, як і наш попередній розділ, стосувалися виключно просторово ізотропних систем. Як відомо, характерною рисою останніх є наявність ізотропної масштабної інваріантності. Це означає, що у відсутності границь ці системи залишаються “самоподібними”, коли відстані Δx вздовж будь-яких напрямів перетворюються як $\Delta x = \ell \Delta x'$, де ℓ — довільний масштабний фактор. В них кореляційна довжина ξ проявляє однакові степеневі сингулярності $\sim |T/T_c - 1|^{-\nu}$ у всіх просторових напрямках, коли температура наближається до критичної.

Далі у цьому розділі ми матимемо справу з сильно анізотропними системами. Як вже згадувалося вище, в таких системах існує один або декілька особливих напрямів, вздовж яких масштаб відстаней Δx_α повинен змінюватися нетривіальним степенем ℓ^θ масштабного фактора $\ell = \Delta x_\beta / \Delta x'_\beta$, пов'язаного з рештою напрямів. При цьому асимптотичні степеневі закони $\xi_{\alpha,\beta} \sim |T/T_c - 1|^{-\nu_{\alpha,\beta}}$ для

кореляційних довжин ξ_α і ξ_β визначаються різними показниками $\nu_\alpha = \theta\nu_\beta$ і ν_β . Величина θ — це індекс анізотропії, який відігравав важливу роль у розділах 3-4 при розгляді критичних явищ у ТЛ.

Через те, що сильно анізотропні системи мають різні фізичні властивості в різних напрямках, слід очікувати, що обмеження їх поверхнями приводить до більш складних ефектів порівняно з випадком ізотропних систем. Нижче ми покажемо, що насправді, сили, індуковані просторовим обмеженням флуктуацій в сильно анізотропних системах, відрізняються як кількісно, так і якісно від розглянутих нами у попередньому розділі.

Як і раніше, ми будемо розглядати системи, обмежені двома паралельними поверхнями на відстані L , кожна з яких має площу A . В границі $A \rightarrow \infty$ їх питома ВЕ на одиницю площі, як і в (7.1) складається з внесків, що відповідають об'ємній та поверхневій густинам ВЕ, а також надлишкової ВЕ f_{res} . Остання залежить як від температури, так і від величини L . Коли температура рівна критичній, для даного середовища і типу поверхонь надлишкова ВЕ спадає як

$$f_{\text{res}}(L) \sim \Delta_l^{\text{BC}} L^{-\zeta_l}, \quad \iota = \{\parallel, \perp\} \quad (7.26)$$

в границі $L \rightarrow \infty$. Як ми знаємо, у випадку звичайних критичних точок в ізотропних системах, показник спадання $\zeta = d - 1$ незалежно від способу розміщення поверхонь. Коли ж ми маємо справу із сильно анізотропними системами, суттєве значення має орієнтація поверхонь [72], яку ми позначаємо індексом ι . Як і у випадку напівбезмежних систем (див підрозділ 4.7), потрібно розрізняти дві принципово різні геометрії: “паралельну” — коли поверхні є паралельними до всіх α -напрямів, і “перпендикулярну” — коли поверхні є перпендикулярними до одного з α -напрямів. Якщо у d -вимірній системі є m α - і $d - m$ β -напрямів, то відповідними показниками спадання є

$$\zeta_{\parallel} = d - m + \theta m - 1 \quad \text{і} \quad \zeta_{\perp} = (d - m)/\theta + m - 1. \quad (7.27)$$

Амплітуди Казимира Δ_l^{BC} з $\iota = \parallel$ і $\perp$ тепер залежать не тільки від ГУ на поверхнях, а й від орієнтації цих поверхонь відносно осей анізотропії наявних в системі.

Результати (7.27) для показників ζ_ℓ неважко зрозуміти з нескладних скейлінгових міркувань. Надлишкова густина БЕ $f_{\text{res}}(L, T)$ має вимірність $1/A$, де A поводить себе як $\xi_\alpha^m \xi_\beta^{d-m-1}$ у випадку паралельної і $\xi_\alpha^{m-1} \xi_\beta^{d-m}$ — у випадку перпендикулярної орієнтацій поверхонь. Звідси випливають рівності (7.27), оскільки ξ_α і ξ_β є єдиними наявними довжинами в системі крім відстані між поверхнями L .

Загальний РГ-аналіз теорії, заданої ЕГ (6.1) з врахуванням розглянутих вище двох типів просторового обмеження був виконаний у нашій роботі [72]. Там було показано, що перенормована густина надлишкової БЕ $f_{\text{res};R}(L; \tau, \rho, u, \sigma, \mu)$ в НТ, що відповідає точці Ліфшица з $\tau = \rho = 0$, має вигляд

$$f_{\text{res};R}^{\text{BC}}(L; 0, 0, u, \sigma, \mu) \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} \begin{cases} \mu^{m(1-2\theta)/2} \sigma^{-m/4} \Delta_{\parallel}^{\text{BC}} L^{-\zeta_{\parallel}}, \\ \mu^{(d-m)(2\theta-1)/(2\theta)} \sigma^{(d-m)/(4\theta)} \Delta_{\perp}^{\text{BC}} L^{-\zeta_{\perp}}. \end{cases} \quad (7.28)$$

В останніх формулах μ — довільна масштабна величина з вимірністю імпульсу в β -підпросторі, а коефіцієнти пропорційності включають в себе множники, пов'язані з масштабом величини σ . Різні степені *неуніверсальної* величини σ входять у вирази для густин надлишкових БЕ плівок при різних орієнтаціях їх поверхонь. Степені відстаней між поверхнями L були передбачені нами в (7.26) виходячи з загальних скейлінгових міркувань. Для отримання *універсальних* значень амплітуд Казимира потрібно розрахувати перенормований аналог густини надлишкової БЕ $f_{\text{res}}(L; \tau_0, \rho_0, u_0, \overset{\circ}{\sigma})$, що дає нам

$$\Delta_{\iota, \text{LP}}^{\text{BC}} = f_{\text{res};R}^{\text{BC}}(1; 0, 0, u^*, 1, 1). \quad (7.29)$$

Тут, як і на початку розділу, індекс ι задає тип орієнтації поверхонь: остання формула є справедливою для обидвох варіантів, що розглядаються.

Нарешті, зауважимо, що ефективні сили Казимира, які виникають в ТЛ між поверхнями з різними орієнтаціями відносно осей анізотропії матимуть наступний характер:

$$\mathcal{F}_{\text{LP}} \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} k_B T_{\text{LP}} \begin{cases} \sigma^{-m/4} \Delta_{\parallel}^{\text{BC}} L^{-\lambda_{\parallel}}, \\ \sigma^{(d-m)/(4\theta)} \Delta_{\perp}^{\text{BC}} L^{-\lambda_{\parallel}/\theta}, \end{cases} \quad \text{де} \quad \lambda_{\parallel} \equiv \zeta_{\parallel} + 1 = d - m + \theta m. \quad (7.30)$$

Звідси видно, що показник загасання $\lambda_{\perp} = \lambda_{\parallel}/\theta$ при перпендикулярній орієнтації поверхонь є в $1/\theta \approx 2$ рази більшим, ніж у випадку паралельної орієнтації, і далекодіючі ефективні сили проявлятимуть себе, відповідно, у значно меншій мірі. Виражаючи показники загасання $\lambda_{\parallel}$ і $\lambda_{\perp}$ через малу величину відхилення від верхньої граничної вимірності $\varepsilon = 4 + m/2 - d$, ми отримуємо $\lambda_{\parallel} = 4 - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ і $\lambda_{\perp} = 2\lambda_{\parallel} = 8 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. В такому записі ми бачимо, що в рамках ε -розкладу ці показники набувають явної залежності від числа осей анізотропії m лише в другому порядку за ε .

Наші формули (7.30) мають загальний характер. Вони справедливі для d -вимірних взаємодіючих систем з довільною кількістю осей анізотропії m і неklasичною величиною індекса $\theta \neq 1/2$. У частковому випадку класичних гаусових теорій з $d = 3$, $m = 2$ і $\theta = 1/2$ формули (7.30) зводяться до передбачених у статті [167]: $\mathcal{F}_{\parallel} \propto \sigma^{-1/2} L^{-2}$ і $\mathcal{F}_{\perp} \propto \sigma^{1/2} L^{-4}$.

Наступні розділи будуть присвячені явним розрахункам для кожного з випадків, що обговорювалися вище, в рамках моделі ϕ^4 з обмеженнями просторових інтегрувань вздовж відповідних координатних осей та накладанні різних ГУ на поверхнях.

7.2.1. Паралельна орієнтація поверхонь

Розглянемо ситуацію, коли вісь z , вздовж якої система є скінченною, є одним із β -напрямів. Очевидно, що при цьому всі m осей анізотропії (разом із рештою β -напрямів) лежать у гіперплощині, паралельній до границь плівки. У цьому випадку наша система описується ЕГ

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_L[\phi] = & \int_0^L dz \int d^m r_{\alpha} \int d^{d-m-1} r_{\beta} \left\{ \frac{\dot{\sigma}}{2} \left(\sum_{\alpha=1}^m \partial_{\alpha}^2 \phi \right)^2 + \frac{\dot{\rho}}{2} \sum_{\alpha=1}^m (\partial_{\alpha} \phi)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta=m+1}^d (\partial_{\beta} \phi)^2 + \frac{\tau_0}{2} \phi^2 + \frac{u_0}{4!} |\phi|^4 \right\} \end{aligned} \quad (7.31)$$

де n -компонентне поле $\phi = \phi(\mathbf{x})$ залежить від радіус-векторів, які ми записуємо як $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z)$. Тут $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}$ і $z \in [0, L]$ є поздовжніми і поперечними щодо границь

координатами. В свою чергу, поздовжні координати $\mathbf{r}$ містять в собі як α - так і β -компоненти: $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{d-m-1}$.

Як легко бачити з (7.31), при паралельній орієнтації поверхонь тільки другі похідні від полів ϕ пов'язані з напрямом z , вздовж якого система має скінченний розмір. Тому в цьому випадку, як і в розділі 7 (див. (7.5)), для переходу до імпульсного представлення потрібні тільки відомі дискретні набори власних функцій і власних значень простого диференціального оператора $-\partial_z^2$. Це суттєво спрощує розрахунки, і, принаймні в найнижчих порядках ТЗ дозволяє проводити їх за аналогією до випадку ізотропних систем.

Подібно як і в розділі 7, далі ми розглянемо плівки з двома різними видами ГУ на поверхнях. Це — періодичні і вільні ГУ.

Інтуїтивно, випадок періодичних ГУ здається найпростішим, оскільки він зберігає властивість трансляційної інваріантності вздовж осі z . Дійсно, тут можливо отримати перші два члени ε -розкладу для амплітуди Казимира шляхом нескладного узагальнення розрахунків, проведених в імпульсному представленні у класичній роботі [244]. Але з іншого боку, при накладанні періодичних ГУ ми знов стикаємося з проблемою безмасовості нульової моди при $T = T_c$, як це було у випадку ізотропних систем. Тому при розгляді вищих порядків ТЗ ми повинні звертатися до спеціальних методів, розроблених в роботах [58, 249] і описаних у розділі 7.

З іншого боку, вільні ГУ порушують трансляційну інваріантність в напрямі осі z , не створюючи при цьому проблем з побудовою звичайного ε -розкладу. Це — ті самі ГУ, з якими ми мали справу при описі звичайних переходів у напівбезмежних системах. У границі великих відстаней ці ГУ для плівок з паралельною орієнтацією поверхонь, як і в напівбезмежних системах, є еквівалентними звичайним ГУ Діріхле $\phi(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r}, L) = 0$, які можуть застосовуватися в теорії від самого початку розрахунків.

На відміну від ситуації з періодичними ГУ, у випадку вільних ГУ виникають сингулярності на малих відстанях при наближенні до границь системи. Внаслідок цього, при розрахунку ВЕ плівки з'являються відповідні незникаючі поверхневі

внески. В процесі ж розрахунку надлишкової ВЕ згідно з визначенням (7.1), вони знищуються відніманнями поверхневих густин ВЕ f_s поряд із відніманням густини об'ємної ВЕ f_∞ . Тільки цього останнього віднімання достатньо для отримання скінченної величини f_{res} у випадку періодичних ГУ, де поверхневі сингулярності не виникають взагалі.

З технічної точки зору, подібно як і у випадку періодичних ГУ, в теорії з вільними ГУ на поверхнях плівки теж є спрощення, які дозволяють зробити необхідні розрахунки шляхом незначного узагальнення підходів, прийнятих у статтях [119] чи [244]. Не вдаючись у подробиці громіздких розрахунків, які в достатній мірі описані як в [72], так і в розділі 7, запишемо остаточні результати для амплітуд Казимира $\Delta_{\text{LP}}^{\text{BC}}$ при паралельній орієнтації поверхонь.

У гаусовому наближенні, яке нехтує внеском типу ϕ^4 в ЕГ (7.31), ми маємо [72, 371]

$$\begin{aligned}\Delta_{\parallel, G}^{\text{per}}(d, m, n) &= 2^{d-m/2} \Delta_{\parallel, G}^{\text{ord}}(d, m, n) \\ &= -n C_m \frac{\Gamma[(d-m/2)/2] \zeta(d-m/2)}{\pi^{(d-m/2)/2}}.\end{aligned}\quad (7.32)$$

Тут ми зауважуємо, що результати для амплітуд Казимира Δ_G^{BC} при обидвох зазначених видах ГУ в ТЛ отримуються замінами $d \rightarrow d - m/2$ в аналогічних формулах, отриманих раніше в КТ для ізотропних систем [119, 244], і їх домноженням на додатковий множник C_m .

Аналогічні властивості мають також наші результати ε -розкладів

$$\left. \begin{aligned}\Delta_{\parallel, \text{LP}}^{\text{per}} &= C_m \Delta_{\text{per}} + o(\varepsilon^{3/2}) \\ \Delta_{\parallel, \text{LP}}^{\text{ord}} &= C_m \Delta_{\text{ord}} + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\right\} \quad \text{з} \quad \varepsilon = 4 + \frac{m}{2} - d. \quad (7.33)$$

У формулах (7.33) величини Δ_{per} і Δ_{ord} представляють собою відомі ε -розклади амплітуд Казимира ізотропних плівкових систем з періодичними ГУ та вільними ГУ на поверхнях, отримані з точністю до $O(\varepsilon^{3/2})$ в [58] і з точністю до $O(\varepsilon)$ в [119, 243], відповідно. Вони представлені вище формулами (7.23) і (7.25) з $\varepsilon = 4 - d$. При заміні $d \rightarrow d - m/2$ в $\varepsilon = 4 - d$ якраз і отримується необхідний параметр розкладу ε , вказаний в (7.33), що відповідає теорії в ТЛ. Він задає

мале відхилення від верхньої граничної вимірності простору $d^*(m) = 4 + m/2$ і зводиться до стандартної величини $\varepsilon = 4 - d$ в ізотропній границі $m = 0$.

Множник

$$C_m = \frac{(4\pi)^{-\frac{m}{4}} \Gamma(m/4)}{2\Gamma(m/2)} = \frac{\pi^{(2-m)/4}}{2^m \Gamma[(m+2)/4]} \quad (7.34)$$

є специфічним для розгляду сильно анізотропних систем у ТЛ. Це — відношення геометричних факторів, що зустрічаються при розрахунку діаграм Фейнмана в ТЛ і КТ. Двома прикладами таких відношень є

$$C_m = \frac{F_{m,\varepsilon}}{F_{0,\varepsilon}} = \frac{\Phi_{m,4+m/2-\varepsilon}(0)}{\Phi_{0,4-\varepsilon}(0)}. \quad (7.35)$$

Величина C_m виникає при спрощенні d -вимірних імпульсних інтегралів з підінтегральними функціями виду $h(p^2 + \sigma_0 q^4)$. Тут можна спершу зробити заміну змінних $x = \sigma^{1/2} q^2$, а потім, слідуючи роботі [157], ввести полярні координати (k, θ) замінами $p = k \cos \theta$ і $x = k \sin \theta$. Якобіаном такого перетворення координат є k , комбінація $p^2 + \sigma_0 q^4$ стає просто рівною k^2 , а кутове інтегрування може бути виконане у явному вигляді. В результаті ми отримуємо, що

$$\int_q^{(m)} \int_p^{(d-m)} h(p^2 + \sigma_0 q^4) = \sigma_0^{-m/4} C_m \int_k^{(d-m/2)} h(k^2), \quad (7.36)$$

тобто, початковий d -вимірний інтеграл від $h(p^2 + \sigma_0 q^4)$ з теорії ТЛ простим чином виражається через $d - m/2$ -вимірний інтеграл з підінтегральною функцією $h(k^2)$, характерний для теорії КТ.

Співвідношення (7.36) справедливе для інтегралів Фейнмана, що відповідають найпростішим кільцевим діаграмам, подібним до зображених в (7.20). Тому не можна сподіватися, що у вищих порядках ε -розкладів також будуть зберігатися такі прості зв'язки між амплітудами Казимира в ТЛ і КТ як у формулах (7.33). Але саме безмежним сумам такого типу діаграм відповідають результати, які отримуються для сферичної моделі, тобто, в границі $n \rightarrow \infty$ [59, 207]. Це на- вело нас на думку про те, що в цій границі результати для амплітуд Казимира $\Delta_{\parallel,LP}^{\text{BC}}(d, m)$ могли б бути пов'язаними з їх аналогами $\Delta_{\text{CP}}^{\text{BC}}(d - m/2)$ співвідношеннями, подібними до (7.36).

В роботі [72] ми показали, що так воно і є насправді. У випадку сферичної моделі аналоги амплітуд Казимира визначаються співвідношеннями

$$\Delta_{\infty}^{\text{BC}}(d, m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{\text{BC}}(d, m, n)/n \quad (7.37)$$

як для анізотропних, так і для ізотропних систем. Виконуючи необхідні розрахунки для сильно анізотропних систем у ТЛ ми переконалися в тому, що дійсно

$$\Delta_{\parallel, \infty}^{\text{BC}}(d, m) = C_m \Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{BC}}(d - m/2), \quad \text{BC} = \text{per, ord} \quad \text{при} \quad 2 + \frac{m}{2} \leq d \leq 4 + \frac{m}{2}. \quad (7.38)$$

Використовуючи останнє співвідношення, ми можемо визначити величину $\Delta_{\parallel, \infty}^{\text{per}}(3, 1)$ розрахувавши амплітуду $\Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{per}}(5/2)$ у КТ. Це можна зробити, використовуючи результати робіт [367] і [249] для звичайної сферичної моделі. Згідно з цими роботами, $\Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{per}}(d)$ з $2 < d < 4$ задається формулою

$$\Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{per}}(d) = -\frac{1}{d-1} I_0(y_c) - \frac{1}{d} y_c I_1(y_c), \quad (7.39)$$

де⁴

$$I_{0,1}(y) = \int_p^{(d-1)} \frac{p^{2-2n}}{\sqrt{p^2 + y}} \frac{1}{e^{\sqrt{p^2 + y}} - 1}, \quad n = 0, 1, \quad (7.40)$$

A_d — геометричний фактор $A_d = -(4\pi)^{-d/2} \Gamma(1 - d/2) = d/K_{-d}$, додатний при $2 < d < 4$, а y_c є розв'язком інтегрального рівняння самоузгодження

$$A_d y^{d/2-1} = I_1(y). \quad (7.41)$$

Чисельним розв'язком цього рівняння при $d = 5/2$ є $y_c(5/2) = 0.5358 \dots$. Підставляючи це значення в (7.39), ми отримуємо $\Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{per}}(5/2) = -0.2337 \dots$, а з (7.38) остаточно —

$$\Delta_{\parallel, \infty}^{\text{per}}(3, 1) = -0.12698 \dots \quad (7.42)$$

При $d = 3$, в ізотропній границі $m = 0$ ми відтворюємо з (7.38)–(7.41) точне значення $\Delta_{\text{CP}, \infty}^{\text{per}}(3) = -2\zeta(3)/(5\pi) \simeq -0.15305$, знайдене раніше в [366]. З другого

⁴Функція $I_1(y)$ була введена вже у формулі (7.8).

боку, розв'язуючи рівняння (7.41) ітераціями при $\varepsilon = 4 - d \rightarrow 0$ і виконуючи відповідний ε -розклад для $\Delta_{\text{CP},\infty}^{\text{per}}$ в (7.39), ми знаходимо [58, 249] всі члени ε -розкладу Δ^{per}/n з (7.23) в границі $n \rightarrow \infty$.

Розгляд сферичної моделі плівкових систем з ГУ Діріхле на поверхнях є суттєво складнішим. Це зумовлене тим, що ці ГУ руйнують трансляційну інваріантність в напрямі осі z , перпендикулярному до поверхонь. У цьому випадку в процесі розрахунку генерується ефективна парна взаємодія, що залежить від координати z , яку потрібно визначати самоузгодженим чином [372–374]. Відповідно ускладнені рівняння самоузгодженості вимагають чисельного аналізу, якого ми не проводили. При цьому висновок, сформульований нами в (7.38), було можливим отримати тільки на основі відносно простого загального аналізу структури цих рівнянь.

Табл. 7.2. Чисельні оцінки $\Delta_{\parallel}^{\text{BC}}(d, m, n)$ при $d = 3$ і $m = 0, 1, 2$ для BC=per, ord. Результати гаусового наближення $\Delta_{\parallel,G}^{\text{BC}}$ отримані з формул (7.32), а ε -розкладу $\Delta_{\parallel,\text{LP}}^{\text{BC}}$ — з (7.33) при $\varepsilon = 1 + m/2$. Величини $\Delta_{\parallel,\infty}^{\text{BC}}$ (див. (7.37)) відповідають сферичній границі. Індекси a – g пояснені в основному тексті.

m	0	1	2
$\Delta_{\parallel,G}^{\text{per}}(3, m, n)/n$	-0.1913^a	-0.1579	-0.1309
$\Delta_{\parallel,\text{LP}}^{\text{per}}(3, m, 1)$	-0.1967^b	-0.1463	-0.0888
$\Delta_{\parallel,\infty}^{\text{per}}(3, m)$	-0.1531^c	-0.1270	—
$\Delta_{\parallel,G}^{\text{ord}}(3, m, n)/n$	-0.0239^d	-0.0279	-0.0327^g
$\Delta_{\parallel,\text{LP}}^{\text{ord}}(3, m, 1)$	-0.0117^e	-0.0076	-0.0041
$\Delta_{\parallel,\infty}^{\text{ord}}(3, m)$	$-0.012(1)^f$	—	—

В таблиці 7.2 ми наводимо чисельні оцінки амплітуд Казимира $\Delta_{\parallel}^{\text{BC}}$ для сильно анізотропних плівкових систем з $m = 1$ і $m = 2$ і паралельною орієнтацією поверхонь у тривимірному просторі. Тут $\Delta_{\parallel,G}^{\text{BC}}$ — результати гаусового наближення, представленого формулами (7.32) при $d = 3$. Величини $\Delta_{\parallel,\text{LP}}^{\text{BC}}$ є результатом простої екстраполяції ε -розкладів (7.33) до $d = 3$ з відповідними значеннями ε для кожного числа осей анізотропії m . Представлено також деякі результати, що

отримуються в границі $n \rightarrow \infty$. Стовпчик з $m = 0$ (що отримується як один з часткових випадків наших загальних формул) наведений для забезпечення контакту з відомими даними для ізотропних систем. Тут a — величина, що отримується з ф-ли (5.7) з [244] після виправлення в ній друкарської помилки: після першого знаку рівності повинен стояти “мінус”. Величина b була отримана нами раніше в роботі [58] і була наведена вище в Таблиці 7.1. Величина c представляє точне значення $-2\zeta(3)/(5\pi)$ з [366, 367]. Величина d представляє вираз $-\zeta(3)/(16\pi)$, що отримується як частковий випадок $d = 3$ ф-ли (4.4) з [119], і був відтворений у ряді пізніших робіт: [244, 247, 375, 376]. Величина e слідує з загальних виразів, записаних в [119] і була вперше опублікована в [243]. Чисельне значення f взяте нами з роботи [374].

Величина g є, очевидно, єдиним результатом з представлених у таблиці для анізотропних систем, отриманим до нас. В рамках спрощеної гаусової моделі рідкого кристала типу смектик-А в геометрії з поверхнями, паралельними до шаруватої структури⁵, результат $\Delta_{\parallel, G}^{(\text{ord})}(3, 2, 1) = -\zeta(2)/(16\pi) = -\pi/96 \approx -0.03272$ був отриманий в роботах [166, 375, 378] (див. також [167, 247, 376, 379]). Чисельні дані, наведені в Таблиці 7.2 без жодних позначок, отримані нами вперше.

7.2.2. Перпендикулярна орієнтація поверхонь

У нашому попередньому розрахунку амплітуд Казимира зорієнтованість поверхонь плівки перпендикулярно до β -напрямку була причиною прояву суттєвих математичних спрощень: потрібні інтеграли Фейнмана можна було звести до їх аналогів у звичайній КТ. При розгляді систем, в яких поверхні є перпендикулярними до однієї з осей анізотропії, тобто α -напрямку, подібних аналогій не виникає. Це й зрозуміло: ситуація стає ще більш віддаленою від звичного прообразу ізотропних систем у КТ. Формально відповідальність за це несуть маленькі перестановки числа “-1” у записі ЕГ: новому ЕГ буде відповідати формула (7.31) з заміною елемента об’єму $dz d^m r_\alpha d^{d-m-1} r_\beta$ на $dz d^{m-1} r_\alpha d^{d-m} r_\beta$. При цьому слід

⁵Тут беруться до уваги флуктуації смектичних шарів, при чому директор фіксується у перпендикулярному до них напрямі (див. напр. [377], розд. СІІа).

пам'ятати про те, що при перпендикулярній орієнтації поверхонь вісь z є одним із α -напрямів. Тепер у гіперплощині, паралельній до границь плівки, знаходяться усі β -напрями разом із рештою $m - 1$ осей анізотропії.

В загальному, розрахунки амплітуд Казимира в теперішній ситуації відбуваються за звичною схемою. Згідно з означенням (7.1), потрібно визначити густину надлишкової ВЕ плівки $f_{\text{res}}(L)$ при температурі, що відповідає ТЛ необмежених систем. Як згадувалося в (7.26)–(7.27), при достатньо великих товщинах плівки L ми маємо $f_{\text{res}}(L) \sim L^{(d-m)/\theta+m-1}$, де коефіцієнт пропорційності відповідає, зокрема, різним амплітудам Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{BC}}$ для різних ГУ на поверхнях. Величини $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{BC}}$ будуть представляти для нас головний інтерес у подальшому. Нагадаємо, що показник степеня L в $f_{\text{res}}(L)$ залежить тільки від орієнтації поверхонь, і в “перпендикулярному” випадку ми маємо $(d - m)/\theta + m - 1 = 7 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \equiv 4 + m/2 - d \ll 1$.

Періодичні граничні умови

Зупинимося спочатку на технічно більш простому випадку періодичних ГУ. Тут внески від одно- та двопетльових діаграм, зображених в (7.20), відносно легко розраховуються виходячи з їх імпульсного представлення з вільним пропагатором

$$G_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}} = \left\{ p^2 + \tau_0 + [q^2 + (2\pi j/L)^2]^2 \right\}^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7.43)$$

Зокрема, для інтеграла Фейнмана, що відповідає діаграмі , ми маємо

$$J_{1L}^{\perp}(\tau_0) = \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m-1)} \frac{1}{L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}(p, q, j; \tau_0) \equiv \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m)} G_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}(p, q, j; \tau_0) + I_{1L}^{\perp}(\tau_0). \quad (7.44)$$

Застосовуючи до останньої суми за j відому формулу сумування Пуассона (порівн., напр., з [380, (2.8.1)], [381, (1.5)])

$$\frac{1}{L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(2\pi j/L) = \frac{1}{L} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikjL}, \quad (7.45)$$

ми бачимо, що результатом всіх імпульсних інтегрувань за $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ і k є просто координатне представлення об'ємного вільного пропагатора $G_0^{\text{LP}}(\mathbf{x}; \tau_0)$, в якому

всі паралельні до площин компоненти є рівними нулю, а перпендикулярною z -компонентою є jL . Таким чином ми отримуємо

$$J_{1L}^\perp(\tau_0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_0^{\text{LP}}(\mathbf{0}, jL; \tau_0) = G_0^{\text{LP}}(\mathbf{0}; \tau_0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} G_0^{\text{LP}}(\mathbf{0}, jL; \tau_0), \quad (7.46)$$

де два останні доданки точно відповідають останнім двом членам в (7.44). При $\tau_0 = 0$ ми отримуємо звідси розбіжний член $G_0^{\text{LP}}(\mathbf{0}; \tau_0 = 0)$, який тотожно дорівнює нулю у вимірній регуляризації, а також

$$I_{1L}^\perp(0) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (jL)^{-4+2\varepsilon} \Phi_\infty = 2\Phi_\infty \zeta(4-2\varepsilon) L^{-4+2\varepsilon} \equiv P_{m,d}^{(0)} L^{-4+2\varepsilon}, \quad (7.47)$$

де ми використали скейлінгове представлення (4.7) об'ємного вільного пропагатора в ТЛ і форму його асимптотичної поведінки (4.18).

У двопетльовому наближенні результат ε -розкладу для амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}$ може бути повністю вираженим в термінах щойно розрахованої функції [72, 371]

$$P_{m,d}^{(0)} \equiv 2\Phi_\infty(m, d) \zeta(2d-m-4) = \frac{2^{2d-2m-4} \Gamma(d-2-m/2) \zeta(2d-m-4)}{\pi^{(d-1)/2} \Gamma[(m-d+3)/2]} \quad (7.48)$$

та її аналога із зміщеною вимірністю простору $P_{m,d+2}^{(0)}$. Зауважимо, що величину $P_{m,d}^{(0)}$ не можна безпосередньо використати для чисельних оцінок при $d = 3$ і $m = 1$, оскільки при цих значеннях d і m дзета-функція Рімана з останніх двох формул має полюс (див рис. 7.1). На відміну від цього, величина $P_{m,d+2}^{(0)}$ при згаданих значеннях d і m є скінченною. Ця функція дає нам амплітуду Казимира $\Delta_{\perp, G}^{\text{per}}$ у гаусовому наближенні:

$$\frac{\Delta_{\perp, G}^{\text{per}}(d, m, n)}{n} = -2\pi P_{m,d+2}^{(0)} = -\frac{2^{2d-2m+1} \Gamma(d-m/2) \zeta(2d-m)}{\pi^{(d-1)/2} \Gamma[(m-d+1)/2]}. \quad (7.49)$$

Безпосередні розрахунки показують, що перші два члени ε -розкладу амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}$ мають вигляд

$$\frac{\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}}{n} = -\frac{2^{9-m} \pi^{\frac{26-m}{4}}}{1575 \Gamma(\frac{m-6}{4})}. \quad (7.50)$$

$$\left\{ 1 + \varepsilon \left[C_E - \frac{11}{6} + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{1}{2} \psi \left(\frac{m-6}{4} \right) - 2 \frac{\zeta'(8)}{\zeta(8)} - \frac{7}{36} \frac{2-m}{6-m} \frac{n+2}{n+8} \right] \right\}, \quad (7.51)$$

де загальний множник перед першою фігурною дужкою є не чим іншим, як значенням $\Delta_{\perp, G}^{\text{per}}$ з (7.49) при $d = d^*(m)$. Зокрема, при $m = 1$, $\Delta_{\perp, G}^{\text{per}}(4.5, 1, 1) \approx -53.05$. Цей множник є від'ємним і за модулем суттєво більшим за одиницю. При цьому значення цієї ж самої величини в тривимірному просторі виявляється досить великим додатнім числом: $\Delta_{\perp, G}^{\text{per}}(3, 1, 1) = 12\zeta(5)/\pi \approx 3.96$. Як бачимо, результати гаусового наближення при $d = d^*(1) = 4.5$ і $d = 3$ дуже сильно відрізняються, причому як кількісно, так і якісно,— з точністю до знака. Коефіцієнт біля ε , записаний у квадратних дужках в (7.50), при $m = n = 1$ дорівнює $-3.9\dots$. Його величина по суті не залишає шансів отримати хоч більш-менш обгрунтовану чисельну оцінку для амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}$ при $d = 3$ і $m = 1$ з її ε -розкладу (7.50).

Що має йти далі за цими двома доданками ε -розкладу, нажаль, до кінця не зрозуміло. Подібно як і в двох розглянутих вище випадках систем з періодичними ГУ, тут теж виникає проблема побудови вищих порядків ТЗ, пов'язана з існуванням нульової моди з $j = 0$ у вільному пропагаторі — див. (7.43). Подібно, як і в КТ (див. розд. 7.1), внутрішній елемент діаграми $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ є розбіжним на малих імпульсах і поводить себе як $\tau_0^{-1/4-\varepsilon/2}$ при $\tau_0 \rightarrow 0$ і $\varepsilon \rightarrow 0$. Це означає, що з розгляду цієї трипетльової діаграми ми не можемо звичним чином отримати внеску, пропорційного до ε^2 .

З цих міркувань в [72] ми знов провели розрахунок наступного члена ε -розкладу шляхом відінтегрування полів, пов'язаних з нульовою модою і виводу ефективного $(d-1)$ -вимірного гамільтоніана, як було запропоновано нами в [58]. Таким чином ми отримали наступний, як і слід було очікувати, неаналітичний, член ε -розкладу (7.50), пропорційний до $\varepsilon^{7/4}$. Але неприємним сюрпризом стало те, що коефіцієнт при цьому степені ε виявився комплексним у цікавому для нас випадку $m = 1$. Ми отримали

$$a_{7/4}(m, n) = - \frac{2^{-m+7} \pi^{6-m/4} \Gamma(-7/4) [(m-2)/4]^{7/4}}{3^{7/2} 5^{7/4} \Gamma[(m+1)/4]} \left(\frac{n+2}{n+8} \right)^{7/4}, \quad (7.52)$$

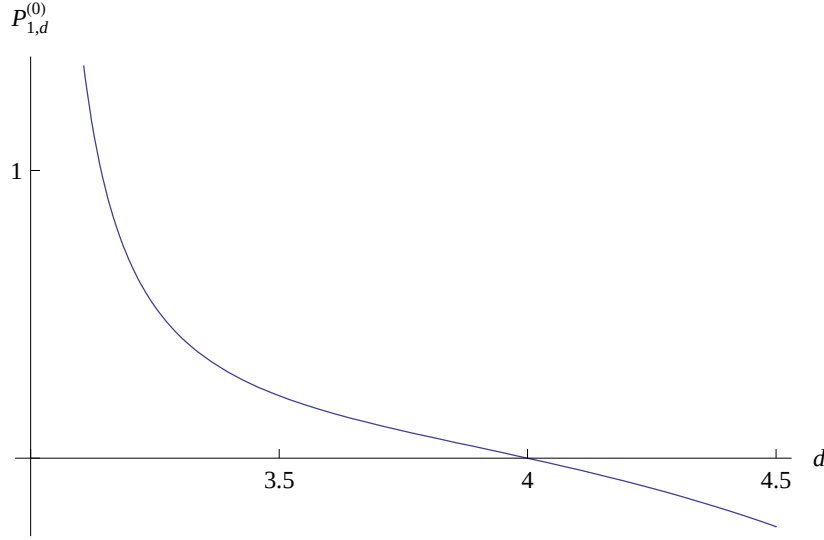


Рис. 7.1. Залежність функції $P_{m,d}^{(0)}$ від вимірності простору d при $m = 1$.

де в цьому важливому випадку виникає множник $(-1/4)^{7/4}$. Це робить новий внесок $a_{7/4}(m, n)\varepsilon^{7/4}$ в ε -розклад (7.50) непридатним.

Причина виникнення цієї проблеми зрозуміла. В останньому розрахунку ми повинні були утворити нецілий степінь згенерованого температурного зміщення $\delta\tau_{0\perp}^{\text{per}}(L)$,

$$\delta\tau_{0\perp}^{\text{per}}(L) = \frac{u_0}{2} \frac{n+2}{3} \sigma_0^{-m/4} (\sigma_0^{-1/4} L)^{-4+2\varepsilon} P_{m,d}^{(0)}, \quad (7.53)$$

подібно, як ми це робили і у випадку ізотропних систем у КТ. Зміщення $\delta\tau_{0\perp}^{\text{per}}(L)$ дійсно є дуже подібним до $\delta\tau_0^{\text{per}}(L)$, записаного в (7.18). Але принциповою особливістю формули (7.53) є те, що величина $P_{m,d}^{(0)}$ стає від'ємною при наближенні до верхньої граничної вимірності простору, коли $m = 1$. Це і приводить до того, що коефіцієнт $a_{7/4}(1, n)$ з (7.52) виявляється комплексним. Графік функції $P_{1,d}^{(0)}$ для $3 < d \leq 4.5$ ми наводимо на Рисунку 7.1. Як бачимо, величина $P_{1,d}^{(0)}$ змінює свій знак при $d = 4$ і залишається від'ємною при зростанні d до верхньої граничної вимірності $d^*(1) = 4.5$.

На даний момент ми не можемо вичерпно пояснити, чому нам не вдалося побудувати задовільного ε -розкладу амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}$ поза першим порядком, наведеним в (7.50). Це питання залишається предметом подальшого дослідження.

Щоб просунутися хоч трохи у виясненні того, що може відбуватися з величиною $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}$ при $m = 1$ і $d = 3$, в роботі [72] ми зробили розрахунок цієї амплітуди в границі сферичної моделі $n \rightarrow \infty$. Цей розрахунок є аналогічним до виконаного в тій самій роботі для випадку паралельної орієнтації поверхонь (див. розд. 7.2.1). Так, при $m = 1$, $d = 3$, і $n \rightarrow \infty$, для випадку перпендикулярної орієнтації поверхонь ми отримуємо додатню величину оберненої скінченновимірної сприйнятливості $y_c \simeq 0.9986$ з рівняння самоузгодження

$$C_m A_{d-m/2} y^{d/2-m/4-1} = I_{1,L=1}^{\perp}(y), \quad (7.54)$$

яке є аналогом до (7.41). Далі, підстановка цієї величини y_c в рівняння, що відповідним чином узагальнює (7.39), приводить нас до результату

$$\Delta_{\perp, \infty}^{\text{per}}(3, 1) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}(d, m, n)/n \simeq 4.0005. \quad (7.55)$$

При цьому зауважимо, що вивід результатів такого типу стає неможливим при вимірностях простору, більших за 4. Коли $4 < d \leq 4.5$, рівняння самоузгодження (7.54), з якого необхідно знайти додатньо визначену величину y_c , не має розв'язків. Ця несумісність теж пов'язана з від'ємністю $P_{m,d}^{(0)} \equiv I_{1,L=1}^{\perp}(0)$ і $I_{1,L=1}^{\perp}(y)$ з невеликими аргументами y у цьому проміжку для d . Таким чином, в обидвох використаних нами підходах ми стикаємося із спорідненими проблемами в розрахунках амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{per}}(d, 1)$ при достатньо великих вимірностях простору. Першопричину цих проблем ще слід з'ясувати у майбутньому.

Чисельний результат для $\Delta_{\perp, \infty}^{\text{per}}(3, 1)$, наведений в (7.55), є специфічним саме для розглянутого випадку перпендикулярної орієнтації поверхонь з періодичними ГУ. Додатність цієї амплітуди Казимира передбачає, що флуктуаційно індукована сила між такими поверхнями може бути відштовхуючою. Це відрізняється від того, що було отримано для плівкових систем з періодичними ГУ як у КТ, так і в ТЛ при паралельній орієнтації поверхонь. В обидвох цих випадках і теорія і наявний чисельний експеримент передбачали від'ємні амплітуди Казимира, а отже, сили притягання між поверхнями (відповідні результати наведені в таблицях 7.1 і 7.2).

Вільні граничні умови

Ми завершуємо наш розгляд флуктуаційно індукованих сил в плівкових системах з просторовою анізотропією. В подальшому ми представляємо результати розрахунку надлишкової ВЕ і амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}$ для технічно найбільш складного випадку перпендикулярної орієнтації поверхонь з вільними граничними умовами. Нагадаємо, що накладання вільних ГУ на поверхні передбачає, що на цій поверхні відбувається звичайний (ordinary) перехід у точці переходу об'ємної системи (див. Розд. 3.4). А коли йдеться про точку Ліфшица, то вільні ГУ відповідають парі граничних умов $\phi = \partial_n \phi = 0$ на границі (див п. 4.7, р-ня (4.98)), де ∂_n означає похідну вздовж внутрішньої нормалі до поверхні.

У цій частині дисертації ми обмежимося тільки розглядом гаусового наближення, яке забезпечить нам, зокрема, тільки ведучий член ε -розкладу амплітуди Казимира $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}$. У розрахунку цієї величини в роботі [72] ми відійшли від звичного запису ЕГ з обмеженням проміжку інтегрування вздовж осі z , перпендикулярної до поверхонь, до $z \in [0, L]$. Натомість, як і в цій роботі, ми записуємо потрібну нам статистичну суму Z у вигляді функціонального інтеграла

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{H}_0^{\text{LP}}[\phi]} \prod_{\mathbf{r}} \prod_{j=1}^2 \delta(\phi(\mathbf{r}, z_j)) \delta(\partial_z \phi(\mathbf{r}, z_j)), \quad (7.56)$$

подібно, як це робилося в [375, 376]. Тут функціональне інтегрування поширюється на всі конфігурації поля $\phi(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x}$ в безмежному просторі $\mathbb{R}^d$, а геометричні обмеження разом з ГУ накладаються шляхом введення відповідних дельта-функцій. Ці дельта-функції забезпечують занулення поверхневих полів і їх нормальних похідних на поверхнях, що проходять через точки z_1 і z_2 , а також відділення внутрішнього об'єму плівки, яка нас цікавить, від решти простору поза її межами [119, 382, 383]. В нашому випадку вісь z співпадає з одним із α -напрямів, і ми приймаємо $z_1 = 0$ і $z_2 = L$. Для простоти ми працюємо зі скалярним полем ($n = 1$), а тривіальну залежність від n відтворимо в остаточних результатах. Також $\mathcal{H}_0^{\text{LP}}[\phi]$, гаусовий ЕГ необмеженої системи в ТЛ, ми беремо з $\sigma_0 = 1$ (див.

(4.1)):

$$\mathcal{H}_0^{\text{LP}}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \left[(\nabla_\beta \phi)^2 + (\Delta_\alpha \phi)^2 \right]. \quad (7.57)$$

Повні формули представлені в роботі [72].

Кожна дельта-функція $\delta(x)$ з (7.56) може бути представлена, як і в [376], у вигляді безмежного інтеграла за змінною ψ від $e^{ix\psi}$. Це дозволяє записати потрібну нам статистичну суму Z у вигляді

$$Z = Z_\infty Z_1, \quad \text{де} \quad Z_1 \equiv \left[\prod_{j=1}^2 \int \mathcal{D}\psi_j \mathcal{D}\psi'_j \right] e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\psi]}, \quad (7.58)$$

Z_∞ — статистична сума об'ємної системи, що визначається ЕГ (7.57), а новий ефективний гамільтоніан $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\psi]$ задається формулою

$$e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\psi]} = \left\langle e^{i \int d^{d-1} r \sum_{j=1}^2 (\psi_j(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, z_j) + \psi'_j(\mathbf{r}) \partial_z \phi(\mathbf{r}, z_j))} \right\rangle_{\mathcal{H}_0^{\text{LP}}}. \quad (7.59)$$

Як завжди, кутові дужки позначають усереднення з мірою $e^{-\mathcal{H}_0^{\text{LP}}[\phi]}$.

Функціональне інтегрування за $\phi(\mathbf{x})$ в останній формулі є гаусовим, воно дає

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}[\psi] = \frac{1}{2} \int d^{d-1} r \int d^{d-1} r' \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (7.60)$$

з

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\psi_i(\mathbf{r}) + \psi'_i(\mathbf{r}) \overrightarrow{\partial}_z \Big|_{z_i} \right) G_0^{\text{LP}}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z') \left(\psi_j(\mathbf{r}') + \overleftarrow{\partial}_{z'} \Big|_{z'_j} \psi'_j(\mathbf{r}') \right) \quad (7.61)$$

Тут $G_0^{\text{LP}}(\mathbf{r}, z; \mathbf{r}', z')$ є вільним пропагатором для безмежної системи в m -вісній ТЛ (з $\tau_0 = \rho_0 = 0$) в координатному представленні, а операції $\overrightarrow{\partial}_z$ і $\overleftarrow{\partial}_{z'}$ діють на його відповідні змінні зліва і справа. Ці дії визначають функціональну матрицю $\mathbb{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ розміром 4×4 , яку можна записати в компактному вигляді як

$$\mathbb{M}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{pmatrix} 0|G|0 & 0|G|L & 0|G\partial|0 & 0|G\partial|L \\ L|G|0 & L|G|L & L|G\partial|0 & L|G\partial|L \\ 0|\partial G|0 & 0|\partial G|L & 0|\partial G\partial|0 & 0|\partial G\partial|L \\ L|\partial G|0 & L|\partial G|L & L|\partial G\partial|0 & L|\partial G\partial|L \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

Матричні елементи $M_{ij} \equiv M_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ записані тут у скорочених позначеннях, зміст яких повинен бути зрозумілим з прикладу $0|G\partial|L \equiv \partial_{z'} G_0^{\text{LP}}(\mathbf{r}, z=0; \mathbf{r}', z')|_{z'=L}$. Зрозуміло, що величини M_{ij} не залежать від координати z , несучи при цьому потрібну нам явну залежність від L , поперечного розміру плівки. А оскільки в поздовжніх напрямках в системі немає порушення трансляційної інваріантності, матричні елементи $M_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ повинні залежати від абсолютних величин $|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}'_\alpha|$ і $|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}'_\beta|$ у кожному з підпросторів $\mathbb{R}_\alpha^{m-1}$ і $\mathbb{R}_\beta^{d-m}$.

Щоб скористатися в повній мірі перевагами, які дає нам згадана трансляційна інваріантність, ми виконуємо в поздовжніх напрямках перетворення Фур'є полів ψ і вільного пропагатора G_0^{LP} з (7.61):

$$\{\psi(\mathbf{r}), G_0^{\text{LP}}(r_\beta, r_\alpha; |z - z'|)\} = \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m-1)} \{\psi(p, q), G_0^{\text{LP}}(p, q; |z - z'|)\} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_\beta} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_\alpha} \quad (7.63)$$

У правій частині цього перетворення ми маємо справу з pqz -представленням вільного пропагатора ([67], р-ня (21)-(22))

$$G_0^{\text{LP}}(p, q; |z|) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{p^2 + (q^2 + k^2)^2} = \frac{e^{-\kappa_+|z|}}{4\kappa_- \kappa_+ (\kappa_-^2 + \kappa_+^2)} (\kappa_- \cos \kappa_- z + \kappa_+ \sin \kappa_- |z|), \quad (7.64)$$

де $\kappa_{\mp} = (1/\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{p^2 + q^4} \mp q^2}$.

Користуючись цим останнім виразом, ми легко знаходимо Фур'є-компоненти $\tilde{M}_{ij}(p, q)$ матричних елементів $M_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, і, виконуючи гаусове функціональне інтегрування за ψ в (7.58), знаходимо

$$Z_1 = \prod_{\mathbf{p}} \prod_{\mathbf{q}} \left[\det \tilde{\mathbb{M}}(p, q) \right]^{-1/2}. \quad (7.65)$$

Звідси, враховуючи (7.58), за означенням (7.1) ми отримуємо

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{F}{Ak_B T_c} - L f_\infty = f_s + f_{\text{res}}(L) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{p}}^{(d-m)} \int_{\mathbf{q}}^{(m-1)} \ln \det \tilde{\mathbb{M}}(p, q). \quad (7.66)$$

Знаючи матричні елементи матриці $\tilde{\mathbb{M}}(p, q)$, ми розраховуємо

$$\det \tilde{\mathbb{M}}(p, q) = \frac{1}{128\kappa_-^2 \kappa_+^4} \frac{e^{-2L\kappa_+}}{(\kappa_-^2 + \kappa_+^2)^2} \left[\kappa_-^2 \text{ch} 2L\kappa_+ + \kappa_+^2 \cos 2L\kappa_- - (\kappa_-^2 + \kappa_+^2) \right]. \quad (7.67)$$

В асимптотичній границі великих L знайдений нами детермінант зводиться до незалежної від L функції від імпульсів

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \det \tilde{M}(p, q) = \frac{1}{256 \kappa_+^4 (\kappa_-^2 + \kappa_+^2)^2}. \quad (7.68)$$

Віднімання її логарифма від підінтегральної функції в останній формулі з (7.66) приведе до скорочення незалежної від L густини поверхневої ВЕ f_s , що фігурує у центрі рівності (7.66). Таким чином ми отримаємо шукану густину надлишкової ВЕ $f_{\text{res}}(L)$, яка, як це і має бути, зникає в границі $L \rightarrow \infty$ як $L^{-7+2\epsilon}$. Цей степінь L узгоджується із степенем $L^{-\zeta_\perp}$ з формул (7.26) і (7.27) з класичним значенням $\theta = 1/2$. Коефіцієнт при цьому степені, як і в (7.26), ми ідентифікуємо з амплітудою Казимира.

Так, для амплітуди $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d, m, n)$ з $1 \leq m \leq d$ в розглянутому нами гаусовому наближенні остаточною формулою у вигляді подвійного інтеграла

$$\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}} = \frac{n}{2} K_{d-m} K_{m-1} \int_0^\infty dp p^{d-m-1} \int_0^\infty dq q^{m-2} \ln \left[2e^{-2\kappa_+} \left(\text{ch } 2\kappa_+ + \frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2} \cos 2\kappa_- - 1 - \frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2} \right) \right].$$

В крайніх точках інтервалу $1 \leq m \leq d$ результати спрощуються до однократних інтегралів. При $m = 1$, тобто у випадку, коли вісь z , перпендикулярна до поверхонь, є єдиною віссю анізотропії, ми маємо

$$\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d, 1, n) = n K_{d-1} 2^{-d+1} \int_0^\infty dt t^{2d-3} \ln \left(1 + e^{-2t} + 2e^{-t} \cos t - 4e^{-t} \right), \quad (7.69)$$

а у випадку ізотропної ТЛ з $m = d$, тобто, коли всі напрями у системі є α -напрямами —

$$\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d, d, n) = n K_{d-1} 2^{-d} \int_0^\infty dt t^{d-2} \ln [1 + e^{-2t} - (2 + t^2)e^{-t}]. \quad (7.70)$$

Чисельні результати, отримані з останніх трьох формул при двох вимірностях простору, що представляють найбільший інтерес, представлені в таблиці 7.3. У першому рядку наведені значення $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}/n$ при верхній граничній вимірності простору $d^*(m) = 4 + m/2$. Ці величини є ведучими членами ϵ -розкладів $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}/n = \Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d^*, m, n)/n + O(\epsilon)$. У другому рядку ми бачимо значення амплітуд $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}/n$ при $d = 3$. Тут число осей анізотропії m природньо обмежене

Табл. 7.3. Чисельні результати для $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d, m, n)$ у гаусовому наближенні при $d = d^*(m) = 4 + m/2$ з $m = 1, \dots, 8$, і при $d = 3$ з $m = 1, 2, 3$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{n} \Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(d^*, m, n)$	-6.596	-2.841	-1.271	-0.564	-0.241	-0.0986	-0.0385	-0.0144
$\frac{1}{n} \Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}(3, m, n)$	-1.324	-0.590	-0.273					

фізичною вимірністю простору 3. В розглянутому гаусовому наближенні величини $\Delta_{\perp, \text{LP}}^{\text{ord}}/n$ не залежать від числа компонент параметра порядку n . Їх залежність від n проявляється тільки в наступному порядку розкладу за ε і походить від двопетльової діаграми $\bigcirc\bigcirc$.

Розрахунок цієї двопетльової діаграми для системи, що розглядається, є нетривіальною математичною задачею. По-перше, тут потрібне знання вільного пропагатора, що відповідає лініям діаграми. Він поки-що не відомий. А по-друге, для цієї мети необхідно застосувати оптимальну схему розрахунку двопетльової діаграми. Розробці такої схеми присвячений наступний параграф.

7.2.3. Ефект Казимира в теорії ϕ_d^4 і інтеграли від дзета-функцій Гурвіца

У своїй визначній роботі [119] К. Симанзік довів існування ефекту Казимира в безмасовій теорії ϕ_d^4 з граничними умовами Діріхле на поверхнях. Для виконання конкретних розрахунків у першому порядку за $\varepsilon = 4 - d$ він використав координатне представлення і без виводу записав остаточний результат для амплітуди Казимира, наведений вище в (7.25). Деталі цього розрахунку залишаються невідомими, але очевидно, що саме така схема, з її явними відніманнями розбіжностей, що виникають при наближенні до поверхонь, відповідає умовам, необхідним для обчислення двопетльової діаграми $\bigcirc\bigcirc$, згаданої в кінці попереднього параграфа.

У позначеннях роботи [119], в безмасовій теорії ϕ_d^4 з граничними умовами Діріхле на поверхнях, відстань між якими L , діаграмі Фейнмана $\bigcirc\bigcirc$ в координа-

тному представленні відповідає наступна комбінація інтегралів (див. [119, (4.6)]):

$$\begin{aligned} \bigcirc \sim \int_0^L \left\{ [G_D^L(0; z, z) - G_b(0)]^2 - [G_D(0; z, z) - G_b(0)]^2 \right. \\ \left. - [G_D(0; L-z, L-z) - G_b(0)]^2 \right\} dz - 2 \int_L^\infty [G_D(0; z, z) - G_b(0)]^2 dz. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Для випадку сильно анізотропних систем з орієнтацією поверхонь, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії, і вільними граничними умовами структура наведеної комбінації з її відніманнями розбіжних членів залишиться такою самою. Ускладняться тільки функціональні залежності відповідних складових частин нової підінтегральної функції.

Щоб пояснити функції, що фігурують в (7.71), почнемо з вільного пропагатора безмасової теорії ϕ_d^4 в безмежному d -вимірному ізотропному просторі,

$$G_b(x) = Cx^{-2+\varepsilon} \quad \text{з} \quad C = \frac{1}{4}\pi^{-2+\varepsilon/2}\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right). \quad (7.72)$$

Тут x — відстань між довільними двома точками в просторі $\mathbb{R}^d$. Поведінка функції $G_b(x)$ при малих відстанях x є сингулярною у фізичній області $0 < \varepsilon < 2$, і, зокрема при $\varepsilon \rightarrow 0$. (Безмежна) величина цього пропагатора при $x = 0$ віднімається у кожному доданку з (7.71).

Далі, $G_D(\mathbf{r}; z_1, z_2)$ є пропагатором Діріхле в напівбезмежному просторі, обмеженому одною плоскою поверхнею, тобто, в геометрії, яка розглядалася в розд. 3.4. Цей пропагатор визначається формулою

$$G_D(r; z_1, z_2) = G_b(r; |z_1 - z_2|) - G_b(r; z_1 + z_2),$$

де $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ є “паралельною” відстанню між точками $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$. В дещо інших позначеннях, явний вигляд цієї функції наведений в [119, (2.13)].

Нарешті, функція Гріна вільної теорії системи з геометрією плівки товщиною L і ГУ Діріхле на поверхнях визначається формулою

$$G_D^L(r; z_1, z_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[G_b(r; |z_1 - z_2 + 2Ln|) - G_b(r; z_1 + z_2 + 2Ln) \right].$$

“Розширена” версія цієї формули записана в [119, (4.7)].

Для точок $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ всередині плівки, які співпадають між собою, тобто, в ситуації, що передбачається діаграмою Фейнмана $\bigcirc\bigcirc$, ми отримуємо для комбінації з перших квадратних дужок в (7.71) (див. [119, (4.8)])

$$G_D^L(0; z, z) - G_b(0) = C (2L)^{-2+\varepsilon} [2\zeta(2 - \varepsilon) - \zeta(2 - \varepsilon, z/L) - \zeta(2 - \varepsilon, 1 - z/L)]. \quad (7.73)$$

Константа C записана в (7.72), а $\zeta(a, x)$ — це дзета-функції Гурвіца. Їх визначення ми дамо в наступному абзаці. Нарешті, для комбінації з других квадратних дужок в (7.71) ми маємо

$$G_D(0; z, z) - G_b(0) = -G_b(2z) = -C(2z)^{-2+\varepsilon}.$$

Подібний результат отримується і для аналогічного виразу з третіх квадратних дужок цієї формули.

Таким чином, ми бачимо, що для безпосереднього відтворення розрахунків Симанзіка і його результатів з [119, ст. 12] потрібно працювати з інтегралами від добутків дзета-функцій Гурвіца, що з’являються в (7.73).

Функція Гурвіца означається рядом (див. напр. [362, Розд. 13])

$$\zeta(a, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^a} \quad (\Re(a) > 1; x \neq 0, -1, -2, \dots). \quad (7.74)$$

Окрім точки $a = 1$, де функція $\zeta(a, x)$ має простий полюс (з одиничним лишком), вона може бути отримана шляхом аналітичного продовження. В області збіжності ряд (7.74) збігається абсолютно і однорідно. При $x = 1$ функція Гурвіца $\zeta(a, x)$ зводиться до дзета-функції Рімана:

$$\zeta(a, 1) = \zeta(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \quad (\Re(a) > 1). \quad (7.75)$$

При $x \rightarrow 0^+$ поведінка функції Гурвіца є сингулярною і описується степеневим законом $\zeta(a, x) \sim x^{-a}$. У випадку функцій $\zeta(a, x)$, які фігурують в (7.73), з $a = 2 - \varepsilon$, їх сингулярна поведінка при $x \rightarrow 0$ точно відтворює сингулярну поведінку об’ємного пропагатора $G_b(x)$ (7.72) на малих відстанях.

Дзета-функція Гурвіца $\zeta(a, x)$ є однією з найбільш фундаментальних функцій в математиці. Вона має ряд важливих застосувань, зокрема в теорії чисел [384, 385], теорії ймовірностей [386], у розрахунках математичних констант [387]. Ця функція застосовується також у багатьох фізичних задачах. Одним з важливих прикладів, який має безпосереднє відношення до наших досліджень, є дослідження ефекту Казимира [241] у квантовій теорії поля і його аналогів у статистичній фізиці і температурній теорії поля при високих температурах, див. напр. [59, 245, 247, 388] де можна знайти згадки про багаточисленні задачі теоретичної фізики.

У ряді статей [389–392] розглядалися інтеграли від дзета-функцій Гурвіца за змінною x . В класичній роботі [389] був ініційований розрахунок інтеграла

$$\int_0^1 |\zeta_1(a, x)|^2 dx \quad (7.76)$$

з комплексним параметром a . Розгляду цієї задачі були присвячені пізніші роботи — див. [393–396] і цитовані там статті. Тут останній інтеграл досліджувався в контексті теорії чисел з $a = \frac{1}{2} + it$ в асимптотичній границі $t \rightarrow \pm\infty$. У цьому інтегралі фігурує “доповнююча” (auxiliary) дзета-функція Гурвіца $\zeta_1(a, x)$. Вона виникає в результаті віднімання сингулярного нульового члена з $\zeta(a, x)$ (див. (7.74)):

$$\zeta_1(a, x) = \zeta(a, x) - x^{-a}. \quad (7.77)$$

Перевагою функції $\zeta_1(a, x)$ [389],

$$\zeta_1(a, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^a} = \zeta(a, x+1) \quad (\Re(a) > 1), \quad (7.78)$$

є те, що вона залишається неперервною у повному замкненому інтервалі $x \in [0, 1]$, включно з точкою $x = 0$. Зауважимо, що при $x = 0$ функція Гурвіца $\zeta_1(a, x)$ зводиться до функції Рімана: $\zeta_1(a, 0) = \zeta(a)$.

Повертаючись до виразу (7.71) для двопетльової діаграми $\bigcirc\bigcirc$, ми записуємо це рівняння у вигляді

$$\bigcirc\bigcirc \sim (I_{0,L} - 2I_{L,\infty})C^2, \quad (7.79)$$

де інтеграли Фейнмана з областями інтегрування $[0, L]$ і $[L, \infty[$ позначені, відповідно, як $I_{0,L}$ і $I_{L,\infty}$. Ці інтеграли записуються як

$$I_{L,\infty} = \int_L^\infty (2z)^{-4+2\varepsilon} dz = 2^{-4+2\varepsilon} \frac{L^{-3+2\varepsilon}}{3-2\varepsilon} = 2^{-4+2\varepsilon} L^{-3+2\varepsilon} \frac{1}{2\alpha-1} \quad (\alpha > \frac{1}{2}), \quad (7.80)$$

де для компактності запису і зручності порівняння з попередніми формулами ми ввели позначення $\alpha \equiv 2 - \varepsilon$, і

$$I_{0,L} = 2^{-4+2\varepsilon} L^{-3+2\varepsilon} K(\alpha), \quad (7.81)$$

де, після заміни змінної інтегрування $x = z/L$

$$K(\alpha) = \int_0^1 \left\{ [2\zeta(\alpha) - \zeta(\alpha, x) - \zeta(\alpha, 1-x)]^2 - x^{-2\alpha} - (1-x)^{-2\alpha} \right\} dx. \quad (7.82)$$

Останній (невласний) інтеграл збігається в проміжку $\alpha \in (1, 2]$. Це відповідає $0 \leq \varepsilon < 1$, що відповідає області застосовності фізичної задачі, яка розглядається. Тут, як і слід, сингулярності дзета-функцій біля крайніх точок області інтегрування віднімаються відповідними “контрчленами”, що приводить до скінченного результату в потрібній області ε . Зокрема, скінченна величина $K(\alpha)$ при $\alpha = 2$ робить безпосередній внесок при $\varepsilon = 0$ у коефіцієнт $c_1(\varepsilon)$, що записаний між (4.8) і (4.9) в [119].

Таким чином, розрахунок інтеграла $K(\alpha)$ з (7.82) є головним нетривіальним завданням, що виникає при розгляді внеску діаграми $\bigcirc\bigcirc$, записаного в (7.71). Структура підінтегральної функції $K(\alpha)$ і дзета-функцій Гурвіца (див. (7.74), (7.77)) передбачають те, що цей інтеграл може бути виражений в термінах доповнюючої функції $\zeta_1(\alpha, y)$ з $y \mapsto x$ і $y \mapsto 1-x$. Суттєвою перевагою нового представлення буде те, що функція ζ_1 є *регулярною* на всьому проміжку інтегрування $x \in [0, 1]$. В результаті такої реорганізації ми отримуємо

$$K(\alpha) = -4\zeta^2(\alpha) + 2I(\alpha, \alpha) + 2J(\alpha, \alpha) + 2M(\alpha). \quad (7.83)$$

Інтеграл $M(\alpha)$ має вигляд

$$M(\alpha) =$$

$$\int_0^1 \left\{ [x^{-\alpha} + (1-x)^{-\alpha} - 2\zeta(\alpha)] [\zeta_1(\alpha, x) + \zeta_1(\alpha, 1-x) - 2\zeta(\alpha)] + x^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha} \right\} dx.$$

Він повністю симетричний відносно перетворення $x \leftrightarrow 1-x$, і при $x \rightarrow 0$ і до $x \rightarrow 1$ його підінтегральна функція поводить себе як $O(x^{2-\alpha}) + O(1)$ і $O((1-x)^{2-\alpha}) + O(1)$, відповідно. Таким чином, інтеграл $M(\alpha)$, в який нетривіальна функція ζ_1 входить тільки *лінійно*, є збіжним при $1 < \alpha \leq 2$, тобто при $0 \leq \varepsilon < 1$.

В інтегралах $I(\alpha, \alpha)$ і $J(\alpha, \alpha)$ з (7.83) фігурують парні *добутки* функцій ζ_1 , і вони є частковими випадками інтегралів

$$I(a, b) = \int_0^1 \zeta_1(a, x) \zeta_1(b, x) dx \quad \text{і} \quad J(a, b) = \int_0^1 \zeta_1(a, x) \zeta_1(b, 1-x) dx \quad (7.84)$$

при $a = b = \alpha$. Їх частковим випадком при комплексно спряжених $a = b^* \in \mathbb{C}$ і класичний інтеграл (7.76). Як виявилось, розрахунку інтеграла $I(a, b)$ була присвячена значна увага в математичній літературі, а саме в контексті теорії чисел — див. [393–396] і цитовану там літературу.

В роботах [13] і [14] за допомогою методів, характерних для теоретико-польового підходу до задач статистичної фізики, ми отримали як відомі раніше явні вирази для інтеграла $I(a, b)$, так і нові результати для $J(a, b)$. Так, з використанням представлень знаменників, що фігурують в $\zeta_1(a, x)$, у вигляді інтегралів Лапласа (що в розрахунках інтегралів Фейнмана відоме як параметризація Швінгера) було отримано вираз [13, (16)]. Він співпадає з результатом, виведеним раніше в [395] за допомогою складних математичних методів включно з аналітичним продовженням. Того ж самого результату ми досягнули досить елементарними засобами.

Для інтеграла $J(a, b)$ за допомогою стандартного для математичної літератури методу аналітичного продовження в [13, (22)] ми знаходимо

$$J(a, b) = B(1-a, 1-b) \{ \zeta(a+b-1) - 1 \} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} \frac{\zeta(a+n) - 1}{n+1-b} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \frac{\zeta(b+n) - 1}{n+1-a}.$$

Як і раніше, тут $\zeta(a)$ — дзета-функція Рімана, $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ — бета-функція Ейлера, а $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ — символ Похгаммера. В

обидвох випадках інтегралів $I(a, b)$ і $J(a, b)$ в роботі [13] були розглянуті специфічні граничні переходи до цілих значень $b = a := m > 2$. Тут були докладно розглянуті граничні процедури, які приводили до скінченних виразів внаслідок взаємної компенсації низки розбіжних при цілих m доданків.

З другого боку, роботі [14] до інтегралів $I(a, b)$ і $J(a, b)$ з (7.84) ми вперше застосували параметризацію Фейнмана. Цей підхід є стандартним в теорії поля. Протягом десятиліть він успішно використовувався при розрахунках найрізноманітніших фейнманівських діаграм в квантовій теорії поля і статистичній фізиці. Проте ця техніка залишалася практично невідомою для широкого кола математиків, в області зацікавлень яких перебували кратні інтеграли і суми з подібною математичною структурою. Процедура параметризації Фейнмана спрямована на зведення добутків декількох знаменників до *одного* знаменника, що часто виявляється надзвичайно важливим для подальшої роботи.

У випадку степенів двох величин у знаменнику ми маємо справу з інтегральними представленнями типу інтегралів Ейлера, двома можливими формами запису яких є

$$\frac{1}{A^a C^b} = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^1 \frac{w^{b-1} (1-w)^{a-1} dw}{[A + w(C-A)]^{a+b}} = \frac{2}{B(a, b)} \int_{-1}^1 \frac{(1-w)^{a-1} (1+w)^{b-1} dw}{[A + C + w(C-A)]^{a+b}}. \quad (7.85)$$

Нагадаємо, що $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. Перше з цих представлень є стандартним, і його можна зустріти в ряді підручників і монографій, таких як [268, 397, 398]. При його записі в [14, (1.6)] сталася помилка: у середній формулі цього рівняння параметри a і b слід було поміняти місцями. Друге з цих представлень запропоноване нами, воно отримується з першого при заміні змінної інтегрування $w \rightarrow (1-w)/2$. Його перевагою є повна симетризація запису, що супроводжується появою суми та різниці величин A і C в знаменнику підінтегральної функції останнього інтеграла з (7.85).

Використання параметризації Фейнмана у випадку інтегралів від добутків дзета-функцій Гурвіца $I(a, b)$ і $J(a, b)$ з (7.84) дало можливість успішно відтворити отримані раніше результати для цих інтегралів. Більше того, для них були

виведені нові альтернативні вирази [14, (2.3)] і [14, (3.8)], причому запропонований підхід дав можливість розрахувати інтеграл $J(a, b)$ безпосередньо в області його збіжності без використання аналітичних продовжень. При цьому особливу роль відіграла згадана вище симетричність запропонованого нами нового представлення параметризації Фейнмана, останньої формули з (7.85). Виявилося, що наш підхід з використанням параметризації Фейнмана проявив себе значно ефективнішим, ніж методи, які дотепер використовувалися для задачі розрахунку $I(a, b)$ в математичній літературі.

Крім цього, в роботі [14] були розглянуті т. зв. моменти дзета-функції Гурвіца, тобто інтеграли, які включають цілі степені x^n в добутку з цією функцією. Тут також були запропоновані теореми подвійних сумувань, що включають в себе пари символів Похгаммера і дзета-функцій Рімана $\zeta(a)$. Згідно з цими теоремами,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_k}{(j+k+1)!} \zeta(a+j) \zeta(b+k) = B(1-a, 1-b) \zeta(a+b-1),$$

де $\Re(a) < 1$, $\Re(b) < 1$, а також

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_k}{j! k! (j+k+1)} \zeta(a+j) \zeta(b+k) = \frac{\pi \Gamma(a+b-1) \zeta(a+b-1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left(\frac{\sin \pi a + \sin \pi b}{\sin \pi a \sin \pi b} \right)$$

де $\Re(a) < 1$, $\Re(b) < 1$ і $\Re(a+b) < 1$. Отримані формули для подвійних сум є досить рідкісними для математичної літератури, де до цього часу, як правило, розглядалися однократні сумування дзета-функцій Рімана.

Повертаючись до інтеграла $K(\alpha)$ з (7.83) і підставляючи в нього потрібні значення інтегралів I , J і M , ми відтворюємо (з $\alpha = 2 - \varepsilon$) коефіцієнт

$$c_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} (4\pi)^{-4+\varepsilon} \Gamma^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \left[\zeta^2(2-\varepsilon) + (1 - \cos \pi \varepsilon) B(3-2\varepsilon, -1+\varepsilon) \zeta(3-2\varepsilon) \right]$$

для $\varepsilon \in [0, 1)$, як записано в [119, стор. 12]. Цей результат був також отриманий іншим способом в [244, (5.11)] у контексті статистичної фізики. Значення коефіцієнта $c_1(\varepsilon)$ в нулі, тобто константа $c_1(0) = 2^{-11}/9$ (див. [119, стор. 12]), входить в член рядку $O(\varepsilon)$ розкладу за малим ε амплітуди Казимира плівки з ГУ Діріхле

в теорії $\phi_{4-\varepsilon}^4$ з n -компонентним полем [244, (5.16)]. Формула для цієї величини наведена в рівнянні (7.25).

Таким чином, ґрунтовне дослідження сингулярностей підінтегральних функцій і областей збіжності інтегралів (7.84) дозволило нам покроково розписати розрахункову схему, придатну для відтворення відомого з [119] результату (7.25) для амплітуди Казимира звичайних систем з короткосяжними взаємодіями в критичній точці. З точки зору теоретичної фізики, відтворення результату (7.25) шляхом розгляду інтегралів (7.84) є корисним з огляду на те, що цей розрахунок проводиться в координатному представленні теорії типу ϕ^4 , і може бути ефективним в ситуаціях, де інші альтернативні підходи стикаються з суттєвими труднощами. Ця схема є достатньо загальною і придатною для розгляду більш складних просторово обмежених систем, оскільки тут зберігається загальна структура сингулярностей на малих відстанях і те, як ці сингулярності віднімаються при отриманні остаточних результатів. Відповідне узагальнення цього підходу дасть можливість у майбутньому розрахувати надлишкову вільну енергію і, відповідно, амплітуди Казимира для сильно анізотропних систем, обмежених паралельними поверхнями з вільними граничними умовами типу Діріхле, таких, які розглядалися в попередньому параграфі.

7.3. Висновки

У заключному розділі ми зупинилися на дослідженні багаточастинкових систем з плівковою геометрією, обмежених двома паралельними поверхнями. Тут показано, що ε розклад амплітуд Казимира, які визначають величину флуктуаційно-індукованих сил, що виникають в таких системах при критичній температурі завдяки далекосяжним флуктуаціям, є *неаналітичним* у випадках періодичних і спеціальних ГУ. Для цих амплітуд у явному вигляді знайдено поправки порядку $O(\varepsilon^{3/2})$ і оцінено їх величини у фізичному просторі з $d = 3$.

Причиною появи неаналітичності є наявність у теорії безмасової нульової моди, що приводить до виникнення неконтрольованих інфрачервоних розбіжно-

стей у звичних діаграмних розкладах амплітуд Казимира. Проблема походить з базової теорії Ландау, яка неправильно передбачає фазовий перехід для об'ємних і плівкових систем при одній і тій самій величині критичної температури. Ключовою ідеєю нашої роботи [58], яка забезпечила систематичний підхід до проблеми, є виділення небезпечної нульової моди і утворення пов'язаного з нею ефективного гамільтоніана $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(d-1)}[\phi]$, придатного для подальшого формулювання коректної ТЗ.

Запропонований в роботі [58] підхід до реорганізації ТЗ з використанням відінтегровування ненульових мод, у випадку коли традиційна ТЗ не працює належним чином і виникають такі неаналітичності, дає загальний алгоритм, який також може бути використаний для знаходження спостережуваних величин в інших теоріях,— таких як *тиск* в температурній теорії поля (див. напр. [59]).

Нарешті, вперше отримано результати, що стосуються флуктуаційно індукованих сил у сильно анізотропних системах. Показано, що тут вони набувають залежності від орієнтації обмежуючих поверхонь відносно напрямів осей анізотропії системи. Для однієї з конфігурацій за допомогою окресленого методу отримано амплітуду Казимира з неаналітичним внеском $\sim \varepsilon^{7/4}$. Нажаль, у випадку одновісної анізотропії ($m = 1$) тут виникає комплексний коефіцієнт $(-1/4)^{7/4}$. Причину такої цікавої аномалії ще слід з'ясувати. Цікавою задачею для майбутнього залишається і розрахунок нетривіальних поправок до розглянутого нами гаусового наближення для випадку поверхонь, перпендикулярних до однієї з осей анізотропії.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано ряд узагальнень відомих теоретико-польових підходів до дослідження критичних явищ у просторово неоднорідних системах:

- масивна теорія поля Парізі при фіксованих вимірностях простору застосована при *нецілих* вимірностях d , а також до дослідження *критичних амплітуд* неупорядкованих ізінгівських систем
- сформульоване узагальнення цієї теорії на випадок *напівбезмежних* систем у довільних вимірностях простору d
- запропоновано новий систематичний підхід до розрахунку ε -розкладів критичних показників і кореляційних функцій в точці Ліфшица (ТЛ)
- сформульовано ренормгруповий опис напівбезмежних анізотропних систем з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії
- проаналізована гіпотеза локальної скейлінгової інваріантності (ГЛСІ) Генкеля, визначені межі її застосовності
- $1/n$ -розклад за великою кількістю компонент параметра порядку успішно сформульований і застосований при наявності просторової анізотропії
- шляхом реорганізації теорії збурень розв'язана проблема неконтрольованих інфрачервоних розбіжностей в ε -розкладах амплітуд Казимира.

Отримано наступні результати та зроблено наступні висновки:

1. Виведено явні вирази для двопетльових функцій ренормалізаційної групи при довільних вимірностях простору d . Побудовано плавні залежності критичних показників неупорядкованих ізінгівських систем з замороженим безладом від вимірності d .

2. Розраховані універсальні комбінації критичних амплітуд невідпорядкованої моделі Ізінга і відношення їх величин при $T > T_c$ і $T < T_c$. Зроблено висновки про те, що теоретичне значення відношення амплітуд теплоємності A_+/A_- у тривимірному просторі може бути додатним всупереч передбаченням $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу біля $d = 4$.
3. Виконані двопетльові розрахунки поверхневих критичних показників звичайного та спеціального переходів при $d = 3$. Зроблено висновок про те, що невідпорядкованість поверхні не впливає на особливості спеціального переходу, а об'ємний безлад змінює показники звичайного переходу.
4. Отримані коректні ε -розклади критичних показників ТЛ з довільною кількістю осей анізотропії у порядку $O(\varepsilon^2)$ і зроблено висновок про те, що в нетривіальній взаємодіючій теорії показник анізотропії є некласичним. Виявлено та проаналізовано помилки інших авторів в аналогічних розрахунках.
5. Поставлена задача про вплив кристалічної структури на критичну поведінку m -вісних ТЛ і показано, що анізотропія підпростору модуляції може бути причиною зміни характеру фазового переходу в ТЛ.
6. Отримані некласичні поверхневі показники звичайного переходу в напівбезмежних сильно анізотропних системах з поверхнею, перпендикулярною до однієї з осей анізотропії.
7. Виявлено ряд неточностей в математичних формулюваннях ГЛСІ. Отримано нову інформацію стосовно математичної структури і явного вигляду парних кореляційних функцій систем з одновісною анізотропією в ТЛ.
8. Знайдено поправки порядку $1/n$ для кореляційних і термодинамічних показників ТЛ з довільною кількістю осей анізотропії. Встановлено узгодження з відомими результатами у чотирьох різних граничних режимах. Зроблений висновок про те, що кореляційний критичний показник η_4 змінює свій знак при зміні вимірності простору d .
9. Виявлена неаналітичність ε -розкладу амплітуд Казимира плівкових систем з періодичними і спеціальними граничними умовами, в явному вигляді зна-

йдено поправки $O(\varepsilon^{3/2})$ для цих амплітуд.

10. Аналогічні результати отримані для просторово обмежених *анізотропних* систем, по-різному орієнтованих між двома паралельними поверхнями. Показано, що флуктуаційно індуковані сили залежать від просторової орієнтації граничних поверхонь відносно напрямів осей анізотропії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Diehl H. W. Why boundary conditions do not generally determine the universality class for boundary critical behavior // *Eur. Phys. J. B.* — 2020. — Vol. 93, no. 10. — P. 195.
2. Essafi K., Kownacki J.-P., Mouhanna D. Nonperturbative renormalization group approach to Lifshitz critical behaviour // *EPL.* — 2012. — Vol. 98. — P. 51002.
3. Shpot M. A., Srivastava H. M. The Clausenian hypergeometric function with unit argument and negative integral parameter differences // *Appl. Math. Comput.* — 2015. — Vol. 259. — P. 819 – 827.
4. Shpot M. A., Pogány T. K. The Feynman integral in $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m$ and complex expansion of ${}_2F_1$ // *Integral Transforms Spec. Funct.* — 2016. — Vol. 27, no. 7. — P. 533–547.
5. Srivastava H. M., Shpot M. A. Reduction and transformation formulas for the Appell and related functions in two variables // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2017. — Vol. 40, no. 11. — P. 4102–4108.
6. Paris R. B., Shpot M. A. A Feynman integral in Lifshitz-point and Lorentz-violating theories in $\mathbb{R}^D \oplus \mathbb{R}^m$ // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2018. — Vol. 41, no. 5. — P. 2220–2246.
7. Wilson K. G. Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture // *Phys. Rev. B.* — 1971. — Vol. 4. — P. 3174–3183.
8. Wilson K. G. Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior // *Phys. Rev. B.* — 1971. — Vol. 4. — P. 3184–3205.

9. Wilson K. G., Kogut J. The Renormalization Group and the ϵ Expansion // *Phys. Reports.* — 1974. — Vol. 12C, no. 2. — P. 75–200.
10. Wilson K. G., Fisher M. E. Critical Exponents in 3.99 Dimensions // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — Vol. 28, no. 4. — P. 240–243.
11. Shpot M. A. A massive Feynman integral and some reduction relations for Appell functions // *J. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 48, no. 12. — P. 123512.
12. Shpot M. A. Two-loop RG functions of the massive ϕ^4 field theory in general dimensions // *Condens. Matter Phys.* — 2010. — Vol. 13, no. 1. — P. 13101.
13. Shpot M. A., Chaudhary M. P., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions and the Casimir effect in ϕ^4 field theories // *J. Class. Anal.* — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 99–115.
14. Shpot M. A., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions via Feynman parametrization and two double sums of Riemann zeta functions // *Math. Aeterna.* — 2016. — Vol. 6, no. 5. — P. 745–764.
15. Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT / Rattazzi R., Rychkov V. S., Tonni E., and Vichi A. // *J. High Energy Phys.* — 2008. — Vol. 2008, no. 12. — P. 031.
16. Precision islands in the Ising and $O(N)$ models / Kos F., Poland D., Simmons-Duffin D., and Vichi A. // *J. High Energy Phys.* — 2016. — Vol. 2016, no. 08. — P. 036.
17. Carving out OPE space and precise $O(2)$ model critical exponents / Chester S. M., Landry W., Liu J., Poland D., Simmons-Duffin D., Su N., and Vichi A. // *J. High Energy Phys.* — 2020. — Vol. 2020, no. 6. — P. 142.
18. Kompaniets M. V., Panzer E. Minimally subtracted six-loop renormalization of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 theory and critical exponents // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96. — P. 036016.
19. Poland D., Simmons-Duffin D. The conformal bootstrap // *Nature Phys.* — 2016. — Vol. 12, no. 6. — P. 535–539.
20. Poland D., Rychkov S., Vichi A. The conformal bootstrap: Theory, numerical techniques, and applications // *Rev. Mod. Phys.* — 2019. — Vol. 91. —

P. 015002.

21. Komargodski Z., Simmons-Duffin D. The random-bond Ising model in 2.01 and 3 dimensions // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2017. — Vol. 50, no. 15. — P. 154001.
22. Aharony O., Narovlansky V. Renormalization group flow in field theories with quenched disorder // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98. — P. 045012.
23. Kaviraj A., Rychkov S., Trevisani E. Random Field Ising Model and Parisi-Sourlas supersymmetry. Part I. Supersymmetric CFT // *J. High Energy Phys.* — 2020. — Vol. 2020. — P. 090. — arXiv : 1912.01617.
24. Kaviraj A., Rychkov S., Trevisani E. Random Field Ising Model and Parisi-Sourlas supersymmetry. Part II. Renormalization Group // *J. High Energy Phys.* — 2021. — 9. — Vol. 2021. — P. 219. — arXiv : 2009.10087.
25. Cappelli A., Maffi L., Okuda S. Critical Ising Model in Varying Dimension by Conformal Bootstrap // *J. High Energy Phys.* — 2019. — Vol. 01. — P. 161. — arXiv : 1811.07751.
26. Trinchero R. Wilson-Fisher fixed points for any dimension // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100. — P. 116004.
27. Chen B., Hao P-X., Yu Z-f. 2D Galilean field theories with anisotropic scaling // *Phys. Rev. D.* — 2020. — Vol. 101. — P. 066029.
28. Osborn H., Stergiou A. Seeking fixed points in multiple coupling scalar theories in the ϵ expansion // *J. High Energy Phys.* — 2018. — Vol. 05. — P. 051. — arXiv : 1707.06165.
29. Rychkov S., Stergiou A. General Properties of Multiscalar RG Flows in $d = 4 - \epsilon$ // *SciPost Phys.* — 2019. — Vol. 6. — P. 8.
30. Henriksson J., Kousvos S. R., Stergiou A. Analytic and Numerical Bootstrap of CFTs with $O(m) \times O(n)$ Global Symmetry in 3D // *SciPost Phys.* — 2020. — Vol. 9. — P. 35.
31. Shpot N. A. Critical behavior of the mn -component field model in three dimensions // *Phys. Lett. A.* — 1988. — Vol. 133, no. 3. — P. 125–127.
32. Shpot N. A. Critical behavior of the mn -component field model in three di-

- mensions. II. Three-loop results // *Phys. Lett. A*. — 1989. — Vol. 142, no. 8,9. — P. 474–478.
33. Liendo P., Rastelli L., van Rees B. C. The bootstrap program for boundary CFT_d // *J. High Energy Phys.* — 2013. — Vol. 2013, no. 07. — P. 113.
 34. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // *Nucl. Phys. B*. — 1998. — Vol. 528, no. 3. — P. 595–647.
 35. Boundary and interface CFTs from the conformal bootstrap / Gliozzi F., Liendo P., Meineri M., and Rago A. // *J. High Energy Phys.* — 2015. — Vol. 2015, no. 05. — P. 036.
 36. Gliozzi F. Truncatable bootstrap equations in algebraic form and critical surface exponents // *J. High Energy Phys.* — 2016. — Vol. 2016, no. 10. — P. 037.
 37. Dey P., Hansen T., Shpot M. Operator expansions, layer susceptibility and two-point functions in BCFT // *J. High Energy Phys.* — 2020. — Vol. 2020, no. 12. — P. 051.
 38. Bissi A., Hansen T., Söderberg A. Analytic bootstrap for boundary CFT // *J. High Energy Phys.* — 2019. — Vol. 2019, no. 01. — P. 010.
 39. Procházka V., Söderberg A. Composite operators near the boundary // *J. High Energy Phys.* — 2020. — Vol. 2020, no. 3. — P. 1–42.
 40. Diehl H. W., Dietrich S. Field-Theoretical Approach to Static Critical Phenomena in Semi-Infinite Systems // *Z. Phys. B*. — 1981. — Vol. 42. — P. 65–86.
 41. Ohno K., Okabe Y. Mirror theory of spin systems with a surface // *J. Phys. A: Math. and Gen.* — 1985. — Vol. 18, no. 9. — P. L557–L561.
 42. Shpot M. A. Boundary conformal field theory at the extraordinary transition: The layer susceptibility to $O(\varepsilon)$ // *J. High Energy Phys.* — 2021. — Vol. 2021, no. 1. — P. 055.
 43. Herzog C. P., Kobayashi N. The $O(N)$ model with ϕ^6 potential in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ // *J. High Energy Phys.* — 2020. — Vol. 09. — P. 126. — arXiv : 2005.07863.
 44. Metlitski M. A. Boundary criticality of the $O(N)$ model in $d = 3$ critically revisited. — 2020. — arXiv : 2009.05119.

45. Parisen Toldin F. Boundary Critical Behavior of the Three-Dimensional Heisenberg Universality Class // *Phys. Rev. Lett.* — 2021. — Vol. 126. — P. 135701.
46. Holovatch Yu., Yavors'kii T. Critical exponents of the diluted Ising model between dimensions 2 and 4 // *J. Stat. Phys.* — 1998. — Vol. 92, no. 5-6. — P. 785–808.
47. Critical equation of state of randomly dilute Ising systems / Calabrese P., De Prato M., Pelissetto A., and Vicari E. // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 13. — P. 134418–1–134418–11.
48. Harris A. B. Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models // *J. Phys. C.* — 1974. — Vol. 7, no. 9. — P. 1671–1692.
49. Dotsenko V. Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems. Collection Aléa-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics. — 1 ed. — Cambridge University Press, 2001.
50. Parisi G. Field-Theoretic Approach to Second-Order Phase Transitions in Two- and Three-Dimensional Systems // *J. Stat. Phys.* — 1980. — Vol. 23, no. 1. — P. 49–81.
51. Mayer I. Five-loop expansion for a universal combination of critical amplitudes of the 3D dilute Ising model // *Physica A.* — 1998. — Vol. 252. — P. 450–460.
52. Holovatch Yu., Shpot M. Critical exponents of random Ising-like systems in general dimensions // *J. Stat. Phys.* — 1992. — Vol. 66, no. 3/4. — P. 867–883.
53. Bervillier C., Shpot M. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 955–968.
54. Anselmi D., Halat M. Renormalization of Lorentz violating theories // *Phys Rev. D.* — 2007. — Vol. 76. — P. 125011.
55. Anselmi D. Weighted scale invariant quantum field theories // *J. High Energy Phys.* — 2008. — Vol. 2. — P. 051.
56. Wang A. Hořava Gravity at a Lifshitz Point: A Progress Report // *Int. J. Mod. Phys. D.* — 2017. — P. 1730014.

57. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M. Lifshitz-point correlation length exponents from the large- n expansion // *Nucl. Phys. B.* — 2012. — Vol. 862, no. 1. — P. 75–106.
58. Diehl H. W., Grüneberg D., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in periodic slabs: Breakdown of epsilon expansion at the bulk critical point and revised field theory // *Europhys. Lett.* — 2006. — Vol. 75, no. 2. — P. 241–247.
59. Kraemmer U., Rebhan A. Advances in perturbative thermal field theory // *Rep. Prog. Phys.* — 2004. — Vol. 67, no. 3. — P. 351–431.
60. Головач Ю. В., Шпот Н. А. Критическое поведение разбавленной m -векторной модели при нецелых размерностях пространства // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (теория и эксперимент)*. — 1992. — № 3(24). — С. 48–53.
61. Diehl H. W., Shpot M. Surface critical behavior in fixed dimensions $d < 4$: Nonanalyticity of critical surface enhancement and massive field theory approach // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73, no. 25. — P. 3431–3434.
62. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ -expansion results // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12338–12349.
63. Shpot M., Diehl H. W. Two-loop renormalization-group analysis of critical behavior at m -axial Lifshitz points // *Nucl. Phys. B.* — 2001. — Vol. 612, no. 3. — P. 340–372.
64. Diehl H. W., Shpot M. Lifshitz-point critical behaviour to $O(\epsilon^2)$ // *J. Phys. A.* — 2001. — Vol. 34, no. 42. — P. 9101–9105.
65. Diehl H. W., Shpot M. Comment on “Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior” // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 6. — P. 066401–1–066401–2.
66. Diehl H. W., Shpot M. Critical, crossover and correction-to-scaling exponents for isotropic Lifshitz points to order $(8-d)^2$ // *J. Phys. A.* — 2002. — Vol. 35, no. 30. — P. 6249–6259.
67. Diehl H. W., Shpot M. A., Prudnikov P. V. Boundary critical behaviour at m -

- axial Lifshitz points of semi-infinite systems with a surface plane perpendicular to a modulation axis // *J. Phys. A*. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7927–7942.
68. Usatenko Z. E., Shpot M. A., Chin-Kun Hu. Surface critical behavior of random systems: Ordinary transition // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. 63, no. 42. — P. 056102–1–8.
 69. Diehl H. W., Shpot M. A., Zia R. K. P. Relevance of space anisotropy in the critical behavior of m -axial Lifshitz points // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 68, no. 2. — P. 224415.
 70. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M., Diehl H. W. Large- n expansion for m -axial Lifshitz points // *J. Phys.: Condens. Matter*. — 2005. — Vol. 17, no. 20. — P. S1947–S1972.
 71. Shpot M. A., Diehl H. W., Pis'mak Yu. M. Compatibility of $1/n$ and ε expansions for critical exponents at m -axial Lifshitz points // *J. Phys. A*. — 2008. — Vol. 41, no. 13. — P. 135003.
 72. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // *J. Stat. Mech: Theory Exp.* — 2010. — Vol. 2010. — P. P11020. — Erratum: *J. Stat. Mech: Theory Exp.* E05001-1–2 (2011).
 73. Rutkevich S., Diehl H. W., Shpot M. A. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications // *Nucl. Phys. B*. — 2011. — Vol. 843, no. 1. — P. 255–301. — Erratum: *Nucl. Phys. B* 853, 210–211 (2011).
 74. Shpot M. Special surface transition: Massive field theory and critical exponents in three dimensions // *Condens. Matter Phys.* — 1997. — no. 10. — P. 143–164.
 75. Absence of a boson peak in anharmonic phonon models with Akhiezer-type damping / Shvaika A., Shpot M., Schirmacher W., Bryk T., and Ruocco G. — 2021. — arXiv : 2104.13076.
 76. Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Field Theoretical Approach to Critical Phenomena // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Green M. S. — London : Academic Press, 1976. — Vol. 6. — P. 125–

247.

77. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. International series of monographs on physics. — 1st ed. — Oxford : Clarendon Press, 1989. — P. 618–621.
78. Brout R. Statistical mechanical theory of a random ferromagnetic system // *Phys. Rev. B*. — 1959. — Vol. 115, no. 4. — P. 824–835.
79. Griffiths R. B., Lebowitz J. L. Random spin systems: some rigorous results // *J. Math. Phys.* — 1968. — Vol. 9, no. 8. — P. 1284–1292.
80. Emery V. J. Critical properties of many-component systems // *Phys. Rev. B*. — 1975. — Vol. 11. — P. 239–247.
81. Edwards S. F., Anderson P. W. Theory of spin glasses // *J. Phys. F: Metal Physics*. — 1975. — Vol. 5, no. 5. — P. 965–974.
82. Grinstein G., Luther A. Application of the renormalization group to phase transitions in disordered systems // *Phys. Rev. B*. — 1976. — Vol. 13, no. 3. — P. 1329–1343.
83. Harris A. B., Lubensky T. C. Renormalization-group approach to the critical behavior of random-spin models // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Vol. 33, no. 26. — P. 1540–1543.
84. Lubensky T. C. Critical properties of random-spin models from the ϵ -expansion // *Phys. Rev. B*. — 1975. — Vol. 11, no. 9. — P. 3573–3580.
85. Хмельницкий Д. Е. Фазовый переход второго рода в неоднородных телах // *ЖЭТФ*. — 1975. — Т. 68, № 5. — С. 1960–1968.
86. Jayaprakash C., Katz H. J. Higher-order corrections to the $\sqrt{\epsilon}$ expansion of the critical behaviour of the random Ising system // *Phys. Rev. B*. — 1977. — Vol. 16. — P. 3987–3990.
87. Шалаев Б. Н. Фазовый переход в слабо-неупорядоченном одноосном ферромагнетике // *ЖЭТФ*. — 1977. — Т. 73, № 6. — С. 2301–2308.
88. Shalaev B. N., Antonenko S. A., Sokolov A. I. Five-loop $\sqrt{\epsilon}$ -expansions for random Ising model and marginal spin dimensionality for cubic systems // *Phys. Lett. A*. — 1997. — Vol. 230. — P. 105–110.

89. Folk R., Holovatch Yu., Yavors'kii T. The correction-to-scaling exponent in dilute systems // *JETP Lett.* — 1999. — Vol. 69. — P. 747–752.
90. Kompaniets M. V., Kudlis A., Sokolov A. I. Critical behavior of the weakly disordered Ising model: Six-loop $\sqrt{\varepsilon}$ expansion study // *Phys. Rev. E.* — 2021. — Vol. 103. — P. 022134.
91. Соколов А. И., Шалаев Б. Н. О критическом поведении модели Изинга с примесями // *ФТТ.* — 1981. — Т. 23, № 7. — С. 2058–2063.
92. Jug G. Critical behavior of disordered spin systems in two and three dimensions // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 27, no. 1. — P. 609–612.
93. Майер И. О., Соколов А. И. Критические индексы примесной модели Изинга // *ФТТ.* — 1984. — Т. 26, № 11. — С. 3454–3456.
94. Шпот Н. А. К вопросу о критическом поведении mn -компонентной полевой модели в трехмерном пространстве: Трехпетлевое приближение // *Препринт ИТФ-88-140Р.* — 1988. — Киев - 1988.
95. Mayer I. O., Sololov A. I., Shalaev B. N. Critical exponents for cubic and impure uniaxial crystals: most accurate (?) theoretical values // *Ferroelectrics.* — 1989. — Vol. 95, no. 1. — P. 93–95.
96. Mayer I. O. Critical exponents of the dilute Ising model from four-loop expansions // *J. Phys. A.* — 1989. — Vol. 22, no. 14. — P. 2815–2823.
97. Folk R., Holovatch Yu., Yavors'kii T. Effective and asymptotic critical exponents of a weakly diluted quenched Ising model: Three-dimensional approach versus $\sqrt{\varepsilon}$ expansion // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61. — P. 15114–15129.
98. Holovatch Y., Shpot N. Critical behaviour of dilute Ising-like systems in non-integer dimensions // *Preprint ITP-90-48E.* — 1990. — Kiev - 1990.
99. Newman K. E., Riedel E. K. Cubic N-vector model and randomly dilute Ising model in general dimensions // *Phys. Rev. B.* — 1982. — Vol. 25, no. 1. — P. 264–280.
100. Randomly dilute Ising model: A nonperturbative approach / Tissier M., Mouhanna D., Vidal J., and Delamotte B. // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65. — P. 140402.

101. Wetterich C. Average action and the renormalization group equations // *Nucl. Phys. B.* — 1991. — Vol. 352, no. 3. — P. 529–584.
102. Schloms R., Dohm V. Minimal renormalization without *varepsilon*-expansion: Critical behavior in three dimensions // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — Vol. 328. — P. 639–663.
103. Фольк Р., Головач Ю., Яворский Т. Критические показатели трехмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга // *УФН.* — 2003. — Т. 173. — С. 175–200.
104. Никитина М. А., Соколов А. И. Критические индексы и псевдо- ϵ -разложение // *ТМФ.* — 2016. — Т. 186, № 2. — С. 230–242.
105. Kudlis A., A.I.Sokolov. Anisotropy of a cubic ferromagnet at criticality // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 94. — P. 042107.
106. Pelissetto A., Vicari E. Randomly dilute spin models: A six-loop field-theoretic study // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 27, no. 10. — P. 6393–6409.
107. Critical exponents of the three-dimensional diluted Ising model / Balles-teros H. G., Fernández L. A., Martin-Mayor V., Sudupe A. M., Parisi G., and Ruiz-Lorenzo J. J. // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 58, no. 5. — P. 2740–2747.
108. Crossover behavior in three-dimensional dilute spin systems / Calabrese P., Parruccini P., Pelissetto A., and Vicari E. // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 69. — P. 036120.
109. Privman V., Hohenberg P. C., Aharony A. Universal Critical-Point Amplitude Relations // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Lebowitz J. L. — New York : Academic Press, 1991. — Vol. 14. — P. 1–134, 364–367.
110. Grinstein G., Ma S., Mazenko G. F. Dynamics of spins interacting with quenched random impurities // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 15. — P. 258–272.
111. Pelcovits R. A., Aharony A. Structure factor for dilute magnetic systems // *Phys. Rev. B.* — 1985. — Vol. 31. — P. 350–357.
112. Newlove S. A. Critical amplitudes for the random Ising system // *J. Phys.*

- C.* — 1983. — Vol. 16. — P. L423–L426.
113. Шпот Н. А. Уравнение состояния и универсальные комбинации термодинамических критических амплитуд примесной модели Изинга // *ЖЭТФ*. — 1990. — Т. 98, № 5(11). — С. 1762–1777.
 114. Bervillier C., Shpot M. Critical amplitude relations for disordered Ising systems // *Preprint ITP-93-2E*. — 1993. — Lviv - 1993.
 115. Diehl H. W. Field-theoretical Approach to Critical Behaviour at Surfaces // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Lebowitz J. L. — London : Academic Press, 1986. — Vol. 10. — P. 75–267.
 116. Binder K. Critical behaviour at surfaces // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Lebowitz J. L. — London : Academic Press, 1983. — Vol. 8. — P. 1–144.
 117. Lubensky T. C., Rubin M. H. ϵ Expansion in Semi-infinite Ising Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1973. — Vol. 31. — P. 1469–1472.
 118. Lubensky T. C., Rubin M. H. Critical phenomena in semi-infinite systems. II. Mean-field theory // *Phys. Rev. B*. — 1975. — Vol. 12. — P. 3885–3901.
 119. Symanzik K. Schrödinger Representation and Casimir Effect in Renormalizable Quantum Field Theory // *Nucl. Phys. B*. — 1981. — Vol. 190. — P. 1–44.
 120. Reeve J. S., Guttmann A. J. Critical Behavior of the n -Vector Model with a Free Surface // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45. — P. 1581–1584.
 121. Diehl H. W., Dietrich S. Scaling Laws and Surface Exponents from Renormalization-Group Equations // *Phys. Lett.* — 1980. — Vol. 80A. — P. 408–412.
 122. Reeve J., Guttmann A. J. Renormalisation group calculations of the critical exponents of the n -vector model with a free surface // *J. Phys. A*. — 1981. — Vol. 14. — P. 3357–3366.
 123. Diehl H. W., Dietrich S. Field-Theoretical Approach to Multicritical Behavior Near Free Surfaces // *Phys. Rev. B*. — 1981. — Vol. 24. — P. 2878–2880.
 124. Diehl H. W., Dietrich S. Multicritical Behaviour at Surfaces // *Z. Phys. B*. — 1983. — Vol. 50. — P. 117–129.

125. Diehl H. W. The theory of boundary critical phenomena // *Int. J. Mod. Phys. B.* — 1997. — Vol. 11. — P. 3503–3523.
126. Ohno K., Okabe Y. Effect of randomness on surface critical phenomena // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46, no. 10. — P. 5917–5927.
127. Usatenko Z., Chin-Kun Hu. Critical behavior of semi-infinite random systems at the special surface transition // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 65. — P. 066103.
128. Usatenko Z., Chin-Kun Hu. Crossover between special and ordinary transitions in random semi-infinite Ising-like systems // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 68. — P. 066115.
129. Usatenko Z., Ciach A. Critical adsorption of polymers in a medium with long-range correlated quenched disorder // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 70. — P. 051801.
130. Usatenko Z., ek J. S. Surface critical behaviour of semi-infinite systems with cubic anisotropy at the ordinary transition // *J. Phys. A: Mathematical and General.* — 2004. — Vol. 37, no. 28. — P. 7113.
131. Živić I., Elezović-Hadžić S., Milošević S. Self-interacting polymer chains terminally anchored to adsorbing surfaces of three-dimensional fractal lattices // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* — 2018. — Vol. 490. — P. 732 – 744.
132. Phase transitions in single macromolecules: Loop-stretch transition versus loop adsorption transition in end-grafted polymer chains / Zhang S., Qi S., Klushin L. I., Skvortsov A. M., Yan D., and Schmid F. // *J. Chem. Phys.* — 2018. — Vol. 148, no. 4. — P. 044903.
133. Usatenko Z., Danel K. S. Investigation of a dilute polymer solution in confined geometries. — 2018. — arXiv:1801.01590.
134. Bender C. M., Orszag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. — New York : McGraw-Hill, 1978.
135. Diehl H. W., Nüsser A. Critical behavior of the nonlinear σ -model with a free surface: The ordinary transition in $2 + \epsilon'$ dimensions // *Phys. Rev. Lett.* —

1986. — Vol. 56. — P. 2834–2837.
136. Brézin E., Zinn-Justin J., Le Guillou J. C. Anomalous dimensions of composite operators near two dimensions for ferromagnets with $O(n)$ symmetry // *Phys. Rev. B*. — 1976. — Vol. 14. — P. 4976–4977.
 137. Hornreich R. M., Luban M., Shtrikman S. Critical behavior at the onset of $\vec{k}$ -space instability on the λ line // *Phys. Rev. Lett.* — 1975. — Vol. 35, no. 25. — P. 1678–1681.
 138. Diehl H. W. Critical behavior at M -axial Lifshitz points // *Acta physica slovacica*. — 2002. — Vol. 52, no. 4. — P. 271–283.
 139. Selke W. The ANNNI model — theoretical analysis and experimental application // *Phys. Rep.* — 1988. — Vol. 170, no. 4. — P. 213–264.
 140. Selke W. Spatially Modulated Structures in Systems with Competing Interactions // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Lebowitz J. L. — London : Academic Press, 1992. — Vol. 15. — P. 1–72.
 141. Selke W. Monte Carlo calculations near a uniaxial Lifshitz point // *Z. Phys. B*. — 1978. — Vol. 29. — P. 133–137.
 142. Selke W. Critical exponents near the XY Lifshitz point // *J. Phys. C*. — 1980. — Vol. 13. — P. L261–L263.
 143. Pleimling M., Henkel M. Anisotropic scaling and generalized conformal invariance at Lifshitz points // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87, no. 12. — P. 125702–1–4.
 144. Nishiyama Y. Multicriticality of the $(2 + 1)$ -dimensional gonihedric model: A realization of the $(d, m) = (3, 2)$ Lifshitz point // *Phys. Rev. E*. — 2007. — Vol. 75, no. 5. — P. 051116.
 145. Mo Z., Ferer M. Three-dimensional axial next-nearest-neighbor Ising model: A series investigation // *Phys. Rev. B*. — 1991. — Vol. 43, no. 13. — P. 10 890–10 905.
 146. Butera P., Pernici M. $(m, d, N) = (1, 3, 2)$ Lifshitz point and the three-dimensional XY universality class studied by high-temperature bivariate series for XY models with anisotropic competing interactions // *Phys. Rev. B*. — 2008. —

Vol. 78, no. 5. — P. 054405.

147. Redner S., Stanley H. E. Helical order and its onset at the Lifshitz point // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 16, no. 11. — P. 4901–4906.
148. Hornreich R. M., Luban M., Shtrikman S. Critical exponents at a Lifshitz point to $O(1/n)$ // *Phys. Lett.* — 1975. — Vol. 55A, no. 5. — P. 269–270.
149. Erzan A., Stell G. Isotropic Lifshitz point in $2 < d < 4$ dimensions // *Phys. Rev. B.* — 1977. — Vol. 16, no. 9. — P. 4146–4153.
150. Bonanno A., Zappalà D. Isotropic Lifshitz critical behavior from the functional renormalization group // *Nucl. Phys. B.* — 2015. — Vol. 893. — P. 501 – 511.
151. $O(N)$ and $O(N)$ and $O(N)$ / Gubser S. S., Jepsen C., Parikh S., and Trundy B. // *arXiv:1703.04202*. — 2017.
152. Zappalà D. Isotropic Lifshitz point in the $O(N)$ Theory // *arXiv:1703.00791*. — 2017.
153. Zappalà D. Indications of isotropic Lifshitz points in four dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98. — P. 085005.
154. Renormalization group calculation for critical points of higher order with general propagator / Nicoll J. F., Tuthill G. F., Chang T. S., and Stanley H. E. // *Phys. Lett. A.* — 1976. — Vol. 58, no. 1. — P. 1–2.
155. Selke W. Lifshitz points of higher character // *Phys. Lett. A.* — 1977. — Vol. 61. — P. 443–444.
156. Mukamel D. Critical behaviour associated with helical order near a Lifshitz point // *J. Phys. A.* — 1977. — Vol. 10, no. 12. — P. L249–252.
157. Mukamel D., Luban M. Critical behavior at a Lifshitz point: Calculation of a universal amplitude ratio // *Phys. Rev. B.* — 1978. — Vol. 18, no. 7. — P. 3631–3636.
158. Hornreich R. M., Bruce A. D. Behaviour of the critical wavevector near a Lifshitz point // *J. Phys. A.* — 1978. — Vol. 11, no. 3. — P. 595–601.
159. Sak J., Grest G. S. Critical exponents for the Lifshitz point: ϵ expansion // *Phys. Rev. B.* — 1978. — May. — Vol. 17, no. 9. — P. 3602–3606.
160. Grest G. S., Sak J. Low-temperature renormalization group for the Lifshitz

- point // *Phys. Rev. B.* — 1978. — May. — Vol. 17, no. 9. — P. 3607–3610.
161. Hornreich R. M. The Lifshitz Point: Phase Diagrams and Critical Behavior // *J. Magn. Magn. Mat.* — 1980. — Vol. 15–18. — P. 387–392.
 162. Lifshitz point in MnP / Becerra C. C., Shapira Y., N. F. Oliveira J., and Chang T. S. // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 44, no. 25. — P. 1692–1695.
 163. Phase diagram, susceptibility, and magnetostriction of MnP: evidence for a Lifshitz point / Shapira Y., Becerra C., Oliveira Jr. N., and Chang T. // *Phys. Rev. B.* — 1981. — Vol. 24, no. 5. — P. 2780–2806.
 164. Aharony A., Mukamel D. Possible Lifshitz point behaviour in NbO₂ // *J. Phys. C.* — 1980. — Vol. 13, no. 11. — P. L255–L259.
 165. Chen J. H., Lubensky T. C. Landau-Ginzburg mean-field theory for the nematic to smectic-C and nematic to smectic-A phase transitions // *Phys. Rev. A.* — 1976. — Vol. 14, no. 3. — P. 1202–1207.
 166. Ajdari A., Peliti L., Prost J. Fluctuation-induced long-range forces in liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 66, no. 11. — P. 1481–1484.
 167. "Pseudo-Casimir" effect in liquid crystals / Ajdari A., Duplantier B., D.Hone, Peliti L., and Prost J. // *J. Phys. II France.* — 1992. — Vol. 2. — P. 487–501.
 168. Vysochanskii Y. M., Slivka V. Y. Lifshitz point on the state diagram of ferroelectrics // *Usp. Fiz. Nauk.* — 1992. — Vol. 162. — P. 139–160. — [Sov. Phys. Usp. **35**, 123–134].
 169. Phase Transitions in Ferroelectric Phosphorous Chalcogenide Crystals / Vysochanskii Y. M., Janssen T., Currat R., Folk R., Banys J., Grigas J., and Damulionis V. — Vilnius : Vilnius University Publishing House, 2006.
 170. About the existence of a Lifshitz point on the phase diagram of Sn₂P₂(Se_xS_{1-x})₆ solid solutions: acoustic and optical studies / Martynyuk-Lototska I., Mys O., Zapeka B., and Vlokh R. // *Phil. Mag.* — 2011. — Vol. 91, no. 26. — P. 3519–3546.
 171. Binder K., Wang J.-S. Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: Phenomenological Scaling Theory and Monte Carlo simulations // *J. Stat. Phys.* — 1989. — Vol. 55, no. 1/2. — P. 87–126.

172. Leung K.-t. Finite-size scaling of driven diffusive systems: Theory and Monte Carlo studies // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 66, no. 4. — P. 453–456.
173. Henkel M. Phenomenology of local scale invariance: from conformal invariance to dynamical scaling // *Nucl. Phys. B.* — 2002. — Vol. 641, no. 3. — P. 405–486.
174. Aharony A. Critical Phenomena // Phase Transitions and Critical Phenomena / ed. by Domb C., Green M. S. — London : Academic Press, 1976. — Vol. 6. — P. 357–424.
175. Boyanovsky D., Cardy J. L. Critical behavior of m -component magnets with correlated impurities // *Phys. Rev. B.* — 1982. — Vol. 26. — P. 154–170.
176. Weinrib A., Halperin B. I. Critical phenomena in systems with long-range-correlated quenched disorder // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 27. — P. 413–427.
177. Schmittmann B., Zia R. K. P. Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems. — London : Academic Press, 1995. — Vol. 17 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. — P. 1–220.
178. Krug J. Origins of scale invariance in growth processes // *Adv. Phys.* — 1997. — Vol. 46, no. 2. — P. 139–282.
179. Halperin B. I., Hohenberg P. C. Theory of dynamic critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.* — 1977. — Vol. 49, no. 3. — P. 435–479.
180. Zieba A., Słota M., Kucharczyk M. Modulated phases, magnetic phase diagrams, and the Lifshitz point in MnP from the mean field theory // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61, no. 5. — P. 3435–3449.
181. Henkel M. Local Scale Invariance and Strongly Anisotropic Equilibrium Critical Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, no. 10. — P. 1940–1943.
182. Mergulhão Jr. C., Carneiro C. E. I. Field-theoretic approach to the Lifshitz point // *Phys. Rev. B.* — 1998. — Vol. 58, no. 10. — P. 6047–6056.
183. Mergulhão Jr. C., Carneiro C. E. I. Field-theoretic calculation of critical exponents for the Lifshitz point // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 59, no. 21. — P. 13954–13964.

184. Leite M. M. Susceptibility amplitude ratio near a Lifshitz point // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 61, no. 21. — P. 14691–14693.
185. de Albuquerque L. C., Leite M. M. Anisotropic Lifshitz point at $O(\epsilon_L^2)$ // *J. Phys. A*. — 2001. — Vol. 34, no. 22. — P. L327–L332.
186. de Albuquerque L. C., Leite M. M. Reply to ‘Lifshitz-point critical behaviour to $O(\epsilon_L^2)$ ’ // *J. Phys. A*. — 2002. — Vol. 35. — P. 1807–1812.
187. Leite M. M. Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 67. — P. 104415–1–28.
188. Anselmi D. Weighted power counting, neutrino masses, and Lorentz violating extensions of the standard model // *Phys Rev. D*. — 2009. — Vol. 79. — P. 025017.
189. Hořava P. Membranes at quantum criticality // *J. High Energy Phys.* — 2009. — Vol. 3. — P. 020.
190. Hořava P. Quantum gravity at a Lifshitz point // *Phys. Rev. D*. — 2009. — Vol. 79, no. 8. — P. 084008.
191. Visser M. Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator // *Phys. Rev. D*. — 2009. — Vol. 80. — P. 025011.
192. Calcagni G. Cosmology of the Lifshitz universe // *J. High Energy Phys.* — 2009. — Vol. 9. — P. 112.
193. Sotiriou T. P., Visser M., S. Weinfurtner. Phenomenologically Viable Lorentz-Violating Quantum Gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 102. — P. 251601.
194. Ferrero A., Altschul B. Renormalization of scalar and Yukawa field theories with Lorentz violation // *Phys. Rev. D*. — 2011. — Vol. 84, no. 6. — P. 065030.
195. Diehl H. W., Rutkevich S., Gerwinski A. Surface critical behaviour at m -axial Lifshitz points: continuum models, boundary conditions and two-loop renormalization group results // *J. Phys. A*. — 2003. — Vol. 36, no. 16. — P. L243–L248.
196. Diehl H. W., Gerwinski A., Rutkevich S. Boundary critical behavior at m -axial Lifshitz points for a boundary plane parallel to the modulation axes // *Phys.*

- Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 22. — P. 224428–1–30. — cond-mat/0308483.
197. Diehl H. W., Rutkevich S. Boundary critical behaviour at m -axial Lifshitz points: the special transition for the case of a surface plane parallel to the modulation axes // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. 8575–94. — cond-mat/0406216.
 198. Gumbs G. Surface critical behavior near the Lifshitz point of a semi-infinite system // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 33, no. 9. — P. 6500–6502.
 199. Binder K., Frisch H. L. Surface effects on phase transitions of modulated phases and at Lifshitz points: A mean field theory of the ANNNI model // *Eur. Phys. J.* — 1999. — Vol. 10. — P. 71–90.
 200. Frisch H. L., Kimball J. C., Binder K. Surface critical behaviour near the uniaxial Lifshitz point of the axial next-nearest-neighbour Ising model // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 2000. — Vol. 12, no. 1. — P. 29–42.
 201. Pleimling M. Surface critical exponents at an uniaxial Lifshitz point // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65, no. 18. — P. 184406–1–9.
 202. Fisher M. E. The renormalization group in the theory of critical behavior // *Rev. Mod. Phys.* — 1974. — Vol. 46, no. 4. — P. 597–616.
 203. Stanley H. E. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. International series of monographs on physics. — Oxford : Oxford University Press, 1971.
 204. Abe R. Expansion of a Critical Exponent in Inverse Powers of Spin Dimensionality // *Progr. Theor. Phys.* — 1972. — Vol. 48, no. 4. — P. 1414–1415.
 205. Abe R. Expansion of a Critical Exponent in Inverse Powers of Spin Dimensionality // *Progr. Theor. Phys.* — 1973. — Vol. 49, no. 1. — P. 113–128.
 206. Ma S. Critical exponents for charged and neutral Bose gases above λ points // *Phys. Rev. Lett.* — 1972. — Vol. 29, no. 19. — P. 1311–1314.
 207. Ma S. Critical exponents above T_c to $O(1/n)$ // *Phys. Rev. A.* — 1973. — Vol. 7, no. 6. — P. 2172–2187.
 208. Vasiliev A. N. Quantum Field Renormalization Group in the Theory of Critical Behavior and Stochastic Dynamics. — 1st ed. — St-Petersburg : PINF Publ.,

1998. — P. 773. — (In Russian). English translation: A. N. Vasil'ev, The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics, Chapman and Hall / CRC, 2004.
209. The large N -expansion in quantum field theory and statistical physics: from spin systems to 2-dimensional gravity / ed. by Brézin E. — World Scientific: Singapore. — 1993.
210. Two-point correlation function of three-dimensional $O(N)$ models: The critical limit and anisotropy / Campostrini M., Pelissetto A., Rossi P., and Vicari E. // *Phys. Rev. E*. — 1998. — Vol. 57. — P. 184–210.
211. Pelissetto A., Rossi P., Vicari E. Large- n critical behavior of $O(n) \times O(m)$ spin models // *Nucl. Phys. B*. — 2001. — Vol. 607, no. 3. — P. 605–634.
212. Gracey J. A. Critical exponents in $O(N) \times O(m)$ spin models at $O(1/N^2)$ // *Phys. Rev. B*. — 2002. — Vol. 66, no. 13. — P. 134402–1–5.
213. McAvity D. M., Osborn H. Conformal field theories near a boundary in general dimensions // *Nucl. Phys. B*. — 1995. — Vol. 455. — P. 522–576.
214. Le Doussal P., Wiese K. J. Functional Renormalization Group at Large N for Disordered Elastic Systems, and Relation to Replica Symmetry Breaking // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 68, no. 17. — P. 174202–1–35.
215. Le Doussal P., Wiese K. J. Derivation of the functional renormalization group β -function at order $1/N$ for manifolds pinned by disorder // *Nucl. Phys. B*. — 2004. — Vol. 701, no. 3. — P. 409–480.
216. Generalizations of the Kardar-Parisi-Zhang equation / Doherty J. P., Moore M. A., Kim J. M., and Bray A. J. // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 72. — P. 2041.
217. Franz M., Tešanović Z., Vafek O. QED₃ theory of pairing pseudogap in cuprates: From d -wave superconductor to antiferromagnet via an algebraic Fermi liquid // *Phys. Rev. B*. — 2002. — Vol. 66. — P. 054535–1–31.
218. Large N field theories, string theory and gravity / Aharony O., Gubser S. S., Maldacena J., Ooguri H., and Oz Y. // *Phys. Rep.* — 2000. — Vol. 323, no. 3/4. — P. 183–386.

219. Moshe M., Zinn-Justin J. Quantum Field Theory in the Large N Limit: a review // *Phys. Rep.* — 2003. — Vol. 385. — P. 69–228.
220. Kalok L., Obermair G. M. Competing interaction and critical properties in the spherical model // *J. Phys. C.* — 1976. — Vol. 9. — P. 819–823.
221. Hornreich R. M., Luban M., Shtrikman S. Exactly solvable model exhibiting a multicritical point // *Physica A.* — 1977. — Vol. 86A. — P. 465–470.
222. Frachebourg L., Henkel M. Exact Correlation Function at the Lifshitz Points of the Spherical Model // *Physica A.* — 1993. — Vol. 195. — P. 577–602.
223. Nicoll J. F., Chang T. S., Stanley H. E. Exact and approximate differential renormalization-group generators // *Phys. Rev. A.* — 1976. — Vol. 13, no. 3. — P. 1251–1264.
224. Inayat-Hussain A. A., Buckingham M. J. Continuously varying critical exponents to $O(1/n)$ // *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 41, no. 10. — P. 5394–5417.
225. Bagnuls C., Bervillier C. Exact renormalization group equations: an introductory review // *Physics Reports.* — 2001. — Vol. 348, no. 1-2. — P. 91–157.
226. Bervillier C. Exact renormalization group equation for the Lifshitz critical point // *Phys. Lett. A.* — 2004. — Vol. 331, no. 1. — P. 110–116.
227. Cardy J. L. Conformal Invariance // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / ed. by Domb C., Lebowitz J. L. — London : Academic Press, 1987. — Vol. 11. — P. 55–126.
228. Di Francesco P., Mathieu P., Senechal D. Conformal Field Theory. — Berlin : Springer, 1997.
229. Henkel M. Conformal Invariance and Critical Phenomena // *Texts and Monographs in Physics.* — Berlin : Springer, 1999.
230. Polyakov A. M. Conformal symmetry of critical fluctuations // *JETP Lett.* — 1970. — Vol. 12. — P. 381–383.
231. Wolsky A. M., Green M. S. Response under arbitrary groups of point transformations of multipoint-correlation functions of local fluctuating quantities // *Phys. Rev. A.* — 1974. — Vol. 9, no. 2. — P. 957–963.
232. Schäfer L. Conformal covariance in the framework of Wilson's renormalization

- group approach // *J. Phys. A.* — 1976. — Vol. 9, no. 3. — P. 377–395.
233. Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions // *J. Stat. Phys.* — 1984. — Vol. 34, no. 5-6. — P. 763–774.
234. Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // *Nucl. Phys. B.* — 1984. — Vol. 241, no. 2. — P. 333–380.
235. Cardy J. L. Conformal Invariance and Surface Critical Behavior // *Nucl. Phys. B.* — 1984. — Vol. 240. — P. 514–532.
236. Cardy J. L. Universal critical-point amplitudes in parallel-plate geometries // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 1443–1445.
237. McAvity D. M., Osborn H. Energy-momentum tensor in conformal field theories near a boundary // *Nucl. Phys. B.* — 1993. — Vol. 406. — P. 655–680.
238. Eisenriegler E. *Polymers Near Surfaces.* — Singapore : World Scientific, 1993.
239. Fendley P., Ludwig A. W. W., Saleur H. *Quantum Impurity Problems in Condensed Matter Physics* // STATPHYS 19 / ed. by Bailin H. — Singapore : World Scientific, 1995. — P. 137–157.
240. Kaku M. *Introduction to Superstrings. Graduate Texts in Contemporary Physics.* — Springer New York, 2012.
241. Casimir H. B. G. On the attraction between two perfectly conducting plates // *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* — 1948. — Vol. B51. — P. 793–795.
242. Fisher M. E., de Gennes P.-G. Phénomènes aux parois dans un mélange binaire critique // *C. R. Acad. Sci. Paris Série B.* — 1978. — Vol. 287. — P. 207–209.
243. Krech M., Dietrich S. Finite-Size Scaling for Critical Films // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 66. — P. 345–348. — [Erratum **67**, 1055 (1991)].
244. Krech M., Dietrich S. Free energy and specific heat of critical films and surfaces // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 46, no. 4. — P. 1886–1922.
245. Krech M. *Casimir Effect in Critical Systems.* — Singapore : World Scientific, 1994.
246. Krech M. Fluctuation-induced forces in critical fluids // *J. Phys.: Condensed*

- Matter*. — 1999. — Vol. 11, no. 37. — P. R391–R412.
247. Kardar M., Golestanian R. The "Friction" of Vacuum, and other Fluctuation-induced Forces // *Rev. Mod. Phys.* — 1999. — Vol. 71, no. 4. — P. 1233–1245.
 248. Brankov J. G., Dantchev D. M., Tonchev N. S. Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems — Scaling and Quantum Effects. — Singapore : World Scientific, 2000.
 249. Grüneberg D., Diehl H. W. Thermodynamic Casimir effects involving interacting field theories with zero modes // *Phys. Rev. B*. — 2008. — Vol. 77, no. 11. — P. 115409.
 250. Garcia R., Chan M. H. W. Critical fluctuation-induced thinning of ^4He films near the superfluid transition // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 1187.
 251. Fukuto M., Yano Y. F., Pershan P. S. Critical Casimir Effect in Three-Dimensional Ising Systems: Measurements on Binary Wetting Films // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 135702–1–4.
 252. Direct measurement of critical Casimir forces / Hertlein C., Helden L., Gambassi A., Dietrich S., and Bechinger C. // *Nature*. — 2008. — Vol. 451. — P. 172–175.
 253. Krech M. Casimir forces in binary liquid mixtures // *Phys. Rev. E*. — 1997. — Vol. 56, no. 2. — P. 1642–1659.
 254. Dantchev D., Krech M. Critical Casimir force and its fluctuations in lattice spin models: Exact and Monte Carlo results // *Phys. Rev. E*. — 2004. — Vol. 69. — P. 046119–1–20.
 255. Monte Carlo simulation results for critical Casimir forces / Vasilyev O., Gambassi A., Maciolek A., and Dietrich S. // *EPL*. — 2007. — Vol. 80. — P. 60009.
 256. Universal scaling functions of critical Casimir forces obtained by Monte Carlo simulations / Vasilyev O., Gambassi A., Maciolek A., and Dietrich S. // *Phys. Rev. E*. — 2009. — Vol. 79, no. 4. — P. 041142. — Erratum: PRE 80, 039902 (2009).
 257. Hasenbusch M. Thermodynamic Casimir effect for films in the three-

- dimensional Ising universality class: Symmetry-breaking boundary conditions // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82, no. 10. — P. 104425.
258. Long range interactions in nanoscale science / French R. H., Parsegian V. A., Podgornik R., Rajter R. F., Jagota A., Luo J., Asthagiri D., Chaudhury M. K., Chiang Y.-m., Granick S., Kalinin S., Kardar M., Kjellander R., Langreth D. C., Lewis J., Lustig S., Wesolowski D., Wettlaufer J. S., Ching W.-Y., Finnis M., Houlihan F., von Lilienfeld O. A., van Oss C. J., and Zemb T. // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82. — P. 1887–1944.
259. Bervillier C., Shpot M. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system // *Preprint SPhT.* — 1991. — Saclay - 1991.
260. Callan C. G. Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory // *Phys. Rev. D.* — 1970. — Vol. 2, no. 8. — P. 1541–1547.
261. Symanzik K. Small distance behaviour in field theory and power counting // *Comm. Math. Phys.* — 1970. — Vol. 18, no. 3. — P. 227–246.
262. Symanzik K. Small-distance-behaviour analysis and Wilson expansions // *Comm. Math. Phys.* — 1971. — Vol. 23, no. 1. — P. 48–86.
263. Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Wilson's Theory of Critical Phenomena and Callan-Symanzik Equations in $4 - \epsilon$ Dimensions // *Phys. Rev. D.* — 1973. — Vol. 8, no. 2. — P. 434–440.
264. Ising-Model Critical Indices in Three Dimensions from the Callan-Symanzik Equation / Baker G. A., Nickel B. G., Green M. S., and Meiron D. I. // *Phys. Rev. Lett.* — 1976. — Vol. 36, no. 23. — P. 1351–1354.
265. Nickel B. G., Meiron D. I., G. A. Baker J. Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuum spin models. — 1977. — Guelph University Report.
266. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Critical Exponents for the n -Vector Model in Three Dimensions from Field Theory // *Phys. Rev. Lett.* — 1977. — Vol. 39, no. 2. — P. 95–98.
267. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. — New York : National Bureau of Standards, 1972.
268. Amit D. J. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenom-

- ena. — 2nd ed. — Singapore : World Scientific, 1984.
269. Andrews G. E., Askey R., Roy R. Special functions // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — Cambridge : Cambridge University Press, 1999. — Vol. 71.
 270. Srivastava H. M., Manocha H. L. A treatise on generating functions. — John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto : Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester)/Wiley, 1984.
 271. Lewin L. Polylogarithms and Associated Functions. — New York : Elsevier, 1981.
 272. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. More Special Functions. — New York : Gordon and Breach, 1990. — Vol. 3.
 273. Broadhurst D. J., Fleischer J., Tarasov O. V. Two-loop two-point functions with masses: asymptotic expansions and Taylor series, in any dimension // *Z. Phys. C*. — 1993. — Vol. 60, no. 2. — P. 287–301.
 274. Davydychev A. I., Kalmykov M. Yu. New results for the ε -expansion of certain one-, two- and three-loop Feynman diagrams // *Nucl. Phys. B*. — 2001. — Vol. 605, no. 1-3. — P. 266–318.
 275. Pelissetto A., Vicari E. The effective potential of N-vector models: a field-theoretic study to $O(\varepsilon^3)$ // *Nucl. Phys. B*. — 2000. — Vol. 575, no. 3. — P. 579–598.
 276. Davydychev A. I., Tausk J. B. Connection between certain massive and massless diagrams // *Phys. Rev. D*. — 1996. — Vol. 53, no. 12. — P. 7381–7384.
 277. Tarasov O. V. Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension // *Phys. Rev. D*. — 1996. — Vol. 54, no. 10. — P. 6479–6490.
 278. Laporta S., Remiddi E. Analytic treatment of the two loop equal mass sunrise graph // *Nucl. Phys. B*. — 2005. — Vol. 704, no. 1-2. — P. 349–386.
 279. Tarasov O. V. Hypergeometric representation of the two-loop equal mass sunrise diagram // *Phys. Lett. B*. — 2006. — Vol. 638, no. 2-3. — P. 195–201.
 280. Mathematica 3.0, a product of Wolfram Research.

281. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Elementary Functions. — New York : Gordon and Breach, 1986. — Vol. 1.
282. Kenna R., Ruiz-Lorenzo J. J. Scaling analysis of the site-diluted Ising model in two dimensions // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 78. — P. 031134.
283. Gordillo-Guerrero A., Kenna R., Lorenzo J. J. R. The quenched-disordered Ising model in two and four dimensions // *AIP Conference Proceedings*. — 2009. — Vol. 1198, no. 1. — P. 42–54.
284. Holovatch Yu., Krokhamal's'kii T. Compilation of two-point and four-point graphs in field theory in noninteger dimensions // *J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35, no. 8. — P. 3866–3880.
285. Holovatch Yu. On the method for study of the critical behaviour of spin models in arbitrary space dimension // *Condens. Matter Phys.* — 1994. — no. 3. — P. 33–56.
286. Cappelli A., Maffi L., Okuda S. Critical Ising model in varying dimension by conformal bootstrap // *J. High Energy Phys.* — 2019. — Vol. 2019, no. 1. — P. 161.
287. Bervillier C., Godrèche C. Universal combination of critical amplitudes from field theory // *Phys. Rev. B*. — 1980. — Vol. 21, no. 11. — P. 5427–5431.
288. Rajantie A. K. Feynman diagrams to three loops in three-dimensional field theory // *Nucl. Phys. B*. — 1996. — Vol. 480, no. 3. — P. 729–752.
289. Three-dimensional randomly dilute Ising model: Monte Carlo results / Calabrese P., Martín-Mayor V., Pelissetto A., and Vicari E. // *Phys. Rev. E*. — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 036136–1–17.
290. Wallace D. J. Critical behaviour of anisotropic cubic systems // *J. Phys. C: Solid State Physics*. — 1973. — Vol. 6, no. 8. — P. 1390.
291. Aharony A. Equation of state for cubic ferromagnets // *Phys. Rev. B*. — 1974. — Vol. 10. — P. 3006–3009.
292. Nonasymptotic critical behavior from field theory at $d = 3$. II. The ordered-phase case / Bagnuls C., Bervillier C., Meiron D. I., and Nickel B. G. // *Phys. Rev. B*. — 1987. — Vol. 35. — P. 3585–3607.

293. Aharony A., Hohenberg P. C. Universal relations among thermodynamic critical amplitudes // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 13. — P. 3081–3090.
294. Bervillier C. Universal relations among critical amplitude. Calculations up to order ε^2 for systems with continuous symmetry // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 14, no. 11. — P. 4964–4975.
295. Jaccarino V., King A. R. Static and Dynamic Critical Behavior in Random Magnets // *J. Phys. Paris.* — 1988. — Vol. 49. — P. 1209–1214.
296. Critical behavior of a site-diluted three-dimensional Ising magnet / Birgeneau R. J., Cowley R. A., Shirane G., Joshizawa H., Belanger D. P., King A. R., and Jaccarino V. // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 27, no. 11. — P. 6747–6753.
297. Dow K. E., Belanger D. P. Specific heat of the random-field Ising system $\text{Fe}_{0.46}\text{Zn}_{0.54}\text{F}_2$ // *Phys. Rev. B.* — 1989. — Vol. 39. — P. 4418–4423.
298. Chase S. I., Kaufman M. Renormalization-group analysis of heat-capacity critical amplitudes // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 33. — P. 239–244.
299. Symanzik K. Massless ϕ^4 theory in $4|\varepsilon$ dimensions // *Lett. Nuovo Cimento.* — 1973. — Vol. 8, no. 13. — P. 771–774.
300. Pleimling M. Critical phenomena at perfect and non-perfect surfaces // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37. — P. R79–R115.
301. Meirovitch H., Livne S. Computer simulation of long polymers adsorbed on a surface. II. Critical behavior of a single self-avoiding walk // *J. Chem. Phys.* — 1988. — Vol. 88. — P. 4507–4515.
302. Hegger R., Grassberger P. Chain polymers near an adsorbing surface // *J. Phys. A.* — 1994. — Vol. 27, no. 12. — P. 4069.
303. Landau D. P., Binder K. Monte Carlo study of surface phase transitions in the three-dimensional Ising model // *Phys. Rev. B.* — 1990. — Vol. 41. — P. 4633–4645.
304. Vendruscolo M., Rovere M., Fasolino A. Magnetic-Phase Transitions of Ising Surfaces with Modified Surface-Bulk Coupling: a Monte Carlo Study // *EPL.* — 1992. — Vol. 20, no. 6. — P. 547.
305. Study of the three-dimensional Ising model on film geometry with the cluster

- Monte Carlo method / Ruge C., Dunkelmann S., Wagner F., and Wulf J. // *J. Stat. Phys.* — 1993. — Vol. 73, no. 1/2. — P. 293–317.
306. Ruge C., Wagner F. Critical parameters for the $d = 3$ Ising model in a film geometry // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Vol. 52. — P. 4209–4216.
307. Diehl H. W., Nüsser A. Critical behavior at dirty surfaces: I. General considerations and a renormalization group analysis // *Z. Phys. B.* — 1990. — Vol. 79. — P. 69–78.
308. Pleimling M., Selke W. Critical phenomena at perfect and non-perfect surfaces // *Eur. Phys. J. B.* — 1998. — Vol. 1. — P. 385–391.
309. Ruge C., Dunkelmann S., Wagner F. New Method for Determination of Critical Parameters // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 69. — P. 2465–2468.
310. Descas R., Sommer J.-U., Blumen A. Static and dynamic properties of tethered chains at adsorbing surfaces: A Monte Carlo study // *Journ. Chem. Phys.* — 2004. — Vol. 120, no. 18. — P. 8831–8840.
311. van Rensburg E. J. J., Rechnitzer A. R. Multiple Markov chain Monte Carlo study of adsorbing self-avoiding walks in two and in three dimensions // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37, no. 27. — P. 6875.
312. Grassberger P. Simulations of grafted polymers in a good solvent // *J. Phys. A.* — 2005. — Vol. 38, no. 2. — P. 323–331.
313. Deng Y., Blöte H. W. J., Nightingale M. P. Surface and bulk transitions in three-dimensional $O(n)$ models // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 016128.
314. Klushin L. I., Skvortsov A. M. Unconventional phase transitions in a constrained single polymer chain // *J. Phys. A.* — 2011. — Vol. 44, no. 47. — P. 473001.
315. Hasenbusch M. Monte Carlo study of surface critical phenomena: The special point // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84, no. 13. — P. 134405.
316. Adsorption of a single polymer chain on a surface: Effects of the potential range / Klushin L. I., Polotsky A. A., Hsu H.-P., Markelov D. A., Binder K., and Skvortsov A. M. // *Phys. Rev. E.* — 2013. — Vol. 87. — P. 022604.

317. De'Bell K., Lookman T., Whittington S. G. Analysis of exact enumeration data for self-avoiding walks attached to a surface // *Phys. Rev. A*. — 1990. — Vol. 41. — P. 682–688.
318. Kikuchi M., Okabe Y. Monte Carlo Study of the Surface Critical Phenomena of the Ising Model // *Progr. Theor. Phys.* — 1985. — Vol. 73. — P. 32–40.
319. Landau D. P., Pandey R., Binder K. Monte Carlo study of surface critical behavior in the XY model // *Phys. Rev. B*. — 1989. — Vol. 39, no. 16. — P. 12302–12305.
320. Ohno K., Okabe Y., Morita A. High-Temperature Series Analysis for the Classical n -Vector Model with a Free Surface // *Prog. Theor. Phys.* — 1984. — Vol. 71. — P. 714–726.
321. Alvarado S. F., Campagna M., Hopster H. Surface Magnetism of Ni(100) near the Critical Region by Spin-Polarized Electron Scattering // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 48. — P. 51–54.
322. Lin S. Z., Zheng B. Short-time critical dynamics at perfect and imperfect surfaces // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 78, no. 1. — P. 011127.
323. Hasenbusch M. Thermodynamic Casimir force: A Monte Carlo study of the crossover between the ordinary and the normal surface universality class // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Vol. 83, no. 13. — P. 134425.
324. Pelissetto A., Vicari E. Critical Phenomena and Renormalization Group Theory // *Phys. Rep.* — 2002. — Vol. 368. — P. 549–727.
325. Phillabaum B., Carlson E. W., Dahmen K. A. Spatial complexity due to bulk electronic nematicity in a superconducting underdoped cuprate // *Nature communications*. — 2012. — Vol. 3, no. 1. — P. 1–8.
326. Collins J. Renormalization. Cambridge Lecture Notes in Physics. — 1 ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 1984.
327. NIST Handbook of Mathematical Functions / ed. by Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010.
328. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Special

Functions. — New York : Gordon and Breach, 1986. — Vol. 2.

329. Miller A. R. On the Mellin transform of a product of two Fox-Wright psi functions // *Journ. Phys. A: Math. Gen.* — 2002. — Vol. 35, no. 9. — P. 2275.
330. Fox C. The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions // *Proc. London Math. Soc.* — 1928. — Vol. 27. — P. 389–400.
331. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // *J. London Math. Soc.* — 1935. — Vol. 10. — P. 286–293.
332. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // *Proc. London Math. Soc.* — 1940. — Vol. 46. — P. 389–408.
333. Miller A. R., Moskowitz I. S. Reduction of a class of Fox-Wright psi functions for certain rational parameters // *Comp. Math. Appl.* — 1995. — Vol. 30, no. 11. — P. 73–82.
334. Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam : Elsevier, 2006.
335. Kiryakova V. The multi-index Mittag-Leffler functions as an important class of special functions of fractional calculus // *Computers & Mathematics with Applications.* — 2010. — Vol. 59, no. 5. — P. 1885–1895.
336. Paris R. Exponentially small expansions in the asymptotics of the Wright function // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2010. — Vol. 234, no. 2. — P. 488 – 504.
337. Paris R. B. . Some remarks on the theorems of Wright and Braaksma on the Wright function ${}_p\Psi_q(z)$ // *arXiv:1708.04824*. — 2017.
338. Paris R. B. The asymptotics of a generalised Struve function // *arXiv:1711.10480*. — 2017.
339. Higher Transcendental Functions / Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F. G. — New York, Toronto and London : McGraw-Hill Book Company, 1953. — Vol. 1.
340. Andrews L. C. Special functions for engineers and applied mathematicians. — Macmillan, 1985.
341. Luke Y. L. The Special Functions and Their Approximations. — New York,

- London : Academic Press, 1969. — Vol. 1.
342. Mathai A. M. A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences. — Oxford : Clarendon Press, 1993.
 343. Kleinert H., Schulte-Frohlinde V. Critical Properties of ϕ^4 -Theories. — Singapore : World Scientific, 2000.
 344. Kaski K., Selke W. Monte Carlo coarse graining for the three-dimensional axial next-nearest-neighbor Ising model // *Phys. Rev. B*. — 1985. — Vol. 31, no. 5. — P. 3128–3130.
 345. Henkel M., Pleimling M. Anisotropic scaling and generalized conformal invariance at Lifshitz points // *Comp. Phys. Comm.* — 2002. — Vol. 147. — P. 419–422.
 346. Муртазаев А. К., Ибаев Ж.Г. Критические свойства анизотропной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями // *ЖЭТФ*. — 2011. — Т. 140, № 1(7). — С. 123–130.
 347. da Silva R., Alves N., Drugowich de Felicio J. R. Time-dependent Monte Carlo simulations of critical and Lifshitz points of the axial-next-nearest-neighbor Ising model // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Vol. 87. — P. 012131.
 348. Diehl H. W. Bulk and boundary critical behavior at Lifshitz points // *Pramana — journal of physics*. — 2005. — Vol. 64, no. 5. — P. 803–816.
 349. Rutkevich S., Diehl H. W., Shpot M. A. Erratum to "On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications" [Nucl. Phys. B 843 (1) (2011) 255–301] // *Nucl. Phys. B*. — 2011. — Vol. 853. — P. 210–211.
 350. Fisher M. E. Scaling, Universality and Renormalization Group Theory // Critical Phenomena / ed. by Hahne F. J. W. — Berlin : Springer-Verlag. — 1983. — Vol. 186 of *Lecture Notes in Physics*. — P. 1–139.
 351. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. International series of monographs on physics. — 3rd ed. — Oxford : Clarendon Press, 1996.
 352. Berends F. A., Davydychev A. I., Smirnov V. A. Small-threshold behaviour of two-loop self-energy diagrams: two-particle thresholds // *Nucl. Phys. B*. —

1996. — Vol. 478, no. 3. — P. 59–89.
353. Kniehl B. A., Tarasov O. V. Finding new relationships between hypergeometric functions by evaluating Feynman integrals // *Nucl. Phys. B.* — 2012. — Vol. 854, no. 3. — P. 841 – 852. — Access mode: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321311005372>.
354. Carlson B. C. Quadratic Transformations of Appell Functions // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* — 1976. — Vol. 7, no. 2. — P. 291–304. — <http://dx.doi.org/10.1137/0507023>.
355. Kalinowski M. W., Sewerynski M., Szymanowski I. On some dimensional regularisation for Feynman massless integrals // *J. Phys. A: Mathematical and General.* — 1982. — Vol. 15, no. 6. — P. 1909.
356. Shpot M. A. Generalized hypergeometric function ${}_3F_2$ with unit argument and negative integral parameter differences. — 2014. — arXiv:1411.2455 [math.CA].
357. Васильев А. Н., Письмак Ю. М., Хонконен Ю. Р. Простой метод расчета критических индексов в $1/n$ -разложении // *ТМФ.* — 1981. — Т. 46. — С. 157–171.
358. Abe R., Hikami S. Critical exponents and scaling relations in $1/n$ expansion // *Progr. Theor. Phys.* — 1973. — Vol. 49, no. 2. — P. 442–452.
359. Brézin E., Zinn-Justin J. Spontaneous breakdown of continuous symmetries near two dimensions // *Phys. Rev. B.* — 1976. — Vol. 14, no. 7. — P. 3110–3120.
360. Vassiliev A. N., Pis'mak Yu. M., Khonkonen Yu. R. Simple method of calculating critical indices in the $1/n$ expansion // *Teor. Mat. Fiz.* — 1981. — Vol. 46. — P. 157–171.
361. Leibbrandt G. Introduction to the technique of dimensional regularization // *Rev. Mod. Phys.* — 1975. — Vol. 47, no. 4. — P. 849.
362. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis. — Cambridge, London, and New York : Cambridge University Press, 1996.
363. Chaudry M. A., Zubair S. M. A Class of Incomplete Gamma Functions with Applications. — Boca Raton : Chapman and Hall/CRC, 2002.

364. Higher Transcendental Functions / ed. by Erdélyi A. — New York : McGraw-Hill. — 1955. — Vol. 3.
365. 2008. — Mathematica 7.0, a product of Wolfram Research.
366. Danchev D. M. Exact three-dimensional Casimir force amplitude, C function, and Binder's cumulant ratio: Spherical model results // *Phys. Rev. E*. — 1998. — Vol. 58, no. 2. — P. 1455–1462.
367. Dantchev D., Diehl H. W., Grüneberg D. Excess free energy and Casimir forces in systems with long-range interactions of van der Waals type: General considerations and exact spherical-model results // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 73, no. 1. — P. 016131.
368. Hucht A. Thermodynamic Casimir effect in ^4He films near T_λ : Monte Carlo results // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 185301.
369. Hasenbusch M. Another method to compute the thermodynamic Casimir force in lattice models // *Phys. Rev. E*. — 2009. — Vol. 80, no. 6. — P. 061120.
370. Hucht A., Grüneberg D., Schmidt F. M. Aspect ratio dependence of thermodynamic Casimir forces // *Phys. Rev. E*. — 2011. — Vol. 79, no. 10. — P. 104301.
371. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Erratum: Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // *J. Stat. Mech.* — 2011. — Vol. 2011, no. 5. — P. E05001–1–2.
372. Knops H. J. F. Infinite spin dimensionality limit for nontranslationally invariant interactions // *J. Math. Phys.* — 1973. — Vol. 14, no. 12. — P. 1918–1920.
373. Bray A. J., Moore M. A. Critical behaviour of semi-infinite systems // *J. Phys. A*. — 1977. — Vol. 10. — P. 1927–1961.
374. Comtesse D., Hucht A., Grüneberg D. Thermodynamic Casimir Effect in the large- n limit // *arXiv:0904.3661*. — 2009.
375. Li H., Kardar M. Fluctuation-induced Forces between Rough Surfaces // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 67, no. 23. — P. 3275–3278.
376. Li H., Kardar M. Fluctuation-induced forces between manifolds immersed in correlated fluids // *Phys. Rev. A*. — 1992. — Vol. 46, no. 10. — P. 6490–6500.
377. Oswald P., Pieranski P. Smectic and Columnar Liquid Crystals // *The Liquid*

- Crystals book series / ed. by Gray G., Goodby J., Fukuda A. — Boca Raton : Taylor and Francis, 2006.
378. Mikheev L. V. Possibility of a roughening transition at the boundary of a smectic and wetting of the free liquid surface by the smectic // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1989. — Vol. 96, no. 2. — P. 632–640.
 379. Markun B., Žumer S. Casimir interaction in smectic-A liquid crystals caused by coupled fluctuations of positional and orientational order // *Phys. Rev. E.* — 2006. — Vol. 73. — P. 031702.
 380. Titchmarsh E. C. Introduction to the theory of Fourier integrals. — 2nd ed. — Oxford : Clarendon Press, 19.
 381. Miller A. R. On certain Schlömilch-type series // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 1997. — Vol. 80, no. 1. — P. 83–95.
 382. Burkhardt T. W., Eisenriegler E. Critical Phenomena Near Free Surfaces and Defect Planes // *Phys. Rev. B.* — 1981. — Vol. 24. — P. 1236.
 383. Diehl H. W., Dietrich S., Eisenriegler E. Universality, Irrelevant Surface Operators, and Corrections to Scaling in Systems with Free Surfaces and Defect Planes // *Phys. Rev. B.* — 1983. — Vol. 27. — P. 2937–2954.
 384. Apostol T. M. Introduction to analytic number theory. — Springer Science & Business Media, 2013.
 385. Bernoulli numbers and zeta functions / Arakawa T., Ibukiyama T., Kaneko M., and Zagier D. — Springer, 2014.
 386. Karatsuba A. A., Voronin S. M. The Riemann zeta-function. — Berlin, New York : Walter de Gruyter, 1992.
 387. Finch S. R. Mathematical constants. — Cambridge University Press, 2003.
 388. Elizalde E. Ten physical applications of spectral zeta functions. — Berlin, Heidelberg et. al : Springer, 2012. — Vol. m35 of *Lecture Notes in Physics.*
 389. Koksma J. F., Lekkerkerker C. G. A mean-value theorem for $\zeta(s, w)$ // *Indag. Math. (Proceedings).* — 1952. — Vol. 55. — P. 446 – 452.
 390. Kanemitsu S., Kumagai H., Yoshimoto M. Sums Involving the Hurwitz Zeta Function // *The Ramanujan Journal.* — 2001. — Vol. 5, no. 1. — P. 5–19.

391. Espinosa O., Moll V. H. On Some Integrals Involving the Hurwitz Zeta Function: Part 1 // *The Ramanujan Journal*. — 2002. — Vol. 6, no. 2. — P. 159 – 188.
392. Espinosa O., Moll V. H. On Some Integrals Involving the Hurwitz Zeta Function: Part 2 // *The Ramanujan Journal*. — 2002. — Vol. 6, no. 4. — P. 449 – 468.
393. Andersson J. Mean Value Properties of the Hurwitz Zeta-Function // *Math. Scand.* — 1992. — Vol. 71. — P. 295 – 300.
394. Katsurada M., Matsumoto K. Explicit Formulas and Asymptotic Expansions for Certain Mean Square of Hurwitz Zeta-Functions // *Proc. Japan Acad.* — 1993. — Vol. 69 Ser. A. — P. 303–307.
395. Katsurada M., Matsumoto K. Explicit Formulas and Asymptotic Expansions for Certain Mean Square of Hurwitz Zeta-Functions I // *Math. Scand.* — 1996. — Vol. 78. — P. 161–177.
396. Kanemitsu S., Tanigawa Y., Yoshimoto M. Structural elucidation of the mean square of the Hurwitz zeta-function // *J. Number Theory*. — 2006. — Vol. 120, no. 1. — P. 101 – 119.
397. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. International series of monographs on physics. — 4th ed. — Oxford : Oxford University Press, 2002.
398. Smirnov V. A. Feynman Integral Calculus. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2006.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Holovatch Yu., Shpot M. Critical exponents of random Ising-like systems in general dimensions // *J. Stat. Phys.* — 1992. — Vol. 66, no. 3/4. — P. 867–883.
2. Bervillier C., Shpot M. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 955–968.
3. Diehl H. W., Shpot M. Surface critical behavior in fixed dimensions $d < 4$: Nonanalyticity of critical surface enhancement and massive field theory approach // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73, no. 25. — P. 3431–3434.
4. Shpot M. Special surface transition: Massive field theory and critical exponents in three dimensions // *Condens. Matter Phys.* — 1997. — no. 10. — P. 143–164.
5. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // *Nucl. Phys. B.* — 1998. — Vol. 528, no. 3. — P. 595–647.
6. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ -expansion results // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62, no. 18. — P. 12338–12349.
7. Shpot M., Diehl H. W. Two-loop renormalization-group analysis of critical behavior at m -axial Lifshitz points // *Nucl. Phys. B.* — 2001. — Vol. 612,

- no. 3. — P. 340–372.
8. Diehl H. W., Shpot M. Lifshitz-point critical behaviour to $O(\epsilon^2)$ // *J. Phys. A*. — 2001. — Vol. 34, no. 42. — P. 9101–9105.
 9. Usatenko Z. E., Shpot M. A., Chin-Kun Hu. Surface critical behavior of random systems: Ordinary transition // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. 63, no. 42. — P. 056102–1—8.
 10. Diehl H. W., Shpot M. Critical, crossover and correction-to-scaling exponents for isotropic Lifshitz points to order $(8-d)^2$ // *J. Phys. A*. — 2002. — Vol. 35, no. 30. — P. 6249–6259.
 11. Diehl H. W., Shpot M. Comment on “Renormalization-group picture of the Lifshitz critical behavior” // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 68, no. 6. — P. 066401–1–066401–2.
 12. Diehl H. W., Shpot M. A., Zia R. K. P. Relevance of space anisotropy in the critical behavior of m -axial Lifshitz points // *Phys. Rev. B*. — 2003. — Vol. 68, no. 2. — P. 224415.
 13. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M., Diehl H. W. Large- n expansion for m -axial Lifshitz points // *J. Phys.: Condens. Matter*. — 2005. — Vol. 17, no. 20. — P. S1947–S1972.
 14. Diehl H. W., Shpot M. A., Prudnikov P. V. Boundary critical behaviour at m -axial Lifshitz points of semi-infinite systems with a surface plane perpendicular to a modulation axis // *J. Phys. A*. — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7927–7942.
 15. Diehl H. W., Grüneberg D., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in periodic slabs: Breakdown of epsilon expansion at the bulk critical point and revised field theory // *Europhys. Lett.* — 2006. — Vol. 75, no. 2. — P. 241–247.
 16. Shpot M. A. A massive Feynman integral and some reduction relations for Appell functions // *J. Math. Phys.* — 2007. — Vol. 48, no. 12. — P. 123512.

17. Shpot M. A., Diehl H. W., Pis'mak Yu. M. Compatibility of $1/n$ and ε expansions for critical exponents at m -axial Lifshitz points // *J. Phys. A*. — 2008. — Vol. 41, no. 13. — P. 135003.
18. Shpot M. A. Two-loop RG functions of the massive ϕ^4 field theory in general dimensions // *Condens. Matter Phys.* — 2010. — Vol. 13, no. 1. — P. 13101.
19. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // *JSTAT*. — 2010. — Vol. 2010. — P. P11020. — Erratum: JSTAT E05001-1—2 (2011).
20. Rutkevich S., Diehl H. W., Shpot M. A. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications // *Nucl. Phys. B*. — 2011. — Vol. 843, no. 1. — P. 255–301. — Erratum: Nucl. Phys. B 853, 210-211 (2011).
21. Shpot M. A., Pis'mak Yu. M. Lifshitz-point correlation length exponents from the large- n expansion // *Nucl. Phys. B*. — 2012. — Vol. 862, no. 1. — P. 75–106.
22. Shpot M. A., Srivastava H. M. The Clausenian hypergeometric function with unit argument and negative integral parameter differences // *Appl. Math. Comput.* — 2015. — Vol. 259. — P. 819 – 827.
23. Shpot M. A., Pogány T. K. The Feynman integral in $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m$ and complex expansion of ${}_2F_1$ // *Integral Transforms Spec. Funct.* — 2016. — Vol. 27, no. 7. — P. 533–547.
24. Shpot M. A., Chaudhary M. P., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions and the Casimir effect in ϕ^4 field theories // *J. Class. Anal.* — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 99–115.
25. Shpot M. A., Paris R. B. Integrals of products of Hurwitz zeta functions via Feynman parametrization and two double sums of Riemann zeta functions // *Math. Aeterna*. — 2016. — Vol. 6, no. 5. — P. 745–764.

26. Paris R. B., Shpot M. A. A Feynman integral in Lifshitz-point and Lorentz-violating theories in $\mathbb{R}^D \oplus \mathbb{R}^m$ // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2018. — Vol. 41, no. 5. — P. 2220–2246.
27. Головач Ю. В., Шпот Н. А. Критическое поведение разбавленной m -векторной модели при нецелых размерностях пространства // *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-физические исследования (теория и эксперимент)*. — 1992. — № 3(24). — С. 48–53.

Тези

28. Bervillier C., Shpot M. Critical amplitude relations for disordered Ising systems // *The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, 2-8 August 1992) Programme and Abstracts*. — 1992. — P. 219.
29. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // *The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Xiamen 31 July - 4 August 1995) Programme and Abstracts*. — 1995. — P. 182.
30. Diehl H. W., Shpot M. Massive field-theory approach to surface critical behavior in three-dimensional systems // *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, 1995)*. — 1995. — P. 1075.
31. Diehl H. W., Shpot M. Surface critical exponents in three-dimensional semi-infinite systems // *Науковий семінар з статистичної теорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14-15 березня 1997), програма і тези доповідей*. — 1997. — С. 20.
32. Shpot M. Critical phenomena on surfaces // *Ising Lectures in Lviv (1997-2017)* / ed. by M. Krasnytska et. al. — Lviv : ICMP, 2017. — P. 69.
33. Usatenko Z., Shpot M., Hu C.-K. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition // *International Congress on Mathematical Physics, London, July 17-22 2000*. — 2000. — P. 19.

34. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -fold degenerate Lifshitz points: field-theory and ϵ -expansion // *Workshop on Modern problems of soft matter theory (Lviv, Ukraine, August 27-31 2000)*. — 2000. — P. 155.
35. Usatenko Z., Shpot M. Critical behaviour of semi-infinite random Ising-like systems at the ordinary transition // *Workshop "Modern problems of soft matter theory" (Lviv, Ukraine, August 27-31 2000)*. — 2000. — P. 175.
36. Usatenko Z., Shpot M., Hu C.-K. Surface critical behaviour of quenched dilute Ising-like systems at the ordinary transition // *20-th European Conference on Surface Science, Krakow, Poland, September 04-07 2001, Book of Abstracts*. — 2001. — P. 120.
37. Diehl H. W., Shpot M. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: field-theory analysis and ϵ -expansion results. — 2001. — P. E10.006. — Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA March 12-16 2001).
38. Diehl H. W., Shpot M., Zia R. K. P. Critical behavior at m -axial Lifshitz points: a case study of anisotropic scale invariance. — 2001. — The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15-21 2001) Programme and Abstracts.
39. Шпот М., Діль Г. В. Критична поведінка в анізотропній точці Лівшица // *Різдвяні дискусії 2002 (Львів, Україна, 4-5 січня 2002), програма і тези доповідей*. — 2002. — С. 6.
40. Shpot M. A. Critical behavior at Lifshitz points // *VI Ukrainian-Polish and II East-European Meeting on Ferroelectrics Physics, Uzhgorod-Synjak, Ukraine, September 6-10, 2002*. — 2002. — P. 28.
41. Shpot M. A., Pismak Y., Diehl H. W. Large- N expansion for m -axial Lifshitz points // *The Spring-Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04-09 2005)*. — 2005. — P. 202.
42. Shpot M. A. Large- N expansion for Lifshitz points // *The 6th International Conference "Renormalization Group 2005 (Helsinki, Finland, 30 August - 03*

September 2005). — 2005.

43. Diehl H. W., Grüneberg D., Shpot M. A. Revised field theory of finite size effects and Casimir forces in slabs // *The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09-13 2007) Programme and Abstracts*. — 2007.
44. Shpot M. A. Lifshitz points: Recent theoretical progress // *The 3rd Conference "Statistical Physics: Modern Trends and Applications" (Lviv, Ukraine, June 23–25 2009), Programme and Abstracts*. — 2009. — P. 67.
45. Diehl H. W., Rutkevich S., Shpot M. On conjectured local generalizations of anisotropic scale invariance and their implications // *Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15-19 2010), Book of Abstracts*. — 2010. — P. 705.
46. Burgsmüller M., Diehl H. W., Shpot M. A. Fluctuation-induced forces in strongly anisotropic critical systems // *Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011), Book of Abstracts*. — 2011. — P. 217.
47. Shpot M. A. Thermodynamic Casimir effect in isotropic and anisotropic systems // *The 36th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukraine, April 5-7 2011)*. — 2011. — P. 149.
48. Shpot M. A. Lifshitz points at large n // *The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3-6 2012)*. — 2012. — P. 178.

ДОДАТОК Б

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні результати роботи доповідалися і обговорювалися на: The 18th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Berlin, FRG, 2–8 August 1992); The 19th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Xiamen, PRC 31 July – 4 August 1995); Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 7/1995 (Berlin, FRG, 1995); Науковий семінар з статистичної терорії конденсованих систем (Львів, Україна, 14–15 березня 1997); Ізингівські читання (Львів, Україна, 29 квітня 1998); International Congress on Mathematical Physics “ICMP 2000” (London, UK, July 17–22 2000); Workshop on Modern Problems of Soft Matter Theory (Lviv, Ukraine, August 27–31 2000); Meeting of the American Physical Society (Seattle, USA, March 12–16 2001); 20–th European Conference on Surface Science (Krakow, Poland, September 04–07 2001); The 21th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Cancun, July 15–21 2001); Різдвяні дискусії (Львів, Україна, 4–5 січня 2002); VI Ukrainian–Polish and II East–European Meeting on Ferroelectrics Physics (Uzhgorod–Synjak, Ukraine, September 6–10, 2002); The Spring–Meeting of the German Physical Society (Berlin, FRG, March 04–09 2005); The 6th International Conference “Renormalization Group 2005” (Helsinki, Finland, 30 August – 03 September 2005); The 23th IUPAP International Conference on Statistical Physics (Genova, Italy, July 09–13 2007); The 3rd Conference “Statistical Physics: Modern Trends and Applications” (Lviv, Ukraine, June 23–25 2009); Meeting of the American Physical Society (Portland, Oregon, USA, March 15–19 2010); Meeting of the American Physical Society (Dallas, Texas, USA, March 21–25 2011); The 36th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics MECO 36 (Lviv, Ukrai-

ne, April 5–7 2011); The 4th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, July 3–6 2012); 13-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених (Львів, Україна, 5–7 червня 2013); Йорданські читання (Львів, Україна, 2018), а також на семінарах Інституту фізики конденсованих систем НАН України, факультету фізики Університету Дуйсбург–Ессен (Ессен, Дуйсбург ФРН), кафедри теоретичної фізики Університету Аахен (Аахен, ФРН) відділу теоретичної фізики Центру ядерних досліджень Сакле (Сакле, Франція), факультету фізики Університету Нансі (Нансі, Франція), факультету математики Південно-китайського університету технології (Гуангджоу, КНР).