

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

КРАСНИЦЬКА Мар'яна Богданівна



УДК 537.9

**ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ
НА СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ**

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2016

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України (м. Львів) та групі статистичної фізики Університету Лотарингії (м. Нансі, Франція).

Наукові керівники: габлітований доктор, професор **Берш Бертран**, Університет Лотарингії (м. Нансі, Франція), професор групи статистичної фізики;
член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор **Головач Юрій Васильович**, Інститут фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів), завідувач лабораторії статистичної фізики складних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Доценко Віктор Степанович**, Університет П'єра і Марії Кюрі Париж-6 (м. Париж, Франція), професор лабораторії теоретичної фізики конденсованих систем;
доктор фізико-математичних наук, професор **Ткачук Володимир Михайлович**, Львівський національний університет імені Івана Франка (м. Львів), професор кафедри теоретичної фізики.

Захист відбудеться "7" вересня 2016 р. о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 при Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою:
79011, м. Львів, вул. Свенціцького, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем НАН України за адресою:
79026, м. Львів, вул. Козельницька, 4.

Автореферат дисертації розісланий "29" липня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01,
доктор фіз.-мат. наук



А.М. Швайка

Актуальність теми. Все частіше на сторінках фізичних публікацій можна зустріти поняття *складна мережа*. З математичної точки зору, кожна мережа – це граф, що складається з множини вершин та множини ребер (у фізичній літературі частіше зустрічаються терміни *вузол* та *зв'язок*). Теорія графів бере свій початок із знаменитої роботи Леонарда Ойлера про сім мостів в Кьонігсберзі [L. Eulero / Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 1741, 8, 128]. Сучасне зацікавлення складними мережами значною мірою спричинене появою потужних комп'ютерів та носіїв інформації, що здатні зберігати великі масиви даних. Як виявилось, багато природних та створених людиною систем можна описати топологію мережі. Серед них мережі метаболізму, харчування, екологічні мережі, інтернет, www, транспортні, соціальні, мережі цитування та багато інших (див., наприклад, [S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes. Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW, Oxford: Oxford University Press, 2003; Ю. Головач, К. фон Фербер, О. Олемской, Т. Головач, О. Мриглод, І. Олемской, В. Пальчиков // ЖФД, 2006, 10, 247; M. Newman. Networks: An Introduction, Oxford: Oxford University Press, 2010]). Більше того, ці мережі за своїми властивостями суттєво відрізняються від класичного випадкового графа Ердоша-Рені [P. Erdős, A. Rényi // Publ. Math. Debrecen, 1959, 6, 290]. Як правило, це скорельовані структури, які, незважаючи на велику кількість вершин, мають невеликий характерний розмір (ефект тісного світу, [D. J. Watts, S. H. Strogatz // Nature (London), 1998, 393, 440]), надзвичайно стійкі до випадкового усунення складових, однак чутливі до спрямованих атак. Їм притаманні ефекти самоорганізації і дуже часто їх статистика описується степеневими законами (так звані безмасштабні мережі, *scale-free networks* [A.-L. Barabási, R. Albert // Science, 1999, 286, 509; A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong // Physica A, 2000, 281, 69]). А саме такі властивості притаманні багатьом складним системам і застосування методів статистичної фізики до їх опису дозволяє зрозуміти причини такої поведінки.

Задачі, пов'язані із дослідженням критичної поведінки та фазових переходів на складних мережах, почали розглядати порівняно недавно. Можливі застосування моделей фазових переходів на складних мережах можна знайти у різних ділянках фізики. Так у задачах соціофізики розглядаються різні стани соціуму – системи взаємодіючих агентів-індивідуумів, розташованих на вузлах соціальної мережі [S. Galam. Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena (Understanding Complex Systems), London: Springer, 2012]. Впорядкованому стану у такій системі відповідає суспільний консенсус, а виникнення такого впорядкованого стану описується, як фазовий перехід (opinion formation). Іншим прикладом є об'єкти нанофізики, структура яких часто краще описується не геометрією ґратки, а мережі чи фракталу [B. Tadić, K. Malarz, K. Kułakowski // Phys. Rev. Lett., 2005, 94, 137204]. Більш того, в процесі досліджень виявилось, що фазові переходи на мережах суттєво відрізняються від переходів на ґратках, оскільки поняття

евклідової вимірності для мереж неозначене, і часто супроводжуються низкою незвичних ефектів [S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes // Rev. Mod. Phys, 2008, 80, 1275]. Це, в свою чергу, викликає чисто академічний інтерес до їх розгляду.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України та групі статистичної фізики Університету Лотарингії (Нансі, Франція) згідно з планами робіт за темами: 0112U007763 “Про розвиток теоретичних методів опису флюїдів, ґраткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” НАНУ; за підтримки аспірантської програми “Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems” (Ляйпціг-Лотарингія-Львів-Ковентрі) (\mathbb{L}^4), та проектів співпраці FP7 EU IRSES 269139 “Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media”, 295302 “Statistical Physics in Diverse Realizations”, 612707 “Dynamics of and in Complex Systems”, 612669 “Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences”, та Посольства Франції в Україні (стипендія на короткострокове стажування у французькому університеті).

Мета і задачі дослідження. Основними *об'єктами дослідження* у дисертаційній роботі вибрано спінові системи (моделі Ізінга та Поттса) на графах (повному графі, конфігураційній моделі графа та нескорельованій відпаленій безмасштабній мережі). *Предметом дослідження* є вивчення критичної поведінки цих моделей. *Мета дисертації* полягає у одержанні термодинамічних функцій, побудові фазової діаграми, пошуку критичних показників та інших універсальних величин у випадку фазового переходу другого роду.

Методи дослідження. При дослідженні критичної поведінки ми використували два основні *методи*: наближення неоднорідного середнього поля та формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми у випадку комплексного поля та температури.

Наукова новизна одержаних результатів. Досліджуючи критичну поведінку q -станової моделі Поттса на безмасштабній мережі (зі степеневу згасною функцією розподілу із показником λ) в наближенні середнього поля нам вдалося отримати: фазову діаграму, критичні показники, показники для логарифмічних поправок до скейлінгу. Так, для $q = 1$ -станової моделі Поттса (задача про перколяцію) показано, що при $\lambda = 4$ перколяція на безмасштабній мережі характеризується появою логарифмічних поправок до скейлінгу. Ці поправки послаблюють сингулярності спостережуваних величин в околі точки протікання [1]. В режимі фазового переходу другого роду для моделі Поттса на безмасштабній мережі вперше отримано вирази для скейлінгових функцій та універсальні співвідношення для критичних амплітуд [2]. Досліджуючи стрибок теплоємності моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при критичній температурі ми встановили, що стрибок залишається λ -залежним навіть при $\lambda > 5$ та прямує до середньопольового значе-

ння в границі $\lambda \rightarrow \infty$ [3].

Вперше застосовано формалізм Лі-Янга-Фішера для дослідження фазових переходів на безмасштабних мережах. Проаналізовано нулі статистичної суми в площині комплексної температури та магнітного поля для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі. Таким чином, вперше здійснено опис критичної поведінки багаточастинкової системи на безмасштабній мережі в термінах конформно інваріантних кутів, що характеризують розташування нулів статистичної суми. Показано зв'язок цих кутів, а також показника, що характеризує наближення нулів Лі-Янга до дійсної осі, із критичними показниками, що описують сингулярності термодинамічних функцій в околі точки переходу. Подібно до критичних показників, кути розташування нулів виявляються λ -залежними, що свідчить про розширення гіпотези універсальності для критичної поведінки на складній безмасштабній мережі. Виявлено порушення теореми Лі-Янга про коло одиничного радіусу для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі у діапазоні $3 < \lambda < 5$ [4, 5].

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати можуть служити підставою для подальшого моделювання процесів впорядкування у взаємодіючих системах на безмасштабних мережах. Оскільки більшість суспільних мереж є безмасштабними, то наші результати застосовні для моделей виникнення консенсусу у задачах соціофізики. Подібним чином отримані результати застосовні для опису фазового переходу в феромагнітний стан у наноструктурах із топологією мережі. Зовсім недавно було запропоновано та експериментально реалізовано дослідження, що дозволило пов'язати координати уявних нулів статистичної суми з часами квантової когерентності пробного спіна у середовищі інших спінів [X. Peng, H. Zhou, B.-B. Wei, J. Cui, J. Du, R. B. Liu // Phys. Rev. Lett., 2015, 114, 010601]. Це відкриває можливість для експериментального спостереження нулів статистичної суми в комплексній площині. Таким чином, одержані нами результати будуть корисні для теоретиків та експериментаторів, що розроблятимуть методи дослідження квантової когерентності спінових систем на мережах.

Особистий внесок здобувача. У роботах, виконаних із співавторами, автору належить:

- вирази для вільної енергії в наближенні неоднорідного середнього поля для q -станової моделі Поттса на безмасштабній нескорельованій мережі та їх аналіз [1, 6];
- вираз для стрибка теплоємності моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при $\lambda > 5$. Порівняння поведінки теплоємності ґраткової та мережевої структур [3];
- точні інтегральні представлення статистичної суми для моделі Ізінга на повному графі та на безмасштабній мережі у випадку комплексного магнітного поля, чисельні розв'язки системи нелінійних рівнянь для нулів Лі-Янга та

Фішера [4, 5];

- значення логарифмічних поправок до показників скейлінгу для координат нулів Фішера та Лі-Янга при $\lambda = 5$ [4, 5];
- виявлення порушення теореми Лі-Янга про коло одиничного радіуса для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі у діапазоні $3 < \lambda < 5$. Чисельний аналіз та аналітичне пояснення [4, 5].

Апробація результатів дисертації. Результати роботи були представлені на таких конференціях: “Різдвяні дискусії-2013” (Львів, 3-4 січня 2013); XIII Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 5-7 червня 2013); VI Міжнародна конференція “Фізика неупорядкованих систем” (Львів, 14-16 жовтня 2013); конференція молодих вчених (Київ, 24-27 грудня 2013); конференція МЕСО-39 (Ковентрі, Англія, 8-10 квітня 2014); конференція CompPhys (Ляйпціг, Німеччина, 27-29 листопада 2014); “Різдвяні дискусії-2015” (Львів, 12-13 січня 2015); XV Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 4-5 червня 2015), “Йорданські читання - 2016” (Львів, 20.01.16), конференція МЕСО-41 (Відень, Австрія, 15-17 лютого 2016). А також на таких семінарах: семінар групи статистичної фізики університету Анрі Пуанкаре (Нансі, Франція, 20.01.13, 25.11.14); семінар-нарада наглядового комітету акції IRSES DCP-PhysBio, (Львів, 28-30 травня 2013); семінар групи статистичної фізики університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 12.07.13); семінар групи чисельної квантової теорії поля університету Ляйпцігу (Ляйпціг, Німеччина, 7.11.13); стендова доповідь на річному семінарі Ecole doctorale (Нансі, Франція, 12.06.14); семінар кафедри прикладної математики та інформатики в університеті Марії Склодовської-Кюрі (Люблін, Польща, 22.10.15); семінари Лабораторії статистичної фізики складних систем ІФКС НАНУ.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей в журналах [1–5], одна стаття в матеріалах доповідей конференції [6] та 9 тез конференцій [7–15].

Структура та об’єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Робота викладена на 110 сторінках (разом з літературою та додатками – 145 сторінок), бібліографічний список містить 208 найменувань публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** висвітлено актуальність теми дослідження, сформульовано мету роботи та відзначено її наукову новизну.

У **першому розділі** подано означення головних понять теорії складних мереж та здійснено огляд основних робіт, які стосуються поведінки спінових моделей на мережах. Розглянено моделі складних мереж та введено основні величини, які описують їх кількісні характеристики. Особливу увагу приділено так званим безмасштабним мережам, що характеризуються степеневим загасанням функції розподілу ступенів вузлів:

$$P(k) \sim k^{-\lambda}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (1)$$

де $P(k)$ – імовірність того, що випадково вибраний вузол має ступінь (кількість зв'язків) k .

Оскільки значна частина дисертації (розділи 3-4) виконана із застосуванням методу аналізу нулів статистичної суми у комплексній площині, у першому розділі також здійснено короткий огляд робіт, присвячених цьому методу. Типова поведінка нулів статистичної суми у площині комплексного магнітного поля (нулі Лі-Янга [Т. D. Lee, С. N. Yang // Phys. Rev., 1952, 87, 410]) та комплексної температури (нулі Фішера [М. E. Fisher. The nature of critical points: Lecture Notes in Theoretical Physics, Boulder: University of Colorado Press, 1965]) зображена на Рис. 1.

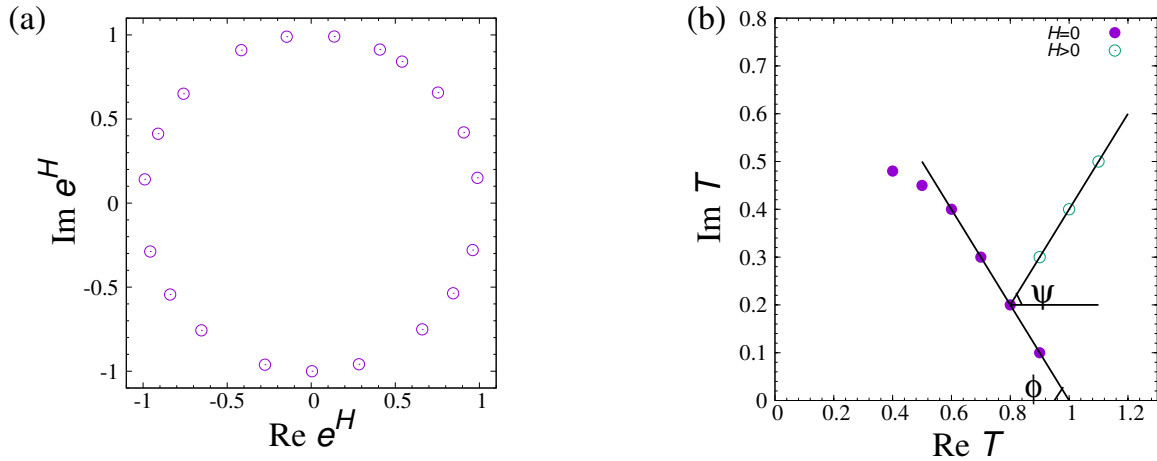


Рис. 1: (а): Схематичне представлення нулів Лі-Янга моделі Ізінга на двовимірній ґратці у комплексній e^H площині. Згідно теореми Лі-Янга, всі нулі лежать на колі одиничного радіуса у площині e^H , тобто, вони є суто уявними в площині H . (б): Картина нулів Фішера у комплексній T площині. Кут φ є кутом між лінією конденсації нулів Фішера та від'ємним напрямом дійсної осі. Кут ψ описує рух нулів Фішера за наявності дійсного зовнішнього поля. Рух першого нуля зі збільшенням магнітного поля H зображено колами.

Одне із корисних співвідношень пов'язує кут конденсації нулів Фішера φ із критичним показником теплоємності α та відношенням кричних амплітуд теплоємності A_-/A_+ [С. Itzykson, R. B. Pearson, J. B. Zuber // Nucl. Phys. B., 1983, 220, 415]:

$$\tan[(2 - \alpha)\varphi] = \frac{\cos(\pi\alpha) - A_-/A_+}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (2)$$

Також відоме співвідношення для кута ψ руху нулів Фішера у дійсному полі:

$$\psi = \frac{\pi}{2\beta\delta}, \quad (3)$$

де β і δ – температурний та польовий критичні показники параметра порядку.

Скейлінгові співвідношення для координат нулів Лі-Янга та Фішера системи скінченного розміру можна записати у наступній формі:

$$H_j(N, t = 0) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^\sigma, \quad \sigma = \frac{\beta\delta}{2 - \alpha}, \quad (4)$$

$$T_j(N, H = 0) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad (5)$$

де N – число частинок, а j – порядок нуля.

У **другому розділі** досліджується критична поведінка q -станової моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. Гамільтоніан моделі:

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \delta_{n_i, n_j} + H \sum_i \delta_{n_i, 0}, \quad (6)$$

тут $n_i = 0, 1, \dots, q-1$; $q \geq 1$ – кількість станів моделі Поттса, H – зовнішнє поле, спрямоване вздовж нульової компоненти змінної n_i . Головна відмінність гамільтоніану моделі Поттса на мережі від ґраткового гамільтоніану полягає в тому, що підсумовування у (6) ведеться за усіма парами i, j N вузлів мережі, а взаємодія J_{ij} рівна J , якщо між вузлами i та j існує зв'язок, й 0, якщо вузли не поєднані між собою.

У підрозділі 2.2 проаналізовано термодинаміку моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі, використовуючи наближення неоднорідного середнього поля. Щоб означити параметр порядку та виконати наближення для гамільтоніану (6), введено локальні термодинамічні середні:

$$\mu_i = \overline{\delta_{n_i, 0}}, \quad \nu_i = \overline{\delta_{n_i, \alpha \neq 0}}, \quad (7)$$

де усереднення означає:

$$\overline{(\dots)} = \frac{\text{Tr}(\dots) \exp(-\mathcal{H}/T)}{Z}, \quad Z = e^{-\mathcal{H}/T}. \quad (8)$$

Розглянемо поведінку середніх (7) у границі низьких та високих температур: $\mu_i(T \rightarrow \infty) = \nu_i(T \rightarrow \infty) = 1/q$, $\mu_i(T \rightarrow 0) = 1$, $\nu_i(T \rightarrow 0) = 0$. Тоді локальний параметр порядку (локальну намагніченість), $0 \leq m_i \leq 1$, можна переписати як:

$$m_i = \frac{q \overline{\delta_{n_i, 0}} - 1}{q - 1}. \quad (9)$$

В наближенні неоднорідного середнього поля глобальний параметр порядку m записується через зважені значення локальних намагніченостей:

$$m = \frac{\sum_i k_i m_i}{\sum_i k_i}. \quad (10)$$

Нехтуючи внесками другого порядку малості (квадратами відхилення від середнього-го $\delta_{n_i, n_j} - \overline{\delta_{n_i, n_j}}$), одержуємо вираз для гамільтоніану (6):

$$-\mathcal{H}^{mfa} = \sum_{i,j} J_{ij} \delta_{n_i, 0} m_j + \frac{1}{q} \sum_{i,j} J_{ij} (1 - m_j + (1 - q) m_i m_j) + H \sum_i \delta_{n_i, 0}. \quad (11)$$

У підрозділі 2.3 одержано вільну енергію моделі Поттса на безмасштабній мережі в наближенні середнього поля:

$$\begin{aligned} -g &= \frac{1}{q} \sum_{i,j} J_{ij} (1 - m_j + (1 - q) m_i m_j) + \\ &T \sum_i \ln \left[\exp \left(\frac{\sum_j J_{ij} m_j + H}{T} \right) + q - 1 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Згідно наближення середнього поля, матричні елементи J_{ij} підставлено у рівняння (12), де існування зв'язку між вузлами i та j можливе з імовірністю p_{ij} . Для нескорельованої мережі імовірність існування зв'язку між вузлами залежить тільки від їх ступенів k_i, k_j як:

$$J_{ij} = J p_{ij} = J \frac{k_i k_j}{N \langle k \rangle}, \quad (13)$$

де J – стала взаємодії, а $\langle k \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N k_i$ – середній ступінь вузла. Щоб проаналізувати поведінку вільної енергії, коли параметр порядку $m \rightarrow 0$, у виразі (12) перейдемо від підсумовування за номером вузла до інтегрування за ступенем вузла. Для цього розглянено окремо випадки цілих та нецілих значень параметра λ , щоб виділити розбіжності при інтегруванні. Так, при *нецілих* λ вираз для вільної енергії запишеться:

$$\begin{aligned} g &= \frac{J \langle k \rangle (q - 1)}{qT} (T - T_0) m^2 + \frac{c_\lambda c(q, \lambda)}{T^{\lambda-2}} (mJ)^{\lambda-1} + \\ &c_\lambda \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i (mJ k_\star)^i}{\lambda - 1 - i} T^{1-i} - \frac{J \langle k \rangle (q - 1)}{q^2 T} mH + O(m^{[\lambda]}), \end{aligned} \quad (14)$$

а при *цілих* значеннях λ

$$g = \frac{J \langle k \rangle (q - 1)}{qT} (T - T_0) m^2 - \frac{c_\lambda a_{\lambda-1}}{T^{\lambda-2}} (mJ)^{\lambda-1} \ln m + c_\lambda [C(q, \lambda) -$$

$$a_{\lambda-1} \ln(Jk_*/T)] \frac{(mJ)^{\lambda-1}}{T^{\lambda-2}} + c_\lambda \sum_{i=3}^{\lambda-2} \frac{a_i (mJk_*)^i}{\lambda - i - 1} T^{1-i} - \frac{J\langle k \rangle (q-1)}{q^2 T} mH + O(m^{[\lambda]}), \quad (15)$$

де позначення $[\ell]$ означає цілу частину від ℓ , а k_* – мінімальне значення ступеня вузла.

У підрозділі 2.4 проаналізовано критичну поведінку моделі Поттса в різних діапазонах q та λ . Одержані результати узагальнено на фазовій діаграмі, Рис. 2. Суцільна тонка крива відділяє режим фазового переходу першого роду від режиму фазового переходу другого роду. Критичні показники вздовж цієї кривої є λ -залежними. У режимі фазового переходу другого роду при $1 \leq q < 2$ критичні показники є λ -залежними (нижче суцільної товстої лінії) чи набувають значень стандартних критичних показників середнього поля для перколяції (вище суцільної товстої лінії). При $q = 2$ та $\lambda \geq 5$ (пунктирна крива) критичні показники відповідають стандартним показникам для моделі Ізінга. Значення λ , що розділяють λ -залежні та стандартні середньопольові критичні показники, характеризуються появою логарифмічних поправок до скейлінгу: квадрат для моделі Ізінга при $\lambda = 5$, $q = 2$ та суцільна товста лінія при $\lambda = 4$ для діапазону $1 \leq q < 2$. При $\lambda \leq 3$ система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі (область нижче штрихованої лінії).

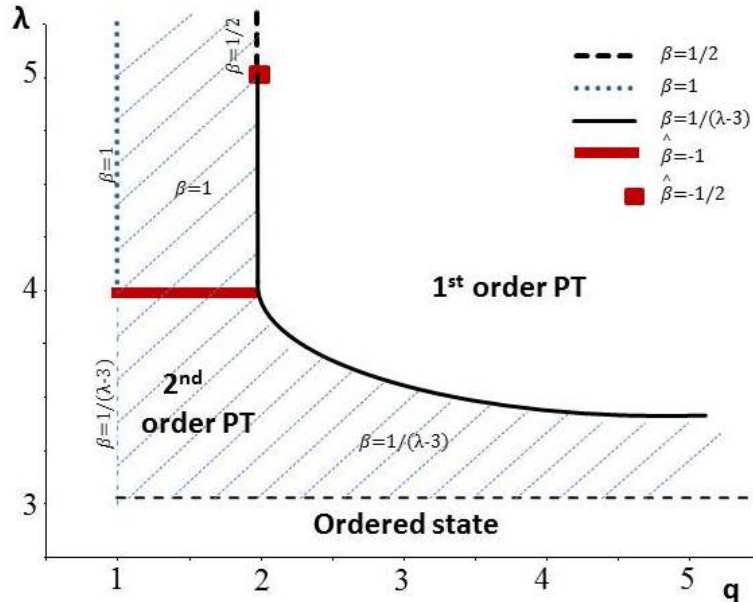


Рис. 2: Фазова діаграма моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. У режимі фазового переходу другого роду вказані значення критичного показника параметру порядку β та показника його логарифмічної поправки до скейлінгу $\hat{\beta}$.

У підрозділі 2.5 в режимі фазового переходу другого роду із виразів для вільної енергії отримано інші термодинамічні функції, критичні показники, логарифмічні

поправки до скейлінгу. У різних діапазонах q та λ спостережувані термодинамічні функції описуються різними наборами критичних показників. Також у роботі знайдено скейлінгові функції (Табл. 1) та відношення критичних амплітуд. Виявлено, що як і критичні показники, вони різняться у різних діапазонах: Region I ($\lambda > 5$, $q = 2$), Region II ($\lambda > 4$, $1 \leq q < 2$), Region III ($3 < \lambda < 4$, $1 \leq q < q_c(\lambda)$, $3 < \lambda < 5$, $q = 2$).

Табл. 1: Скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд для моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі.

	Region I	Region II	Region III
$f_{\pm}(x)$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\lambda-1}}{4}$
$H_{\pm}(x)$	$x^3 \pm x$	$\frac{3}{4}x^2 \pm x$	$\frac{\lambda-1}{4}x^{\lambda-2} \pm x$
$\mathcal{S}(x)$	$-x^2/2$	$-x^2/2$	$-x^2/2$
$\mathcal{C}_{\pm}(x)$	$\frac{x^2}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x^2}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{x^2}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$
$\chi_{\pm}(x)$	$\frac{1}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{1}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$
$\mathcal{M}_{\pm}(x)$	$\frac{x}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{x}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$

Для моделі Ізінга у діапазоні $\lambda > 5$ виявлено нетривіальну поведінку значення стрибка теплоємності при критичній температурі. В той час як критичні показники та скейлінгові функції в діапазоні $\lambda > 5$ залишаються незмінними, стрибок теплоємності не відповідає значенню із теорії середнього поля, а залежить від параметра λ :

$$\delta c_H = \frac{3(\lambda - 5)(\lambda - 1)}{2(\lambda - 3)^2}, \quad \lambda > 5. \quad (16)$$

Тільки у границі великих λ стрибок прямує до точного значення із теорії середнього поля $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = 3/2$, Рис.3.

У **третьому та четвертому розділах** застосовано новий метод дослідження критичної поведінки моделі Ізінга на повному графі та на відпаленій безмасштабній мережі, а саме, метод аналізу комплексних нулів статистичної суми в площині комплексної температури (нулі Фішера) та комплексного магнітного поля (нулі Лі-Янга).

У **третьому розділі** приведено результати опису критичної поведінки моделі Ізінга на повному графі отримані за допомогою аналізу нулів статистичної суми в комплексній площині. Використовуючи метод, запропонований у статті [M. L. Glasser, V. Privman, L. S. Schulman // J. Stat. Phys., 1986, 45, 451], отримано нові результати для нулів Фішера, а саме, обчислено рух цих нулів у дійсному полі, а також вперше використано схожу методіку для вивчення нулів Лі-Янга.

У підрозділі 3.1 розглянено модель Ізінга на повному графі, що еквівалентна ґратковій версії моделі у наближенні середнього поля. Вираз для N -частинкової

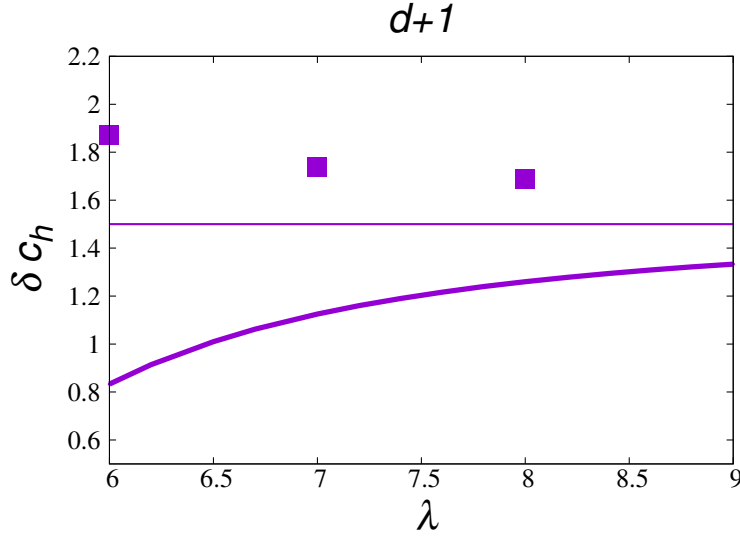


Рис. 3: Стрибок теплоємності моделі Ізінга на ґратках при вимірності простору $d > 4$ (прямокутники, результати Монте-Карло симуляцій [Р. Н. Lundow, К. Markström // Nucl. Phys. B, 2015, 895, 305]) та на відпаленій безмасштабній мережі в діапазоні $\lambda > 5$, суцільна крива на основі рівняння (16). Тонка лінія відповідає точному значенню стрибка теплоємності з теорії середнього поля $\delta c_H = 3/2$. У границі великих λ чи d стрибок $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = \delta c_H(d \rightarrow \infty) = 3/2$ наближається до точного значення знизу чи зверху від прямої відповідно.

статистичної суми має вигляд:

$$Z_N(T, H) = \text{Tr} e^{-\mathcal{H}/T} = e^{-\frac{1}{2T}} \prod_{l=1}^N \sum_{S_l = \pm 1} \exp \left(\frac{1}{2NT} \left(\sum_l S_l \right)^2 + \frac{H}{T} \sum_l S_l \right). \quad (17)$$

Виконавши перетворення Стратоновича-Габбарда (17) можна переписати у формі:

$$Z_N(T, H) = e^{-\frac{1}{2T}} \sqrt{\frac{N}{2T\pi}} \prod_{l=1}^N \sum_{S_l = \pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{-Nx^2}{2T} + \sum_m S_m \frac{(x+H)}{T} \right) dx. \quad (18)$$

Виконавши підсумовування за S_l та замінивши змінну інтегрування $\sqrt{N}x/T \rightarrow x$, одержано точне інтегральне представлення для статистичної суми моделі Ізінга на повному графі:

$$Z_N(t, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{-x^2(t+1)}{2} + N \ln \cosh[x/\sqrt{N} + H/(t+1)] \right) dx, \quad (19)$$

де $t = (T - T_c)/T_c$. При дослідженні властивостей статистичної суми, поряд із точним перетворенням (19) використовуватимемо також наближене, розкладаючи функцію при великих N та малих H . Зберігаючи провідні за $1/N$ доданки та доданок лінійний за H отримано:

$$Z_N^{\text{exp}}(t, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{-tx^2}{2} - \frac{x^4}{12N} + \frac{x\sqrt{N}H}{t+1} + O(1/N^2) \right) dx. \quad (20)$$

Для пошуку нулів чисельно розв'язано систему рівнянь, коли дійсна та уявна частини статистичної суми рівні нулеві у площині комплексної температури (нулі Фішера) та комплексного магнітного поля (нулі Лі-Янга), див. Рис.4.

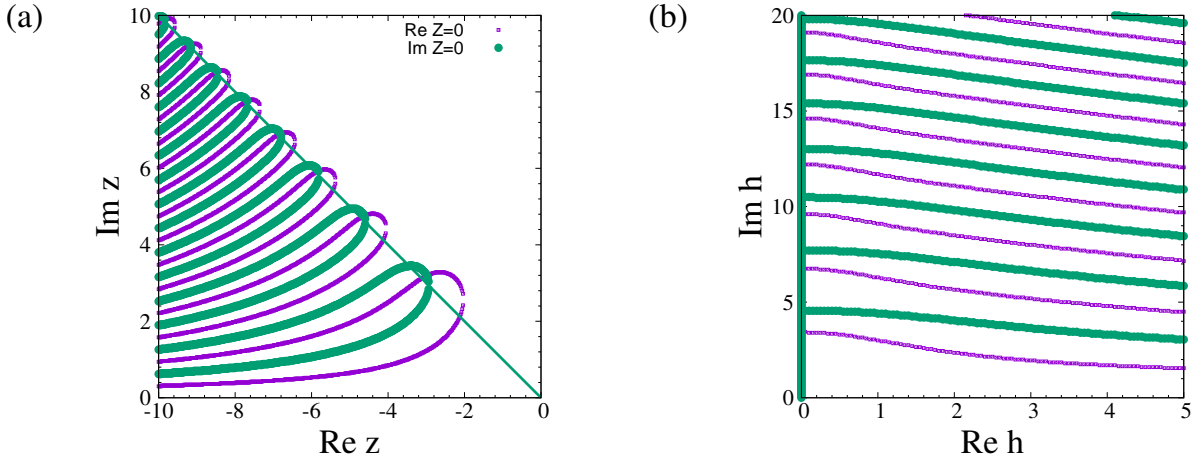


Рис. 4: Лінії нулів дійсної та уявної частини наближеної статистичної суми (21) та (22) в площині (а) комплексної температури та (б) магнітного поля, тонкі й товсті лінії відповідно. Точки, де лінії різної товщини перетинаються, дають координати нулів. Для нулів Лі-Янга одна з ліній $\text{Im } Z(h) = 0$ співпадає із вертикальною віссю на графіку.

Очевидною відмінністю у поведінці нулів Фішера для точної та розкладеної статистичної суми (див. підрозділ 3.2) є те, що у останньому випадку кут конденсації нулів є стійким та майже не залежить від N , оскільки підінтегральну функцію можна записати у формі:

$$Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-z x^2 - x^4\right) dx, \quad (21)$$

де залежність від N та t включена у нову скейлінгову змінну $z = \sqrt{3Nt}$, див. Рис. 4 (а).

У підрозділі 3.3 отримано результати для нулів Лі-Янга розкладеної та точної статистичної суми. Знайдено координати нулів Лі-Янга у приведених змінних h , увібравши залежність від розміру системи. Для розкладеної статистичної суми одержано вираз у новому представленні:

$$Z(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^4 - x h\right) dx, \quad (22)$$

де

$$h = H(12N^3)^{1/4}. \quad (23)$$

На Рис. 4 (б) зображено лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (22) при $T = T_c$ у площині комплексного магнітного поля h , тонкі й товсті лінії відповідно. Координати нулів Лі-Янга (точки перетину ліній) є чисто уявними (задовільняючи колову теорему Лі-Янга). Скейлінг координати h_j в залежності від розміру системи N описується рівнянням (4) із показником $\sigma = 3/4$.

У підрозділі 3.4 проаналізовано рух нулів Фішера у (дійсному) магнітному полі. Використовуючи співвідношення скінченновимірною скейлінгу отримано скейлінгові функції, що описують поведінку нулів, та показано, що значення кута руху нулів $\psi \simeq \pi/3$ відповідає значенню критичних показників моделі Каца.

У **четвертому розділі** продовжено аналіз нулів статистичної суми моделі Ізінга в комплексній площині, вперше застосовано цей метод для дослідження моделі Ізінга на безмасштабній відпаленій мережі.

У підрозділі 4.1, використовуючи наближення відпаленої мережі (коли усереднення за конфігураціями зв'язків та спінів проводиться безпосередньо для статистичної суми [S. H. Lee, M. Ha, H. Jeong, J. D. Noh, H. Park // Phys. Rev. E., 2009, 80, 051127]) одержано точне інтегральне представлення

$$Z_N(T, H) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\langle k \rangle x^2 T}{2}} \left\{ \exp \left[N \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk p(k) \ln \cosh \left(\frac{xk}{\sqrt{N}} + \frac{H}{T} \right) \right] + \exp \left[N \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk p(k) \ln \cosh \left(-\frac{xk}{\sqrt{N}} + \frac{H}{T} \right) \right] \right\} dx, \quad (24)$$

та розкладений вираз для статистичної суми моделі Ізінга на безмасштабній відпаленій мережі:

$$Z_N(T, H) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\langle k \rangle x^2 T}{2}} \left\{ \exp \left[I_{\lambda}^{+}(x) \right] + \exp \left[I_{\lambda}^{-}(x) \right] \right\} dx, \quad (25)$$

де після заінтегрування степеневих та логарифмічних сингулярностей для перших провідних доданків функції $I_{\lambda}^{\pm}(x)$ отримано:

$$I_{\lambda}^{\pm}(x) = N \left[\frac{\langle k^2 \rangle x^2}{2} \frac{1}{N} - a(\lambda) \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^{\lambda-1} \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right], \quad 3 < \lambda < 5, \quad (26)$$

$$I_{\lambda}^{\pm}(x) = N \left[\frac{\langle k^2 \rangle x^2}{2} \frac{1}{N} - \frac{\langle k^4 \rangle}{12} \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^4 \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right], \quad \lambda > 5, \quad (27)$$

$$I_{\lambda}^{\pm}(x) = N \left[\frac{\langle k^2 \rangle x^2}{2} \frac{1}{N} - \left(\frac{x}{\sqrt{N}} \right)^4 \frac{\ln N}{24} \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right], \quad \lambda = 5. \quad (28)$$

У підрозділі 4.2 досліджено поведінку нулів Фішера для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі. Статистичну суму зручно переписати через змінну z , що поєднує t -та N -залежності:

$$z = \begin{cases} t \frac{\langle k^2 \rangle}{2} [a(\lambda)]^{2/(\lambda-1)} N^{\frac{\lambda-3}{\lambda-1}}, & 3 < \lambda < 5, \\ t \langle k^2 \rangle \sqrt{6N} / \sqrt{\ln N}, & \lambda = 5, \\ t \langle k^2 \rangle \sqrt{3N \langle k^4 \rangle}, & \lambda > 5. \end{cases} \quad (29)$$

Записана у нових змінних (29) статистична сума (28) при $H = 0$ набуває простого вигляду:

$$Z(z) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp \left(-zx^2 - x^{\lambda-1} \right) dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp \left(-zx^2 - x^4 \right) dx, & \lambda \geq 5. \end{cases} \quad (30)$$

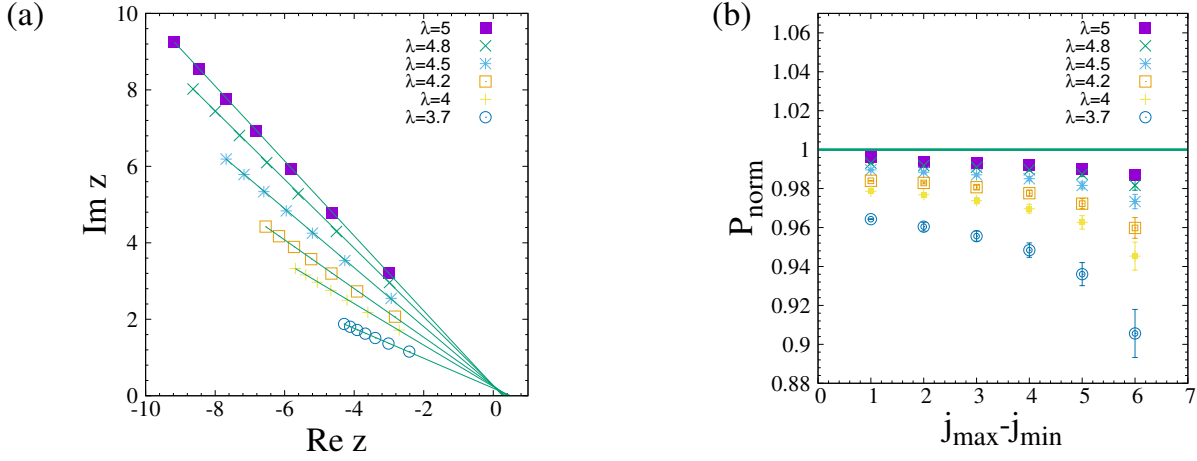


Рис. 5: (a): Нулі Фішера моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі за відсутності магнітного поля при різних λ . Характерною поведінкою нулів є їх розташування вздовж прямих, що перетинають дійсну вісь z в околі критичної точки z_c . Кути, утворені кожною лінією із дійсною віссю z зростають у діапазоні $3 < \lambda < 5$, як і передбачено рівнянням (31). (b): Значення відношення $P_{\text{norm}} = \varphi / \frac{\pi(\lambda-3)}{2(\lambda-1)}$ для статистичної суми (30), отримані з апроксимації j нулів Фішера у інтервалі $j = j_{\text{min}}, \dots, j_{\text{max}}$ для $j_{\text{max}} = 7$ для різних значень j_{min} . Суцільна крива на рисунку (b) відповідає точному значенню $P_{\text{norm}} = 1$

У діапазоні $3 < \lambda < 5$, знайдено чисельні значення кількох перших координат нулів, як показано на Рис. 5 (a). Із рисунку бачимо, що нулі чітко лягають на прямі, перетинаючи дійсну вісь z в околі критичної точки $z_c = 0$. Більше того, кут, який кожна лінія нулів утворює із дійсною віссю, зростає із λ (див. Рис. 5 (b) та Табл. 2), а його значення асимптотично співпадає із передбаченим:

$$\varphi = \frac{\pi(\lambda - 3)}{2(\lambda - 1)}. \quad (31)$$

Табл. 2: Чисельно одержані значення кута φ для різних λ . Кут порахований використовуючи лінійну апроксимацію нулів Фішера з номерами $j = j_{\text{min}}, \dots, 7$. Інтервал точності, якщо не написано явно, є меншим, ніж остання значуща цифра. Останній рядок дає значення кута φ , передбачене формулою (31).

j_{min}	$\lambda \geq 5$	$\lambda = 4.8$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4.2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.7$
1	$0.246(5)\pi$	$0.233(1)\pi$	$0.209(1)\pi$	$0.180(1)\pi$	$0.158(1)\pi$	$0.117(2)\pi$
2	0.248π	0.234π	0.210π	0.182π	$0.160(1)\pi$	$0.121(1)\pi$
3	0.248π	0.234π	0.211π	0.183π	0.162π	0.123π
4	0.248π	0.235π	0.212π	0.184π	0.162π	0.124π
5	0.248π	0.235π	0.212π	0.184π	0.163π	0.125π
6	0.249π	0.235π	0.212π	0.185π	0.163π	0.125π
exact	0.250π	0.237π	0.214π	0.188π	0.167π	0.130π

У підрозділі 4.3, підставляючи вирази для $I_{\lambda}^{\pm}(x)$ (26)–(28) при $T = T_c = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ у статистичну суму (25) при різних значеннях λ та зберігаючи провідні доданки

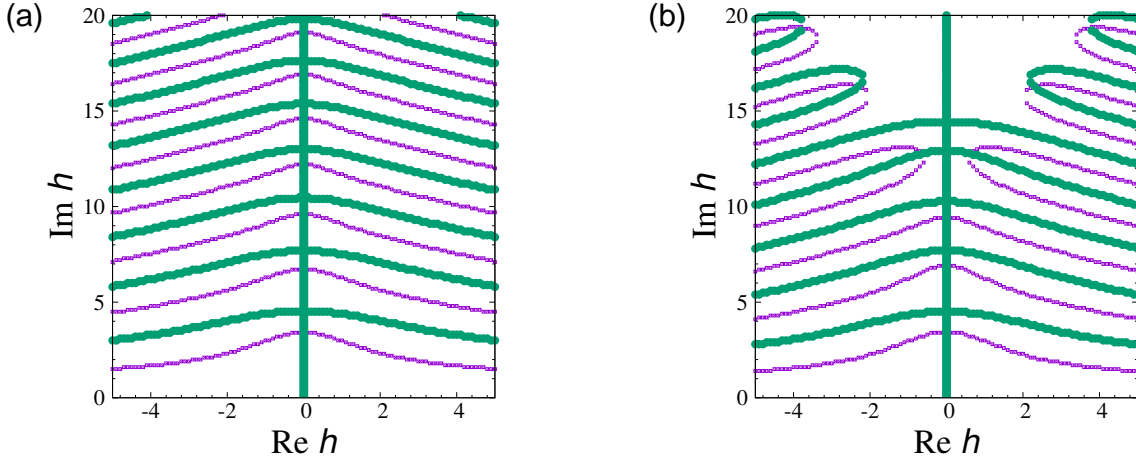


Рис. 6: Лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (32) при $T = T_c$ та різних значеннях λ в площині комплексного магнітного поля, товсті й тонкі лінії відповідно: (a) $\lambda \geq 5$; (b) $\lambda = 4.5$. Точки, де лінії різної товщини перетинаються, дають координати нулів Лі-Янга. Одна із ліній $\text{Im } Z = 0$ співпадає із вертикальною віссю на графіку.

розкладу за $1/N$, отримано наступні вирази для вільної енергії:

$$Z(h) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-x^{\lambda-1}) \cosh(hx) dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) \cosh(hx) dx, & \lambda \geq 5. \end{cases} \quad (32)$$

Тут H - та N -залежності статистичної суми увібрано у приведену змінну h . Її вигляд відрізняється для різних діапазонів λ :

$$h = \begin{cases} H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} a(\lambda)^{1/(1-\lambda)} N^\sigma, & 3 < \lambda < 5, \\ H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} \left(\frac{24}{\ln N} \right)^{1/4} N^\sigma, & \lambda = 5, \\ H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} \left(\frac{12}{\langle k^4 \rangle} \right)^{1/4} N^\sigma, & \lambda > 5, \end{cases} \quad (33)$$

із показником

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\lambda-2}{\lambda-1}, & 3 < \lambda < 5, \\ 3/4, & \lambda \geq 5. \end{cases} \quad (34)$$

На Рис. 6 зображено лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (32) при $T = T_c$ та різних значеннях λ в площині комплексного магнітного поля $h = \text{Re } h + i \text{Im } h$. Точки, де лінії різних типів перетинаються, дають координати нулів Лі-Янга. Хоча координати першого (найближчого до початку координат) нуля Лі-Янга є суто уявними для будь-якого значення $3 < \lambda < 5$ і його наявність дозволяє зробити висновок, що скейлінг з N описується показником (34), це не справджується для нулів вищого порядку: кількість нулів із $\text{Re } h_j = 0$ зменшується із j . З цієї точки зору, поведінка нулів Лі-Янга моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі суттєво відрізняється від поведінки на повному графі. В той

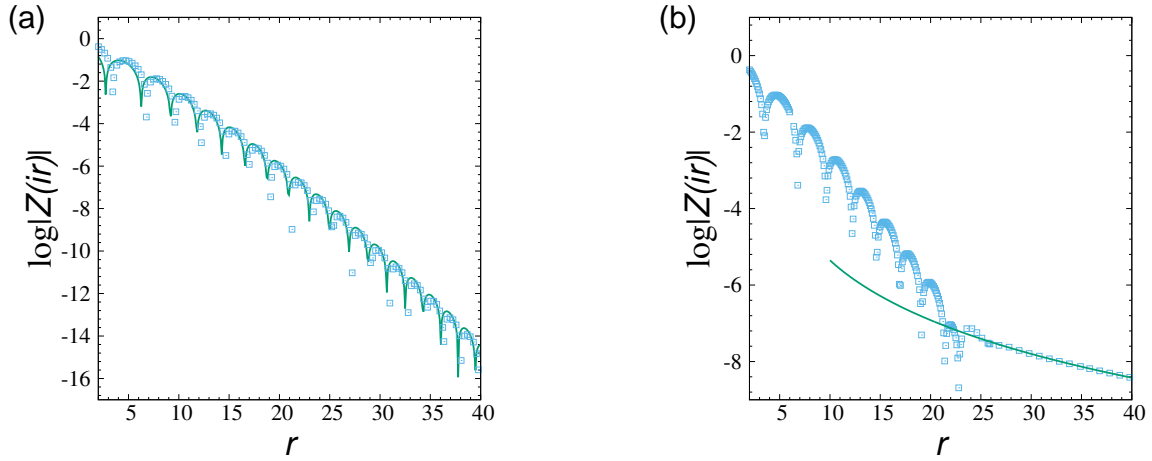


Рис. 7: Функція $\log |Z(ir)|$ для: (a) $\lambda \geq 5$, (b) $\lambda = 4.99$. Суцільні криві: результати асимптотичного розкладу. Для $\lambda \geq 5$ функція залишається знакозмінною (тобто, кількість нулів є необмеженою) на відміну від випадку $\lambda < 5$.

час, як на повному графі координати нулів є чисто уявними і задовільняють теорему Лі-Янга про коло одиничного радіуса (див. Рис. 1 (a)), ця теорема порушується у випадку відпаленої безмасштабної мережі в діапазоні $3 < \lambda < 5$.

Також досліджено асимптотичну поведінку статистичної суми $Z(h)$ при $\text{Re } h = 0$ в границі великих $\text{Im } h$. Поведінка функції для випадку $\lambda < 5$ якісно відрізняється від поведінки при $\lambda \geq 5$: у останньому випадку функція залишається знакозмінною (тобто кількість нулів є безмежною), що не характерно для діапазону $3 < \lambda < 5$. У другому випадку функція статистичної суми змінює знак скінченну кількість разів і функція прямує до асимптотичного значення, тому кількість нулів є обмеженою. Як можна бачити із Рис. 7 (a), (b) кількість осциляцій зростає зі збільшенням λ .

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Для q -станової моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі у присутності замороженого безладу, використовуючи наближення неоднорідного середнього поля, отримано представлення для вільної енергії. Фазова діаграма моделі (Рис. 2) свідчить про те, що характер впорядкування та рід фазового переходу кардинальним чином залежать не тільки від кількості станів q , але й від показника загасання функції розподілу ступенів вузлів λ . В режимі фазового переходу другого роду вперше отримано скейлінгові функції моделі та відношення критичних амплітуд.
2. Для явища перколяції на безмасштабних мережах (границя $q \rightarrow 1$ моделі Поттса) показано виникнення логарифмічних поправок до скейлінгу. Отримані значення показників поправок до скейлінгу є від'ємними. Це означає послаблення сингулярностей відповідних спостережуваних в околі точки перколяції.
3. Встановлено, що стрибок теплоємності δC_H моделі Ізінга на безмасштабній мережі є λ -залежним навіть при $\lambda > 5$, коли всі критичні показники не за-

лежать від λ та є стандартними критичними показниками середнього поля. Значення стрибка теплоємності прямує до передбаченого у теорії середнього поля тільки в границі $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = 3/2$.

4. Доповнено аналіз моделі Ізінга на повному графі, застосовуючи формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми. Використовуючи метод, запропонований для нулів у площині комплексної температури (нулi Фішера), знайдено відповідні інтегральні представлення статистичної суми для випадку комплексного поля (нулi Лі-Янга) та значення конформно-інваріантних кутів й показника скейлінгу для нулів Лі-Янга.
5. Вперше застосовано аналіз нулів статистичної суми в комплексній площині для дослідження критичної поведінки спінових моделей на безмасштабних мережах. Знайдені конформно-інваріантні характеристики розташування нулів у випадку безмасштабної мережі виявляються залежними від значенням параметра λ . А саме, значення кута конденсації нулів Фішера φ та показника σ у діапазоні $\lambda \geq 5$ відповідають спостережуваним на повному графі, а у випадку $3 < \lambda < 5$ задаються виразами (31), (34).
6. Виявлено, що для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при $\lambda = 5$ pojawiaються логарифмічні поправки для координат нулів статистичної суми, як функції розміру мережі N , із показниками, що задовільняють скейлінгові співвідношення.
7. Теорема Лі-Янга про коло одиничного радіуса для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі порушується у діапазоні $3 < \lambda < 5$. Якщо при $\lambda \geq 5$ усі нулі є чисто уявними, то при $3 < \lambda < 5$ зі спаданням λ кількість чисто уявних нулів зменшується та з'являються нулі із дійсною та уявною частиною, що суперечить умовам теореми.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ

1. Krasnytska, M. Phase transitions in the Potts model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // *Condens. Matter Phys.* – 2013. – Vol. 16, no. 2. – P. 23602.
2. Krasnytska, M. Scaling functions and amplitude ratios for the Potts model on an uncorrelated scale-free network / M. Krasnytska // *Condens. Matter Phys.* – 2014. – Vol. 17, no. 2. – P. 23602.
3. Krasnytska, M. On the discontinuity of the specific heat of the Ising model on a scale-free network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // *Condens. Matter Phys.* – 2015. – Vol. 18, no. 4. – P. 44601.
4. Krasnytska, M. Violation of Lee-Yang circle theorem for Ising phase transitions on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // *EPL.* – 2015. – Vol. 111. – P. 60009.
5. Krasnytska, M. Partition function zeros for the Ising model on complete graphs and on annealed scale-free networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2016. – Vol. 49. – P. 135001.
6. Krasnytska, M. Scaling functions and critical amplitude ratios for the Potts model on scale-free networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // VI International Conference: Physics of Disordered Systems, Lviv, October 14-16, 2013. Proceedings. – Lviv: LNU, 2013. – P. 67.
7. Krasnytska, M. Critical behaviour of the Potts model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // Різдваїні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня, 2013. – Журн. фіз. дослідж., 2013. – Том 17. – С. 1998-6.
8. Красницька, М. Фазові переходи для моделі Поттса на складних мережах / М. Красницька, Б. Берш, Ю. Головач // XIII Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики і теорії конденсованої речовини, Львів, 5-7 червня 2013 р. Тези доповідей. – Львів: 2013. – С. 29.
9. Krasnytska, M. Scaling functions and amplitude ratios for the Potts model on uncorrelated scale-free network / M. Krasnytska // 5-th Conference of young scientists “Modern problems of theoretical physics”, Kyiv, December 24-27, 2013. Book of Abstracts. – Kyiv: 2013. – P. 30.
10. Krasnytska, M. Lee-Yang-Fisher zeros for the Ising model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // The 39-th Conference

- of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Coventry, April 8-10, 2014. Book of Abstracts. – Coventry: 2014. – P. 75.
11. Krasnytska, M. Lee-Yang-Fisher zeros for the Ising model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // Workshop “CompPhys-2014”, Leipzig, November 27-29, 2014. Book of Abstracts. – Leipzig: 2014. – P. 10.
 12. Krasnytska, M. Violation of the Lee-Yang circle theorem for the Ising model on complex network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // Різдваїні дискусії 2015, Львів, 12-13 січня, 2015. – Журн. фіз. дослідж., 2015. – Том 19. – С. 1998-3.
 13. Красницька, М. Нулі статистичної суми моделі Ізінга на безмасштабній мережі / М. Красницька // XV Всеукраїнська школа-семинар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики і теорії конденсованої речовини, Львів, 4-5 червня 2015 р. Тези доповідей. – Львів: 2015. – С. 29.
 14. Krasnytska, M. Violation of Lee-Yang circle theorem for Ising phase transitions on complex networks / M. Krasnytska // The 41-st Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Vienna, February 14-17, 2016. Book of Abstracts. – Vienna: 2016. – P. 68.
 15. Krasnytska, M. On the discontinuity of the specific heat of the Ising model on a scale-free network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // The 41-st Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Vienna, February 14-17, 2016. Book of Abstracts. – Vienna: 2016. – P. 68.

АНОТАЦІЯ

Красницька М. Б. Фазові переходи на складних мережах. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика, Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України, Львів, 2016.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню критичної поведінки спінових моделей на безмасштабних мережах зі степеневі-спадною функцією розподілу ступенів вузлів $P(k) \sim k^{-\lambda}$ та на повному графі. Для моделі Поттса на безмасштабній мережі у наближенні неоднорідного середнього поля знайдено критичні показники, відношення амплітуд, скейлінгові функції, що виявляються залежними від показника загасання функції розподілу λ . Таким чином, саме поняття універсальності для моделей на безмасштабних мережах зазнає змін: λ виявляється одним із глобальних параметрів, що визначає клас універсальності. Поряд із традиційним методом неоднорідного середнього поля вперше у теорії складних мереж використано метод аналізу нулів статистичної суми в комплексній площині. Виявлено незвичну поведінку ряду універсальних характеристик, а саме, кут конденсації нулів Фішера

φ та показник σ виявляються λ -залежними. Також виявлено порушення теореми Лі-Янга про одиничне коло в діапазоні $3 < \lambda < 5$ для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі.

Ключові слова: складні мережі, безмасштабна мережа, фазові переходи, перколяція, модель Ізінга, модель Поттса, нулі статистичної суми.

АННОТАЦИЯ

Красницка М. Б. Фазовые переходы на сложных сетях. — На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика, Институт физики конденсированных систем Национальной академии наук Украины, Львов, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию критического поведения спиновых моделей на сложных сетях со спадающей функцией распределения $P(k) \sim k^{-\lambda}$ и на полном графе. Для модели Поттса на сложных сетях в приближении неоднородного среднего поля найдены критические показатели, отношения амплитуд, скейлинговые функции, которые оказались зависимыми от показателя затухания функции распределения λ . Таким образом, понятие универсальности для моделей на безмасштабных сетях изменяется: λ оказывается одним с глобальных параметров, которые определяют класс универсальности. Наряду с традиционным методом неоднородного среднего поля впервые в теории сложных сетей использован метод анализа нулей статистической суммы в комплексной плоскости. Обнаружено нетипичное поведение для ряда универсальных характеристик, а именно угол конденсации нулей Фишера φ и показатель σ оказываются зависимыми от параметра λ . Также обнаружено нарушение теоремы Ли-Янга об окружности единичного радиуса в диапазоне $3 < \lambda < 5$ для модели Изинга на оттоженной безмасштабной сети.

Ключевые слова: сложные сети, безмасштабная сеть, фазовые переходы, перколяция, модель Изинга, модель Поттса, нули статистической суммы.

ABSTRACT

Krasnytska M. Phase transitions on complex networks. — Manuscript.

Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in physics and mathematics on specialization 01.04.02 — theoretical physics, Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2016.

The thesis is devoted to investigation of the critical behavior of spin models on scale-free networks with a power-law decay of the node-degree distribution $P(k) \sim k^{-\lambda}$ and on complete graph. The phase diagram obtained for the q -state Potts model on

an uncorrelated scale-free network shows that the character of ordering and the phase transition order depends on the number of Potts states q as well as on the value of the decay exponent λ . In the second order phase transition regime, the set of critical exponents, critical amplitude ratios and scaling functions are obtained by means of the inhomogeneous mean-field approach. The expressions appear to be dependent on the node-degree distribution function decay exponent λ . In that sense, the principle of universality for spin models on scale-free networks is modified: λ becomes one of the global parameters defining the universality class. The non trivial behavior for the heat capacity had been observed: in the region $\lambda > 5$ the heat capacity jump δc_H depends on λ and tends to its mean field value $\delta c_H = 3/2$ only in the limit of large λ .

Although the critical behaviour of spin models on scale-free networks had been a subject of intensive studies, the method of partition function complex zeros analysis (Lee-Yang-Fisher formalism) had not been previously applied in this field. Recently it has been shown that complex zeros of partition function find their counterparts in vanishing of quantum coherence of many-particle quantum systems. In turn, this opens an access to their experimental measurement and naturally attracts additional interest to their analysis. We consider the partition function zeros for the Ising model on the complete graph and on an annealed scale-free network in the case of complex temperature (Fisher zeros) or complex magnetic field (Lee-Yang zeros). We start by completing the available results for the partition function zeros of the Ising model on the complete graph. In particular, we analyze the behaviour of the Lee-Yang zeros as well as track the motion of the Fisher zeros in the real external magnetic field. As has been observed before for some other models, this motion is governed by the universal angle ψ , that encodes values of the order parameter critical exponents. We show that the Lee-Yang zeros coordinates satisfy the unit circle theorem: all zeros are purely imaginary in complex magnetic field plane.

Applying the same method to the partition function of the Ising model on an annealed scale-free network we analyze the zeros in different regions of λ in complex temperature and complex magnetic field planes. In the case of an annealed scale-free network the main observables (angle ψ , angle of Fisher zeros location φ , and finite size scaling exponents) depend on the node degree distribution function decay exponent λ . In the region $\lambda \geq 5$ we recover the results for the partition function of the Ising model on a complete graph. For the Fisher zeros in the region $3 < \lambda < 5$ the angle φ becomes λ -dependent and increases with an increase of λ . It is known that Lee-Yang zeros of the ferromagnetic Ising model on a lattice satisfy the unit circle Lee-Yang theorem. We prove that this theorem does not hold for the Ising model on an annealed scale-free network: in the region $3 < \lambda < 5$ there appear zeros with real and imaginary parts and the Lee-Yang unit circle theorem is violated.

Keywords: *complex networks, scale-free networks, phase transitions, percolation, Ising model, Potts model, partition function zeros.*