НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

САРКАНИЧ Петро Васильович

УДК 538.9

УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ СКЛАДНИХ СИСТЕМ: АНАЛІЗ НУЛІВ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ І СКЛАДНІ МЕРЕЖІ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2019

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України.

Наукові керівники: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор **Головач Юрій Васильович**, Інститут фізики конденсованих систем НАН України (м. Львів), завідувач відділу статистичної теорії конденсованих систем.
PhD, професор **Ральф Кенна**, Дослідницький центр рідинних і складних систем, Університет Ковентрі (м. Ковентрі, Велика Британія), професор.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Васильєв Олексій Миколайович, Київський національний університет імені Тараса Шевченка (м. Київ), професор кафедри теоретичної фізики

кандидат фізико-математичних наук,
Гнатенко Христина Павлівна, Львівський національний університет імені Івана Франка (м. Львів), старший науковий співробітник.

Захист відбудеться “13” листопада 2019 року о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01 при Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України за адресою:
79011 м. Львів, вул. Свєнціцького, 1.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Інституту фізики конденсованих систем НАН України за адресою:
79026 м. Львів, вул. Козельницька, 4.

Автореферат дисертації розісланий “11” жовтня 2019 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 35.156.01,
доктор фіз.-мат. наук А.М. Швайка

Актуальність теми. Поняття універсальності – незалежності характерної поведінки макроскопічної системи, що складається з багатьох взаємодіючих частин, від деталей будови цієї системи – є одним із підставових понять статистичної фізики. Все частіше це поняття виходить за межі суто фізичних задач і використовується в загальнонауковому чи загальнокультурному контексті. Метою дисертації є дослідження універсальності у складних системах. Під складними системами ми розуміємо такі, для яких характерна колективна поведінка, що не є простим наслідком властивостей їх складових частин [Anderson P. W., Science, **177**, 393 (1972); Parisi G., Physica A, **263**, 557 (1999)]. Притаманними особливостями складних систем є самоорганізація, виникнення нових функціональних можливостей (нових якостей), висока чутливість до малих змін початкових умов, підпорядкування степеневим законам (розподіли типу "товстих хвостів") [Newman M., Am. J. Phys., **79**, 800 (2011); Holovatch Yu., et al., Eur. J. Phys., **38**, 023002 (2017)]. Поняття складної системи стосується багатьох традиційних дисциплін науки і є предметом нової міждисциплінарної галузі знань - науки про складні системи [Thurner S., 43 Visions for Complexity. World Scientific, 2017. Vol. 3.]. Методи і концептуальний апарат статистичної фізики є однією із важливих складових цієї науки. То ж і поняття універсальності стало одним із підставових понять науки про складні системи.

Оскільки складним системам притаманна колективна поведінка багатьох зв'язаних компонент, теорія фазових переходів надає природне знаряддя для їх дослідження. Так дослідження впорядкування у складних спінових моделях дозволяє зрозуміти на принциповому рівні і кількісно описати формування універсальної – спільної для всіх – поведінки у різних за своєю природою фізичних, хімічних, біологічних, соціальних системах (див., наприклад, [Holovatch Yu. ed., Order, disorder and criticality: advanced problems of phase transition theory. World Scientific, 2004-2018. Vol. 1-5]). При цьому стани спінової змінної відповідають станам різних за своєю природою агентів, а структура розташування агентів-спінів та тип взаємодії моделюють їх відповідники у реальній складній системі [Galam S., Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena. Springer, 2012.]. Часто в таких дослідженнях розглядаються процеси впорядкування на складних мережах - випадкових графах, топологічні властивості яких відтворюють структуру тої чи іншої складної системи. Приклади мережевих структур – численні. То ж конкретні реалізації моделювання критичної поведінки складних спінових систем знаходять все ширше застосування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України та дослідницькому центрі рідинних і складних систем університету Ковентрі (Ковентрі, Велика Британія) згідно з планами робіт за темами: "Розвиток теоретичних підходів опису флюїдів, граткових та складних систем поблизу точок фазового переходу" (2014-2017 рр., номер держреєстрації 0112U007763), "Нові концепції статистичного опису і їх застосування до теорії багаточастинкових систем" (2017-2019 рр., номер держреєстрації 0117U002093), "Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінґу у складних системах" (2018-2019 рр., номер

держреєстрації 0118U003012); за підтримки аспірантської програми “Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems” (Ляйпціґ-Лотаринґія-Львів-Ковентрі) ($\mathbb{L}^4$), та проектів співпраці FP7 EU IRSES 269139 “Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media”, 295302 “Statistical Physics in Diverse Realizations”, 612707 “Dynamics of and in Complex Systems”, 612669 “Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences’.

Метою даної дисертації є пояснення виникнення універсальності і скейлінґу у складних системах різної природи.

Об’єктами дослідження у дисертаційній роботі вибрано три приклади складних системи: модель Ізінга з дипольною взаємодією, модель Поттса з невидимими станами і соціальна мережа персонажів давнього наративу.

Предметом дослідження є дослідження зміни у класі універсальності двовимірної моделі Ізінга із дипольною взаємодією, вплив ентропійного внеску на процес впорядкування в одновиміних системах, характеристики критичної поведінки багаточастинкових систем на складних мережах, топологічні характеристики складних соціальних мереж наративів.

Методи дослідження. В роботі застосовуються наближення неоднорідного середнього поля, метод матриці переносу, формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми у випадку комплексного поля та температури та методи теорії складних мереж.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційні роботі було проаналізовано ділянку фазової діаграми двовимірної моделі Ізінга із дипольними взаємодіями і показано, що критичні показники є в неперервній залежності від відношення констант взаємодії δ. Наші результати підтверджують перехід другого роду в усій ділянці значення δ, де відбувається перехід між смужковою антиферомагнітною із шириною смужок $h = 1$ і парамагнітною (тетрагональною) фазами. Натомість, перехід між смужковою фазою із $h = 2$ і парамагнітною фазою відбувається за сценарієм першого роду.

Використовуючи метод матриці переносу, було вперше знайдено точний розв’язок моделі Поттса з q видимими і r невидимими станами на одновимірному ланцюжку. Проаналізовано умови, коли ця модель має фазовий перехід при додатній температурі і пояснено чому ці результати не узгоджуються із строгими теоремами.

Вперше було отримано вираз для вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на довільному графі. Зокрема, на повному графі, передбачено існування двох граничних значень r, при яких змінюється характер критичної поведінки. Схожий ефект передбачено і у частковому випадку $q = 2$ для безмасштабної мережі.

Вперше було застосовано підхід складних мереж для аналізу соціальної мережі персонажів давньоруських билин. Зокрема, показано, що соціальна мережа персонажів билин володіє низкою спільних кількісних характеристик із відповідними мережами інших наративів, а також запропоновано кількісні аргументи на користь тих чи інших гіпотез щодо зв’язку билинних персонажів із історичними постатями.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати описують властивості фазової діаграми двовимірної моделі Ізінга із дипольною взаємодією. Саме цю модель часто використовують для опису тонкоплівкових матеріалів, які можна використати для виготовлення засобів зберігання із великою густиною інформації.

Незважаючи на ряд теорем, що забороняють фазові переходи в одновимірних класичних рівноважних системах із короткосяжною взаємодією, наші результати показують, що існують два способи обійти такі обмеження. Перший з них полягає в розгляді зовнішніх комплексних магнітних полів. На перший погляд нефізичні, їх нещодавно вдалося непрямо виміряти на експерименті через часи декогеренції квантової системи відповідника [Peng, X. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 010601 (2015)]. Таким чином, розгляд зовнішніх магнітних полів дозволяє пов'язати класичні і квантові спінові моделі. Другий механізм полягає у розгляді від'ємної кількості невидимих станів. Оскільки збільшення кількості невидимих станів веде до зростання ентропії в системі, то їх від'ємну кількість можна трактувати як зовнішній впорядковуючий механізм.

Отримані результати для моделі Поттса з невидимими станами на мережах можуть бути застосовані для задач соціофізики. Зокрема, концепція невидимого стану прямо проектується на соціальні задачі, де індивід, який не взаємодіє з оточенням можна представити як такий, що знаходиться в невидимому стані.

Використання підходу складних мереж до наративів, окрім іншого, дозволяє кількісне порівняння творів і їх класифікацію.

Особистий внесок здобувача. В публікаціях [1–7] автору дисертації належить:

- аналіз густини нулів статистичної суми моделі Ізінга із дипольною взаємодією [1];
- точний розв'язок моделі Поттса із невидимими станами на одновимірному ланцюжку. Аналіз нулів Лі-Янга і Фішера цієї моделі [4,5];
- розгляд умов, за яких фазовий перехід в одновимірній моделі Поттса із невидимими станами відбувається за додатніх температур [4,5];
- аналіз виразів для вільної енергії в наближенні неоднорідного середнього поля моделі Поттса з невидимими станами на повному графі [2] і безмасштабній мережі [6];
- побудова і аналіз соціальної мережі персонажів давньоруських билин і її порівняння з мережами персонажів інших народів світу [3,7].

Апробація роботи.Результати роботи були представленні на таких конференціях: п'ята конференія молодих вчених "Problems of theoretical physics" (Київ, Україна, 24-27 грудня 2013), конференція MECO-41 (Відень, Австрія, 15-17 лютого 2016), 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 9-10 червня 2016), "Workshop on current problems in physics" (Львів, Україна, 5-7 липня 2016), Різдвяні дискусії – 2017 (Львів, Україна, 11-12 січня 2017), 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, Україна, 8-9 червня 2017), Різдвяні дискусії – 2018 (Львів, Україна, 11-12 січня 2017), конференція MECO-43 (Краків, Польща, 1-4 травня 2018). А також на таких семінарах: семінар групи статистичної фізики університету Анрі Пуанкаре (Нансі, Франція, 15.01.16); аспірантський семінар дослідницького центру рідин і складних систем університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 30.05.18, 27.03.19); семінар астрономічної обсерваторії ЛНУ ім. І. Франка (Львів, Україна, 08.06.15); стендова доповідь на дослідницькому симпозіумі факультету інженерних, екологічних і комп'ютерних наук університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 06.06.18); семінари Лабораторії статистичної фізики складних систем ІФКС НАНУ.

Результати, викладені в дисертації, **опубліковано** в шести статтях [1–6], одному препринті [7], а також в тезах восьми конференцій [8–15].

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається зі вступу, розділу з оглядом літератури та трьох основних розділів, у яких викладені результати досліджень дисертанта, а також висновків та списку використаних джерел. Робота викладена на 121 сторінці (разом із літературою та додатками – 145 сторінок), бібліографічний список містить 208 найменувань публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну й практичну цінність отриманих результатів та наведено стислу характеристику дисертації.

У **першому розділі** розглядаються основні моделі і методи застововані в дисертаційній роботі. Зокрема в підрозділі 1.2 дається коротка історія і основні результати дослідження моделей Ізінга із дипольною взаємодією і Поттса з невидимими станами. У першій з цих моделей є дві конкуруючі взаємодії: феромагнітна взаємодія найближчих сусідів і антиферомагнітна далекосяжна взаємодія. У моделі Поттса з невидимими станами спін може перебувати у двох типах станів - видимих і невидимих. Невидимі стани не взаємодіють із оточенням.

В підрозділі 1.3 описано дві групи методів, що використовуються в дисертаційній роботі. Перша група це методи аналізу нулів статистичної суми у комплексних площинах температури (нулі Фішера) чи магнітного поля (нулі Лі-Янга). У обох цих випадках використовуються два методи аналізу нулів статистичної суми. Скейлінг найближчого до критичної точки нуля підпорядковується наступногому анзацу [Itzykson C., et al., Nucl. Phys. B. **220**, 415 (1983)]:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z &= z_c + A \cdot N^{-\Lambda} \\ \mathrm{Im}\, z &= B \cdot N^{-1/\nu}, \end{aligned}$$

де z певна функція від температури, у випадку нулів Фішера, чи магнітного поля для нулів Лі-Янга, z_c - координата критичної точки, N - кількість частинок в системі, ν - критичний показник кореляційної довжини, а Λ - показник зсуву. Другим методом є дослідження густини нулів статистичної суми:

$$G_L(r) = \begin{cases} = \dfrac{j}{L^d} & r \in (r_j, r_{j+1}) \\ = \dfrac{2j-1}{2L^d} & r = r_j \end{cases} ,$$

де d - вимірність простору, L - лінійний розмір системи, j - порядковий номер нуля. Відомо, що густина нулів статистичної суми поводиться як [Janke W., Kenna R., J. Stat. Phys. **102**, 1211 (2001)]

$$G_\infty(r) \propto r^{2-\alpha} ,$$

де α критичний показник питомої теплоємності.

Другу групу методів складають методи науки про складні мережі. В дисертаційній роботі вони застосовуються як для опису спінових систем на мережі, так і для дослідження топологічних властивостей однієї із соціальних мереж.

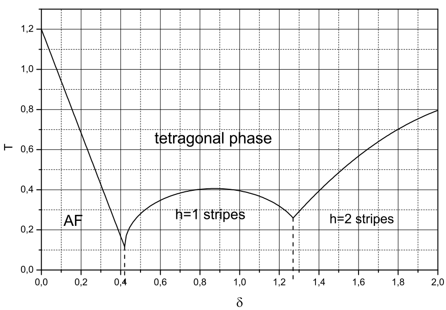


Рис. 1: Схематична фазова діаграма двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими взаємодіями найближчих сусідів і дипольною. AF: Неелівський антиферомагнетик, $h = 1, h = 2$: смужкові фази.

В **другому розділі** розглянуто модель Ізінга із дипольною взаємодією на квадратній гратці і модель Поттса з невидимими станами на одновимірному ланцюжку методами аналізу нулів статистичної суми. В підрозділі 2.1 розглянуто двовимірну модель Ізінга з конкуруючими феромагнітною взаємодією найближчих сусідів і антиферомагнітною дипольною взаємодією. Її гамільтоніан має вигляд

$$H = -\delta \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i<j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{r_{ij}^3} . \qquad (1)$$

Тут, $\delta = J/g > 0$, g і J позначають відповідно константи дипольної і взаємодії між найближчими сусідами. Підсумовування виконується по спінах квадратної гратки розміру $L \times L$. Перша сума в (1) охоплює всі пари найближчих сусідів $\sigma_i = \pm 1$, в той час як у другому члені враховуються всі пари спінів на гратці.

Предметом недавнього обговорення була ділянка фазової діаграми в області низьких значень температури T і $\delta = J/g$ (ескіз фазової діаграми в цій області наведено на рис. 1). В цій ділянці відомо, що фазові переходи між антиферромагнітною Неелівською фазою (AF) і між смужковою $h = 2$ і тетрагональною фазами є переходами другого і першого роду відповідно. Але рід фазового переходу між смужковою $h = 1$ і тетрагональною фазами залишався невідомим, а різні роботи свідчили про перехід першого [Rastelli E., et al., Phys. Rev. B, **73**, 144418 (2006)] або другого роду [Fonseca J. S., et al., Phys. Rev. E, **86**, 011103 (2012)].

Табл. 1: Критичні показники двовимірної моделі Ізінга з конкуруючими феромагнітною взаємодією найближчих сусідів і антиферомагнітною дипольною взаємодією для різних значень коефіцієнта взаємодії δ. Наші результати (α_{zd}) в порівнянні із роботою [Fonseca J. S., et al., Phys. Rev. E, **86**, 011103 (2012)], де критичні показники шукалися зі скейлінгу найближчого нуля і піку теплоємності.

δ	$d\nu$	$\alpha = 2 - d\nu$	α/ν	$\alpha = \frac{2\alpha/\nu}{d+\alpha/\nu}$	α_{zd}
0.89	1.807(70)	0.193(70)	0.364(20)	0.308(17)	0.194(17)
0.91	1.817(68)	0.183(68)	0.375(19)	0.316(16)	0.191(14)
0.93	1.779(61)	0.221(61)	0.399(20)	0.333(17)	0.221(16)
0.95	1.741(53)	0.259(53)	0.424(20)	0.350(17)	0.255(14)
0.97	1.706(46)	0.294(46)	0.461(19)	0.375(16)	0.292(14)
1.00	1.659(37)	0.341(37)	0.522(17)	0.414(14)	0.349(13)
1.10	1.415(25)	0.585(25)	0.888(21)	0.615(15)	0.5882(84)
1.20	1.223(21)	0.777(21)	1.496(28)	0.856(16)	0.788(17)
1.30	1.0093(28)	0.9907(28)	2.0183(66)	1.0046(33)	1.011(13)

Було застосовано метод аналізу густини нулів статистичної суми для дослідження цієї ділянки фазової діаграми. Сильною стороною використаного методу є те, що він одночасно дозволяє визначити рід фазового переходу і оцінити значення критичного показника питомої теплоємності чи прихованої теплоти для фазових переходів другого і першого роду відповідно. Наші результати (α_{zd}) ми порівнювали із результатами роботи [Fonseca J., et al., Phys. Rev. E, **86**, 011103 (2012)], де критичні показники шукалися зі скейлінгу нулів і піку теплоємності (див. Табл. 1).

Всі три підходи приводять до δ-залежних значень критичних показників. Це робить δ, поряд із вимірністю простору d, глобальною змінною, що визначає клас універсальності. Зазначимо, однак, що числові значення показників, отриманих за допомогою різних підходів, різняться. Зокрема, результати отримані за допомогою скінченно вимірного скейлінгу нулів статистичної суми (третій стовпець таблиці) добре узгоджуються з результатами аналізу густини нулів статистичної суми (шостий стовпець таблиці). Але вони істотно відрізняються від результатів, отриманих на основі скейлінгу піку питомої теплоємності.

В підрозділі 2.2 ми розглянули одновимірну модель Поттса із невидимими станами. Її гамільтоніан має вигляд

$$H_{(q,r)} = \sum_i H_i, \quad \text{де} \quad H_i = -\delta_{s_i,s_{i+1}} \sum_{\alpha=1}^{q} \delta_{s_i,\alpha} - h_1\delta_{s_i,1} - h_2\delta_{s_i,q+1}, \tag{2}$$

де сумування по i проходить по усіх N вузлах ланцюжка, $s_i = 1, \ldots, q, q+1, \ldots, q+r$ поттсівська змінна, q і r позначають кількості видимих і невидимих станів відповідно, а h_1 і h_2 два зовнішні магнітні поля, що діють на перший видимий і перший невидимий стан відповідно. Надалі будемо використовувати позначення (q, r)−станова модель Поттса.

Використовуючи метод матриці переносу, ми знайшли точний вираз для стати-

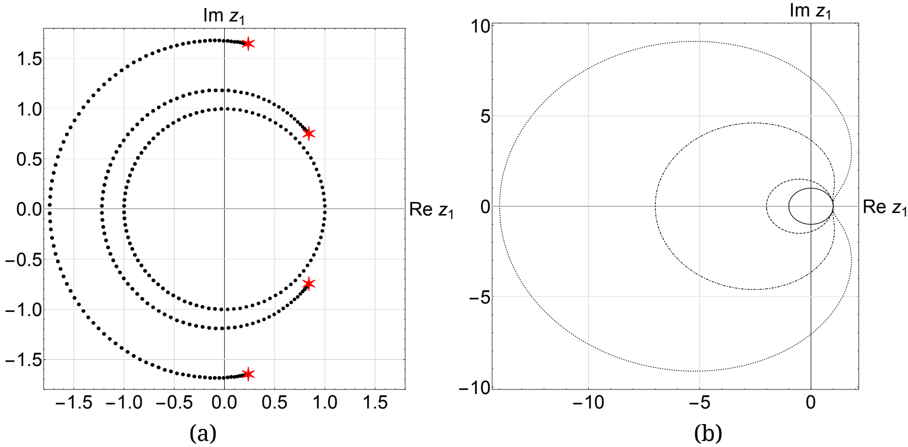


Рис. 2: (a) Нулі Лі-Янга $(2,2)-$становой моделі Поттса в комплексній $z_1 = e^{-\beta h_1}-$площині для $y = e^{\beta} = 2$ (зовнішня траєкторія), $y = 4$ (середня траєкторія) і $y \to \infty$ (внутрішня, замкнуте коло, що відповідає $T = 0$) для системи розміру $N = 100$. Край Янга-Лі позначено зірками. (b) Траєкторії країв Янга-Лі в комплексній z_1-площині для $q = 2$ і $r = 0, 1, 6, 13$ рухаючись зсередини і назовні. Усі графіки перетинають дійсну вісь в точці $z_1 = 1$, цим самим показуючи наявність фазового переходу тільки при нульовій температурі.

стичної суми

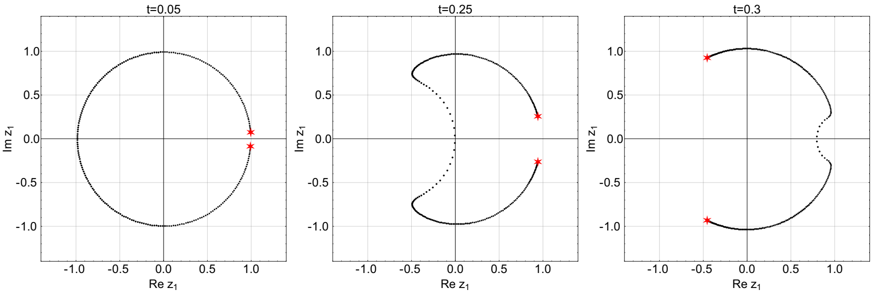
$$Z = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i^N, \tag{3}$$

де N позначає розмір ланцюжка, а λ_i - власні значення матриці переносу. Два власні значення мають простий вигляд $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = y - 1$, а решту три можна знайти як корені рівняння

$$(r-1-\lambda+z_2)(yz_1-\lambda-z_1)(y-\lambda-1)-\lambda z_1(y-\lambda-1)-(q-1)(yz_1-\lambda-z_1)\lambda = 0, \tag{4}$$

де $y = e^{\beta}, z_1 = e^{\beta h_1}, z_2 = e^{\beta h_2}$, а β обернена температура. Ми також будесо використовувати змінну $t = e^{-\beta}$. Оскільки власні значення можна знайти із рівняння (4), то задача є точно розв’язаною. Але корені рівняння третього степеня є дуже громіздкими, тому ми будемо аналізувати нулі статистичної суми. Нулі статистичної суми тоді знаходять з умови, що (хоча б) два найбільші власні значення рівні по модулю [Fisher M. E., Prog. Theor. Phys. Supp., **69**, 14 (1980)]. В комплексній площині $z = e^{-\beta h}-$ для звичайної моделі Ізінга нулі лежать на дузі одиничного кола. Точка на кінці дуги, що лежить найближче до додатньої дійсної осі, називається "краєм Янга-Лі". Зі зміною температури край Янга-Лі рухається. Точка, в якій він перетинає дійсну вісь відповідає критичній точці.

На Рис. 2 зображено положення нулів статистичної суми і країв Янга-Лі для моделі Поттса з невидимими станами. Можна зробити висновок, що для цієї моделі нулі Лі-Янга хоч і лежать на дугах кіл, але їх радіуси змінюються з температурою. Також з Рис. 2(b) видно, що усі траєкторії перетинаються в точці $z_1 = 1$, тобто фазовий перехід спостерігається тільки при нульовій температурі.



(a) (b) (c)

Рис. 3: Нулі Лі-Янга в комплексній z_1-площині для $(2,2)$-станової моделі Поттса із $z_2 = -5$ при різних значеннях температури (a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.25$, (c) $t = 0.3$.

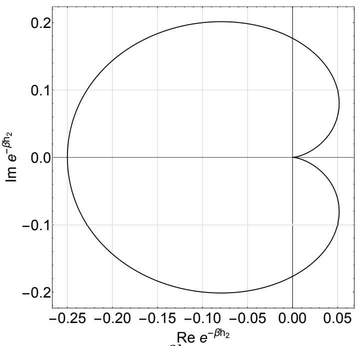


Рис. 4: Значення $e^{-\beta h_2}$, для яких фазовий перехід в $(2,3)-$становій моделі Поттса відбувається при додатній температурі. Кожна точка кривої відповідає певній фізично досяжній критичній температурі.

Ми також показали, що існує два способи зсунути фазовий перехід в область додатніх температур. Перший полягає у розгляді систем із зовнішнім комплексним магнітним полем $z_2 < 0$ або еквівалентно $h_2 \in \mathbb{C}$. У цьому випадку нулі статистичної суми змінюють своє положення. Нулі Лі-Янга для моделі із $z_2 = -5$ зображено на Рис.3. Для малих температур, нулі лежать на дугах кіл, і немає точок перетину із дійсною віссю. Але, коли температура зростає, орієнтація цих дуг змінюється і з'являються точки перетину.

Для спонтанних фазових переходів $h_1 = 0$, ми отримали співвідношення між критичною температурою і полем h_2

$$z_2 = y - q - r \pm 2i\sqrt{q(y-1)}\,. \tag{5}$$

У цьому рівнянні як y, так і $z_2 = y^{h_2}$ залежать від температури. Для фіксованих q, r і усіх значень в діапазоні $1 \leq y < \infty$ (що означає діапазон температур $0 \leq t \leq 1$ ми чисельно розв'язуємо (5) і отримуємо комплексні значення для h_2. На рис. 4 побудуємо ці значення для $(2,3)-$станової моделі Поттса у вигляді $e^{-\beta h_2}$. Крива формує дві лінії, кожна точка яких відповідає певній позитивній критичній температурі. Верхня і нижня гілки відповідають комплексно спряженим значенням поля.

Другим способом змістити фазовий перехід в область додатніх температур є використання від'ємної кількості невидимих станів $r < 0$. У цьому випадку поведінка

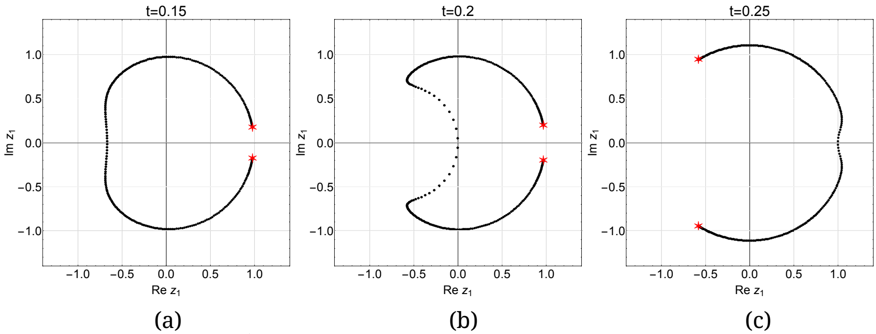


Рис. 5: Нулі Лі-Янга $(2, -5)$-станової моделі Поттса для різних значень температури (a) $t = 0.15$, (b) $t = 0.2$, (c) $t = 0.25$ в комплексній z_1-площині для системи розміру $N = 256$.

нулів Лі-Янга схожа до попереднього випадку $z_2 < 0$.

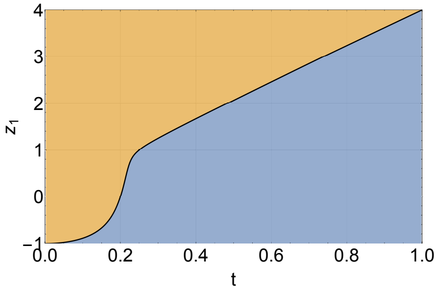


Рис. 6: Фазова діаграма $(2, -5)$-станової моделі Поттса. Площина (t, z_1) ділиться на області за максимальним власним значенням. Значення $z_1 < 0$ відповідають комплексним значенням магнітного поля h_1, тоді як $0 < z_1 < 1$ відповідає негативним значенням фізичного поля h_1.

Траєкторії нулів перетинають дійсну вісь при позитивних температурах для негативних значень r. Зокрема, Рис. 5(c) показує, що за відсутності поля h_1 (тобто при $z_1 = 1$) нулі перетинають дійсну вісь при позитивному значенні t (а саме $t = 0.25$). Це і є шуканим спонтанним, за відсутності поля, фазовим переходом при позитивної температури в одному вимірі. Сукупність точок перетину для різних температур в діапазоні $0 \leq t \leq 1$ можна інтерпретувати як фазову діаграму.

У випадку $r < 0$ ми також проаналізували нулі Фішера. Нулі Фішера зазвичай розглядаються при критичному значенні зовнішнього поля. Для спонтанного фазового переходу критичне значення поля становить $h_1 = 0$, що відповідає $z_1 = 1$. Найбільш зручно відображати нулі Фішера в комплексній $t = y^{-1}-$площині. У цьому випадку вони утворюють замкнуті криві навколо початку координат $t = 0$ (а не розбіжні, як у випадку $y \to \infty$)

На Рис. 6 показано нулі Фішера для $(2, r)-$станової моделі Поттса з негативними значеннями r. Як ми можемо бачити з малюнка, траєкторія нулів Фішера у випадку $r = -5, -7$ перетинає дійсну вісь при значенні $t_c = -\frac{1}{q+r-1}$. Це означає, що крім звичайного фазового переходу при нульовій температурі спостерігається перехід при додатній температурі в одновимірній моделі.

Обидва із наведених вище механізмів, хоч і є нефізичними на перший погляд, але мають зв'язок із реальними фізичними задачами. Комплексні магнітні поля нещодавно були непрямо виміряні експериментально [Peng, X. *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 010601 (2015)]. В цій роботі комплексні магнітні поля пов'язують із часами когеренції квантової системи-відповідника. А у роботі [Tamura R., et al., Prog. Theor. Phys. **124**, 381, (2010)] було показано, що модель Поттса з невидимими станами може бути еквівалентно представлена як модель Поттса із домішкою, хімічний потенціал якої рівний $\mu = T \log r$. Тому модель із $r < 0$ можна трактувати як модель із комплексним хімічним потенціалом. Таким чином, розгляд класичної системи із комплексними параметрами, надає їй певних квантових властивостей. З іншого боку, оскільки збільшення кількості невидимих станів веде до зростання ентропії, то зменшення їх кількості менше нуля може розглядатися як певного роду впорядковуючий механізм.

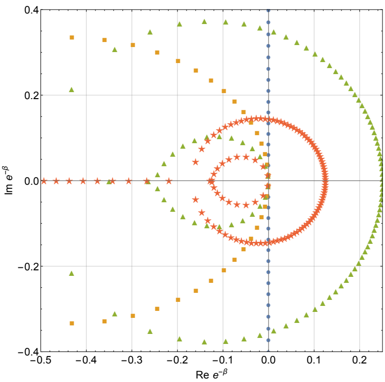


Рис. 7: Нулі Фішера $(2, r)$−станової моделі Поттса в комплексній площині $t = y^{-1} = e^{-\beta}$ для системи розміру $N = 128$ частинок з $r = 0$ (кружечки), -2 (квадратики), -5 (трикутники) , -7 (зірочки).

У **третьому розділі** розглянуто модель Поттса з невидимими станами на графах довільної топології. У цьому випадку, на відміну від гамільтоніана (2), ми розглядаємо тільки одне зовнішнє магнітне поле. Відповідний гамільтоніан матиме вигляд

$$H = -\sum_{<i,j>} J_{ij} \sum_{\alpha=1}^{q} \delta_{S_i,\alpha}\delta_{\alpha,S_j} - h\sum_{i} \delta_{S_i,1}, \quad (6)$$

де, $J_{ij} = JA_{ij}$ матриця констант зв'язку зі сталою $J > 0$, A_{ij} - матриця суміжності графа, $S_i = 1, \dots, q, (q+1), \dots, (q+r)$ поттсівська змінна на вузлі $i = 1, \dots, N$, $\delta_{a,b}$ - символ Кронекера а h - магнітне поле, що діє на перший видимий стан.

Ми застосували наближення неоднорідного середнього поля для знаходження вільної енергії Ландау. Через те, що фазовий простір складається і трьох видів станів: видимий вздовж поля, і решта видимих і невидимих станів, для опису моделі необхідно використовувати два параметри порядку. Вільна енергія в цьому наближенні має вигляд

$$\frac{F(m_1,m_2)}{N} = \frac{J\bar{k}}{(q+r)^2}\Big((rm_2+1+(q-1)m_1)^2 + (q-1)(rm_2+1-(r+1)m_1)^2\Big) - \quad (7)$$
$$\frac{1}{\beta}\int_{k_{min}}^{\infty} dkP(k)\ln\Big(e^{\beta(h+\frac{kJ}{q+r}(m_1(q-1)+1+rm_2))} + (q-1)e^{\frac{\beta Jk}{q+r}(m_2r+1-(r+1)m_1)} + r\Big),$$

m_1, m_2 два параметра порядку, β - обернена температура, $P(k)$ - розподіл ступенів вузлів у мережі, а $\bar{k}$ - середній ступінь вузла. Нижню межу інтегрування в подальшому ми будемо заміняти на $k_{min} = 2$, оскільки це є необхідною і достатньою умовою для того, щоб мережа мала гігантську зв'язну компоненту [Aiello W., et al. STOC, **2000**, 1 (2000)]. Використовуючи цей загальний результат, в подальшому ми розглянули два часткові випадки: повний граф і безмасштабну мережу.

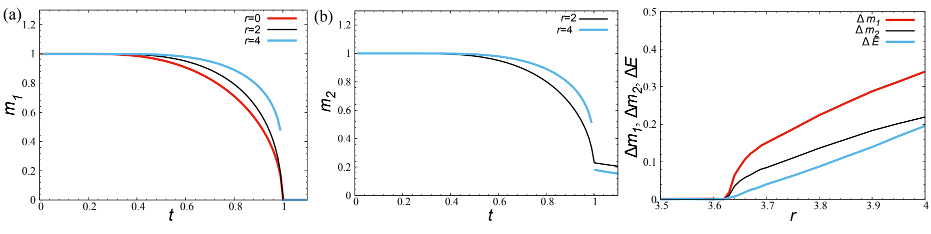
В підрозділі 3.2, загальний результат (7) було використано для випадку повного графу. В рівнянні (7) ми підставили функцію розподілу ступенів вузлів у вигляді $P(k) = \delta(k-(N-1))$, а також константу взаємодії $J = \frac{z}{N-1}$, де z певна константа (аналог кількості найближчих сусідів для регулярних граток) і $\delta(x)$ позначає $\delta-$функцію Дірака. З усіма цими підстановками вільна енергія на одну частину запишеться

$$\frac{F(m_1,m_2)}{N} = \frac{z}{2(q+r)^2}\Big((rm_2+1+(q-1)m_1)^2+(q-1)(rm_2+1-(r+1)m_1)^2\Big) - \frac{1}{\beta}\ln\Big(e^{\beta(h+\frac{z}{q+r}(m_1(q-1)+1+rm_2))}+(q-1)e^{\frac{\beta z}{q+r}(m_2 r+1-(r+1)m_1)}+r\Big). \tag{8}$$

Для $r = 0$ ця формула повністю відтворює вільну енергію звичайної моделі Поттса як функцію одного параметра порядку m_1 в наближенні середнього поля Очевидно, що другого параметра порядку m_2 немає в стандартній моделі Поттса. Для неї фазовий перехід другого роду спостерігається тільки при $q \leq 2$. Тому ми досліджували як наявність невидимих станів впливає на рід цього переходу.

Наступним кроком є мінімізація вільної енергії (8) відносно двох параметрів m_1 і m_2. На основі температурної поведінки параметрів порядку можна зробити висновки про рід фазового переходу, критичну температури та критичні показників.

Ми почали із випадку $q = 2$, для якого було відомо, що гранична вимірність знаходиться в діапазоні $3 < r_c < 4$ [Tamura R., et al., Prog. Theor. Phys., **124**, 381 (2010); Ananikian N., et. al., J. Phys. A, **46**, 385002 (2013)].

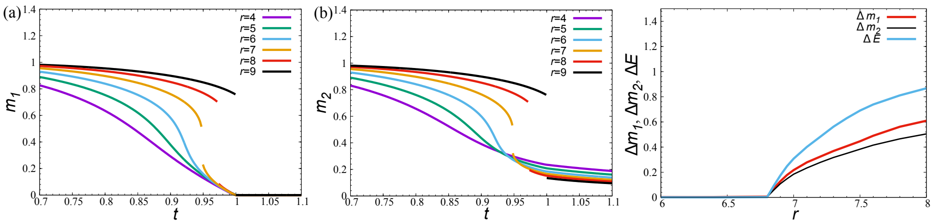


(a) (b) (c)

Рис. 8: Залежність параметрів порядку m_1 [рис. (a)] і m_2 [рис. (b)] від обезрозміреної температури $t = T/T_c$ для $r = 0, 2, 4$. Для $r = 0$, ми маємо тільки один параметр порядку, а саме m_1. На рис. (c) зображено стрибки параметрів порядку і прихована теплота переходу як функція кількості невидимих станів.

На рис. 8(a) і (b) показано температурну залежність параметрів порядку для $r = 0, 2, 4$. Ми використовуємо обезрозмірену температуру $t = T/T_c$. Для $r = 0$ маємо лише $m_1(T)$. Залежно від значення r, температурна залежність обох параметрів порядку m_1, m_2 характеризується двома різними режимами. Для $r = 0, 2$ графіки є неперервними гладкими, сигналізуючи фазові переходи другого роду. Однак при $r = 4$

спостерігається стрибок при критичній температурі. Зауважимо, що для визначення режимів першого і другого роду можна використовувати як m_1, так і m_2. Проте варто підкреслити, що вище критичної температури $m_1(t) = 0$, а $m_2(t)$ зникає лише для нескінченної температури. На рис. 8(c) зображено стрибки параметрів порядку і приховану теплоту переходу як функції кількості невидимих станів. Апроксимуючи ці криві, ми знайшли наступні значення граничної вимірності r_c: $r_c = 3.629(1)$ з Δm_1, $r_c = 3.627(2)$ з Δm_2, і $r_c = 3.617(3)$ з ΔE. Усереднюючи ці три значення, отримаємо $r_c = 3.622(8)$. Цей результат добре узгоджується із границею $z \to \infty$ для моделі Поттса з $q = 2$ видимими станами і r невидимими станами на гратці Бете із параметром галуження z: $r_c = \lim_{z\to\infty} \frac{4z}{3(z-1)}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)^2 \simeq 3.62$ [Ananikian N., et. al., J. Phys. A, **46**, 385002 (2013)].



(a) (b) (c)

Рис. 9: Залежність першого (a) і другого (b) параметрів порядку від обезрозміреної температури t для $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ при $q = 1.2$. Рисунок (c): стрибки параметрів порядку Δm_1, Δm_2 і прихована теплота ΔE як функції r для $q = 1.2$.

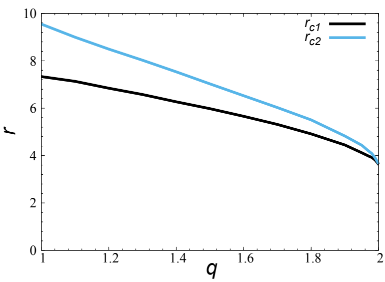


Рис. 10: Граничні вимірності r_{c1} (нижня крива) і r_{c_2} (верхня крива) для моделі Поттса при $1 \leq q \leq 2$. При $q = 2$ обидві r_{c1} і r_{c_2} співпадають в межах похибки: $r_{c1} = r_{c2} \simeq 3.65(5)$.

Типова поведінка параметрів порядку $m_1(t)$ і $m_2(t)$ в діапазоні $1 \leq q < 2$ для фіксованих значень q показана на рис. 9. На рисунку ми наводимо ці функції для $q = 1.2$ і $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Для малих значень r, $m_1(t)$ і $m_2(t)$ є гладкими функціями t, а перехід - другого роду. Зауважимо, що $m_1(t)$ зникає лінійно коли температура t наближається до $t_c = 1$ знизу. Це відповідає відомому результату середнього поля для критичного показника перколяції $\beta = 1$.

Для більших значень r і, починаючи з певного значення $r = r_{c1}$, стрибки в $m_1(t)$ і $m_2(t)$ з'являються при $\tilde{t} < t_c$. Гранична вимірність r_{c1}, отримана з стрибків цих функцій рівна $r_{c1} \simeq 6.834(11)$. Наявність цього стрибка вказує на новий фазовий перехід першого роду, однак він не впливає на рід фазового переходу, що відбувається при $t_c = 1$, який для цих значень r залишається другого роду, оскільки параметри порядку залишаються там неперервними. Розрив у $\tilde{t}$ зростає з подальшим збільшенням r і, нарешті, при $r = r_{c_2}$, $\tilde{t}$ і t_c співпадають. Саме в цей момент перехід при $t_c = 1$ стає першого роду.

Рис. 10 показує залежність від q для r_{c1} і r_{c2}. Для випадку $q = 2$, де обидві граничні вимірності r_{c1} і r_{c2} повинні збігатися, ми використовуємо оцінку $r_c = 3.65(5)$, оскільки вона включає в себе обидва значення. Варто зауважити, що в області $1 \leq q \leq 2$ різниця в граничних розмірах добре апроксимується лінійною функцією: $r_{c2} - r_{c1} \simeq 2(2 - q)$, хоча ми не маємо простого пояснення для цього спостереження.

В підрозділі 3.3 ми розглянули модель Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі. Для цього ми підставили у формулу (7) функцію розподілу ступеня вузлів, що описується степеневим законом $P(k) = \dfrac{C}{k^{\lambda}}$, де $C = 2^{\lambda-1}(\lambda - 1))$ константа нормування і $q = 2$. Це призводить до виразу для вільної енергії:

$$f(m_1, m_2) = \frac{J\bar{k}}{(2+r)^2}\Big((rm_2 + 1 + m_1)^2 + (rm_2 + 1 - (r+1)m_1)^2\Big) - \frac{2^{\lambda-1}}{\beta}\int_2^{\infty}\frac{dk}{k^{\lambda}}\ln\Big(e^{\beta(h+\frac{kJ}{2+r}(m_1+1+rm_2))} + e^{\frac{\beta Jk}{2+r}(m_2 r+1-(r+1)m_1)} + r\Big). \tag{9}$$

Ми знаходили мінімум вільної енергії чисельно. Для цього ми використовували метод симплексу [Nelder J. A., Mead R., The Computer Journal, 7, 308 (1965)]. Нас буде цікавити спонтанний фазовий перехід, тому ми покладемо $h = 0$ і $J = 1$ як одиницю вимірювання енергії.

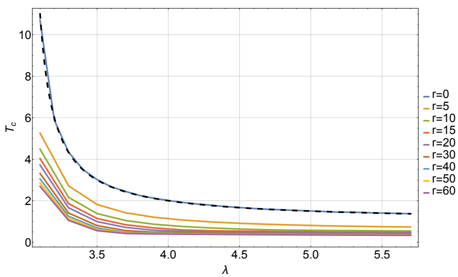


Рис. 11: Критична температура моделі Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі як функція λ для різних значень r: $r = 0, 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60$ (зверху вниз). Пунктирна лінія відображає аналітичні результати для звичайної моделі Ізінга на безмасштабній мережі.

На рис. 11 критична температура моделі Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі показана як функція λ для різної кількості невидимих станів r від 0 до 60. Наші чисельні результати добре узгоджуються з аналітичними результатами для звичайної моделі Ізінга на безмасштабній мережі (див. верхню суцільну і пунктирну лінії на Рис. 11) [Dorogovtsev S. N., et al., Phys. Rev. E, **66**, 016104, (2002); Leone M., et al., EPJ B, **28**, 191 (2002); Palchykov V., et al., Phys. Rev. E, **82**, 011145 (2010)].

Інший висновок, який можна зробити на основі графіку, полягає в тому, що критична температура зменшується зі збільшенням λ. Коли λ зменшується нижче граничного значення $\lambda = 3$, то жодна скінченна температура не може порушити спонтанне упорядкування: система залишається впорядкованою при будь-якому T. Це відображає той факт, що для малих λ існує багато вузлів з високим ступенем (хаби), що робить мережу міцно зв'язаною. Беручи це до уваги, випливає, що в границі $\lambda \to 3+0$ критична температура зростає $T_c \to \infty$.

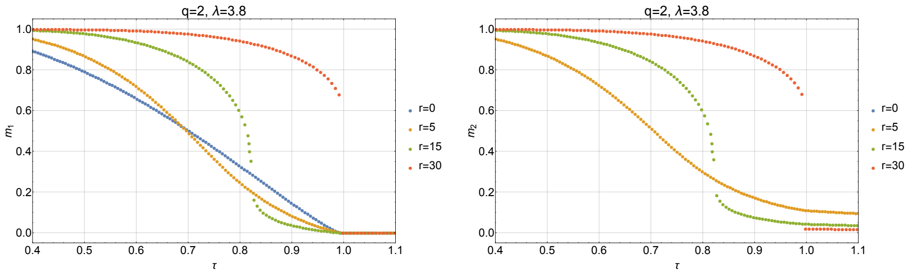


Рис. 12: Параметри порядку як функції обезрозміреної температури $\tau = T/T_c$ для різних значень r і фіксованого $\lambda = 3.8$. Різні значення r ведуть до різних критичних поведінок.

На рис. 12 наведено залежності параметрів порядку від обезрозміреної температури $t = T/T_c$ для фіксованого значення $\lambda = 3.8$ і різних значень r. Поведінка параметрів порядку повністю аналогічна тій, що ми вже бачили на повному графі, але при $1 \leq q < 2$, тоді як граничний випадок $q = 2$ показав різке розрізнення між різними режимами поведінки. При наявності топологічного безладу, як у безмасштабній мережі, змінюється критична поведінка. Навіть у випадку Ізінга вона характеризується двома граничними значеннями r_{c1} і r_{c2}. Для кожного значення λ граничні вимірності є різними $r_{c1}(\lambda)$ і $r_{c2}(\lambda)$. Ці два значення поділяють площину (r, λ)– на три області з різною критичною поведінкою (див. рис. 13).

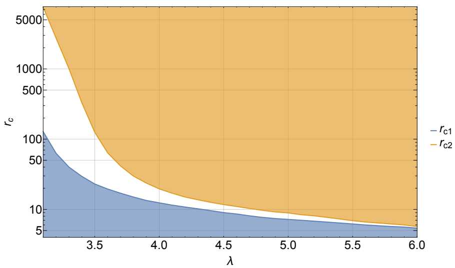


Рис. 13: Фазова діаграма моделі Ізінга з невидимими станами. Три області, представлені тут, відрізняються критичною поведінкою. У нижній області система має тільки фазовий перехід другого роду; в області між лініями відбуваються як фазові переходи першого, так і другого роду при різних температурах; у верхній області відбувається тільки фазовий перехід першого роду.

Відомо, що для звичайної моделі Ізінга на безмасштабній мережі, критичні показники є λ–залежними в ділянці $3 < \lambda < 5$. Ми дослідили, як наявність невидимих станів впливає на критичну поведінку. Оскільки ми аналізували вільну енергію чисельно, то і критичні показники ми можемо шукати тільки чисельно, використовуючи означення

$$m_1 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{\beta_{eff}} . \qquad (10)$$

Для цього ми апроксимували отримані значення $m_1(T)$ степеневим законом. Отримані результати для $\lambda = 3.8$ представлені на рис. 14.

Як видно з рисунка, для усіх значень кількості невидимих станів в діапазоні, де ще існує фазовий перехід другого роду, критичний показник залишається сталим і рівним, в межах похибки, точному результату $\beta(\lambda) = \frac{1}{\lambda-3}$. Це показує, що хоч додавання невидмимих станів і може змінити рід фазового переходу, але не впливає на критичні показники.

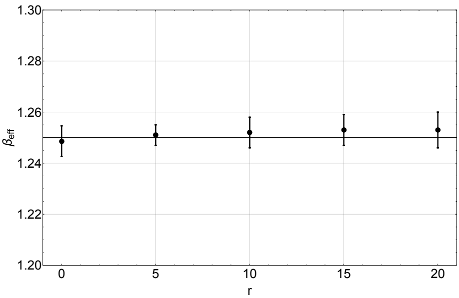


Рис. 14: Критичний показник β як функція кількості невидимих станів r для фіксованого $\lambda = 3.8$. Суцільна лінія показує точний результат для звичайної моделі Ізинга на безмасштабній мережі $\beta(3.8) = 1.25$.

Розвиваючи напрямок досліджень, започаткований роботами [Mac Carron P., Kenna R., EPL, **99**, 28002 (2012); Mac Carron P., Kenna R., EPJ B, **86**, 407 (2013)], у **четвертому розділі** ми застосували апарат теорії складних мереж для аналізу соціальної мережі персонажів давньоруських билин. Такий підхід базується на кількісному аналізі мережі соціальних зв'язків між героями певного наративу. Зокрема, ми проаналізували билини київського циклу, що охоплюють доволі невеликий період розквіту Київської Русі (кінець X - середина XII ст.). Загалом, предметом нашого дослідження стали 39 билин.

Незважаючи на те, що билини були зібрані на дуже великих територіях, в них є багато спільного. Зокрема, билини, які об'єднані місцем дії, також мають і багатьох спільних персонажів. Саме ця властивість і дозволила розглянути зв'язки між персонажами билин як такі, що формують певну структуру - соціальну мережу. Вершини цією мережі відповідають окремим персонажам, а ребра означають зв'язки між ними. Вважається, що два персонажі билини знайомі між собою якщо вони дружать (якщо вони розмовляють один з одним; коли з тексту відомо, що вони зустрічалися раніше; коли персонажі разом присутні в невеликій групі осіб) або якщо вони ворогують (безпосередньо б'ються чи є в стані війни).

Аналіз згаданого вище корпусу билин, дозволив створити базу даних, що складається із 153 окремих персонажів, поєднаних зв'язками двох типів – дружніми і ворожими. Результуючу соціальну мережу наведено на рис. 15. Кожен із персонажів має свій кодовий номер. Дружні зв'язки показані синьою суцільною лінією, а ворожі – червоною пунктирною. Усього мережа налічує 320 зв'язків. із них 223 зв'язки дружні і 105 – ворожі.

У Таблиці 2 наведені основні характеристики соціальної мережі билин у порівнянні з відповідними мережами персонажів інших наративів та з характеристиками класичного випадкового графу Ердоша-Рені такого ж розміру. Беручи до уваги ці характеристики, можна зробити висновок, що подібно до соціальних мереж інших епосів, соціальні мережі билин виявилися сильно скорельованими тісними світами зі значенням середнього коефіцієнту кластерності, що значно перевищує відповідне значення для класичного випадкового графу Ердоша-Рені. Також більшість цих мереж є дисортативними, на відміну від реальних соціальних мереж [Newman

Табл. 2: Характеристики соціальної мережі билин у порівняння із характеристиками соціальних мереж інших епосів. Тут N і L позначають кількість вузлів і кількість зв'язків відповідно; ℓ, ℓ_{rand} – середні довжини найкоротшого шляху складної мережі і випадкового графу такого ж розміру і середнього ступеня; $\ell_{\max}$ – діаметр мережі; C, C_{rand} – середній коефіцієнт кластерності складної мережі і його відповідник для випадкового графу; r_k – асортативності за ступенем вузла.

Мережа	N	L	ℓ	ℓ_{rand}	$\ell_{\max}$	C	C_{rand}	r_k
Билини	153	320	2.9	3.61	6	0.57	0.03	-0.15
Беовульф	72	167	2.4	2.9	6	0.7	0.06	-0.10
Викрадення бика	422	1266	2.8	3.3	7	0.8	0.02	-0.33
Іліада	716	2684	3.5	3.3	11	0.6	0.01	-0.08
Сага про Гіслі	103	254	3.4	2.9	11	0.6	0.05	-0.15
Сага про людей з Лаксдааля	132	290	3.9	3.3	10	0.5	0.03	0.00
Сага про Егіля	293	769	4.2	3.4	12	0.6	0.02	-0.07
Сага про людей озерної долини	332	894	5.0	3.5	16	0.5	0.02	0.19
Сага про Ньяла	575	1612	5.1	3.7	24	0.4	0.01	0.01
Да Дерга	126	410	2.76	2.77	7	0.64	0.05	-0.18
Оддісея	301	1019	3.29	3.18	8	0.45	0.02	-0.08
Пісня про Нібелунгів	66	313	2.14	2.11	5	0.69	0.14	-0.28
Мабіногіон	666	2427	3.83	3.48	11	0.48	0.01	0.19
Епос про Гільгамеша	46	81	2.54	3.08	5	0.46	0.08	-0.34
Пополь-Вух	98	409	2.80	2.39	6	0.55	0.09	-0.32
Міфи індіанців Навахо	140	283	3.81	3.62	9	0.44	0.03	-0.18

M. E., Park J., Phys. Rev. E, **68**, 036122, (2003)].

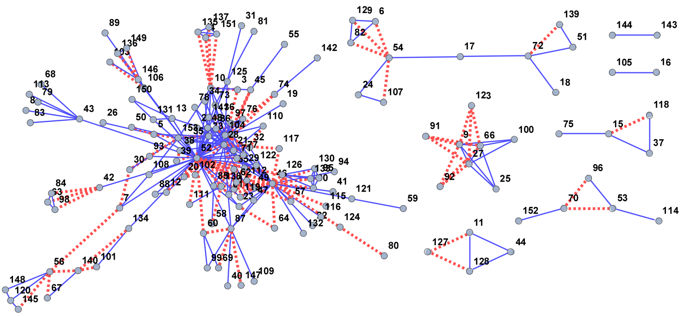


Рис. 15: Соціальна мережа билин київського циклу. Червоними пунктирними лініями позначені ворожі зв'язки, а синіми суцільними - дружні. Кожен з вузлів має свій кодовий номер. Найбільша зв'язна компонента зображена у лівому верхньому кутку рисунку.

Крім перелічених вище універсальних характеристик, наш аналіз навів нові аргументи щодо тих чи інших гіпотез про структуру билин. Наш кількісний аналіз підтримує гіпотезу, що князь Володимир є збірним образом київського князя. Зазначимо також, що у мережі без князя Володимира і княгині найбільшим значенням центральності близькості володіє Добриня – його відстань від решти персонажів порівняна з княжою. Це може слугувати підтвердженням того, що прообразом билинного Добрині вважають дядька князя Володимира. Іншим цікавим результатом є те, що аналіз соціальної мережі билин виділяє за рангом персонажів Чурила, Дюка і Михайла Потика. А саме цих персонажів Михайло Грушевський відносить до персонажів галицько-волинської групи.

Основні результати та висновки

1. Для моделі Ізінга з дипольною взаємодією, було підтверджено, що клас універсальності залежить від параметра δ. Фазовий перехід від $h = 1$ смужкової фази до тетрагональної відбувається за сценарієм другого роду, а перехід від $h = 2$ фази до тетрагональної - за сценарієм першого роду [1].
2. Було отримано точний розв'язок моделі Поттса з невидимими станами на ланцюжку і показано, що для зовнішніх комплексних полів $h_2 \in \mathbb{C}$ чи від'ємної кількості невидимих станів $r < 0$, перехід може відбуватися при додатній температурі [4,5].
3. В наближенні неоднорідного середнього поля було отримано вираз для вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на повному графі. Було показано, що ця модель характеризується двома граничними вимірностями, які розділяють ділянки із різною критичною поведінкою [2].;
4. Було отримано розв'язок модель Ізінга з невидимими станами на безмасштабній мережі в наближенні неоднорідного середнього поля. Було показано, що фазова діаграма характеризується двома критичними вимірностями, а всюди, де існує фазовий перехід другого роду, критичні показники є залежні від показника загасання функції розподілу ступеня вузлів λ і не залежать від кількості невидимих станів r [6].;
5. Було отримано і проаналізовано соціальну мережу персонажів давньоруських билин. Було показано, що отримана мережа володіє низкою спільних характеристик із мережами персонажів інших творів європейської спадщини, що демонструє їх універсальність [3,7].

Результати дисертації опубліковано в таких роботах:

1. Sarkanych, P. On the phase diagram of the 2d Ising model with frustrating dipole interaction / P. Sarkanych, Yu. Holovatch and R. Kenna// Український фізичний журнал – 2014. – Т. 60, 4. – с. 337-342.
2. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states / M. Krasnytska, P. Sarkanych, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical – 2016. – Vol. 49, no. 25. – P. 255001-1-15.
3. Сарканич, П. Універсальність і мережевий аналіз билин / П. Сарканич, Ю. Головач, Р. Кенна і П. Мак Керрон // Журнал Фізичних Досліджень. – 2016. – Т. 20,

4. – с.4801-1-17.

4. Sarkanych, P. Exact solution of a classical short-range spin model with a phase transition in one dimension: the Potts model with invisible states / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Physics Letters A. – 2017. – Vol. 381, no. 41. – P. 3589-3593.
5. Sarkanych, P. Classical phase transitions in a one dimensional short-range spin model / P. Sarkanych, Yu. Holovatch, R. Kenna// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Vol. 51, no. 50. – P. 505001-1-26.
6. Sarkanych, P. Ising model with invisible states on scale-free networks/ P. Sarkanych, M. Krasnytska // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, no. 27. – P.125844.
7. Головач, Ю. Математика і міфи – кількісний підхід до порівняльної міфології / Ю. Головач, Р. Кенна, П. Мак Керрон, П. Сарканич, Н. Федорак, Дж. Хосе// прийнято о друку в Україна Модерна. – (Препринт / Національна академія наук України, Інститут фізики конденсованих систем; ICMP-18-01U).
8. Sarkanych, P. Partition function zeros as a measure of phase transition strength // V young scientist conference Problems of theoretical physics, Kyiv, Ukraine, December 24 – 27, 2013, Program and Proceedings. – Kyiv:2013. – P. 101.
9. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // The 41st conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Vienna, Austria, February 14 – 17, 2016, Book of Abstracts. – Vienna:2016. – p. 72
10. Сарканич, П. Одновимірна модель Поттса з невидимими станами // 16-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини, Львів, Україна, 9 – 10 червня, 2016, Збірка тез. – Львів:2016 – с. 43.
11. Sarkanych, P. 1D Potts model with invisible states // Workshop on current problems in physics, Lviv, Ukraine, 5 – 7 July, 2016, Book of abstracts. – Lviv:2016 – p. 7.
12. Sarkanych, P. Marginal dimensions of the Potts model with invisible states // Різдвяні дискусії – 2017, Львів, Україна, 11-12 січня, 2017, Програма і тези доповідей. – Львів:2017 – с. 9.
13. Сарканич, П. Граничні вимірності моделі Поттса з невидимими станами // 17-та Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовиниб Львів, Україна, 8 – 9 червня 2017, Збірка тез – Львів:2017 – с. 24.
14. Сарканич, П. Точний розв'язок 1D моделі поттса з невидимими станами: Аналіз нулів статистичної суми // Різдвяні дискусії – 2018, Львів, Україна, 11-12 січня, 2018, Програма і тези доповідей – Львів: 2018 – с. 9.
15. Sarkanych, P., Network analysis of Bylyny — Traditional East Slavic epic narratives // The 43rd conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Krakow, Poland, May 1-4, 2018, Book of Abstracts – Krakow:2018 – p. 95

АНОТАЦІЯ

Сарканич П.В. Універсальність складних систем: аналіз нулів статистичної суми і складні мережі. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 — Фізика та астрономія). — Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2019. Дисертаційна робота присвячена використанню методів статистичної фізики для дослідження універсальності у складних системах різної природи. Розглянуто модель Ізінга з дипольною взаємодією на простій квадратній гратці. Показано, що відношення констант взаємодій δ визначає клас універсальності. Досліджено модель Поттса з невидимими станами на одномірному ланцюжку. За допомогою методу матриці переносу знайдено точний розв'язок і проаналізовано за яких умов відбувається фазовий перехід при додатніх температурах. В наближенні неоднорідного середнього поля отримано вираз для вільної енергії моделі Поттса з невидимими станами на графі довільної топології. Проаналізовано вплив топологічних властивостей мережі на клас універсальності і граничні вимірності. Використано методи науки про складні мережі для пошуку універсальних топологічних властивостей соціальних мереж персонажів наративів.

Ключові слова: універсальність, граничні вимірності, критичні показники, складні мережі.

АННОТАЦИЯ

Сарканыч П.В. Универсальность сложных систем: анализ нулей статистической суммы и сложные сети. — На правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико - математических наук (доктора философии) по специальности 01.04.02 «Теоретическая физика» (104— Физика и астрономия). — Институт физики конденсированных систем НАН Украины, Львов, 2019. Диссертационная работа посвящена использованию методов статистической физики для исследования универсальности в сложных системах различной природы. Рассмотрена модель Изинга с дипольным взаимодействием на простой квадратной решетке. Показано, что отношение констант взаимодействий δ определяет класс универсальности. Исследована модель Поттса с невидимыми состояниями на одномерном цепочке. С помощью метода матрицы переноса найдено точное решение и проанализированы при каких условиях происходит фазовый переход при положительных температурах. В приближении неоднородного среднего поля получено выражение для свободной энергии модели Поттса с невидимыми состояниями на графе произвольной топологии. Проанализировано влияние топологических свойств сети на класс универсальности и предельные размерности. Использованы методы науки о сложных сети для поиска универсальных топологических свойств социальных сетей персонажей нарративов.

Ключевые слова: универсальность, предельные размерности, критические показатели, сложные сети.

ABSTRACT

Sarkanych P.V. Universality of complex systems: partition function zeros and complex networks. — Manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics on the speciality 01.04.02 “Theoretical Physics” (104 — Physics and Astronomy). — Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2019.

The goal of the dissertation is to study the universality of complex systems. The notion of universality - the independence of the characteristic behaviour of a macroscopic system, consisting of many interacting parts, from the details of the structure of this system - is one of the basic concepts of statistical physics. By complex systems we mean those characterized by collective behaviour that is not a simple consequence of the properties of their constituent parts. The concept of complex system is applied in many traditional disciplines of science and is the subject of a new interdisciplinary field of knowledge - the complexity science. Methods and concepts of statistical physics are among the important components of this branch as is concept of universality that has become one of the basic concepts of the complex systems science. Since complex systems are characterized by the collective behaviour of many interacting components, the theory of phase transitions provides a natural tool for their study.

The dissertation consists of four sections. The first section of the dissertation provides a literature review. The main focus of this section is on the models and methods of their description used in the dissertation. In particular, two models are used in the thesis: the Ising model with dipole interactions and the Potts model with invisible states. The Ising model with dipole interactions is used to describe patterns formation in complex systems, and the Potts model with invisible states is used to study how entropy affects the universality. Among the methods used in the thesis, two are described in detail. The first method is the analysis of the zeros of a partition function in a complex plane. Based on the properties of the location of these zeros, it is possible to obtain the critical properties of the system. The second is the method of complex networks. Within this method, a system of many particles (agents) is represented in the form of a graph, where the nodes are interacting particles, and the edges denote the interaction between them.

The second section of the dissertation uses the method of analysis of partition function zeros to study the critical behaviour of a 2d Ising model with dipole interaction and a 1d Potts model with invisible states. For 2d Ising model with dipole interactions, the region of the phase diagram is analysed and it is shown that the critical exponents depend continuously on the ratio of the short-range and dipole interaction constants δ. The values of the critical exponents obtained in the partition function zeros density approach, agree well with the results of short-time Monte-Carlo simulations. For the 1d Potts model with q visible and r invisible states, the exact solution was found using the transfer matrix method. Two conditions were found to shift a phase transition to the positive temperature. The first condition is the consideration of external complex magnetic fields. The second mechanism is to consider the negative number of invisible states. These two mechanisms were shown to be connected by the duality relation.

The third section of the dissertation uses an approximation of a nonuniform mean field to investigate a Potts model with invisible states on an arbitrary graph. Two partial cases are considered: a complete graph and a scale-free network. For the complete graph it is shown that in the region $1 \leq q < 2$ the phase diagram is characterized by two marginal values, r_{c1} and r_{c2}. Below r_{c1}, only the second-order phase transition occurs in the system. There is only a first-order phase transition above r_{c2}. And in the area $r_{c1} < r < r_{c2}$ there are two phase transitions: a first-order transition at lower temperature and a second-order at higher temperature. In the Ising model case $q = 2$, on the complete graph, the two marginal values coincide at $r_c \approx 3.62$. On a scale-free network with the node degree distribution $P(k) \sim k^{-\lambda}$ even in the case $q = 2$ two $\lambda-$dependent marginal values $r_{c1}(\lambda)$ and $r_{c2}(\lambda)$ were obtained. These quantities play the same role as their counterparts in the previous case. It is also shown that wherever there is a second-order phase transition, the number of invisible states r does not affect the value of the critical exponents.

The fourth section of the dissertation uses the complex networks approach to analyse the social network of characters of Bylyny. This network possesses a number of properties, common with the properties of social networks of other epics. These properties remain unchanged for networks that characterize epic narratives of different cultures and have been created at different times. Thus, epics have universal properties, which allows to obtain additional classification based on their quantitative analysis.

Keywords: universality, marginal dimensions, critical exponents, complex networks.