

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Інститут фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ДУДКА Максим Леонідович

УДК 538.9, 536.764, 530.145

ДИСЕРТАЦІЯ

КРИТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МАГНЕТИКІВ: ВПЛИВ СТРУКТУРНОГО БЕЗЛАДУ, АНІЗОТРОПІЇ, ФРУСТРАЦІЙ

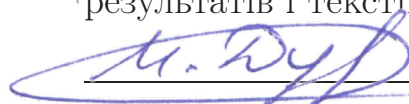
01.04.02 — теоретична фізика

(104 — фізика та астрономія)

10 — природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 М. Л. Дудка

Науковий консультант Головач Юрій Васильович, член-кор. НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Львів — 2020

АНОТАЦІЯ

Дудка М.Л. Критичні властивості магнетиків: вплив структурного безладу, анізотропії, фрустрацій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук (доктора наук) за спеціальністю 01.04.02 «Теоретична фізика» (104 — Фізика та астрономія). — Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, 2020.

Представлена дисертаційна робота стосується вивчення статичних та динамічних критичних властивостей магнетиків, які характеризуються наявністю структурного безладу, анізотропії, фрустрацій. При досягненні поставленої мети було вирішено ряд задач.

Спочатку досліджено статичну та динамічну критичну поведінку магнітних систем з замороженими протяжними ε_d -вимірними немагнітними домішками паралельної орієнтації. Присутність протяжних домішок призводить до появи анізотропії, тому існують дві кореляційні довжини, паралельна і перпендикулярна до протяжних дефектів, розбіжність яких поблизу критичної температури характеризується різними показниками. Динамічна критична поведінка також модифікується, так що з'являються два часи, що характеризують критичну релаксацію в напрямках, паралельних і перпендикулярних до протяжних домішок. Застосовуючи техніки пересумовування до ренорм-групових функцій, відомих для моделі у двопетлевому наближенні схеми мінімального віднімання, розраховано значення динамічних критичних показників, які характеризують релаксацію незбереженого параметра порядку системи вздовж напрямку, паралельного до домішок $z_{||}$, і вздовж перпендикулярного напрямку $z_{\perp}$ при фіксованому значенні вимірності простору $d = 3$ та фіксованих значеннях ε_d . Отримані результати показують помітне збільшення динамічних критичних показників, що означає посилення критичного сповільнення (сильнішу розбіжність часу релаксації), порівняно з системами з точковим безладом. Анізотропний скейлінг для систем з протяжними домішками був підтверджений за допомогою симуляцій Монте Карло, викори-

стовуючи комбінацію методів Вольфа та Метрополіса для дослідження статичної критичної поведінки системи з однокомпонентними спінами з лінійними протяжними паралельними дефектами ($\varepsilon_d = 1$). Зокрема, розраховані трьома різними методами значення показника анізотропії θ попадають в область $1.1 \lesssim \theta \lesssim 1.3$, узгоджуючись з оцінками ренорм-групи для нашої моделі. Розраховуючи ефективні критичні показники для кореляційної довжини та часу релаксації в напрямі перпендикулярному до домішок, проаналізовано можливі реалізації підходу до асимптотичного режиму для магнетика з лінійними паралельними дефектами. Спостережено немонотонний підхід до критичного режиму для критичного динамічного показника $z_\perp$ ізінгівської системи ($n = 1$).

Далі досліджено критичну поведінку магнітних систем зі структурним безладом типу випадкової анізотропії. Вплив розподілу осей випадкової анізотропії для таких систем має кардинальний ефект. У рамках теорії поля було досліджено критичні властивості моделі з випадковою анізотропією з так званим тримодальним розподілом осей випадкової анізотропії, який є комбінацією ізотропного та кубічного розподілів. У рамках масивної схеми було отримано двопетлеві ренорм-групові функції при довільній вимірності параметра порядку та довільному значенні параметру реплік, які застосовувались для усереднення за замороженим безладом. Аналіз отриманих функцій за допомогою підходу при фіксованій вимірності простору $d = 3$ із застосуванням процедури пересумовування показав, що в даній моделі відсутні стійкі нерухомі точки, досяжні з початкових фізичних умов. Таким чином, показано відсутність фазового переходу другого роду при такому розподілі осей випадкової анізотропії. Проаналізовано критичне сповільнення у магнетиках з випадковою анізотропією з анізотропним (кубічним) розподілом осей випадкової анізотропії, для яких існує фазовий перехід другого роду. Розраховано двопетлеву динамічну ренорм-групову функцію. На основі цієї функції отримано чисельні значення для ефективного критичного показника z_{eff} , який визначає критичне сповільнення часу релаксації, при наближенні до критичної точки. Хоча асимптотична динамічна критична поведінка систем з випадковою анізотропією з кубічним розподілом є такою ж, як і для моделі Ізінга з випад-

ковими вузлами, перехід між різними нерухомими точками суттєво впливає на неасимптотичні критичні властивості, що приводить до можливої реалізації різних сценаріїв динамічної критичної поведінки.

Також досліджено критичну динаміку для магнетиків зі структурним безладом, а саме для магнетиків з випадковими вузлами та для магнетиків з випадковою анізотропією, в рамках моделі C , у якій на статичному рівні присутній зв'язок незбережного параметра порядку із збереженою величиною. Перед цим для моделі C без безладу розраховано динамічні кореляційні функції у однопетлево-му наближенні. На основі них обчислено характеристичні частоти та розраховано динамічне відношення амплітуд характеристичних частот параметра порядку та збереженої величини, яке є універсальною величиною. Здійснено узагальнення виразу для цього відношення у параметричній площині кореляційної довжини та хвильового вектора. Також здійснено перегляд фазової діаграми моделі C , отриманої у рамках двопетлевого наближення теоретико-польової пертурбативної ренорм-групи. Розрахунки проводились на основі високих порядків ренорм-групи для $O(n)$ моделі і для динамічного критичного показника моделі A з використанням процедур пересумовування. Отримана фазова діаграма якісно підтверджує результати непертурбативної ренорм-групи для високих вимірностей $\varepsilon \leq 1$ та вимірності параметра порядку $n \geq 1$. Для структурно неупорядкованих магнетиків з безладом збережена густина відокремлюється від параметра порядку в асимптотичному критичному режимі та динамічна критична поведінка обох розглянутих моделей з безладом є такою ж, як і для моделі Ізінга з випадковими вузлами. Однак, існування багатьох нерухомих точок і, відповідно, кросовер між ними значно впливає на неасимптотичні критичні властивості. У залежності від початкових значень параметрів моделей спостерігаються різні сценарії динамічної критичної поведінки. Основною особливістю є наявність додаткових піків на кривих для ефективних динамічних критичних показників у порівнянні з ефективною критичною динамікою моделі A .

У рамках дослідження впливу замороженого безладу на статичну критичну поведінку двовимірних систем було розглянуто три окремі завдання. Для дво-

вимірної моделі Ізінга з нескорельованим безладом розраховано явні вирази для функцій розподілу імовірностей флуктуацій внутрішньої енергії та теплоємності за допомогою методу реплік в рамках однопетлевого наближення ренорм-групи. Отриманий результат показує, що внутрішня енергія цієї системи не самоусереднюється, в той час як теплоємність демонструє самоусереднення. Для двовимірної моделі Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом, кореляції якого спадають з відстанню як r^{-a} , використовуючи представлення моделі у теорії двовимірних ферміонів Дірака, у двопетловому наближенні ренорм-групи було показано, що модель належить до класу універсальності з критичним показником $\nu = 2/a$. Дослідження впливу далекосяжно скорельованого безладу на критичну поведінку двовимірної моделі Ашкіна-Теллера з N_i -кольорами, показує виникнення нової критичної поведінки, яка належить до того самого класу універсальності, що і двовимірна модель Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом.

Вивчались умови, при яких для анізотропного антиферромагнетика у магнітному полі, паралельному осі анізотропії, реалізуються різні типи мультикритичної поведінки. Така система описується моделлю з двома зв'язаними параметрами порядку і симетрією $O(1) \oplus O(2)$. Остання є частковою реалізацією загальної моделі з симетрією, $O(n) \oplus O(m)$, що описує мультикритичні явища у різних фізичних системах. Для цієї моделі в рамках теоретико-польової ренорм-групи розраховано чисельні оцінки граничних вимірностей параметра порядку в залежності від вимірності простору d , що визначають умови стійкості різних типів мультикритичної поведінки. На основі отриманих результатів зроблено висновок про тетрактичну поведінку, яка реалізується для розглядуваної тривимірної системи у асимптотичній області.

Останньою досліджувалась задача про рід фазового переходу в магнетиках з неколінеарним впорядкуванням. Такі системи характеризуються матричним параметром порядку та симетрією $O(n) \times O(m)$ з фізичною реалізацією для $m = 2$ та $n = 2$ і $n = 3$. У теорії поля вони описуються ефективними гамільтоніанами з двома n -компонентними полями. Проаналізовано критичні показники, отримані у підході при фіксованій вимірності простору на основі пертурбативних рядів для

моделі фрустрованого магнетика при $d = 3$ у шестипетлевому порядку на залежність від параметрів використаних процедур пересумовування. Для фрустрованих магнетиків для $n = 2$ і $n = 3$ наші результати в $d = 3$ показують велику чутливість показників до параметрів пересумовування. Порівняння з подібними залежностями від параметрів пересумовування для критичних характеристик $O(n)$ та кубічної моделей в $d = 3$, для яких відомі однозначні та точні результати, показує, що отримані раніше дані про фазовий перехід другого роду для тривимірних фрустрованих систем ґрунтуються на нефізичних хибних розв'язках. Подібний аналіз і порівняння зроблено і для двовимірних систем та показано, що пертурбативний підхід теоретико-польової ренорм-групи не є достатньо релевантним для двовимірних систем. У рамках непертурбативної ренорм-групи розраховано граничне значення вимірності поля n як функцію просторової вимірності для значень d від $d = 2.8$ до $d = 4$. Оцінка для $d = 3$ явно підтверджує значення граничної вимірності, що є значно вищим ніж 3, $n_c = 5.24(2)$, виключаючи появу фазового переходу другого роду у фізичних випадках $n = 2$ і $n = 3$.

Ключові слова: Ефективна критична поведінка, критична динаміка, структурний безлад, фрустрації, ренорм-група

ABSTRACT

Dudka M.L. Critical properties of magnets: Influence of structural disorder, anisotropy, frustrations. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the Degree of Doctor of Sciences in Physics and mathematics on the speciality 01.04.02 “Theoretical Physics” (104 — Physics and Astronomy). — Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2020.

The present thesis concerns the study of static and dynamic critical properties of magnets characterized by the presence of structural disorder, anisotropy, frustrations. Achieving this goal, a several problems were solved.

First, the static and dynamic critical behavior of magnetic systems with quenched extended ε_d -dimensional non-magnetic impurities of parallel orientation were studied. The presence of extended impurities leads to the appearance of anisotropy; therefore, there are two correlation lengths, parallel and perpendicular to extended defects, the divergence of which near the critical temperature is characterized by different exponents. The dynamic critical behavior is modified too, so that there are two times characterizing the critical relaxation in directions parallel and perpendicular to the extended impurities. Applying the resummation techniques to the renormalization-group functions known for the model in the two-loop approximation of the minimal subtraction scheme we have calculated the values of dynamic critical exponents characterizing the relaxation of the nonconserved order parameter of the system along the direction parallel to the impurities $z_{||}$ and along the perpendicular direction $z_{\perp}$ at a fixed value of the space dimension $d = 3$ and fixed values of ε_d . The obtained results show a marked enhancement of dynamic critical exponents, which means an enhancement of critical slowing down (stronger divergence of relaxation time), comparing to systems with uncorrelated disorder. Anisotropic scaling for systems with extended impurities was confirmed by Monte Carlo simulations, using the combination of Wolf and Metropolis methods to study the static critical

behavior of a system with one-component spins with linear extended parallel defects ($\varepsilon_d = 1$). In particular, the values of the anisotropy exponent θ calculated by three different methods fall into the region $1.1 \lesssim \theta \lesssim 1.3$, being in agreement with the renormalization group estimates for our model. Calculating the effective critical exponents for the correlation length and relaxation time in the direction perpendicular to the impurities, possible realizations of the approach to the asymptotic regime for a magnet with linear parallel defects are analyzed. A nonmonotonic approach to the critical regime for the critical dynamic exponent $z_\perp$ of the Ising system ($n = 1$) is observed.

Next, the critical behavior of magnetic systems with a structural disorder of the random anisotropy type is investigated. The influence of the random axis distribution for such systems has a crucial effect. Within field theory, the critical properties of the random anisotropy model with a so-called trimodal random anisotropy axis distribution, which is a combination of isotropic and cubic distributions, were investigated. Within the massive scheme, two-loop renormalization group functions were obtained with a general order parameter dimension and a general value of the replica parameter, which was used for averaging over the quenched disorder. Analysis of the obtained functions using the fixed space dimension $d = 3$ approach with the resummation procedure showed that in this model stable fixed points achievable from the initial physical conditions are absent. Thus, the absence of a second order phase transition with such of the random anisotropy axis is shown. The critical slowing down in random anisotropy magnets with anisotropic (cubic) random anisotropy distribution, for which there exists a second order phase transition, was analysed. A two-loop dynamic renormalization group function is calculated. Based on this function, numerical values for the effective critical exponent z_{eff} , which determines the critical slowing down of relaxation time approaching the critical point, were obtained. Although asymptotic dynamic critical behavior of random anisotropy systems with cubic distribution is the same as for the Ising model with random sites, the crossover between different fixed points significantly affect nonasymptotic critical properties, which leads to the possible realizations of

different scenarios of dynamic critical behavior.

The critical dynamics for magnets with structural disorder, namely for random sites magnets and for random anisotropy magnets, is also investigated within the framework of model C, in which there is a coupling of the nonconserved order parameter with the conserved quantity at the static level. Before that, dynamic correlation functions in the one-loop approximation were calculated for model C without disorder. Based on them, the characteristic frequencies are calculated and the dynamic amplitude ratio for the characteristic frequencies of the order parameter and the conserved quantity, which is a universal value, is calculated. Generalization of this ratio in the parametric plane of the correlation length and the wave vector is performed. The phase diagram of model C obtained within of two-loop approximation of the field-theoretical perturbative renormalization group was also revised. The calculations were performed on the basis of high renormalization group orders for the $O(n)$ model and for the dynamic critical exponent of model A using the resummation procedures. The obtained phase diagram qualitatively confirms the results of the nonperturbative renormalization group for high space dimensions $\varepsilon \leq 1$ and order parameter dimension $n \geq 1$. For structurally disordered magnets, the conserved density is decoupled from the order parameter in asymptotic critical regime and the dynamic critical behavior of both considered models with disorder is the same as for random sites Ising model. However, the existence of many fixed points and, consequently, a crossover between them significantly affect non-asymptotic critical properties. Depending on the initial values of the model parameters, different dynamic scenarios are observed critical behavior. The main feature is the presence of additional peaks on the curves for effective dynamical critical values in comparison to the effective critical dynamics of model A.

Within the study of the quenched disorder influence on the static critical behavior of two-dimensional systems three separate tasks were considered. For the two-dimensional Ising model with uncorrelated disorder, explicit expressions for the probability distribution function of internal energy and heat capacity fluctuations are calculated using the replica method within the one-loop renormalization group

approximation. The result shows that the internal energy of this system does not self-average, while the heat capacity shows self-averaging behaviour. For a two-dimensional Ising model with a long-range correlated disorder, the correlations of which decrease with distance as r^{-a} , using the mapping to theory of two-dimensional Dirac fermions, within two-loop approximation of the renormalization group it was showed that the model belongs to the universality class with critical exponent $\nu = 2/a$. Study of the long-range correlated disorder influence on the critical-behaviour of two-dimensional Ashkin-Teller model with N_i -colors, shows the emergence of new critical behavior that belongs to the same class of universality as well as the two-dimensional Ising model with a long-range correlated disorder.

The conditions under which different types of multicritical behavior are realized for an anisotropic antiferromagnet in a magnetic field parallel to the anisotropy axis were studied. Such a system is described by a model with two coupled order parameters and symmetry $O(1) \oplus O(2)$. The latter is a partial realization of the general model with symmetry, $O(n) \oplus O(m)$, which describes multicritical phenomena in different physical systems. For this model, within the field-theoretical renormalization group, numerical estimates of the marginal dimensions of the order parameter were calculated depending on the space dimension d , which determine the stability conditions of different types of multicritical behavior. Based on the obtained results, a conclusion, that the tetracritical behavior is realized for the considered three-dimensional system in the asymptotic region, is made.

Finally the problem of the order of phase transition occurring in magnets with noncolinear order was studied. Such systems are characterized by a matrix order parameter and $O(n) \times O(m)$ symmetry with physical realization for $m = 2$ and $n = 2$ and $n = 3$. In field theory, they are described by effective Hamiltonians with two n -component fields. For the model of a frustrated magnet at $d = 3$ within a six-loop order approximation the dependence of critical exponents, obtained within fixed space dimension approach on the basis of perturbative series, on parameters of the used resummation procedures are analysed. For frustrated magnets for $n = 2$ and $n = 3$, our results in $d = 3$ show a high sensitivity of critical ex-

ponents to the resummation parameters. Comparison with similar dependencies on the resummation parameters for the critical characteristics of $O(n)$ and cubic models in $d = 3$, for which unambiguous and accurate results are known, shows that previously obtained data about second order phase transition for three-dimensional frustrated systems are based on non-physical spurious solutions. A similar analysis and comparison was made for two-dimensional systems and it was shown that the perturbative approach of the field-theoretical renormalization group is not relevant enough for two-dimensional systems. Within the nonperturbative renormalization group, the marginal value of the field dimension n_c is calculated as a function of spatial dimension d for values from $d = 2.8$ to $d = 4$. The estimate for $d = 3$, clearly confirms the value of the marginal dimension, which is much higher than 3, $n_c = 5.24(2)$, excluding the appearance of second order phase transition in the physical cases of $n = 2$ and $n = 3$.

Keywords: Effective critical behavior, critical dynamics, structural disorder, frustrations, renormalization group

Список публікацій здобувача

1. *Dudka M., Holovatch Yu., Yavors'kii T.* Universality classes of the three-dimensional mn -vector model // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37, no. 45. — P. 10727.
2. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Critical properties of random anisotropy magnets // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2005. — Vol. 294, no. 3. — P. 305 – 329.
3. Critical dynamics and effective exponents of magnets with extended impurities / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72, no. 6. — P. 064417(1–11).
4. Critical dynamics of diluted relaxational models coupled to a conserved density / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72, no. 3. — P. 036107(1–4).
5. Critical slowing down in random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* — 2005. — Vol. 8, no. 4. — P. 737–748.
6. Enhancement of the critical slowing down influenced by extended defects / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *J. Mol. Liq.* — 2006. — Vol. 127, no. 1-3. — P. 60–61.
7. Model C critical dynamics of disordered magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A.* — 2006. — Vol. 39, no. 25. — P. 7943.
8. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A.* — 2007. — Vol. 40, no. 29. — P. 8247.
9. *Дудка М.* Критична динаміка невідпорядкованих магнетиків: теоретико-польовий підхід // *Фіз. Збірник НТШ.* — 2008. — Т. 7. — С. 210–223.
10. *Dudka M., Folk R., Moser G.* Dynamic scaling functions and amplitude ratios of stochastic models with energy conservation above T_c // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80, no. 3. — P. 031124(1–15).

11. Relevance of the fixed dimension perturbative approach to frustrated magnets in two and three dimensions / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82, no. 10. — P. 104432(1–12).
12. Analysis of the 3d massive renormalization group perturbative expansions: a delicate case / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Condens. Matter Phys.* — 2010. — Vol. 13, no. 4. — P. 43703(1–16).
13. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* — 2012. — Vol. 15, no. 4. — P. 43001(1–10).
14. *Dudka M.* Two-loop Feynman integrals for ϕ^4 theory with long-range correlated disorder // *J. Math. Phys.* — 2015. — Vol. 56, no. 1. — P. 013302.
15. Monte Carlo study of anisotropic scaling generated by disorder / O. Vasilyev, B. Berche, M. Dudka, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Vol. 92, no. 4. — P. 042118(1–9).
16. Functional renormalization group approach to noncollinear magnets / B. Delamotte, M. Dudka, D. Mouhanna, S. Yabunaka // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93, no. 6. — P. 064405(1–14).
17. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Phase diagram of Model C in the parametric space of order parameter and space dimensions // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93, no. 9. — P. 094301(1–8).
18. Critical behavior of the two-dimensional Ising model with long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, V. Blavatska, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 93, no. 22. — P. 224422(1–13).
19. Self-averaging in the random two-dimensional Ising ferromagnet / Vic. Dotsenko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // *Phys. Rev. E.* — 2017. — Vol. 95, no. 3. — P. 032118(1–8).
20. *Dudka M., Fedorenko A. A.* Emergent universal critical behavior of the 2D N -color Ashkin-Teller model in the presence of correlated disorder // *Condens.*

- Matter Phys.* — 2017. — Vol. 20, no. 1. — P. 13603(1–11).
21. Статистична фізика складних систем у світі та у Львові / Ю. Головач, М. Дудка, В. Блавацька, В. Пальчиков, М. Красницька, О. Мриглюд // *Журн. Фіз. Досл.* — 2018. — Vol. 22, no. 2. — P. 2801(1–21).
 22. Possibility of a continuous phase transition in random-anisotropy magnets with a generic random-axis distribution / D. Shapoval, M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Feb. — Vol. 101. — P. 064402.
 23. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 30, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. — Cortona, Italy, 3–6 April 2005. — P. 19.
 24. Critical dynamics of disordered model C / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // 69 Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Abstracts. — Berlin, Germany, 4–9 März 2005. — P. DY 34.117.
 25. Influence of extended defects on the critical dynamics of a non-conserved order parameter / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // PLM MP 2005, Physics of liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. — Kyiv, Ukraine, 27–31.05.2005. — P. 76, 3–4.O.
 26. On the critical dynamics of random anisotropy systems / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. — Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. — P. 16.
 27. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. — Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. — P. 31.
 28. Critical dynamics of magnets with random anisotropy / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // AKF-Frühjahrstagung-2006 in conjunction with 21 General Conference of the EPS Condensed Matter Division, Abstracts. — Dresden, Germany, 27–31 March 2006. — P. 209, DY 44.4.

29. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 31, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. — Primošten, Croatia, 23–26 April 2006. — P. 73.
30. *Folk R., Dudka M., Moser G.* Dynamic scaling functions and amplitude ratio for model C dynamics // MECO 33, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. — Puchberg/ Wels, Austria, 14–16 April 2008. — P. P8.
31. *Dudka M., Folk R., Moser G.* Correlation functions and amplitude ratio for relaxational dynamics with energy conservation. model C // Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. — Lviv, Ukraine, 23–25 June 2009. — P. 128.
32. On the application of the perturbative renormalization group approach at fixed space dimension for study of critical behaviour / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // PLMMP-2010, Physics of Liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. — Kyiv, Ukraine, 21–23 May 2010. — P. 144.
33. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 4-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. — Lviv, Ukraine, 3–6 July 2012. — P. 102.
34. Influence of different types of structural disorder on the critical properties of magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 6-th International Conference “Physics of Disordered Systems”, — Lviv, Ukraine, 14–16 October 2013. — P. 41.
35. Critical behavior of two-dimensional models with ising spins in the presence of long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch, V. Blavatska // 43-th International Conference “Middle European Cooperation in Statistical Physics” (MECO43), — Kraków, Poland, 1–4 May 2018. — P. 50.
36. Self-averaging in the two-dimensional random-bond ising model / Vic. Dot-

senko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications, — Lviv, Ukraine, 3–6 June 2019. — P. 61.

ЗМІСТ

Вступ	23
1 Огляд літератури	36
1.1 Теоретичний опис критичних явищ	36
1.2 Структурний безлад	47
1.2.1 Нескорельовані дефекти	48
1.2.2 Протяжні домішки	50
1.2.3 Далекосяжно скорельований безлад	53
1.2.4 Випадкова анізотропія	55
1.2.5 Безлад у двовимірних системах	63
1.3 Магнетики з антиферромагнітною взаємодією: мультикритичність та неколінеарне впорядкування	67
1.3.1 Мультикритичність моделей з симетрією $O(n) \oplus O(m)$	67
1.3.2 Магнетики з неколінеарним впорядкуванням та $O(n) \times O(m)$ симетрія	70
1.4 Підхід теоретико-польової РГ	73
1.4.1 Перенормування статичних функцій	73
1.4.2 Теоретико-польовий підхід для критичної динаміки	74
1.4.3 Перенормування для критичної динаміки	75
1.4.4 Кількісні критичні характеристики	78
1.4.5 Процедура пересумовування	79
1.5 Висновки	81
2 Критична поведінка магнетиків з протяжними домішками	82

2.1	Динамічний критичний показник для магнетика з паралельними протяжними немагнітними домішками для динаміки моделі А . . .	82
2.1.1	Модель з протяжними домішками	82
2.1.2	Метод теоретико-польової РГ	86
2.1.3	Результати	88
2.2	Монте Карло аналіз показника анізотропії моделі Ізінга з лінійними паралельними домішками	95
2.2.1	Анізотропний скінченно-розмірний скейлінг	96
2.2.2	Деталі симуляцій	99
2.2.3	Результати симуляцій і їх аналіз	101
2.3	Ефективні критичні показники моделі магнетика з протяжними домішками	110
2.4	Висновки	113
3	Критична поведінка магнетиків з випадковою анізотропією	118
3.1	Фазовий перехід у моделі з випадковою анізотропією	118
3.1.1	Перенормування	122
3.1.2	Аналіз РГ	127
3.2	Критичне сповільнення для моделі з випадковою анізотропією . . .	134
3.2.1	Модельні рівняння і перенормування	135
3.2.2	Результати	136
3.3	Висновки	139
4	Вплив зв'язку параметра порядку з повільнозмінними величинами на критичну динаміку структурно неупорядкованих магнетиків	142
4.1	Модель С	143
4.1.1	Динамічний скейлінг	145
4.1.2	Кореляційні функції і перенормування	147
4.1.3	Основні співвідношення	148

4.1.4	Перенормування	148
4.2	Розрахунок динамічного амплітудного відношення в однопетлевому наближенні	153
4.2.1	Вершинні функції в однопетлевому порядку	153
4.2.2	Загальні вирази для однопетлевих інтегралів	154
4.2.3	Характеристичні частоти	157
4.2.4	Динамічне відношення амплітуд	162
4.2.5	Обговорення випадку слабого динамічного скейлінгу	164
4.3	Фазова діаграма моделі C у параметричному просторі вимірностей параметра порядку та простору	165
4.3.1	Нерухомі точки та їхня стійкість	166
4.3.2	ε -розклади у високих порядках для граничних ліній	169
4.3.3	Пересумовування функцій РГ при фіксованій вимірності простору	170
4.3.4	Обговорення	174
4.4	Критична динаміка моделі C для неупорядкованих магнетиків	176
4.4.1	Модель і перенормування	176
4.4.2	Результати в однопетлевому наближенні	178
4.4.3	Двопетлеві результати	181
4.5	Критична динаміка моделі C для магнетиків з випадковою анізо- тропією	189
4.5.1	Модельні рівняння	189
4.5.2	Результати	191
4.6	Висновки	198
5	Вплив структурного безладу на критичну поведінку двовимірних магнетиків	201
5.1	Самоусереднення термодинамічних величин двовимірної моделі Ізі- нга з безладом	201

5.1.1	Ферміонне представлення для двовимірної моделі Ізінґа з безладом	203
5.1.2	Формалізм реплік	205
5.1.3	Розрахунки РГ	207
5.1.4	Теплоємність	213
5.2	Двовимірна модель Ізінґа зі скорельованим безладом	216
5.2.1	Модель	217
5.2.2	Перенормування моделі	218
5.2.3	Нерухомі точки, їхня стійкість і скейлінгова поведінка	222
5.2.4	Спін-спінові кореляції при критичності: бозонізація	227
5.2.5	Дискусія	230
5.3	Критична поведінка моделі Ашкіна-Телера з N_i -кольорами та скорельованим безладом	232
5.3.1	Ферміонне представлення моделі	232
5.3.2	Опис підходу РГ	233
5.3.3	Однопетлеві потоки РГ і критична поведінка	235
5.4	Висновки	239

6 Граничні вимірності для анізотропного антиферомангнетика у зовнішньому полі 242

6.1	Модель $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ і її РГ опис	242
6.1.1	Модель	242
6.1.2	РГ опис для мультикритичних явищ	244
6.2	Граничні поверхні для стійкості у рамках двопетлевого наближення 245	
6.2.1	Граничні поверхні з ε -розкладу	246
6.2.2	Граничні поверхні з пересумованих β -функцій	248
6.3	Результати високих порядків теорії збурень для граничних вимірностей	251
6.3.1	Пертурбативні ε -розклади п'ятипетлевого порядку для граничних вимірностей	252

6.3.2	Випадок $d = 3$	255
6.4	Висновки	256
7	Фазовий перехід у магнетиках з неколінеарним впорядкуванням	258
7.1	Теоретико-польова $O(n) \times O(2)$ модель та підхід при фіксованій вимірності простору	258
7.1.1	Процедура пересумовування	261
7.1.2	Принципи збіжності	264
7.2	Дослідження нерухомих точок для моделей теорії поля у трьох вимірах	265
7.2.1	$O(n)$ симетрична модель у трьох вимірах	265
7.2.2	Кубічна анізотропія	270
7.2.3	Фрустровані тривимірні моделі	273
7.3	Аналіз нерухомих точок моделей у двох вимірах	279
7.3.1	$O(n)$ моделі у двох вимірах: аномальна явна збіжність	280
7.3.2	Фрустровані двовимірні моделі	283
7.4	Розрахунок граничної вимірності для фрустрованих систем методами непертурбативної РГ	288
7.4.1	Ефективна дія	289
7.4.2	Ефективна дія для неколінеарних магнетиків	295
7.4.3	Рівняння РГ	297
7.4.4	Напів-розклад за полями	301
7.4.5	Крива $n_c(d)$	311
7.5	Висновки	313
	Висновки	316
	Список використаних джерел	318
A	Функціонали та теорія збурень для опису моделей з безладом в рамках критичної динаміки моделі C.	362

A.1	Динамічні функціонали і розклад теорії збурень для магнетиків з точковим безладом	362
A.2	Динамічний перенормовуючий множник для $\mathring{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}$	365
A.3	Розклад теорії збурень динамічної РГ для магнетика з випадковою анізотропією	366
В	Елементи підходу РГ до критичної поведінки двовимірних моделей з безладом	368
B.1	Знаходження розподілу внутрішньої енергії двовимірної моделі Ізінга з нескорельованим безладом	368
B.2	Вершинні функції для моделі Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом	370
B.3	Таблиця двопетлевих інтегралів	372
B.3.1	$a = b = c = 0$	372
B.3.2	$a \neq 0$	374
B.3.3	$a \neq 0, b \neq 0$	375
B.3.4	$b \neq 0, c \neq 0$	376
B.3.5	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	376
B.4	Логарифмічні поправки для короткосяжного безладу	377
B.5	Кореляційна функція	378
B.6	Скейлінгова поведінка з рівнянь на потоки	380
С	Елементи НПРГ для фрустрованих магнетиків	382
C.1	Пропагатор	382
C.2	Порогові функції	384
Д	Список публікацій здобувача	387
Е	Апробація результатів дисертації	392

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ФП	—	фазовий перехід
RAM	—	модель з випадковою анізотропією (random anisotropy model)
СРС	—	скінченно- розмірний скейлінг
МК	—	Монте Карло
РГ	—	ренорм-група
НПРГ	—	непертурбативна РГ
НТ	—	нерухома точка
LPA	—	наближення локального потенціалу (local potential approximation)
PMS	—	принцип мінімальної чутливості (principle of minimal sensitivity)
PFAC	—	принцип найшвидшої явної збіжності (principle of fastest apparent convergence)

ВСТУП

Особливості критичної поведінки фізичних систем є постійним об'єктом зацікавлення дослідників, починаючи з другої половини позаминулого століття, коли і було введене саме поняття критичної точки [1]. При наближенні до критичної точки термодинамічні властивості визначають універсальні степеневі закони, причиною виникнення яких є зростання флуктуацій та їхня кореляція [1, 2]. Ґрунтовно розроблена теорія критичних явищ є одним з важливих досягнень сучасної рівноважної статистичної фізики, а ключову роль в поясненні цих законів відіграє гіпотеза масштабної інваріантності (скейлінгу) [3–5]. До глибокого розуміння поведінки в околі критичних точок за останні півстоліття привели методи ренорм-групи (РГ) [6–9], тому опис критичних явищ тепер важко уявити без звертання до цих методів. Зокрема, за допомогою РГ розраховуються кількісні оцінки універсальних характеристик, таких як критичні показники та відношення критичних амплітуд. Прототипні моделі, де ці методи виявились особливо успішними, описують ідеалізовані $O(n)$ -симетричні магнетики і відповідають теорії поля ϕ^4 , яка включає в себе лише одну константу зв'язку [10]. Зокрема, вони описують чисті феромагнетики з одновісною анізотропією або ізінгівські магнетики ($n = 1$), магнетики з легкою площиною або ХУ-магнетики ($n = 2$), ідеальні гайзенбергівські феромагнетики ($n = 3$) [11].

Завдяки універсальності критичної поведінки, опис особливостей, що спостерігаються в магнетиках, можна використовувати для інших систем, і не лише для об'єктів фізики конденсованої речовини. Зокрема, неперервний фазовий перехід (ФП) в ізінгівських магнетиках, належить до одного класу універсальності з критичною точкою газ-рідина, а клас універсальності ХУ-магнетиків включає в себе надплинний перехід у He^4 . Нещодавно виявилось, що розшарування у лі-

підних мембранах характеризується класом універсальності двовимірної моделі Ізінга [12, 13]. Цікаво, що теорія поля ϕ^4 з $n = 0$ описує універсальність конформацій полімерного ланцюга у хорошому розчиннику [14].

Динамічні критичні явища є значно різноманітнішими, однак менш вивченими, порівняно зі статичними. Аномалії динамічної поведінки, які спостерігаються поблизу критичної точки, є подібними до тих, що характерні для статичних критичних властивостей. Це дозволяє застосовувати до їх опису ті самі ідеї та способи аналізу, що вже дали достовірні результати при аналізі статичної критичної поведінки. Зокрема, це виявляється у поширенні гіпотези скейлінгу на динамічні критичні явища [15–18]. Як і у випадку статички, в динаміці правомірність гіпотези скейлінгу підтверджується застосуванням методів РГ. Розвиток теорії поля в області динамічних критичних явищ [19] дозволив кількісно описати критичну динамічну поведінку цілого ряду фізичних систем (див. огляди [20, 21]).

Розвиток сучасних технологій зумовив застосування матеріалів, які характеризуються компактністю (скінченні розміри, квазі-двовимірність), неідеальною внутрішньою структурою (аморфні матеріали, матеріали з різного роду домішками). Тому важливим і актуальним став розгляд більш реалістичних моделей, які б враховували ефекти скінченного розміру та структурний безлад для глибшого розуміння і прогнозування критичної поведінки в нових матеріалах.

Актуальність теми. Робота присвячена теоретичному опису впливу таких реалістичних особливостей як структурний безлад, анізотропія, фрустрації, які в теорії поля порушують симетрію $O(n)$ на статичну та динамічну критичну поведінку магнітних систем. Така задача актуальна, бо реальні об'єкти, в яких відбувається магнітний ФП, часто характеризуються структурним безладом заміщення (тверді розчини антиферромагнетиків та їх немагнітних ізоморфів) [22], локальною випадковою анізотропією (аморфні сплави рідкісноземельних і перехідних металів) [23], фрустраціями (шаруваті трикутні антиферромагнетики, гелімагнетики) [24].

При експериментальних дослідженнях виявляється, що поведінка багатьох реальних систем поблизу критичної точки є універсальною – незалежною від мі-

кроскопічних особливостей. Однак універсальність справедлива лише в асимптотичній області в околі критичної точки. За межами цієї області скейлінг порушується і опис критичних явищ ускладнюється, включаючи не універсальні характеристики як в статистиці, так і в динаміці [1, 2, 25]. Поблизу критичної точки кореляційна довжина хоч і суттєво перевищує міжатомну відстань, але залишається все ж скінченною. Дійсно, у багатьох системах (наприклад, з безладом вузлів) ефективна критична поведінка може пояснити експериментально спостережувану ситуацію [26–30]. А оскільки саме ефективна критична поведінка реально спостерігається на експерименті та в числових комп’ютерних моделюваннях (чисельний експеримент), її детальний теоретичний аналіз і розробка теорії для теоретичного опису є актуальними.

Поряд з розвитком стандартних методів пертурбативної РГ групи актуальним є застосування інших методів опису, таких як чисельний експеримент. На сьогодні чисельні експерименти (симуляції) є окремим підходом до пізнання дійсності поряд з аналітичним описом та реальним експериментом [31].

Однак сучасний прогрес обчислювальних технологій спричинився до розвитку не тільки методів чисельного експерименту, зокрема Монте Карло (МК) симуляцій, але й аналітичних підходів для опису критичності, які вимагають довгих складних обчислень. Тут можна згадати метод аналізу нулів статистичної суми та непертурбативний підхід РГ (НПРГ). Останній базується на розв’язку точного інтегрально-диференційного рівняння, яке описує перетворення системи при перенормуванні, тому іноді такий підхід називають “точною РГ” [32]. Однак в реальних задачах для розв’язку цього рівняння використовують певні припущення та наближення, тому ми використовуємо термін НПРГ.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України, із науковою тематикою якого пов’язаний вибраний напрямок досліджень. Подані в дисертації результати отримані згідно планів робіт в рамках бюджетних тем НАН України “Розвиток кількісної теорії фазових переходів у конденсованих системах” (2002-2004 рр., номер держреєстрації 0102U000218), “Осо-

бливості критичної поведінки конденсованих систем під впливом зовнішнього поля, структурного безладу, фрустрацій та анізотропії” (2005-2007 рр., номер держреєстрації 0105U002081), “Аналітичні та чисельні дослідження скейлінгових властивостей та фазових переходів у багаточастинкових системах” (2008-2012 рр., номер держреєстрації 0108U001152), “Розвиток теоретичних методів опису флюїдних, ґраткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” (2013-2017 рр., номер держреєстрації 0112U007763), “Методи і моделі статистичної фізики для опису виникнення структур та пояснення скейлінгу у складних системах” (2018-2022 рр., номер держреєстрації 0118U003012), а також у рамках тем “Розробка сучасних теоретичних методів та їх застосування до вивчення властивостей конденсованих систем” (2002-2006 рр., номер держреєстрації 0102U001794), “Розвиток і застосування методів аналітичної теорії та комп’ютерного експерименту для опису явищ переносу в іон-електронних системах” (2007-2011 рр., номер держреєстрації 0107U002081), “Багатомасштабність і структурна складність конденсованої речовини: теорія і застосування” (2012-2016 рр., номер держреєстрації 0112U003119), “Нові концепції статистичного опису і їх застосування у теорії багаточастинкових систем” (2017-2021 рр., номер держреєстрації 0117U002093), гранту НАНУ для молодих вчених “Зміна законів скейлінгу у конденсованих системах під впливом безладу і фрустрації” (2009-2010 рр., номер держреєстрації 0110U005177), проекту “Критична поведінка фрустрованих систем” у рамках співпраці між CNRS та НАНУ (2008-2009 рр.), гранту уряду Франції на короткотерміновий візит в Лабораторію теоретичної фізики конденсованого стану Університету П’єра і Марії Кюрі в Парижі для виконання проекту “Фазові переходи у фрустрованих системах” (2011), гранту на короткотерміновий візит від Міжнародного центру теоретичної фізики Абдуса Салама в Трієсті для виконання проекту “Критичні властивості двовимірної ферміонної моделі зі скорельованим безладом” (2014), проектів FP7 EU IRSES № 269139 “Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media” (2011-2015 pp.), IRSES № 295302 “Statistical Physics in Diverse Realisations” (2012-2016), IRSES Project № 612707 “Dynamics of and in Complex Systems” (2014-2018).

Мета і задачі дослідження. *Метою дисертаційної роботи є побудова теорії для опису та аналіз впливу структурного безладу різного типу, анізотропії, фрустрацій, скінченного розміру на універсальні статичні та динамічні критичні властивості магнітних систем і на їхню ефективну критичну поведінку. Завданнями роботи є:*

- кількісний аналіз релаксаційної критичної динаміки магнетика з протяжними домішками;
- дослідження ФП в магнетику з випадковою анізотропією зі складним розподілом локальних осей випадкової анізотропії;
- кількісний опис критичного сповільнення у магнетиках з випадковою анізотропією;
- аналіз впливу зв'язку незбереженого параметра порядку із збереженою густиною енергії на ефективну динамічну поведінку неупорядкованих магнетиків з неоднорідностями структури типу випадкових вузлів та випадкової анізотропії;
- дослідження явища самоусереднення у двовимірному магнетику Ізінґа з нескорельованим структурним безладом;
- кількісний опис критичної поведінки двовимірних моделей Ізінґа та Ашкіна-Телера при наявності далекосяжно скорельованих дефектів структури;
- аналіз реалізації різних типів мультикритичної поведінки в моделях $O(n) \oplus O(m)$ в залежності від глобальних параметрів системи;
- дослідження результатів пертурбативної РГ для фрустрованих магнетиків на залежність від внутрішніх параметрів техніки аналізу;
- встановлення роду ФП у фрустрованих магнетиках в рамках непертурбативної РГ.

Об'єкт дослідження складають аналітичні моделі магнітних систем, що враховують їх реальні особливості, такі як наявність структурного безладу, анізотропії, фрустрацій, ефектів скінченного розміру. *Предметом дослідження* є вплив

реалістичних особливостей, що порушують $O(n)$ симетрію параметра порядку ідеалізованих магнітних систем, на асимптотичні та ефективні критичні властивості магнітних матеріалів, у тому числі на динамічну критичну поведінку. У роботі застосовуються аналітичні та подекуди чисельні *методи дослідження*: зокрема, це два варіанти теоретико-польової ренорм-групи (з використанням методів теорії збурень і непертурбативний підхід, що базується на використанні точного рівняння РГ), техніки пересумовування рядів теорії збурень, розрахунки МК.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається зі вступу, розділу з оглядом літературних джерел, що стосуються тематики дисертації, шести розділів основної частини, у яких викладені результати досліджень здобувача, загальних висновків, списку використаних джерел та 5 додатків. Робота викладена на 317 сторінках (повний обсяг разом з літературою та додатками – 393 сторінки), бібліографічний список містить 522 найменування публікацій у наукових виданнях.

У **першому розділі** здійснено огляд робіт, присвячених дослідженню критичних властивостей моделей магнетиків, що враховують наявність структурного безладу різного типу, анізотропії, фрустрацій.

У **другому розділі** проаналізовано критичні властивості моделі магнетика з протяжними паралельними домішками. Такий безлад призводить до появи в системі анізотропного скейлінгу, що характеризується різними критичними показниками для кореляційної довжини паралельної до протяжних домішок і для кореляційної довжини перпендикулярної до них. З використанням двопетлевих функцій РГ розраховуються динамічні критичні показники для часу релаксації вздовж напрямку дефектів і для часу релаксації у перпендикулярному напрямку. Співвідношення цих показників дає показник анізотропії. Значення цього показника для паралельних лінійних домішок обчислюється за допомогою чисельного методу МК з використанням скінченно-розмірного скейлінгу. Для систем з такими дефектами також проведено аналіз ефективної критичної поведінки. Результати показують посилення критичного сповільнення порівняно з системами з точковим безладом.

Третій розділ присвячений дослідженню критичної поведінки магнетиків зі структурним безладом у формі випадкової анізотропії, для яких важливе значення має розподіл осі випадкової анізотропії. У першому підрозділі розглядається питання про можливість критичної поведінки для розподілів, які в теорії поля приводять до ефективних гамільтоніанів з п'ятьма константами зв'язку. У рамках двопетлевого наближення показано, що в таких системах відсутній ФП другого роду. В останньому підрозділі здійснено теоретичний опис критичної динаміки для магнетиків з випадковою анізотропією, що характеризуються анізотропним розподілом, для яких існують узгоджені дані про існування ФП другого роду. При дослідженні ефективної динамічної критичної поведінки знайдено різні сценарії підходу до асимптотичного режиму.

У **четвертому розділі** проводиться дослідження критичної динамічної поведінки магнетиків зі структурним безладом при наявності зв'язку незбереженого параметра порядку з повільнозмінними величинами (тими які підпорядковуються законам збереження). У найпростішому випадку цей зв'язок враховується тільки у статичному гамільтоніані у рамках моделі С критичної динаміки. Тут для цієї моделі без безладу у рамках теоретико-польової РГ розраховано динамічне відношення амплітуд у однопетлевому наближенні. Розраховано фазову діаграму у параметричній площині вимірностей простору та параметра порядку. У рамках моделі С для магнетиків з випадковими вузлами та магнетиків з випадковою анізотропією з кубічним розподілом осі випадкової анізотропії у двопетлевому наближенні розраховано ефективний динамічний критичний показник для параметра порядку (а для магнетиків з випадковою анізотропією ще й для збереженої величини) в залежності від різних початкових значень параметрів моделі.

У **п'ятому розділі** досліджено критичні властивості двовимірних систем, що містять структурний безлад. Розглядається три задачі. Перший підрозділ присвячений проблемі самоусереднення термодинамічних характеристик двовимірної моделі Ізінга з нескорельованим безладом поблизу критичної точки. Використовуючи представлення цієї моделі у теорії ферміонівських полів Майорани, з допомогою методів РГ отримано явні вирази функції розподілу для флуктуа-

цій внутрішньої енергії та теплоємності, які показують, що внутрішня енергія є самоусереднюваною величиною в критичній області, а теплоємність – несамоусереднюваною. У другому підрозділі розглядається вплив далекосяжно скорельованого безладу на критичну поведінку двовимірної моделі Ізінга. З використанням представлення моделі за допомогою ферміонівських полів Дірака у рамках РГ розраховано критичні показники і продемонстровано, що модель належить до нового класу універсальності з критичним показником кореляційної довжини, що залежить від показника загасання кореляцій безладу. У останньому підрозділі розглянуто задачу про критичну поведінку так званої моделі Ашкіна-Телера з N_i “кольорами” з цим же типом безладу. Встановлено, що ця модель належить до одного класу універсальності з двовимірною моделлю Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом.

Шостий розділ присвячений аналізу мультикритичної поведінки анізотропного феромагнетика у зовнішньому магнітному полі, спрямованому вздовж осі анізотропії. Така система описується моделлю з двома зв’язаними параметрами порядку і симетрією $O(1) \oplus O(2)$. Остання є частковою реалізацією загальної моделі з симетрією, $O(n) \oplus O(m)$, що описує мультикритичні явища у різних фізичних контекстах. Для цієї моделі за допомогою розкладів за малим параметром та за допомогою підходу при фіксованій вимірності розраховано чисельні оцінки граничних вимірностей параметра порядку в залежності від вимірності простору d , що визначають умови стійкості різних типів мультикритичної поведінки. На основі отриманих результатів зроблено висновок про тетрактичну поведінку, яка реалізується для розглядуваної тривимірної системи в асимптотичній області.

У **сьомому розділі** розглядається задача про рід ФП у магнетиках з неколінеарним впорядкуванням, яке реалізується, зокрема, у гелімагнетиках та шаруватих фрустрованих магнетиках на трикутній ґратці. Ці системи характеризуються матричним параметром порядку та симетрією $O(n) \times O(m)$ з фізичною реалізацією для $m = 2$ та $n = 2$ і $n = 3$. У теорії поля вони описуються ефективними гамільтоніанами з двома n -компонентними полями. У першому підрозділі проведено аналіз критичних показників, які розраховуються на основі функцій

теоретико-польової РГ, отриманих як ряди теорії збурень за константами зв'язку з застосуванням технік пересумовування, на залежність від внутрішніх параметрів використаного пересумовування. Порівнюючи з результатами для моделей з добре встановленими ФП другого роду, зроблено висновок, що отримані раніше дані про ФП другого роду для тривимірних фрустрованих систем ґрунтуються на нефізичних хибних розв'язках. Подібний аналіз і порівняння зроблені також для двовимірних систем у другому підрозділі, де показано, що пертурбативний підхід теоретико-польової РГ не є достатньо релевантним для двовимірних систем. Висновок про ФП першого роду для тривимірних систем фрустрованих систем з $n = 2$ і $n = 3$ підтверджено оцінкою граничної вимірності $n_c = 5.24(2)$, розрахованої у рамках НПРГ у третьому підрозділі.

Наукова новизна отриманих результатів. Вперше дано опис і проаналізовано ефективну динамічну поведінку тривимірних систем з різними типами структурного безладу в рамках моделей критичної динаміки А та С на основі рівняння Ланжевена. Встановлено сценарії підходу цих систем до свого асимптотичного режиму при різних початкових параметрах. Показано, що для структурно-невпорядкованих систем ефективний динамічний критичний показник наближається до свого асимптотичного значення в основному зверху. Продемонстровано, що зв'язок незбережного параметра порядку зі збереженою величиною має значний вплив на ефективні критичні властивості таких магнетиків.

Для магнітних систем з протяжними домішками показано, що присутність таких дефектів помітно сповільнює критичні процеси порівняно з системами з нескорельованим безладом через зростання динамічних критичних показників. Вперше в рамках чисельного експерименту для цих систем отримано оцінки для показника анізотропії.

Для двовимірної моделі Ізінґа з нескорельованим безладом вперше отримано явні вирази для функцій розподілу імовірності внутрішньої енергії та теплоємності у критичній області, які показують, що внутрішня енергія є несамоусереднюваною величиною, а теплоємність – самоусереднюваною.

Продемонстровано, що скорельований структурний безлад зі степеневим за-

гасанням кореляцій перетворює слабку універсальність звичайної двовимірної моделі Ашкіна-Телера та ФП першого роду у двовимірній моделі Ашкіна-Телера з $N_i > 2$ “кольорами” у ФП другого роду з критичним показником кореляційної довжини, залежним від показника загасання.

В масивній схемі РГ застосовано аналіз розв’язків, які отримуються в рамках підходу при фіксованій вимірності простору для рядів теорії збурень, на залежність від внутрішніх параметрів процедури. Продемонстровано, що цей підхід не усуває усіх нефізичних розв’язків.

В рамках аналізу методами НПРГ магнетиків з неколінеарним впорядкуванням вперше використано напів-розклад за інваріантами групи симетрії, який зберігає повну функціональну залежність від одного інваріанту при розкладі за іншим інваріантом. Отримане в результаті такого підходу значення граничної вимірності $n_c = 5.24 \pm 0.02$ для тривимірних фрустрованих магнетиків підкріплює висновок про відсутність ФП другого роду для цих систем.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані в дисертаційній роботі аналітичні та чисельні результати сприяють глибшому розумінню особливостей критичної поведінки в магнітних системах, яким притаманні структурний безлад, анізотропія та фрустрації. З практичної точки зору вони можуть бути використані як при експериментальному дослідженні критичних властивостей реальних магнітних систем, так і при аналітичному вивченні моделей теорії поля з різними симетріями. Проведений у роботі кількісний опис ефективної критичної поведінки магнітних систем є важливим для інтерпретації експериментальних та чисельних досліджень, котрі, як правило, проводяться у неасимптотичній області.

Робота має також методологічне значення. Так, вперше застосований у роботі напів-розклад за інваріантами групи симетрії в рамках НПРГ можна використати для інших моделей з двома інваріантами, зберігаючи повну функціональну залежність від одного інваріанту, та розкладаючи за іншим. Застосований у роботі метод ідентифікації нефізичних хибних нерухомих точок, можна використовувати при інших дослідженнях методами пертурбативної РГ із застосуванням підходу при фіксованій вимірності простору.

Можливим також є використання окремих фрагментів дисертаційної роботи в лекційному матеріалі з теорії фазових переходів та критичних явищ для магістрів і аспірантів.

Особистий внесок здобувача. Серед публікацій [33–54] дві статті [41, 46] виконані дисертантом одноосібно. У роботах, виконаних спільно зі співавторами [33–40, 42–45, 47–54], здобувачу належить:

- застосування процедур пересумовування до пертурбативних рядів, отриманих у високих порядках теорії збурень для розрахунку граничних вимірностей [33, 45];
- розрахунок функцій РГ та застосування процедур пересумовування для магнетиків з випадковою анізотропією [34];
- розрахунок значень динамічних критичних показників системи з протяжними дефектами структури [35, 38];
- розрахунок ефективних критичних показників для магнетиків з протяжними домішками [35];
- розрахунок функцій РГ та застосування процедур пересумовування для аналізу ефективної критичної поведінки в рамках моделі С для магнетиків зі структурним безладом [36, 39, 40];
- розрахунок динамічної функції РГ та аналіз ефективної критичної поведінки в рамках моделі А для магнетиків з випадковою анізотропією [37];
- виконання перенормування в однопетлевому наближенні та оцінка динамічного критичного відношення [42];
- аналіз результатів підходу при фіксованій вимірності простору на залежність від внутрішніх параметрів використаних процедур пересумовування [43, 44];
- постановка задачі про МК дослідження магнетиків з протяжними домішками та аналіз даних для кореляційної довжини та кумулянтів Біндера [47];

- застосування підходу напіврозкладу за інваріантами теоретико-польової моделі фрустрованого магнетика в рамках непертурбативної РГ та розрахунок граничної вимірності параметра порядку у цьому підході [48];
- постановка задачі про фазову діаграму моделі С для критичної динаміки та її аналіз із застосування процедур пересумовування до рядів для критичних показників, отриманих у високих порядках теорії збурень [49];
- розрахунок двопетлевих ренорм-групових функцій для двовимірних моделей з далекосяжно скорельованим безладом та аналіз критичної поведінки на їхній основі у роботах [50, 52];
- участь у розрахунку функції розподілу внутрішньої енергії двовимірної моделі Ізінга з безладом [51];
- написання розділів 2-4 в оглядовій роботі [53];
- постановка задачі про критичну поведінку магнетиків з випадковою анізотропією з тримодальним розподілом осі випадкової анізотропії та розрахунок двопетлевих функцій РГ у масивній схемі перенормування [54].

Здобувач брав безпосередню участь в обговоренні усіх результатів, опублікованих у спільних дослідженнях.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових зустрічах: MECO30: 30-th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Cortona, Italy, 2005); 69 Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (Berlin, Germany, 2005); PLM MP 2005, Physics of Liquid Matter: Modern Problems (Kyiv, Ukraine, 2005); Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications (Lviv, Ukraine 2005); AKF-Frühjahrstagung-2006 in conjunction with 21 General Conference of the EPS Condensed Matter Division (Dresden, Germany, 2006); MECO 31, Middle European Cooperation in Statistical Physics (Primošten, Croatia, 2006); MECO 33, Middle European Cooperation in Statistical Physics (Puchberg/ Wels, Austria, 2008); Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, 2009);

PLMMP-2010, Physics of Liquid Matter: Modern Problems (Kiev, Ukraine, 2010); 4-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Lviv, Ukraine, 2012); 6-th International Conference on the Exact Renormalization Group “ERG 2012” (Aussois, France, 2012); 6-th International Conference “Physics of Disordered Systems” (Lviv, Ukraine, 2013); MECO41: 41-st International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Vienna, Austria, 2016); MECO43: 43-rd International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Kraków, Poland, 2018); International 11th Workshop on Current Problems in Physics (Lviv, Ukraine, 2018); IX Scientific Conference “Selected issues of astronomy and astrophysics” (Lviv, Ukraine, 2018); 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications (Lviv, Ukraine, 2019); Різдв’яні дискусії на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету ім. І. Франка (2014, 2017, 2018, 2019); а також на семінарах Відділу теорії неоднорідної конденсованої речовини Інституту Макса Планка для інтелігентних систем (Штутгарт, Німеччина), Групи статистичної фізики Університету Естремадури (Бадахос, Іспанія), Відділу конденсованої речовини Інституту теоретичної фізики Варшавського університету (Варшава, Польща), Групи статистичної фізики Університету Лотарингії (Нансі, Франція), Відділу конденсованої речовини Інституту низьких температур та досліджень структури (Вроцлав, Польща) та Інституту фізики конденсованих систем НАН України.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 21 статтю в наукових журналах, внесених до переліку наукових видань, у яких мають бути опубліковані матеріали дисертаційних досліджень [33–40, 42–54], 1 статтю у Фізичному збірнику НТШ [41] і 14 тез конференцій [55–68].

Я хочу щиро подякувати своєму науковому консультанту Юрію Головачу за допомогу і підтримку. Усім співавторам своїх наукових праць я вдячний за постійне ділення ідеями, знаннями та досвідом. Дякую колективу Інституту фізики конденсованих систем за творчу професійну атмосферу, а учасникам Лабораторії статистичної фізики складних систем – ще й за натхнення.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У розділі проведено огляд робіт, присвячених моделям магнетиків, у яких враховуються такі реалістичні особливості, як структурний безлад, анізотропія, фрустрації. У першому підрозділі наводиться теоретичний опис статичних та динамічних критичних явищ. Другий підрозділ присвячений огляду аналітичних, чисельних та експериментальних досліджень критичної поведінки магнетиків з точковим безладом, скорельованим безладом і безладом типу випадкової анізотропії. У наступному підрозділі здійснено огляд робіт, що стосується досліджень мультикритичної поведінки моделі з двома зв'язаними параметрами порядку та особливостей фазового переходу в магнетиках з неколінеарним впорядкуванням. Останній підрозділ присвячений опису основного методу аналізу, який використовується в дисертації: підходу пертурбативної теоретико-польової РГ, доповненого процедурами пересумовування рядів теорії збурень. До цього розділу ввійшли матеріали оглядів, поданих в статтях [34, 41, 43, 45, 50, 52, 53].

1.1. Теоретичний опис критичних явищ

Концепція масштабної інваріантності відіграє центральну роль у сучасній теорії критичних явищ [1, 2]. З введенням множини відповідних скейлінгових змінних велику кількість експериментальних та чисельних даних, що стосуються критичної поведінки, можна описати кількома масштабними функціями [3–5]. Зокрема це пояснює те, що поблизу точки ФП другого роду заданої критичною температурою T_c при нульовому зовнішньому полі, термодинамічні функції магнітної системи, такі як намагнічення M , магнітна сприйнятливість χ , теплоємність C та

ін., добре описуються степеневими (скейлінговими) залежностями:

$$M \sim |\tau|^\beta, \quad \chi \sim |\tau|^{-\gamma}, \quad C \sim |\tau|^{-\alpha} \quad \tau \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

де $\tau = (T - T_c)/T_c$ – приведена температурна відстань до критичної точки, а показники степеневі залежності β, γ, α називаються асимптотичними критичними показниками.

Ще однією парадигматичною концепцією є концепція універсальності, згідно якої, рівноважні системи, що відчують неперервний ФП, можна згрупувати в обмежене число класів універсальності не залежно від їх мікроскопічної природи (див. наприклад, [1]). Системи в межах одного такого класу характеризуються однаковим набором критичних показників, що визначають скейлінгову поведінку їх термодинамічних характеристик при наближенні критичного режиму. Таким чином, асимптотичні критичні показники є універсальними величинами, які залежать тільки від глобальних параметрів, якими є, зокрема, вимірність простору, симетрія та вимірність параметра порядку.

В експериментах, які проводяться не достатньо близько до критичної точки при використанні опису (1.1), отримують показники, які залежать від температури і, таким чином, не є універсальними. Це так звана *ефективна критична поведінка*, яку можна описати узагальненням (1.1) на $\tau \neq 0$, ввівши температурно залежні *ефективні критичні показники* [69]. Наприклад, ефективні критичні показники для величин, введених у (1.1), означаються як:

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{d \ln M(\tau)}{d \ln \tau}, \quad \gamma_{\text{eff}} = \frac{d \ln \chi(\tau)}{d \ln \tau}, \quad \alpha_{\text{eff}} = \frac{d \ln C(\tau)}{d \ln \tau}. \quad (1.2)$$

В асимптотичній границі $\tau \rightarrow 0$ ефективні та асимптотичні показники співпадають.

Стандартно у статичній фізиці магнітні системи описуються спіновими моделями. У загальному випадку ідеалізований магнетик моделюється (гіпер)кубічною ґраткою вимірності d , де на вузлах, заданих вектором $\mathbf{r}$, розміщуються спіни, які задаються класичними n -компонентними векторами $\vec{S} =$

$\{S^1, \dots, S^n\}$. Гамільтоніан такої системи запишеться:

$$H = - \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} J \vec{S}_{\mathbf{r}} \vec{S}_{\mathbf{r}'} \quad (1.3)$$

де ми розглядаємо тільки короткосяжні взаємодії, а саме взаємодію тільки найближчих сусідів, що показує позначення $\langle \dots \rangle$ в індексі суми. Ця короткосяжна взаємодія між спінами J може бути феромагнітною ($J > 0$) або антиферомагнітною ($J < 0$).

Критичні властивості систем, заданих (1.3), добре досліджені різними підходами. Зокрема, акуратний кількісний опис здійснюється в рамках методу теоретико-польової РГ, який використовує представлення статистичної суми спінових моделей у вигляді функціонального інтегралу теорії поля з ефективним гамільтоніаном типу ϕ^4 (див. напр. [11]). Цей перехід можна здійснити, зокрема, за допомогою перетворення Стратановича-Габарда [70]. Для системи (1.3) критичні властивості будуть описуватись теорією поля з $O(n)$ симетрією з ефективним гамільтоніаном:

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} \left[(\nabla \vec{\phi}_0)^2 + \mu_0^2 \vec{\phi}_0^2 \right] + \frac{u_0}{4!} \left(\vec{\phi}_0^2 \right)^2 \right\}, \quad (1.4)$$

де $\vec{\phi}_0 \equiv \vec{\phi}_0(\mathbf{r})$ – це n -компонентне векторне поле (ми опускаємо залежність від $\mathbf{r}$ там, де це не викликає різночитання), а $u_0 > 0$ і називається неперенормованою константою зв'язку.

Фундаментальною основою для застосування теоретико-польової РГ в теорії критичних явищ є подібність поведінки статистичних систем при наближенні до критичної точки T_c і поведінки теорії поля в ультрафіолетовій границі, де ця теорія потерпає від розбіжностей. Відповідно використовуються різні схеми перенормування для того, щоб усунути розбіжності теорії. У рамках теоретико-польового підходу РГ таке усунення досягається відповідною процедурою перенормування, за якою слідує контрольоване перегрупування рядів теорії збурень для функцій РГ [6–9]. Опис процедур перенормування ми подаємо у підрозділі 1.4. Тут лише зазначимо, що критична точка магнітної системи пов'язана з існуванням стійкої

досяжної нерухомої точки (НТ) перетворень РГ для константи зв'язку u^* . Якщо такої точки не спостерігається, то це інтерпретується як відсутність ФП другого роду в магнітній системі.

Для теорії (1.4) нерухомими точками є гаусова НТ ($u^* = 0$), яка дає критичні показники зі значеннями середнього поля і є стійкою для $d \geq 4$, і так звана НТ Вільсона-Фішера ($u^* \neq 0$), яка є стійкою при $d < 4$ [71].

Значення критичних показників $O(n)$ -симетричної системи, розраховані методами РГ у НТ Вільсона-Фішера для вимірності простору $d = 3$ [10], добре узгоджуються з доступними експериментальними даними для гайзенбергівських феромагнетиків ($n = 3$), надплинності у He^4 ($n = 2$), феромагнетиків з одновісною анізотропією ($n = 1$) та полімерних ланцюгів у хорошому розчиннику ($n = 0$) [11].

Для опису реальних об'єктів, у яких відбувається магнітний ФП, недостатньо користуватись ідеалізованими базовими моделями типу (1.3). Потрібно вводити модифікації цих моделей, які будуть враховувати наявність у магнітних матеріалах структурного безладу різного типу, анізотропії, фрустрацій, скінченних розмірів тощо.

Такі модифікації порушують $O(n)$ симетрію гамільтоніану, приводять до того, що ефективні гамільтоніани систем мають декілька констант зв'язку. Відповідно у системи може бути декілька нерухомих точок, що описують різну критичну поведінку і, відповідно, різні класи універсальності. Виявляється, що при деяких значеннях вимірності параметра порядку система може переключитись від одного класу універсальності до іншого, або навіть її неперервний ФП може перетворитись у ФП першого роду. Такі значення вимірності параметру порядку називають граничними вимірностями. Як і критичні показники та відношення критичних амплітуд, граничні вимірності є універсальними величинами, тому вони є предметом інтенсивних досліджень методами РГ (див. наприклад [24, 29, 33, 72–82]). Знання точного значення граничної вимірності дає відповідь про можливість певних типів критичної поведінки у досліджуваній системі. Зокрема, гранична вимірність n_c моделі зі слабким безладом [83] ділить вимірності параметра порядку на дві групи: для $n > n_c$ критичні показники чистої моделі $O(n)$ не змінюються при

додаванні безладу, тоді як для $n < n_c$ вони набувають нових значень. Аналіз результатів РГ у високих порядках теорії збурень дають значення n_c меншим, ніж 2 [72, 73], передбачаючи новий клас універсальності тільки для випадку Ізінґа ($n = 1$). Граничне значення N_c кубічної моделі [84], отримане з даних шестипетлевого наближення РГ при $d = 3$, безумовно є менше 3 [29, 74–78], що означає недоступність стійкої нерухомої точки перетворення РГ для феромагнітних кубічних кристалів з трьома легкими осями. Це означає, що ці кристали повинні відчувати ФП першого роду. Вказані граничні значення N_c та n_c були використані для визначення умов, за яких спостерігається нетривіальна критична поведінка у більш загальній $O(nN)$ моделі [33, 79].

Критична динаміка

При невеликих відхиленнях від рівноваги динамічна поведінка фізичних систем поблизу критичної точки демонструє подібні аномалії до тих, що характеризують рівноважні критичні властивості. Це дозволило успішно розширити концепцію скейлінгу також на критичну динаміку (див. наприклад [20, 21]).

Одним з перших в критичній динаміці постає питання про вибір змінних для її адекватного опису. Повний мікроскопічний підхід, який ґрунтується на роз'язку системи рівнянь руху для усіх мікроскопічних змінних системи, виявляється непрактичним, оскільки такі рівняння є оборотними в часі, і, відповідно, не відбивають картини необоротності, яка спостерігається на макроскопічному рівні. На практиці з усієї множини мікроскопічних змінних радше виділяють величини найсуттєвіші для динамічної поведінки. Найбільш характерним явищем критичної динаміки є *критичне сповільнення*, яке полягає у тому, що, при невеликих відхиленнях від рівноваги, чим ближче температура фізичної системи знаходиться до свого критичного значення, тим довшого часу релаксації t_c потребує система, щоб повернутись до рівноважного стану. Таким чином, повільні зміни параметра порядку (для магнетиків густина локального намагнічення) з часом визначають поведінку системи на великих часах. Крім параметра порядку, повільними змінами характеризуються величини, які підпорядковуються законам збереження

властивим для розглядуваної системи. Величини, що підлягають законам збереження, будемо називати збережними, а ті, які вважатимемо не підпорядкованими законам збереження, – незбережними. Змінні для опису отримуються при усередненні відповідних мікроскопічних змінних на масштабах простору та часу, що є меншими за реальні розміри макроскопічної системи та часи спостереження, але перевищують мікроскопічні просторові та часові масштаби. В літературі таке усереднення ще має назву “укрупнення” (coarse-graining).

Позначимо $\{\psi_i\}$ множину усіх усереднених змінних, що описують властивості системи. Можна припустити, що динаміка цих змінних буде складатись з руху до рівноважного стану та впливу швидких мікроскопічних процесів. Це припущення приводить до опису динамічної поведінки системи рівнянням Ланжевена (див. наприклад [20]):

$$\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} = - \sum_j L_{ij} \frac{\delta \mathcal{H}_{eff}}{\delta \psi_i(t)} + \theta_i(t). \quad (1.5)$$

Перший доданок в правій стороні рівняння (1.5) відповідає за ефективний повільний рух до рівноважного стану. L_{ij} носить назву кінетичного коефіцієнта. Ефективний функціонал $\mathcal{H}_{eff}$ описує статичні властивості системи і в теоретико-польовому підході задається ефективним гамільтоніаном теорії поля типу (1.3). Сукупний вплив мікроскопічних флуктуацій на повільнозмінні величини ψ моделюються введенням випадкового шуму θ . Вважається, що він описується розподілом Гауса (так званий гаусовий білий шум) з середнім $\langle \theta_i \rangle = 0$ та

$$\langle \theta_i(t) \theta_j(t') \rangle = 2D_{ij} \delta(t - t'). \quad (1.6)$$

Тут $\langle .. \rangle$ означає усереднення за можливими реалізаціями шуму. Необхідною умовою того, щоб система, залишена сама на себе на великих часах $t \rightarrow \infty$, прийшла до рівноважного стану. описуваного розподілом $P[\psi] \sim e^{\mathcal{H}_{eff}}$, є зв’язок кінетичного коефіцієнта з кореляцією випадкового шуму через співвідношення Айнштайна:

$$L_{ij} = D_{ij}. \quad (1.7)$$

Функції

Основними об'єктами розгляду в динаміці є кореляційні функції та функції відгуку. Останні описують реакцію системи на слабе збурення. Якщо h_ψ – це зовнішнє поле, спряжене до повільнозмінної величини ψ , то відповідна функція відгуку запишеться як

$$G_\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \left. \frac{\delta \langle \psi(\mathbf{r}, t) \rangle}{\delta h_\psi(\mathbf{r}', t')} \right|_{h_\psi=0}. \quad (1.8)$$

Тут середнє знову означає усереднення за випадковим шумом. Функція G ще носить назву узагальненої динамічної сприйнятливості. Наприклад, якщо ψ є параметром порядку магнітної системи, а h_ψ зовнішнім магнітним полем, то G_ψ відповідає динамічній магнітній сприйнятливості. Залежні від часу кореляційні функції визначаються наступним чином:

$$C_\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}', t') \rangle. \quad (1.9)$$

Вони зв'язані з функціями відгуку функціонально-дисипативним співвідношенням. Вводячи перетворення Фур'є $F(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty \int F(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} dt d\mathbf{r}$, функціонально-дисипативне співвідношення можна записати у вигляді

$$C_\psi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi}{\omega} \text{Im} G_\psi(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.10)$$

Гіпотеза скейлінгу для динамічних критичних явищ

Характеристичний час релаксації поблизу точки ФП екстремально зростає згідно степеневому закону:

$$t_c = \xi^z, \quad (1.11)$$

з динамічним критичним показником z , де ξ – кореляційна довжина. Таким чином, при описі динамічних критичних властивостей як додаток до набору статичних показників з'являється ще один показник.

Динамічна гіпотеза скейлінгу включає поряд з кореляційною довжиною ще характеристичну частоту ω_c (величину обернену до t_c) і полягає в наступних припущеннях:

(1) характеристична частота $\omega_c(\xi, \mathbf{k})$ є однорідною функцією змінних ξ та $\mathbf{k}$:

$$\omega_c(\xi, \mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^z \hat{\omega}(\mathbf{k}\xi); \quad (1.12)$$

(2) кореляційна функція залежить від частоти ω тільки через співвідношення $\omega/\omega_c(\xi, \mathbf{k})$

$$C(\xi, \mathbf{k}, \omega) = \frac{C^{st}(\tau, \mathbf{k})}{\omega_c(\xi, \mathbf{k})} \mathcal{F}\left(\frac{\omega}{\omega_c(\xi, \mathbf{k})}, \mathbf{k}\xi\right), \quad (1.13)$$

де $\mathcal{F}$ носить назву функції форми.

Динамічні класи універсальності на відміну від статичних визначаються не тільки глобальними параметрами фізичних систем (такими, як вимірність простору, вимірність та симетрія параметра порядку тощо), а й враховують існування законів збереження, визначальних для цих систем, та характер зв'язку між збережними величинами. Різні реалізації динамічної поведінки описуються основними моделями, які маркуються латинськими літерами (А-Н) за класифікацією [85]. Деякі з них розглядаються у наступному розділі.

Моделі динамічної поведінки

Модель А. Розглянемо спочатку найпростішу модель. Прийmemo, що поблизу точки ФП усі інші фізичні величини флуктуюють набагато швидше, ніж n -компонентний параметр порядку $\vec{\phi}(\mathbf{r}, t)$ в точці d -вимірного простору $\mathbf{r}$ в час t , який вважається незбереженою величиною (надалі залежність параметра порядку та збережних величин від t , як і від $\mathbf{r}$, записуємо явно тільки в окремих випадках). Тоді ефект повільно змінних величин можна уявити як вплив стохастичних сил θ_ϕ на поведінку параметра порядку. В цьому випадку множину ψ складають лише компоненти $\vec{\phi}$. Рівняння Ланжевена (1.5) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \phi_0^i}{\partial t} = -\overset{\circ}{\Gamma} \frac{\delta \mathcal{H}_{eff}}{\delta \phi_0^i} + \theta_{\phi^i} \quad i = 1 \dots n. \quad (1.14)$$

Множина кінетичних коефіцієнтів L_{ij} в даному випадку є одиничною з елементом $\overset{\circ}{\Gamma}$. Стохастичні сили θ_ϕ представляють сукупний вплив усіх швидких процесів.

Рівняння (1.6) у цьому випадку буде мати вигляд:

$$\langle \theta_{\phi^i}(\mathbf{r}, t) \theta_{\phi^j}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\dot{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ij}. \quad (1.15)$$

Потенціал $\mathcal{H}_{eff}$ в р-ні (1.14) є ефективним гамільтоніаном типу (1.3).

Динамічний критичний показник для моделі А звичайно шукають у формі $z = 2 + c\eta$, де η – звичайний статичний критичний показник парної кореляційної функції моделі ϕ^4 . Коефіцієнт c , на сьогодні відомий в третьому порядку теорії збурень, виявився незалежним від вимірності параметра порядку n [86]. Таким чином, уся залежність z від n міститься в η . Для випадку $n = 1$ критичний показник z розраховано в четвертому порядку [87].

Модель В. Параметер порядку в деяких фізичних системах може бути збереженою величиною (просторовий інтеграл є константою руху: $d[\int d^d \mathbf{r} \phi(\mathbf{r})]/dt = 0$). У такому випадку для опису системи застосовується модель В. Структура рівнянь залишається такою ж, як в моделі А із заміною в (1.14)-(1.15) кінетичного коефіцієнта для параметра порядку з $\dot{\Gamma}$ на $-\dot{\Gamma}\nabla^2$.

Динамічний критичний показник для моделі В повністю виражається через статичний критичний показник парної кореляційної функції η : $z = 4 - \eta$ [85].

Модель С. У багатьох випадках для адекватного опису динамічної поведінки поблизу критичної точки недостатньо обмежуватись тільки параметром порядку. Потрібно враховувати величини, пов'язані з законами збереження характерними для розглядуваної фізичної системи. Найпростішим є випадок, коли взаємодія збережних величин з параметром порядку розглядається тільки в статичному потенціалі. Наприклад взаємодію скалярної збережної величини $m_0(\mathbf{r}, t)$, яку можна вважати густиною енергії, з незбережним параметром порядку можна врахувати у гамільтоніані таким чином:

$$\mathcal{H}_{eff} = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla \vec{\phi}_0)^2 + \mu_0^2 \vec{\phi}_0^2] + \frac{\tilde{u}_0}{4!} (\vec{\phi}_0^2)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 + \frac{1}{2} \gamma_0 m_0 |\vec{\phi}_0|^2 \right\}. \quad (1.16)$$

Рівняння руху для m_0 та $\vec{\phi}_0$ мають такий вигляд:

$$\frac{\partial \phi_0^i}{\partial t} = -\dot{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{H}_{eff}}{\partial \phi_0^i} + \theta_{\phi_i} \quad i = 1 \dots n, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial t} = \dot{\lambda} \nabla^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{eff}}{\partial m_0} + \theta_m, \quad (1.18)$$

де $\dot{\Gamma}$ та $\dot{\lambda}$ – кінетичні коефіцієнти для $\vec{\phi}_0$ і m_0 відповідно, $\mathcal{H}_{eff}$ задається (1.17). Стохастичні величини θ_ϕ і θ_m розподілені за гаусовим законом з нульовим середнім та задовільняють співвідношення Айнштайна:

$$\langle \theta_{\phi_i}(\mathbf{r}, t) \theta_{\phi_j}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\dot{\Gamma} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ij}, \quad (1.19)$$

$$\langle \theta_m(\mathbf{r}, t) \theta_m(\mathbf{r}', t') \rangle = -2\dot{\lambda} \nabla^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ij}. \quad (1.20)$$

При відінтегровуванні m_0 гамільтоніан (1.17) перетворюється в (1.4) із заміною $\tilde{u}_0$ на:

$$u_0 = \tilde{u}_0 - 3\gamma_0^2. \quad (1.21)$$

На сьогодні поведінка параметру порядку та збережної величини в рамках моделі С відома з результатів досліджень у двопетлевому наближенні РГ [88]. Тут велике значення має поведінка теплоємності в околі критичної точки. Для систем з $n = 1$ (критичний показник теплоємності $\alpha > 0$) характерний сильний скейлінг, при якому обидві величини φ та m релаксують з однаковим показником $z = z_m = 2 + \alpha/\nu$. У випадку $n = 2, 3$ ($\alpha < 0$) зв'язок $\vec{\varphi}_0$ та m_0 руйнується в околі критичної точки і поведінка φ є такою ж як в моделі А: $z = 2 + c\eta$, а релаксація m описується $z_m = 2$.

Нещодавно підхід НПРГ також застосовується до вивчення динаміки моделі С [89]. Отримані результати демонструють зміни границь, що розділяють різні режими в (n, d) , а також вони показують існування нової аномальної області, де параметр порядку змінюється швидше, ніж збережна величина, й існування якої було під запитанням в пертурбативній РГ.

Як і для рівноважної критичної поведінки, для динамічної критичної поведінки можна розраховувати динамічні критичні відношення амплітуд, які є універсальними величинами. Для моделі С єдині дві оцінки [90] і [91] для динамічного відношення амплітуд не узгоджуються між собою.

У моделі D параметер порядку вважається збереженою величиною. У такому випадку рівняння для моделі отримуються з рівнянь (1.17)-(1.20) при заміні кінетичного коефіцієнта для параметра порядку $\dot{\Gamma} \rightarrow -\dot{\Gamma}\nabla^2$. Критична поведінка параметра порядку в цієї моделі є такою ж, як в моделі B: $z = 4 - \eta$, у той час як критичний показник для збереженої величини $z_m = 2 + \alpha/\nu$ при $\alpha > 0$ та $z_m = 2$ для $\alpha < 0$ [92].

Інші моделі критичної динаміки. Решту абетки роботи [85] складають моделі, в яких включаються до розгляду недисипативні члени, спричинені мікроскопічними особливостями і/або міжмодовим зв'язком. В ізотропному ферромагнетикі з трикомпонентним параметром порядку враховується спінова прецесія (*модель J*). Модель E описує магнетик з незбережним двокомпонентним параметром порядку, компоненти якого можуть взаємодіяти зі збережними флуктуаціями третьої компоненти намагнічення. В ізотропному антиферромагнетикі незбережний параметер порядку представлений трикомпонентним намагніченням однієї підґратки, пов'язаним зі збережним повним намагніченням (*модель G*). Узагальнення моделей E та G до n -компонентного параметра порядку носить назву моделі SSS (Sasvári-Schwabl-Szépfolusy), початково введеної для опису динаміки структурних переходів [93]. Узгоджений опис критичної динаміки поблизу точки переходу газ-рідина або фазового розшарування в бінарних плинах включає не тільки збережний скалярний параметер порядку, але також і відповідний збережний поперечний потік густини (*модель H*). Надплинний гелій описується *моделлю F*, у якій двокомпонентний параметер порядку пов'язаний із збереженою скалярною густиною ентропії.

Критичні динамічні властивості цих моделей визначаються в асимптотиці динамічними критичними показниками, які виражаються через вимірність простору і/або статичні показники.

1.2. Структурний безлад

Критичні властивості структурно неупорядкованих магнітних матеріалів залишаються проблемою, що викликає значний інтерес у фізиці конденсованих речовин, оскільки реальні магнітні кристали зазвичай не володіють ідеальною структурою. Неоднорідність структури магнітних систем може мати різну природу, що в свою чергу приводить до різних змін в критичній поведінці. Перш за все, слід розрізняти безлад, введений в систему рівноважним чином (відпалений безлад), і заморожений [94]. У той час як статичні критичні показники відпалених систем повністю визначаються показниками чистої системи [95], критична поведінка систем із замороженими дефектами структури не є такою тривіальною (див. наприклад [70, 96]). Питання про ступінь структурної неупорядкованості теж є важливим, оскільки при сильному безладі випадковість супроводжується ефектами фрустрацій і часто приводить до відсутності далекосяжного впорядкування [97]. Випадок слабого безладу не настільки кардинальний, він може й не знищувати низькотемпературний феромагнітний основний стан [11, 96, 98]. Тут ми зосереджуємось на дослідженні слабого замороженого безладу, при цьому розглянемо декілька його типів. Врахування неупорядкованостей структури в ґраткових моделях здійснюється за допомогою введення відповідних випадкових величин у спіновий гамільтоніан (1.3). Крім того, зміни, внесені безладом, залежать від типу цього безладу, а саме чи він вводиться як розведення (випадкові вузли [11, 22] або випадкові зв'язки [26]), як випадкове поле [99], як випадкова зв'язність [100, 101] або як випадкова анізотропія [23, 34]. Дефекти можуть бути скорельовані [102, 103] або ні. Може навіть статися, що фазовий перехід другого роду, який спостерігався у чистій системі, з введенням безладу руйнується [104–106].

Спільним в аналізі різних форм замороженого безладу є використання методу реплік [107] для усереднення логарифму статистичної суми за конфігураціями замороженого безладу. Цей метод полягає у розгляді N копій-реплік системи і у теоретико-польовому описі приводить до модифікації звичайної $O(n)$ симетрії

параметра порядку. Зокрема, отримується функціональне представлення теорії ϕ^4 з $n \times N$ параметром порядку, що задається ефективними гамільтоніанами з декількома константами зв'язку з різними симетріями. Критичні характеристики вихідних систем тоді розраховуються в границі $N \rightarrow 0$.

1.2.1. Нескорельовані дефекти

Простий і природний випадок короткосяжного безладу можна змоделювати у вигляді точкових нескорельованих заморожених немагнітних дефектів (розведення) і експериментально він реалізується як безлад заміщення в одновісному [22], а також в гайзенбергівському [11, 96] магнетиках. Прикладами є сплави заміщення $\text{Mn}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$, $\text{Fe}_x\text{Zn}_{1-x}\text{F}_2$ для одновісного (ізінгівського) магнетика [108] та аморфні магнетики $\text{Fe}_{90+x}\text{Zr}_{10-x}$, $\text{Fe}_{90-y}\text{M}_y\text{Zr}_{10}$ ($\text{M} = \text{Co}, \text{Mn}, \text{Ni}$) [109–113], магнітні скла на основі перехідних металів [114–117], а також невпорядковані кристалічні матеріали $\text{Fe}_{100-x}\text{Pt}_x$ [118], $\text{Fe}_{70}\text{Ni}_{30}$ [117] і тверді розчини типу Eu-халькогенід [119–122] для магнетиків типу Гайзенберга.

Граткова спінова модель у такому випадку описується гамільтоніаном:

$$H = -J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} c_{\mathbf{r}} \vec{S}_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}'} \vec{S}_{\mathbf{r}'}, \quad (1.22)$$

де $c_{\mathbf{r}} = \{0, 1\}$ – це числа заповнення, такі що $c_{\mathbf{r}} = 1$, якщо на вузлі $\mathbf{r}$ є спин, у той час як $c_{\mathbf{r}} = 0$ відповідає немагнітному вузлу $\mathbf{r}$. Ці випадкові змінні розподілені за гаусовим законом з середнім $\langle c_{\mathbf{r}} \rangle = c$ (задає концентрацію немагнітних вузлів), та δ -скорельованою парною кореляційною функцією: $g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sim v_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Значне зацікавлення тут викликає питання: чи безлад може змінити критичні властивості систем?

Як було виявлено Гарісом [123], слабкий безлад є суттєвим для критичної поведінки систем, “чисті” (ідеалізовані, без безладу) відповідники яких характеризуються неперервними фазовими переходами, при яких теплоємність розбігається, оскільки у цьому випадку випадкові флуктуації зростають швидше з розміром си-

стеми, ніж флуктуації енергії. Цей критерій можна записати як:

$$\alpha_p = 2 - d\nu_p > 0, \quad (1.23)$$

де індекс $_p$ відноситься до критичних показників чистих систем, а після знаку рівності записано зв'язок між показниками α_p та ν_p через співвідношення гіперскейлінгу. Тоді критична поведінка визначається новою НТ РГ, а чиста НТ стає нестійкою. З іншого боку, фазові переходи першого роду в чистих системах згладжуються при додаванні слабкого безладу, а в деяких випадках перетворюються на неперервні переходи [124–126]. Ці ефекти слабкого безладу ретельно вивчалися як аналітично [83, 127–129], так і чисельно [130–132] (для огляду див. також роботу [22]).

На основі критерію Гаріса для показника теплоємності (1.23) можна оцінити маргінальне (граничне) значення n_c для спінової n -компонентної моделі магнітних систем. Таке, що при $n > n_c$ критичні показники залишаються незмінними при наявності точкових дефектів, тоді як для $n < n_c$ ці показники набувають нових значень. Поточні оцінки для n_c безпосередньо показують, що $n_c < 2$: $n_c = 1.942 \pm 0.026$ [72] та $n_c = 1.912 \pm 0.004$ [73], тобто лише чиста Ізінгівська модель ($n = 1$) відчуває вплив слабкого точкового нескорельованого безладу у критичному режимі.

Попри те, що динамічна критична поведінка структурно неупорядкованих систем набагато менш досліджена порівняно зі статичною, відомо, що у системах зі структурним безладом спостерігається багата критична динамічна поведінка [35, 133–136]. Критерій Гаріса у критичній динаміці теж має наслідок. Зокрема, у системі зі слабким замороженим розведенням та з критичною динамікою моделі А нове значення динамічного критичного показника z мають тільки магнетики із однокомпонентним параметром порядку. Тому основна увага приділялась саме так званій випадковій моделі Ізінга (для огляду доступних результатів див. [21, 137]). Двопетлеві теоретичні оцінки $z = 2.375$ [134], $z = 2.18$ [135] не підтверджуються результатами комп'ютерних симуляцій $z = 2.62 \pm 0.07$ [137], однак узгоджуються з останніми експериментальними даними $z = 2.18 \pm 0.10$ [138].

Зв'язок із збережною густиною (наприклад, густиною енергії) у релаксаційних моделях є суттєвим тільки тоді, коли теплоємність при ФП розбігається ($\alpha < 0$). Оскільки уже в розведеній системі $\alpha < 0$ для усіх значень n (див. [22, 139]), то присутність збережної густини не зачіпає динамічні критичні властивості в асимптотичному режимі [140–142]: динаміка параметра порядку є такою ж, як у відповідній моделі А, а критичний показник збережної густини $z_m = 2$. Однак, як ми відзначили спочатку, зв'язок між параметром порядку і збережною густиною значно впливає на неасимптотичну критичну поведінку.

1.2.2. Протяжні домішки

У реальних магнетиках зустрічаються неідеальності в структурі, які не можна змодельовати простими точковими нескорельованими домішками. Дійсно, магнітні кристали часто містять дефекти складнішої структури: лінійні дислокації, дисклінації, комплекси немагнітних домішок, вбудованих в матрицю оригінального кристалу [143].

Вони можуть бути впорядковані в просторі або можуть мати хаотичну орієнтацію. Майже півстоліття тому Маккой і Ву запропонували невпорядковану модель Ізінґа у двох вимірах, у якій домішки є дуже добре скорельовані в одному напрямку і нескорельовані у поперечному напрямку [144]. Своєрідне узагальнення цієї моделі на вимірність простору d було запропоновано у роботах [145, 146], де протяжні заморожені дефекти нескінченно скорельовані у вимірності ε_d і випадково розподілені у решті $d - \varepsilon_d$ вимірах. Тут значення $\varepsilon_d = 0$ відповідає точковим дефектами, а протяжні паралельні лінійні (плоскі) дефекти описуються $\varepsilon_d = 1$ (2). Можна дати інтерпретацію і для нецілих значень ε_d , припускаючи утворення таких протяжних дефектів, як кластери агрегації, і вважаючи ε_d фрактальною вимірністю цих кластерів [147, 148]. Однак, зв'язок аналітичного продовження евклідової вимірності на нецілі значення з фрактальною вимірністю не є прямим [149–151].

Таку модель теж можна представити у вигляді (1.22), однак парна кореля-

ційна функція чисел заповнення буде мати вигляд: $g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \sim v_0 \delta^{d-\varepsilon_d}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)$.

Теоретичні дослідження критичної поведінки магнетиків, що містять “протяжні” (макроскопічні) дефекти, привертають значну увагу дослідників [102, 103, 142, 145–148, 152–167], однак все ще потребують систематичного експериментального аналізу.

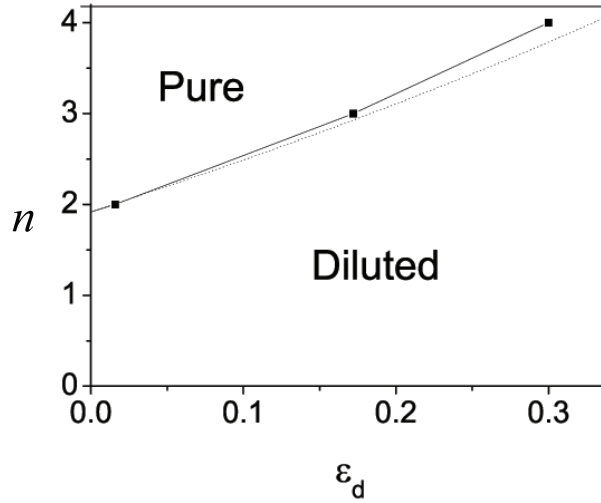


Рис. 1.1. Фазова діаграма $d = 3$ -вимірного n -векторного магнетика у присутності ε_d -вимірних домішок. Граничне значення $n_c(\varepsilon_d)$ відділяє області різних класів універсальності. Безлад є суттєвим в ε_d - n площині нижче кривої n_c . Квадрати: результати розрахунків на основі шестипетлевих розкладів РГ [10] для критичного показника кореляційної довжини; пунктирна лінія: оцінка, отримана в нашій роботі (див. Розділ 2).

Наявність протяжних домішок приводить до узагальненого критерію Гаріса [102], а саме, у цьому випадку безлад змінює критичну поведінку чистої системи, якщо $\varepsilon_d > d - 2/\nu_p$. Якщо розглядати точковий безлад з $\varepsilon_d = 0$, узагальнений критерій Гаріса перетворюється на звичайний, наведений вище. Ця нерівність для кожного значення ε_d визначає критичне значення n_c , нижче якого протяжний безлад змінює клас універсальності. Але тепер у тривимірному випадку безлад є суттєвим не тільки для ізінгівських магнетиків ($n = 1$), але і для $n > 1$, як показано на рис.1.1 (область позначена як “Diluted” на малюнку). Отже, клас магнетиків, де може спостерігатись нова критична поведінка, не обмежується одновісними системами ($n = 1$), але включає системи з легкою площиною (easy plane) ($n = 2$) і

гайзенбергівські системи ($n = 3$). Таким чином, передбачена поява нової універсальної поведінки може бути експериментально перевірена для більш широкого класу магнетиків.

Іншою цікавою особливістю систем з паралельними протяжними дефектами є те, що через просторову анізотропію вони описуються двома кореляційними довжинами, перпендикулярною $\xi_{\perp}$ і паралельною $\xi_{\parallel}$ до напрямку орієнтації протяжних домішок [145]. При наближенні до критичної температури T_c розбіжність цих довжин характеризується відповідними критичними показниками $\nu_{\perp}$, $\nu_{\parallel}$:

$$\xi_{\perp} \sim |\tau|^{-\nu_{\perp}}, \quad \xi_{\parallel} \sim |\tau|^{-\nu_{\parallel}}. \quad (1.24)$$

Анізотропний скейлінг також характерний для спінової парної кореляційної функції при T_c і визначається показниками $\eta_{\perp}$ і $\eta_{\parallel}$. У той час як магнітна сприйнятливість є ізотропною величиною, оскільки всі компоненти параметра порядку взаємодіють з дефектами у той самий спосіб. Однак динамічна критична поведінка модифікується: часи релаксації в напрямках перпендикулярному і паралельному до протяжних домішок, $t_{c,\perp}$ і $t_{c,\parallel}$, мають різну поведінку :

$$t_{c,\perp} \sim \xi_{\perp}^{z_{\perp}}, \quad t_{c,\parallel} \sim \xi_{\parallel}^{z_{\parallel}}, \quad (1.25)$$

з динамічними показниками $z_{\perp}$ і $z_{\parallel}$.

Таким чином, магнетики з замороженими протяжними дефектами паралельної орієнтації складають великий клас систем з набором незвичайних явищ, вартих аналізу. Їх асимптотична критична поведінка була об'єктом досліджень за допомогою теоретико-польової ренорм-групи [102, 145, 145, 152, 153, 156, 157]. Зокрема, був запропонований подвійний розклад за двома змінними $\varepsilon = 4 - d$, ε_d і були розраховані ренорм-групові функції до порядку ε , ε_d [145], якісно підтверджуючи перехід до нового класу універсальності. Ці розрахунки були продовжені до другого порядку в роботах [102, 142]. Однак такі розбіжні розклади не дають достовірної чисельної оцінки для критичних показників, тобто бажаної мети як для експериментального, так і чисельного аналізу. Кількісна оцінка для показників, що описують *статичну* критичну поведінку тривимірних магнетиків з па-

паралельними протяжними домішками, була отримана порівняно недавно [156, 157] із застосуванням спеціальної техніки пересумовування двопетлевих функцій РГ з робіт [102, 142]. Однак не існує оцінок такого ж рівня точності для динамічних показників, що описують критичне сповільнення в таких магнетиках. Теоретичне дослідження критичної динаміки систем з паралельними протяжними дефектами було проведено в однопетлевому наближенні [153] для простих моделей з незбережним параметром порядку (модель А) і збережним параметром порядку (модель В). Тоді аналіз РГ був розширений на двопетлеве наближення [142]. Однак властивості збіжності отриманих рядів не дозволили отримати надійних кількісних оцінок. Застосування до асимптотичних рядів РГ техніки пересумовування [142, 156, 157] приводить до достовірних оцінок критичних показників цієї моделі. У рамках підходу РГ вивчався вплив кубічної анізотропії параметра порядку [147, 148, 154, 155] і ефект порушення реплічної симетрії [168, 169] на критичну поведінку цієї моделі. Недавно короткочасова критична динаміка моделі А розглядалась у роботі [158]. Для повноти згадаємо ще дослідження моделей зі складнішими формами безладу, що включали протяжні домішки як частковий випадок [170–173].

Можна також згадати дослідження у рамках наближення середнього поля [174], а також симуляції МК, які стосуються моделей, що мають відношення до моделі Дороговцева з ізінгівськими спінами і протяжними дефектами з $\varepsilon_d = 2$ [175, 176]. В останніх дослідженнях безлад моделювався випадковими зв'язками між площинами спінів. Наскільки нам відомо, модель з паралельними випадковими протяжними дефектами у вимірності $d = 3$ ще не досліджувалась, хоча існуючі аналітичні передбачення є достатньо цікавими, щоб спробувати їх перевірити методом МК.

1.2.3. Далекосяжно скорельований безлад

Альтернативним способом враховувати скорельований безлад структури є модель Вайнріба-Гальперіна [103], де розглядається далекосяжно скорельований

безлад, кореляції якого спадають з відстанню за степеневим законом. Парну кореляційну функцію тоді можна записати як $g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \sim v_0 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + w_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-a}$. Критична поведінка цієї моделі вивчалась у двопетлевому порядку з використанням подвійного $\varepsilon = 4 - d$, $\delta = 4 - a$ розкладу [162, 163], а також розрахунків безпосередньо у $d = 3$ [159, 161]. Ці дослідження показують, що ФП належить до нового класу універсальності, що відрізняється від класу універсальності системи з нескорельованим безладом, якщо показник кореляційної довжини чистої (нерозведеної) моделі задовольняє $\nu_p < 2/a$. Ця умова справедлива при $a < d$, а для $a > d$ відновлюється звичайний критерій Гаріса [123]. Хоча результати робіт [103, 159, 161–163] якісно узгоджуються і передбачають виникнення нового типу критичної поведінки, який задається так званою НТ далекосяжного безладу, вони відрізняються на кількісному рівні. Зокрема, результати роботи [103, 162, 163] свідчать, що в новому класі універсальності показник кореляційної довжини становить $\nu = 2/a$ до другого порядку за $\varepsilon = 4 - d$ і $\delta = 4 - a$. Існують аргументи, що таке значення показника ν справедливе для всіх порядків [103, 177]. Однак розрахунки, виконані безпосередньо у трьох вимірах [159, 161], дають нетривіальні значення показника, які відрізняються від $\nu = 2/a$ вже у двопетлевому наближенні.

Розходження в принципі можна пояснити погіршенням $\varepsilon=4-d$ -розкладу при великих ε . Особливо це має значення для двовимірних систем, для яких $\varepsilon=2$. Для перевірки цього припущення потрібно мати контрольовані методи, які не використовують ε -розклад з аналітичним продовженням для великих ε , особливо до $\varepsilon=2$.

Аналітичні передбачення для скорельованого безладу перевірялись чисельними розрахунками [165, 166, 178–180]. Вони також дають неузгоджені результати. Так, МК розрахунки [165, 180] підтримують аналітичний результат, що $\nu = 2/a$, тоді як значення критичних показників, отримані у чисельних дослідженнях [166, 178, 179], відхиляються від цього передбачення, що породжує питання про залежність критичних показників від особливостей розподілу безладу.

1.2.4. Випадкова анізотропія

Тут ми розглянемо критичні властивості систем зі структурним безладом іншого типу, а саме магнетиків з випадковою анізотропією. Це широкий клас магнітних систем [79, 181]. Зокрема, такий тип структурного безладу характерний для аморфних магнетиків, що містять рідкісноземельні елементи. Крім фундаментального зацікавлення, ці магнетики важливі для сучасних технологій. Так, нещодавно розроблені на основі рідкісноземельних матеріалів магнітні скла зі значним магнітокалоричним ефектом вважаються хорошими кандидатами для магнітних холодоагентів [182–184].

Модель з випадковою анізотропією (random anisotropy model – RAM), що тепер використовується для опису згаданих магнітних систем, була введена у ранніх 70-х роках минулого століття Гарісом, Плішке і Цукерманом [185]. Вона описує n -компонентні спіни на d -вимірній ґратці, кожен спін якої підпорядковується локальній анізотропії випадкової орієнтації. Гамільтоніан моделі RAM записується:

$$H = - \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} J \vec{S}_{\mathbf{r}} \cdot \vec{S}_{\mathbf{r}'} - D \sum_{\mathbf{r}} (\hat{x}_{\mathbf{r}} \cdot \vec{S}_{\mathbf{r}})^2, \quad (1.26)$$

де $D > 0$ – константа анізотропії, $\hat{x}$ є випадковим одиничним вектором, що вказує напрям локальної осі анізотропії. Ступінь безладу контролюється відношенням D/J . Очевидно, що випадковість у (1.26) має значення тільки для $n > 1$.

Експериментальні дані для систем з випадковою анізотропією оглядалися у роботах [23, 186]. RAM також була об’єктом теоретичних і чисельних досліджень, огляд яких можна знайти у роботах [34, 187]. Незважаючи на дослідження питання про природу низькотемпературної фази магнетиків з випадковою анізотропією залишаються найбільш суперечливою проблемою. Існує дискусія, чи низькотемпературна фаза є далекосяжно впорядкованою феромагнітною фазою чи це фаза спінового скла. Локальна анізотропія перешкоджає повністю впорядкованому феромагнітному стану, де усі спіни вказують в одному напрямку. Тому був запропонований термін “асперомагнітний” для магнітовпорядкованого низькотемпературного стану з ненульовим намагніченням, і, відповідно, термін “сперо-

магнітний” – для стану спінового скла з нульовим намагніченням [188]. У рамках феноменологічної теорії використовується також термін “скорельоване спінове скло” [189]. Ще один можливий кандидат на низькотемпературну фазу в RAM - це квазі-далекосяжне впорядкування. Таке впорядкування відбувається при низьких температурах, під час відомого ФП Березінського-Костерліца-Таулеса [190–192], і кореляційні функції у ньому характеризуються степеневим загасанням з відстанню, а намагнічення дорівнює нулю.

Іншим цікавим питанням є вплив локальних розподілів осей на критичну поведінку систем з випадковою анізотропією. Далі ми розглянемо результати попередніх досліджень, що стосуються цих двох згаданих питань, залишаючи поза рамками нашого інтересу кілька цікавих проблем (зокрема, ефект кореляцій між локальними осями анізотропії на великій відстані [193], наявність поверхні [194] та ін.), тому що вони не стосуються наших досліджень.

Теоретичні результати

Перші теоретичні дослідження RAM були проведені у рамках теорії середнього поля. Результати передбачали феромагнетизм [185, 195, 196], однак можливість фази спінового скла [197] також не виключалась. У рамках середнього поля було точно розраховано границю взаємодії безмежної досяжності для RAM [198], розв’язок вказує на ФП другого роду у феромагнітне впорядкування. Такий ФП також підтверджувався $1/d$ -розкладом [199], а також у середньо-польовою РГ для випадку $n = 2$ [200]. Однак теорія локального середнього поля [201] передбачила порушення далекосяжного феромагнітного порядку.

Слідуючи аргументам Імрі та Ма [104], сформульованих спочатку для моделі з випадковими полями, було показано, що тривимірний магнетик з випадковою анізотропією повинен розбиватися на магнітні домени розміру $L \sim (J/D)^2$ [202], отже навіть для слабкої анізотропії феромагнетизму не очікується.

Врахування флуктуацій у теоретико-польовому підході РГ приводить до відсутності ФП. У перших розрахунках РГ для RAM з *ізотропним розподілом* $\hat{x}_{\mathbf{r}}$ [203] не було знайдено стійкої досяжної нерухомої точки перетворень РГ у

першому порядку ε -розкладу. Більше того, було показано, що ефективний гамільтоніан для такого розподілу при великих D зводиться до аналогічного ефективного гамільтоніану ізінгівського спінового скла з випадковими зв'язками [204], демонструючи можливість фази відповідного типу.

Щоб продемонструвати відсутність феромагнітного порядку для RAM у вимірності простору $d < 4$ було застосовано декілька різних аргументів [105]. Хоча серед цих аргументів один для граничного $n \rightarrow \infty$ [105] і виявився помилковим [205], відсутність феромагнетизму для RAM з *ізотропним розподілом* осі анізотропії при $d < 4$ додатково підтримано доведенням типу Мерміна-Вагнера [206], використовуючи метод реплік [107] у випадку $n = 2$. Дослідження пертурбативної РГ Мігдала-Каданова [105, 205] передбачає вимірну редукцію для RAM, тобто критична поведінка цієї випадкової системи при $d > 4$ є такою ж, як і для відповідної чистої системи з вимірністю $d - 2$.

Результат однопетлевого порядку [203] про відсутність ФП у феромагнітний стан підтверджено дво- [34, 79, 207, 208] і п'ятипетлевими [209] розрахунками в рамках теоретико-польової РГ доповненої методами пересумовування.

Границя безмежно сильної анізотропії для RAM досліджувалась за допомогою високотемпературних розкладів. Результати Паде-аналізу [210] вказували на типову поведінку спінового скла при вимірності простору $d = 3$, тоді як у роботах [211, 212] було зроблено висновок, що нижня критична вимірність для RAM з $n = 2$ дорівнює $d_L = 3$ на основі спостереження нестепеневої розбіжності сприйнятливості тривимірної RAM з $n = 2$ і відсутності розбіжності у випадку $n = 3$.

Аналіз графічних рядів для RAM з безмежно сильною випадковою анізотропією на дереві Кейлі передбачив феромагнітне впорядкування, що відбувається для кількості найближчих сусідів $\tilde{z} > n$ і впорядкування спінового скла при $\tilde{z} < n$. Результати, отримані в тому ж дослідженні [213] за допомогою РГ Мігдала-Каданова, підтверджують таку поведінку, даючи при $d = 3$ феромагнітний порядок для малих n , а для великих n фазу спінового скла у тому ж класі універсальності, що й ізінгівське спінове скло з випадково розподіленими зв'язка-

ми.

Дослідження RAM в границі сферичної моделі $n \rightarrow \infty$ були зосереджені на питанні про можливість існування фази спінового скла. Ця границя досліджувалась спочатку $1/n$ -розкладом [214–217]. Застосовуючи метод реплік, було виявлено існування фази спінового скла нижче $d = 4$ для довільних D [214, 218]. Але розв’язок типу спінового скла пізніше виявився нестійким [215]. Стійкий, але реплічно-несиметричний розв’язок був отриманий для фази спінового скла при $d < 4$ [216]. Однак вивчення динаміки параметра порядку спінового скла, без методу реплік, показує нестійкість цієї фази [217]. Ці результати знайшли підтвердження в середньо-польовому аналізі границі $n \rightarrow \infty$ [219], де фаза спінового скла з’являється лише як особливість цієї границі, і відсутня для скінченних n . У сферичній границі феромагнітне впорядкування було отримане для $d > 2$ і для D менше деякого критичного значення D_c , тоді як для D більших D_c була отримана фаза спінового скла для довільного d ($D_c = 0$ для $d \leq 2$) [220].

Рівняння стану RAM, отримане за допомогою теорії збурень, показує нульову намагніченість і нескінченну магнітну сприйнятливість в низькотемпературній фазі для довільного n [221]. Двоспінові кореляції цієї фази загасають за степеневим законом з відстанню. Як вже вище згадувалось, фаза з такою поведінкою називається квазі-далекосяжно впорядкованою. Оцінку сприйнятливості низькотемпературної фази було змінено за допомогою скейлінгових аргументів [222] і встановлено що $\chi \sim (D/J)^{-4}$ при $d = 3$. Аналогічна залежність сприйнятливості отримувалась й в інших підходах [189, 214]. Степеневе загасання спінових кореляцій у низькотемпературній фазі отримано також для гармонічної системи зі випадковим полем [223], що є однією з реалізацій RAM при $n = 2$. Однак це не узгоджується з дослідженням моделі з p -виродженими випадковими полями (при $n = 2, p = 2$ співпадає з RAM з $n = 2$), для якої була отримана фаза спінового скла [224].

У рамках підходу функціональної РГ у першому порядку за $\varepsilon = 4 - d$ для RAM $n = 2$ знайдено квазі-далекосяжне впорядкування [225–227]. Дослідження за допомогою функціональної РГ випадкових анізотропій вищого порядку показало,

що вимірна редукція руйнується [228]. Це підтверджується в межах двопетлевого наближення функціональної РГ [229, 230]. Також було показано, що для RAM існує квазі-далекосяжне впорядкування для $d_{LC}^* < d < 4$ і $n < n^* = 9.4412$. Оцінки на основі розкладів за ε та $n - n^*$ передбачають $d_{LC}^* > 3$, однак автори вказали, що до екстраполяції результатів на великі значення ε і $n - n^*$ потрібно ставитись з обережністю. Умови реалізації вимірної редукції розглядались з допомогою $1/n$ -розкладів у рамках функціональної РГ [231–233]. У дослідженнях [234, 235] вказувалось на некоректність попередніх досліджень з використанням $1/n$ -розкладів, оскільки вони не враховують границю великих n для легких осей випадкової анізотропії. Однак у даних роботах досліджувався тільки випадок $D < 0$ (що відповідає легким площинам анізотропії).

Феноменологічна теорія [189], яка приймає кореляції між випадковим чином орієнтованими осями анізотропії і оснований на неперервній версії гамільтону (1.26), доволі добре інтерпретує залежності експериментально спостережуваного намагнічення у впорядкованій фазі від прикладеного зовнішнього магнітного поля. У цьому підході аналізувались спінові кореляційні функції при різних режимах прикладених полів [189]. Зокрема, було встановлено, що кореляційна довжина для малих та нульових значень поля має форму $\xi \sim R_a (\frac{J}{R_a D})^2$, де R_a - радіус кореляції для випадкових осей. У рамках такого підходу отриману фазу назвали скорельованим спіновим склом.

Усі теоретичні підходи, узагальнені вище, стосувались RAM з *ізотропним розподілом* випадкових осей. Випадок *анізотропного* розподілу вперше досліджено в рамках РГ [203], де напрямки осей випадкової анізотропії обмежуються напрямками осей по гранях гіперкуба (*кубічний розподіл*). Не було знайдено доступної стійкої нерухомої точки точки, що мала б відповідати ФП другого роду. Хоча можливість ФП другого роду у феромагнітну фазу з критичними показниками моделі Ізінґа з випадковими вузлами вказувалась у роботі [236], де розглянуто більш загальну модель. Така поведінка спостерігалася і для іншої загальнішої моделі [237], що включала RAM з *кубічним розподілом* випадкових осей як частковий випадок. Згодом цей результат підтверджено у рамках двопетлевих

розрахунків РГ з пересумовуванням [34, 79, 208, 238] безпосередньо для RAM з *кубічним розподілом* і отримано її критичну поведінку, що належить до класу універсальності моделі Ізінга з випадковими вузлами. Пізніше результат також підтверджено на основі п'ятипетлевої масивної РГ [209]. Нещодавно дослідження випадків більш загальних розподілів [236, 237], які включають *ізотропний* та *кубічний* розподіли як окремі випадки за допомогою теоретико-польової масивної РГ, підкріпленою пресумовуванням, передбачило неперервний ФП нового класу універсальності [239].

RAM в границі безмежно сильної анізотропії із змішаним ізотропним та кубічним розподілом також досліджувалась у теорії середнього поля [240–242]. Встановлено, що наявність випадкової кубічної анізотропії стабілізує феромагнітну фазу [240]. Аналіз границі $n \rightarrow \infty$ зі скінченим n/N_s , де N_s – кількість спінів [242], дає фазові діаграми з феромагнітною фазою, фазою спінового скла, а також зі змішаною фазою, де обидва параметри порядку феромагнітного та спінового скла мають не нульові значення.

З аналізу доступних теоретичних результатів можна зробити висновок, що хоча для ізотропного розподілу очікується відсутність феромагнітного впорядкування, це впорядкування є можливим при анізотропному розподілі локальної осі анізотропії.

Чисельні дослідження

Більшість чисельних експериментів з RAM розглядають випадок $D/J > 1$ або навіть безмежно сильну анізотропію ($D/J \rightarrow \infty$). Перші дослідження подають непереконливі результати: як стійкість [243, 244], так і нестійкість [245, 246] феромагнітного впорядкування по відношенню до фази спінового скла. Однак дані пізніших досліджень вказували на відсутність феромагнетизму.

Границя безмежно сильної анізотропії для RAM з $n = 3$ дає втрату далекого порядку в основному стані [247]. У цьому випадку критичні показники при переході до низькотемпературної фази отримані зі значеннями, подібними до значень критичних показників тривимірного ізінгівського спінового скла з коро-

ткою взаємодією [248]. Результати розрахунків МК підтвердили відсутність далекосяжного впорядкування [249]. Нещодавнє дослідження RAM з $n = 3$ переконливо показує, що у безмежно сильної анізотропії модель належить до класу універсальності короткосяжного ізінгівського спінового скла з випадковими зв'язками [250].

З іншого боку результати дослідження МК цієї ж границі для RAM з $n=2$ показують низькотемпературну фазу з надзвичайно великою сприйнятливістю, степеневим загасанням кореляцій та нульовим намагніченням [249], що відповідає теоретично передбаченому квазі-далекосяжному впорядкуванню для слабкої анізотропії [221]. Це підтверджується результатом роботи [251], де знайдено різкий ФП у низькотемпературну фазу зі степеневим загасанням парної кореляційної функції і слабо детектованим намагніченням. Цю границю також досліджували на основі моделі з p -виродженими випадковими полями [252], де для випадку, що відповідає RAM з $n = 2$, знайдено слабкий феромагнітний порядок зі степеневими залежними кореляціями.

Дослідження зі скінченим співвідношенням D/J стосувались, зокрема, моделі з p -виродженими випадковими полями, і було отримано перехід у фазу спінового скла при $J = D$ [253]. Хоча в рамках іншого дослідження МК звичайної моделі RAM з $n = 2$ і таким самим відношенням між J і D було отримано критичну поведінку зі значеннями критичних показників близьких до значень показників XY-моделі, за винятком критичного показника теплоємності [254].

Розрахунки МК для RAM з $n = 3$, кількома значеннями D/J та при $D/J \rightarrow \infty$ [255] дають фазову діаграму в площині $(D/J, T/J)$ з областями існування магнітної фази і фази спінового скла із загальним висновком, що RAM з $n = 3$ при малих D/J має квазі-далекосяжне впорядкування низькотемпературної фази, що характеризується степеневим загасанням спінових кореляцій.

Однак дослідження моделі з p -виродженими випадковими полями при кількох значеннях D/J передбачають феромагнітне впорядкування низькотемпературної фази при скінчених значеннях D/J [256].

Розглянуті вище результати стосуються випадків неперервної симетрії па-

раметра порядку. Нижче ми розглянемо випадки, коли орієнтації спінів, а також осей локальної анізотропії обмежені лише кількома напрямками в $O(n)$ просторі. Зокрема, для випадку $n = 2$, де осі орієнтовані вздовж граней (гіпер)куба, отримано звичайний ФП другого роду у феромагнітну фазу з класу універсальності XY-моделі для слабкої випадкової анізотропії [257] і феромагнітні домени для сильної випадкової анізотропії. При $n = 3$ було виявлено ті ж фази, однак фазові переходи до них були першого роду [257].

Можливість існування квазі-далекосяжної упорядкованої фази була спостережена при $n = 3$, де слабка анізотропія моделювалась наявністю локальної анізотропії з $D/J = \infty$ для частини q вузлів і $D/J = 0$ для решти $1 - q$ вузлів [258], при цьому напрямки спінів і осей локальної анізотропії обирались з 12 напрямків простору параметра порядку. Результати показують, що, крім парамагнітного та феромагнітного впорядкування, існує квазі-далекосяжна фаза як проміжна для деяких значень q .

Адаптація RAM з двокомпонетними спінами використовувалась для опису шестистанової годинникової моделі, де спінові напрямки належали до групи Z_6 , орієнтації осей локальної анізотропії належали до групи Z_3 . У низькотемпературній фазі отримано степеневе загасання двоспінових кореляцій та відсутність далекосяжного впорядкування [259].

Розглянуті числові дослідження загалом узгоджуються з теоретичними прогнозами для RAM про відсутність феромагнітного впорядкування для RAM з ізотропним розподілом, однак вказують на можливість феромагнітного впорядкування для випадків, коли орієнтація спінів та/або локальних осей анізотропії обмежена лише кількома напрямками.

Виняток становить одне чисельне дослідження, де для RAM з гайзенберґівськими спінами ($n = 3$) [260] та $D/J = 4$ для з *ізотропним* і *кубічним* розподілами отримано неперервний ФП у феромагнітний стан (помилково визначений як квазі-далекосяжний порядок) з таким самим критичним показником кореляційної довжини для обох розподілів.

Динаміка

Враховуючи, що дослідження статичної критичності магнетиків з випадковою анізотропією далеко не такі ж інтенсивні, як для розведених магнетиків [11, 22], ще менше відомо про їх динамічну критичну поведінку. Досліджувались тільки окремі динамічні аспекти фазових переходів в RAM [106, 141, 261–265]. Зокрема, критична динаміка моделі А для RAM з ізотропним розподілом, обговорювалась у роботі [141], де були розраховані динамічні критичні показники. Розраховані у нестійких точках значення цих критичних показників можна вважати радше ефективними. У цей же час дослідження критичної динаміки для випадку кубічного розподілу, при якому існує ФП другого роду, проведено не було.

Оскільки у цьому випадку ФП опиняється у класі універсальності моделі Ізінґа з випадковими точковим безладом [207, 208] для *будь-якого* $n > 1$, то це означає, що теплоємність таких систем не розбігається при T_c [11, 22]. Загальні аргументи стверджують [140, 142], що для таких систем релаксаційна критична динаміка незбереженого параметра порядку, пов'язаного зі збереженою густиною (динаміка моделі С), вироджується до суто релаксаційної моделі без будь-якого зв'язку із збережними величинами (модель А). Тим не менш, це твердження справедливе тільки у асимптотичній області (тобто при T_c , яка насправді практично не досягається в експериментах чи симуляціях).

Однак загальний вплив двох різних факторів – випадковості структури та зв'язку динамічних мод – може призвести до насиченої ефективної критичної поведінки, що варто дослідити.

1.2.5. Безлад у двовимірних системах

Двовимірні системи представляють особливий інтерес при вивченні фазових переходів у конденсованих системах. Цей інтерес постійно зростає через прогрес у експериментальних методах створення та вивчення низьковимірних матеріалів, таких як графен [266], двовимірні кристали [267], і ультратонкі фероманітні плівки [268]. З іншого боку, фізика двовимірних систем також відрізняє-

ться. Хоча двовимірна конформна інваріантність значно сильніше обмежує можливі сценарії скейлінгової поведінки, ніж у трьох вимірах (принаймні за відсутності безладу) [269], тут велику роль відіграють топологічні дефекти. Зокрема, відомо, що у двовимірній системі з $O(2)$ -симетричним параметром порядку відбувається квазі-далекосяжне впорядкування через перехід Костерліца-Таулеса-Березінського [190–192]. Крім того, деякі двовимірні моделі дозволяють точний розв’язок. З них найбільше та історичне значення має двовимірна модель Ізінга, для якої отримано $\alpha = 0$ [270]. Ця модель використовується не тільки для опису магнітних систем, а також застосовна в дуже широкому фізичному контексті, наприклад, служила при описі розшарування у ліпідних мембранах [12, 13].

Цікавим є вплив безладу на двовимірну модель Ізінга. Оскільки тут $\alpha=0$, то згідно критерію Гаріса нескорельований безлад тільки маргінально (не)суттєвий (у сенсі РГ) для цієї моделі. Ця задача, окрім чисто академічного зацікавлення, має потенційне застосування в різноманітних контекстах, зокрема, було спостережено, що формування доменів у мембрані з вмероженими білковими перешкодами можна описати двовимірною моделлю Ізінга з замороженим нескорельованим безладом [271].

Розв’язок чистої двовимірної моделі Ізінга можна сформулювати у термінах вільних двовимірних ферміонів Майорани, маса яких пропорційна приведеній температурі [272]. Наявність безладу породжує чотириферміонну взаємодію з константою зв’язку, пропорційною концентрації домішок [224, 273, 274]. Отримана модель інтенсивно вивчалась методами РГ. Ці дослідження не тільки підтвердили маргінальну (не)суттєвість безладу, але також виявили наявність логарифмічних поправок до критичної поведінки чистої моделі. Зокрема, було встановлено, що сингулярність теплоємності змінюється з $C \sim \ln(1/\tau)$ на $C \sim \ln \ln(1/\tau)$, якщо температура системи є дуже близькою до критичної температури T_c [224, 273]. Розрахунок кореляційної функції – це набагато складніше завдання, оскільки у ферміонному описі оператор спіна є нелокальним об’єктом, тому навіть для чистого випадку потрібно певних зусиль, щоб відновити добре відомий результат $\eta_p = \frac{1}{4}$. Спочатку наводились аргументи [224, 274], що безлад змінює критичний показник

до $\eta = 0$, але пізніше було знайдено, що поведінка K -го моменту спін-спінової кореляційної функції $G(r)$, усередненої за конфігураціями безладу [275, 276], є такою:

$$\overline{G(r)^K} \sim \frac{(\ln r)^{K(K-1)/8}}{r^{K/4}}, \quad (1.27)$$

тоді як у чистій моделі $G(r)^K \sim r^{-K/4}$. Чисельні розрахунки для неупорядкованої двовимірної моделі Ізінга [277–279] підтвердили, що нескорельований безлад змінює логарифмічну розбіжність на подвійну логарифмічну поведінку, а інші степеневі закони скейлінгу отримують універсальні логарифмічні поправки.

З двовимірною моделлю Ізінга зв'язані дві інші двовимірні моделі, такі як модель Бакстера (симетрична 8-вершинна модель) [280] та модель Ашкіна-Телера [281], яка була введена для опису кооперативних явищ в четвірних сплавах [282]. Обидві згадані моделі пов'язані між собою вздовж лінії самодуальності, і їх обидві можна описати у термінах двох моделей Ізінга, зв'язаних густинами енергій (тобто за допомогою чотири-спінової взаємодії):

$$H = - \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [J (\sigma_{\mathbf{r}}^1 \sigma_{\mathbf{r}}^1 + \sigma_{\mathbf{r}}^2 \sigma_{\mathbf{r}'}^2) + J_4 \sigma_{\mathbf{r}}^1 \sigma_{\mathbf{r}'}^1 \sigma_{\mathbf{r}}^2 \sigma_{\mathbf{r}'}^2]. \quad (1.28)$$

Основна особливість моделі (1.28) – це неперервний ФП з так званою “слабкою універсальністю” [283] : на противагу звичайній критичній універсальності, критичні показники моделі (1.28) залежать неперервним чином від константи зв'язку J_4 . Зокрема, показник кореляційної довжини є таким [280]:

$$\frac{1}{\nu_p} = \frac{4}{\pi} \arctan \left(e^{2J_4/T_c} \right), \quad (1.29)$$

де критична температура чистої системи T_c задається як $2J/T_c = \ln(1+\sqrt{2})$. Показник теплоємності поводить ся як $\alpha_p \sim J_4$, і, таким чином, змінює знак з J_4 . Проте, виражаючи сингулярну поведінку термодинамічних величин біля критичної точки у термінах оберненої кореляційної довжини, а не приведеної температури, виявилось, що критичні показники, перераховані таким чином, є універсальними [284].

Узагальнюючи модель (1.28) на випадок довільної кількості зв'язаних моделей Ізінга N_i , можна отримати так звану модель Ашкіна-Телера з N_i кольора-

ми [285]:

$$H = - \sum_{\langle r, r' \rangle} \left(J \sum_{a=1}^{N_i} \sigma_{\mathbf{r}}^a \sigma_{\mathbf{r}'}^a + J_4 \sum_{a < b}^{N_i} \sigma_{\mathbf{r}}^a \sigma_{\mathbf{r}'}^a \sigma_{\mathbf{r}}^b \sigma_{\mathbf{r}'}^b \right). \quad (1.30)$$

Тут N_i моделей Ізінга зв'язані попарно через взаємодію J_4 . Вона зводиться до звичайної моделі Ашкіна-Телера (Бакстера) для $N_i = 2$. Для $N_i > 2$, властивості ФП моделі (1.30) кардинально залежать від знаку J_4 : у системі відбувається неперервний ФП для $J_4 < 0$, у той час як $J_4 > 0$, ФП є першого порядку [285].

Вплив нескорельованого безладу на неперервний ФП зі “слабкою універсальністю”, який демонструє модель (1.28), було розглянуто у роботах [286–290]. Оскільки показник теплоємності α_p чистої моделі Бакстера додатний для $J_4 > 0$, можна очікувати, що критична поведінка модифікується нескорельованим безладом для $J_4 > 0$. Картина РГ, отримана з використанням представлення моделі за допомогою ферміонних полів, показує [286, 290], що при $J_4 > 0$ – “слабко універсальна” критична поведінка моделі Бакстера змінюється і стає такою ж, як і у двовимірній неупорядкованій моделі Ізінга. Наприклад, теплоємність виявляє подвійну логарифмічну сингулярність. Результати чисельного моделювання [287–289] показують, що безлад модифікує критичну поведінку моделі, але вони не достатні для чіткого кількісного висновку. Через великі флуктуації, викликані безладом, чисельне моделювання випадкової моделі Ашкіна-Телера потребує додаткових зусиль, а результат радше свідчить про логарифмічну, ніж подвійну логарифмічну поведінку теплоємності поблизу ФП [288, 289].

Що стосується двовимірної N_i -кольорової моделі Ашкіна-Телера (1.30) з $N_i > 2$, то врахування слабкого короткосяжно скорельованого або нескорельованого замороженого безладу в цьому випадку приводить до виникнення критичної поведінки [124–126, 291–293]. Дійсно, у чистій моделі з $J_4 > 0$ відбувається флуктуаційно керований ФП першого роду, але він згладжується навіть слабким нескорельованим безладом. Двовимірну модель Ашкіна-Телера з трьома кольорами вивчалась за допомогою МК симуляцій [294, 295]. Тоді як перша робота [294] виключає можливість неперервного ФП з універсальною скейлінговою поведінкою, друга недавня робота [295] демонструє, що ФП першого порядку згладжу-

ється безладом і перетворюється на неперервний. Виглядає, що отриманий ФП перебуває у класі універсальності двовимірної неперервної моделі Ізінга. Це узгоджується з передбаченнями пертурбативної РГ [124–126, 291–293].

1.3. Магнетики з антиферромагнітною взаємодією: мультикритичність та неколінеарне впорядкування

У цьому підрозділі ми розглянемо системи зі складною симетрією, для яких ефективним виявляється аналіз граничних вимірностей. Нагадаємо, що це значення вимірностей параметра порядку, при яких система, що відчуває ФП другого роду або втрачає свою критичну поведінку (відсутній неперервний ФП), або переходить до іншого класу універсальності з новим набором критичних показників.

Однією з таких систем є анізотропний антиферромагнетик у зовнішньому полі, прикладеному вздовж осі анізотропії [296]. Наявність анізотропії і зовнішнього поля приводить до того, що система описується двома зв'язаними параметрами порядку, в ній може реалізуватись мультикритична поведінка, коли одночасно співіснують декілька впорядкованих фаз.

Іншою системою є магнетики з неколінеарним впорядкуванням, яке виникає через фрустрації, пов'язані з антиферромагнітною взаємодією і геометрією ґратки, або через конкуруючу взаємодію між найближчими сусідами [24]. У такому випадку впорядкування описується матричним параметром порядку.

1.3.1. Мультикритичність моделей з симетрією $O(n) \oplus O(m)$

В анізотропних ферромагнетиках гайзенберґівського типу (тобто з трикомпонентним параметром порядку $n = 3$) [296] прикладене зовнішнє магнітне поле, паралельне осі анізотропії, приводить до розщеплення простору параметра порядку (з симетрією $O(3)$) на два підпростори: на підпростір компонент магнітних моментів підґраток вздовж поля ($n_{\parallel} = 1$) та на підпростір компоненти магнітних моментів підґраток у перпендикулярних напрямках ($n_{\perp} = 2$). У такій ситуації

система буде описуватись двома зв'язаними параметрами порядку та симетрією $O(n_{\perp}) \oplus O(n_{\parallel})$ [297]. З аналізу методами середнього поля відомо [298, 299], що модель $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ має фазову діаграму з мультикритичною точкою, яка є або бікритичною, або тетракритичною. Типові фазові діаграми показані на Рис. 1.2. При бікритичній точці співіснують три фази: впорядкована антиферромагнітна з $O(n_{\parallel})$ симетрією, впорядкована спін-флоп фаза з $O(n_{\perp})$ симетрією та неупорядкована фаза. У цьому випадку лінії переходів другого роду, що відокремлюють парамагнітну фазу від фаз $O(n_{\parallel})$ і $O(n_{\perp})$, зустрічаються у бікритичній точці з лінією переходів першого роду між $O(n_{\parallel})$ і $O(n_{\perp})$ фазами (див. Рис. 1.2 а). У той же час мультикритична точка є тетракритичною точкою, якщо з'являється проміжна (біконічна) фаза, в якій співіснує впорядкування як $O(n_{\parallel})$, так і $O(n_{\perp})$. Ця фаза обмежена двома лініями переходу другого порядку, що зустрічаються у мультикритичній точці з двома лініями переходу другого роду між парамагнітною фазою та фазами $O(n_{\parallel})$ і $O(n_{\perp})$ (див. Рис. 1.2 б).

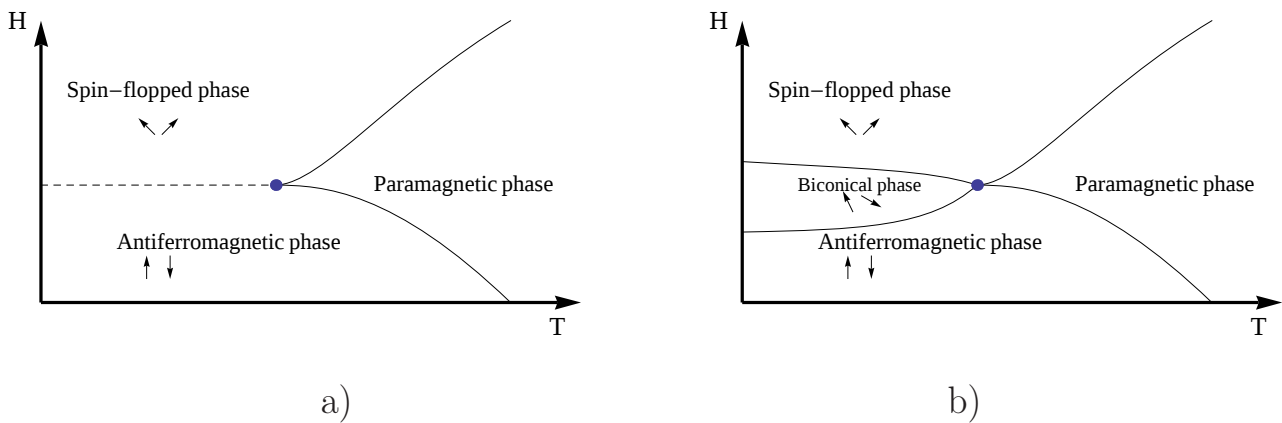


Рис. 1.2. Типові фазові діаграми анізотропних антиферромагнетиків у однорідному паралельному зовнішньому магнітному полі: а) з бікритичною точкою, б) з тетракритичною точкою. Лінії переходів другого роду показано суцільними кривими, а лінію переходів першого роду – штриховою лінією.

Мультикритичні явища, що з'являються у різних фізичних контекстах [300], в загальному може описувати модель з двома зв'язаними параметрами порядку з різними вимірностями n і m та симетрією $O(n) \oplus O(m)$. Існує відповідність між анізотропними магнітними системами та системою квантових рідин [301], що робить

цей опис застосовним для ${}^4\text{He}$. У цьому контексті біконічна фаза відповідає можливій появі супертвердої фази [302]. Мультикритичні явища також очікуються для високотемпературних надпровідників [303], де існує конкуренція між трикомпонентним феромагнітним параметром порядку та комплексним надпровідним параметром порядку. Модель $O(n) \oplus O(m)$ також була використана для опису мультикритичних точок на фазовій діаграмі квантової хромодинаміки [304], де двома конкуруючими параметрами порядку є конфайнмент і кіральна симетрія. Мультикритичні явища не обмежуються лише системами з двома параметрами порядку. Зокрема, колосальний магнітоопір у манганітах вважався результатом конкуренції між чотирма параметрами порядку, пов'язаними з феромагнітними, антиферомагнітними, зарядними та орбітальними впорядкуваннями [305].

Умови реалізації різних типів мультикритичної поведінки, які визначаються співвідношенням вимірностями параметрів порядку $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$ отримані вже в першому нетривіальному наближенні теоретико-польової РГ для $d < 4$ [84, 297, 299]. Вони визначають області стійкості у параметричній $n_{\parallel} - n_{\perp}$ площині для трьох нерухомих точок: *ізотропної гайзенбергівської* нерухомої точки з $O(n_{\parallel} + n_{\perp})$ симетрією, *незв'язаної* нерухомої точки, при якій параметри порядку впорядковуються окремо, і *біконічної* нерухомої точки. Дослідження у двопетлевому наближенні у $d = 3$ показують якісно подібні результати [306, 307], але значно змінюють картину у $n_{\parallel} - n_{\perp}$ площині кількісно. Результати п'ятипетлевого наближення для тривимірної $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі [308] підтверджують отриману картину, злегка коректуючи її.

Оскільки попередні дослідження мультикритичної поведінки у системі $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ зосереджувались на випадку $d = 3$, варто розглянути залежність граничних вимірностей $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі від просторової вимірності d . Це цікаво тим, що навіть невеликі зміни в d можуть призвести до кардинального впливу на критичну поведінку, зокрема, до зміни класу універсальності системи.

1.3.2. Магнетики з неколінеарним впорядкуванням та $O(n) \times O(m)$ симетрія

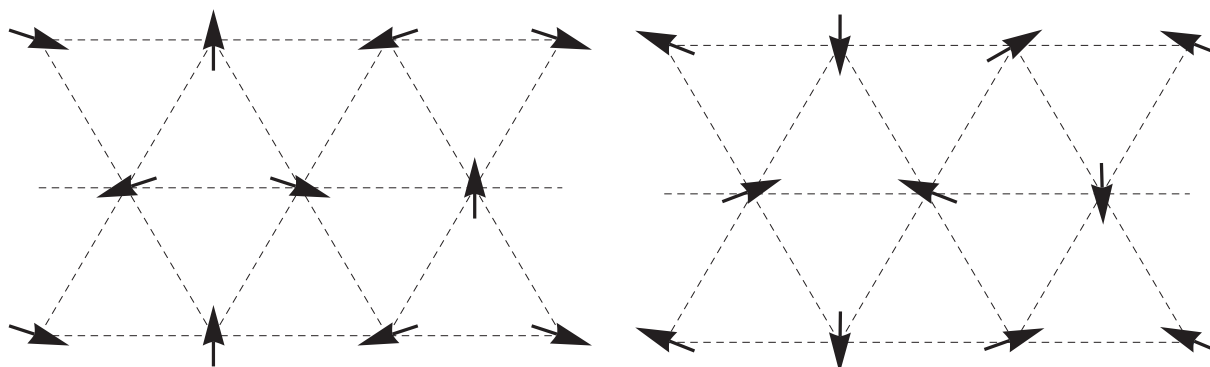


Рис. 1.3. Дві можливі конфігурації двокомпонентних спінів у основному стані шаруватого антиферромагнетика на трикутній ґратці. Перехід від конфігурації однієї до іншої можливий тільки при повній інверсії (перекиданні) усіх спінів.

Конкуренція у взаємодіях між сусідніми спінами, може породжувати впорядкований основний стан з не паралельним (або з не антипаралельним) розташуванням спінів. Таке впорядкування в загальному називають неколінеарним. Зокрема, це відноситься до гелімагнетиків Ho , Dy , Tb . Іншим прикладом, де фрустрації, що з'являються через антиферромагнітну взаємодію та геометрію ґратки, приводять до неколінеарного стану, є перовскіти CsMnBr_3 , CsCuCl_3 , CsNiCl_3 . Вони описуються класичною моделлю - шаруватого антиферромагнетика на трикутній ґратці, де три спіни на плакетці (елементарному трикутнику) формують плоску структуру з кутами 120° один між одним в основному стані (див. Рис. 1.3). Такий стан має виродження, пов'язане з кіральністю – відсутністю інверсної симетрії (пор. праву і ліву структуру на Рис. 1.3). Тому іноді таке впорядкування називають кіральним. Як наслідок, параметр порядку не може описуватись вектором, а є матрицею ($SO(3)$ матриця для гайзенберґівських спінів та матриця 2×2 для XY-спінів). Тобто у низькотемпературній фазі повністю порушується група обертань, а тому критичні властивості відрізняються від критичних властивостей нефрустрованих систем.

Результати експериментальних досліджень систем з неколінеарним впо-

рядкуванням в основному узгоджуються між собою, демонструючи, що при ФП термодинамічні характеристики як ХУ, так і гайзенбергівських неколінеарних магнетиків описуються законами скейлінгу, однак критичні показники відрізняються від моделей $O(n)$. Це призвело до двох інтерпретацій спостереженої картини: або фазові переходи належать до нового класу універсальності [24], або вони є *слабкого* першого роду [309]. Ретельний аналіз результатів досліджень різних матеріалів показує, що критичні показники відрізняються від однієї сполуки до іншої, і відповідно універсальність є під питанням [309]. Таке спостереження служить підтвердженням інтерпретації про слабкі переходи першого роду. Це, зокрема, підтверджують майже всі чисельні симуляції, виконані для STA або для подібних моделей [310–318], протилежне показує дослідження [319].

Теоретичні дослідження зі свого боку узгоджуються для високих вимірностей: поблизу вимірності простору $d = 4$ існує лінія $n_c(d)$ у площині (d, n) , над якою ФП є другого роду і нижче якої він є першого роду. Результат ε -розкладу $n_c(d = 4 - \varepsilon) = 21.8 - 23.4\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ [320, 321] показує, що поправки теорії збурень великі, тому неможливо надійно екстраполювати цей результат до вимірності $d = 3$ без розрахунку вкладів вищих наближень. Розрахунок n_c або у рамках ε , або псевдо- ε розкладів [80–82, 320–323], або безпосередньо в $d = 3$ [319, 324–327] було виконано у п'яти- та шестипетлевих наближеннях РГ. Ця ж величина була також обчислена у рамках підходу непертурбативної РГ [309, 328–334].

Однак результати різних підходів, отримані на сьогодні, не узгоджуються, зокрема, для фізично цікавих випадків $n = 2$ і $n = 3$. З одного боку, ε - і псевдо- ε розклади та підхід НПРГ одночасно приводять до значення $n_c(d = 3)$ значно вище 3. Справді: $n_c(d = 3) = 6.1(6)$ у рамках ε розкладу в п'ятьох петлях [81], $n_c(d = 3) = 6.22(12)$ [81] і $n_c(d = 3) = 6.23(21)$ [82] у рамках псевдо- ε -розкладу в шести петлях і, нарешті, $n_c(d = 3) = 5.1$ у рамках підходу НПРГ [309]. Ретельний аналіз, виконаний у рамках підходу НПРГ [309, 331, 334], показав, що навіть якщо, строго кажучи, немає НТ нижче $n_c(d = 3)$ та потік РГ дуже повільний при $n = 2$ і 3 в цілому просторі констант зв'язку, так що існує псевдо-скейлінг без універсальності у великому діапазоні температур, що узгоджується з числовими

(і ймовірно експериментальними) даними, що фазові переходи є слабого першого роду. З іншого боку, обчислення з допомогою теорії збурень, що проводяться методами при фіксованій вимірності простору, ведуть до абсолютно іншого передбачення [319, 326, 327]. Дослідження, виконані в шести петлях у рамках масивної схеми з нульовими імпульсами [327], приводять до двох різних $n_c(d=3)$: n_{c1} і n_{c2} . Над $n_{c1} = 6.4(4)$ існують, як звичайно, дві нерухомі точки, стійка та нестійка. Вони стають ближчими, при зменшенні n , стикаються при n_{c1} і зникають. Однак нижче $n_{c2} = 5.7(3)$ стійка нерухома точка знову з'являється й існує для $n = 2$ і 3 . Таким чином, передбачається ФП другого роду для цих значень n . Особливість цього розрахунку при фіксованій вимірності простору полягає у тому, що вона передбачає у площині (d, N) криву $N_c(d)$ з дуже незвичайною S-подібною формою в околі $d = 3$ або, інакше кажучи, *немонотонну* криву $d_c(N)$, нижче якої для даного n перехід є другого роду. Якщо це дійсно так, то це означало б, що при $d = 3$ ФП другого роду відбувається за низьких значень n , тоді як із збільшенням n він стане першого роду, перш ніж знову буде другого роду.

Розрахунки, проведені в іншій схемі РГ [319], взагалі не дають критичного значення n в $d = 3$, і, таким чином, передбачено ФП другого роду для будь-якого значення n . Щоб розв'язати протиріччя між різними підходами в цьому останньому випадку, був проведений ретельний аналіз процедури пересумовування, що використовувався у розрахунках при фіксованій вимірності простору [335]. Аналіз виявив деякі дуже специфічні риси результатів підходу: відсутність збіжності критичних показників з порядком розкладу, висока чутливість результатів по відношенню до параметра пересумовування, існування нетривіальної нерухомої точки поблизу і вище верхнього критичного значення $d = 4$. Відповідно цей повторний аналіз показує серйозні сумніви щодо надійності підходів при фіксованій вимірності простору при застосуванні до неколінеарних магнетиків.

З наведених вище результатів напрошується наступний висновок: картина критичної поведінки є такою, що фазові переходи неколінеарних магнетиків є (слабого) першого роду, а підходи при фіксованій вимірності простору є недоконалими і не є збіжними.

1.4. Підхід теоретико-польової РГ

1.4.1. Перенормування статичних функцій

Підхід теоретико-польової РГ полягає у аналізі поведінки так званих одно-частинково незвідних (one-particle irreducible - *1PI*) вершинних функцій, які визначаються як

$$\begin{aligned} & \delta \left(\sum_i^L p_i + \sum_j^M k_j \right) \mathring{\Gamma}^{(L,M)}(\{p\}; \{k\}; \mu_0^2; \{u_{i,0}\}) \\ &= \int^{\Lambda_0} d^d r_1 \dots d^d r_L d^d R_1 \dots d^d R_M e^{i(\sum p_i r_i + \sum k_j R_j)} \\ & \times \langle \phi^2(r_1) \dots \phi^2(r_L) \phi(R_1) \dots \phi(R_M) \rangle_{1PI}^{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

де $\{u_{i,0}\}$ позначає усю множину неперенормованих констант зв'язку відповідного статичного ефективного Гамільтоніану, $\{p\}$, $\{k\}$ – зовнішні імпульси, Λ_0 – параметр обрізання, μ_0 – неперенормована маса.

У загальному випадку вершинні функції (1.31) мають складну тензорну структуру, викликану наявністю декількох констант зв'язку, пов'язаних з членами відповідної симетрії, тому їх представляють виділяючи окремо внески, які відповідають таким членам.

Вершинні функції (1.31) розбігаються в границі $\Lambda_0 \rightarrow \infty$. Щоб усунути ці розбіжності, після відповідної регуляризації використовують процедури перенормування. У пертурбативному підході функції РГ, які описують ці процедури, отримуються як ряди теорії збурень за константами зв'язку і їхній явний вигляд залежить від використаної схеми пересумування. Однак універсальні величини, такі як критичні показники, не залежать ні від регуляризації, ні від схеми перенормування, принаймні якщо ряди не обрізаються при скінченному порядку. Серед схем перенормування найпоширенішими є вимірна регуляризація і схема мінімального віднімання [336, 337], а також перенормування при фіксованій вимірності простору при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі (масивна схема РГ) [338]. Тут опишемо схему мінімального віднімання, оскільки ми найча-

стіше користуємось нею.

Для перенормування параметра порядку $\vec{\phi}$, констант зв'язку u_i теорії ϕ^4 і кореляційних функцій з вставкою ϕ^2 вводяться перенормовуючі множники Z_ϕ , Z_{u_i} і Z_{ϕ^2} , відповідно, через співвідношення:

$$\vec{\phi}_0 = Z_\phi^{1/2} \vec{\phi}, \quad u_{i,0} = \kappa^\varepsilon Z_\phi^{-2} Z_{u_i} u_i A_d^{-1}, \quad |\vec{\phi}_0|^2 = Z_{\phi^2} |\vec{\phi}|^2, \quad (1.32)$$

де κ – це масштабний параметер, $\varepsilon = 4 - d$, а A_d – геометричний фактор. Перенормування μ_0^2 є наступним:

$$\mu_0^2 = Z_\phi^{-1} Z_\mu \mu^2. \quad (1.33)$$

Неперенормовані та перенормовані вершинні функції зв'язані співвідношеннями:

$$\Gamma^{(L,M)}(\{p\}; \{k\}; \{u_i\}) = Z_\phi^{M/2} Z_{\phi^2}^L \Gamma^{(L,M)}(\{p\}; \{k\}; \{u_{i,0}\}). \quad (1.34)$$

В рамках схеми мінімального віднімання умови нормування формулюються при нульовій масі та мають наступну форму:

$$\Gamma^{(0,2)}(k, -k; \kappa; \{u_i\}) \Big|_{k=0} = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(0,2)}(k, -k; \kappa; \{u_i\}) \Big|_{k^2=\kappa^2} = 1, \quad (1.36)$$

$$\Gamma_{u_i}^{(0,4)}(\{k\}; \kappa; \{u_i\}) \Big|_{k_i k_j = \frac{\kappa^2}{3} (4\delta_{ij} - 1)} = \kappa^{4-d}_i, \quad (1.37)$$

$$\Gamma^{(1,2)}(p; k, -k; \kappa; \{u_i\}) \Big|_{p^2=k^2=\kappa^2, p k = -1/3 \kappa^2} = 1. \quad (1.38)$$

1.4.2. Теоретико-польовий підхід для критичної динаміки

Якщо ми описуємо динамічні критичні явища, то нам потрібна і теорія поля для критичної динаміки. Ми слідуємо підходу Бауша-Янсена-Вагнера (Bausch-Janssen-Wagner) [339], у якому великомасштабні властивості системи на довгих

часах аналізуються на основі функціонального представлення з так званими ефективними лагранжіанами, які враховують структуру динамічних рівнянь відповідних моделей критичної динаміки. Кореляції стохастичних величин (1.6) з врахуванням (1.7) описуються розподілом імовірності:

$$\mathcal{W}[\zeta] \sim \exp \left(-\frac{1}{4} \int dt d^d r \sum_{ij} \zeta_i(\mathbf{r}, t) [L^{-1}]_{ij} \zeta_j(\mathbf{r}, t) \right). \quad (1.39)$$

Тепер розглянемо шум ζ як функцію поля ψ . З рівняння (1.5): $\zeta_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} - F_j[\psi]$, де використано позначення $F_i[\psi] = \sum_j L_{ij} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi_j}$. Тоді розподіл імовірності $P[\psi]$ для повільнозмінних величин можна задати наступним чином:

$$\mathcal{W}[\zeta] \mathcal{D}[\zeta] = \mathcal{P}[\psi] \mathcal{D}[\psi] \sim e^{-\mathcal{G}[\psi]} \mathcal{D}[\psi]. \quad (1.40)$$

Функціонал $\mathcal{G}[\psi]$ записується як

$$\mathcal{G}[\psi] = \frac{1}{4} \int dt d^d r \sum_{ij} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} - F_i[\psi] \right) [L^{-1}]_{ij} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - F_j[\psi] \right). \quad (1.41)$$

При роботі з таким функціоналом в теорії збурень виникають степені виразу $F_j[\psi] [L^{-1}]_{ij} F_j[\psi]$, що значно ускладнює розрахунки. Введення допоміжного поля $\tilde{\psi}$ дозволяє уникнути цього: $\mathcal{P}[\psi] = \int \mathcal{D}[\tilde{\psi}] \mathcal{P}[\psi, \tilde{\psi}]$. Тут густина імовірності $\mathcal{P}[\psi, \tilde{\psi}] \sim \exp \left(-\mathcal{L}[\psi, \tilde{\psi}] \right)$ визначається ліанеризованим динамічним потенціалом, який називають ефективним лагранжіаном:

$$\mathcal{L}[\psi, \tilde{\psi}] = \int dt d^d r \left[- \sum_{ij} \tilde{\psi}_i L_{ij} \tilde{\psi}_j + \sum_i \tilde{\psi}_i \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} - F_i[\psi] \right) \right]. \quad (1.42)$$

1.4.3. Перенормування для критичної динаміки

В рамках теоретико-польової динамічної РГ [20] об'єкт аналізу становлять динамічні вершинні функції, отримані на основі відповідного лагранжіану. Для аналізу динамічних властивостей достатньо розрахувати динамічні двоточкові вершинні функції $\dot{\Gamma}_{\psi_i \tilde{\psi}_j}(\{u_{i,0}, k, \omega\})$ та $\dot{\Gamma}_{\tilde{\psi}_j \tilde{\psi}_j}(\{u_{i,0}, k, \omega\})$. Їх можна отримати, збираючи всі одночастинково незвідні графічні вклади теорії збурень. Оскільки у

роботі ми цікавимось тільки динамікою моделей А та С, то відповідний набір повільнозмінних величин буде таким $\psi = \{\phi, m\}$, а відповідний набір допоміжних полів $\tilde{\psi} = \{\tilde{\phi}, \tilde{m}\}$.

Як показано у роботі [20] незалежно від пертурбативного розкладу двоточкові вершинні функції мають загальну структуру:

$$\mathring{\Gamma}_{\psi\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega) = -i\omega\mathring{\Omega}_{\psi\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega) + \mathring{\Gamma}_{\psi\psi}(\xi, k)\mathring{\Gamma}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}(k), \quad (1.43)$$

де $\mathring{\Gamma}_{\psi\psi}(\xi, k)$ для $\psi = \phi$ позначає двоточкову вершинну функцію $\mathring{\Gamma}^{(0,2)}$, розраховану в статистиці, а для $\psi = m$ відповідну функцію для збережної величини. Узагальнені кінетичні коефіцієнти $\mathring{\Gamma}_{\psi}(k)$ дорівнюють $\mathring{\Gamma}$ для незбережного параметра порядку ($\psi = \phi$) і дорівнюють λk^2 у випадку збережної додаткової густини ($\psi = m$).

У (1.43) введено кореляційну довжину $\xi(\mu_0, \{u_{i,0}\})$, яка означається як

$$\xi^2 = \left. \frac{\partial \ln \mathring{\Gamma}_{\phi\phi}}{\partial k^2} \right|_{k^2=0}. \quad (1.44)$$

Усі динамічні вклади зібрані у функції $\mathring{\Omega}_{\psi\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega)$, яку можна розраховувати за допомогою петлевого розвинення у теорії збурень. Вершинні функції $\mathring{\Gamma}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega)$ також визначаються точним співвідношенням у формі:

$$\mathring{\Gamma}_{\tilde{\psi}\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega) = -2\Re[\mathring{\Gamma}_{\psi}(k)\mathring{\Omega}_{\psi\tilde{\psi}}(\xi, k, \omega)]. \quad (1.45)$$

Перенормування динамічних величин вводиться аналогічно як в статистиці. Перенормовані множники для динамічного поля $\vec{\tilde{\phi}}$, $Z_{\tilde{\phi}}$, і кінетичного коефіцієнту Γ , Z_{Γ} , вводяться через

$$\vec{\tilde{\phi}}_0 = Z_{\tilde{\phi}}^{1/2} \vec{\tilde{\phi}}, \quad \mathring{\Gamma} = Z_{\Gamma} \Gamma. \quad (1.46)$$

Фактор Z_{Γ} в останньому рівнянні містить статичний вклад Z_{ϕ} , який можна виділити :

$$Z_{\Gamma} = Z_{\phi}^{1/2} Z_{\tilde{\phi}}^{-1/2} Z_{\Gamma}^{(d)}. \quad (1.47)$$

Оскільки у динамічній моделі С члени міжмодового зв'язку відсутні $Z_{\Gamma}^{(d)} = 1$, то

$$Z_{\Gamma} = Z_{\phi}^{1/2} Z_{\tilde{\phi}}^{-1/2}. \quad (1.48)$$

Для моделі С потрібно ввести додаткові перенормовуючі множники для збережної густини m і параметра статичного зв'язку γ . Вони перенормовуються подібно до ϕ і u у р-ні (1.32):

$$m_0 = Z_m m, \quad \gamma_0 = \kappa^{\varepsilon/2} Z_\phi^{-1} Z_m^{-1} Z_\gamma \gamma A_d^{1/2}. \quad (1.49)$$

Існують співвідношення, що пов'язують статичні Z -фактори моделі С зі статичними Z -факторами моделі Гінзбурга-Ландау-Вільсона через відінтегровування збережної густини m у Гамільтоніані (1.16). Тому перенормовуючий множник γ визначається:

$$Z_\gamma = Z_m^2 Z_\phi Z_{\phi^2}. \quad (1.50)$$

Таким чином р-ня (1.49) переписується як

$$\gamma_0 = \kappa^{\varepsilon/2} Z_{\phi^2} Z_m \gamma A_d^{-1/2}. \quad (1.51)$$

Перенормовуючий множник Z_m визначається через співвідношення:

$$Z_m^{-2}(u, \gamma) = 1 + \gamma^2 A_{\phi^2}(u), \quad (1.52)$$

де A_{ϕ^2} є аддитивним перенормуванням теплоємності моделі Гінзбурга-Ландау-Вільсона

$$A_{\phi^2} = -\frac{\kappa^\varepsilon}{4} [Z_{\phi^2}^2 < \phi_0^2 \phi_0^2 >]_s A_d^{-1}. \quad (1.53)$$

Оскільки збережна густина за означенням підлягає закону збереження, то не потрібно нового перенормовуючого множника для допоміжної динамічної густини $\tilde{m}$. Вона перенормовується як:

$$\tilde{m}_0 = Z_m^{-1} \tilde{m}. \quad (1.54)$$

Кінетичний коефіцієнт λ перенормовується як

$$\dot{\lambda} = Z_\lambda \lambda. \quad (1.55)$$

Подібно як у випадку з Z_Γ , його статичний вклад можна відділити:

$$Z_\lambda = Z_m^2 Z_\lambda^{(d)}. \quad (1.56)$$

Як уже зазначалось, $Z_\lambda^{(d)} = 1$, тому

$$Z_\lambda = Z_m^2. \quad (1.57)$$

Відповідно до представленої схеми перенормовані динамічні вершинні функції задовільняють співвідношення:

$$\Gamma_{\phi\tilde{\phi}} = Z_\phi^{1/2} Z_{\tilde{\phi}}^{1/2} \mathring{\Gamma}_{\phi\tilde{\phi}}, \quad \Gamma_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} = Z_{\tilde{\phi}} \mathring{\Gamma}_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}, \quad (1.58)$$

$$\Gamma_{m\tilde{m}} = Z_m Z_{\tilde{m}} \mathring{\Gamma}_{m\tilde{m}}, \quad \Gamma_{\tilde{m}\tilde{m}} = Z_{\tilde{m}}^2 \mathring{\Gamma}_{\tilde{m}\tilde{m}}. \quad (1.59)$$

1.4.4. Кількісні критичні характеристики

З перенормовуючих множників, введених вище, ми отримаємо ζ -функцій РГ, що описують критичну поведінку відповідної системи

$$\zeta_{a_i}(\{y_i\}) = -\frac{d \ln Z_{a_i}}{d \ln \kappa}. \quad (1.60)$$

Тут $\{y_i\} = \{\{u_i\}, \gamma, \Gamma, \lambda\}$ представляє множину перенормованих статичних констант зв'язку та кінетичних коефіцієнтів. Позначення a_i означає будь-які поля ($\phi, \tilde{\phi}, m, \tilde{m}$) або будь-який параметр моделі y_i . Та β -функції РГ, які описують потоки РГ параметрів $\{y_i\}$ при перенормуванні:

$$\ell \frac{dy_i}{d\ell} = \beta_{y_i}(\{y_i\}), \quad (1.61)$$

де параметр потоку ℓ пов'язаний з відстанню до критичної точки. Функції в правій частині рівняння (1.61) мають структуру:

$$\beta_{y_i}(\{y_i\}) = y_i(-c_i - p_i \zeta_\phi(\{y_i\}) - q_i \zeta_m(\{y_i\}) + \zeta_{y_i}(\{y_i\})), \quad (1.62)$$

де y позначає усі константи зв'язку та кінетичні коефіцієнти, а c_i, p_i, q_i є показниками з загальної форми перенормування

$$y_{0,i} = \kappa^{c_i} Z_\phi^{-p_i} Z_m^{-q_i} Z_{y_i} y_i. \quad (1.63)$$

Знання про властивості критичної поведінки дає аналіз нерухомих точок рівнянь на потоки (1.61). НТ $\{y_i^*\}$ знаходиться з умови рівності нулю одночасно

усіх β -функцій:

$$\beta_{y_i}(\{y_i^*\}) = 0. \quad (1.64)$$

З усіх розв'язків системи рівнянь (1.64) критичній точці відповідає НТ, яка є стійкою і досяжною з початкових умов. Стійкість НТ визначається умовою, що усі власні значення ω_i матриці стійкості

$$B_{i,j} = \frac{\partial \beta_{y_i}}{\partial y_j}, \quad (1.65)$$

розраховані у цій НТ, мають додатні дійсні частини.

При підстановці координат НТ у ζ -функції отримуються асимптотичні значення критичних показників. Зокрема, динамічний асимптотичний критичний показник z визначається стійкою і досяжною НТ таким чином:

$$z = 2 + \zeta_\Gamma(\{y_i^*\}), \quad (1.66)$$

$$z_m = 2 + \zeta_\lambda(\{y_i^*\}). \quad (1.67)$$

Динамічна критична поведінка системи в неасимптотичній області визначається ефективним динамічним показником z_{eff} , який отримується шляхом підстановки розв'язків рівняння на потоки (1.61) замість координат нерухомої точки у р-ня (1.66):

$$z_{\text{eff}} = 2 + \zeta_\Gamma(\{y_i(\ell)\}), \quad (1.68)$$

$$z_m^{\text{eff}} = 2 + \zeta_\lambda(\{y_i(\ell)\}). \quad (1.69)$$

1.4.5. Процедура пересумовування

Аналіз пертурбативних функцій РГ може виконуватися двома способами. Зосередимось зараз на системі з однією константою зв'язку, чиє перенормування описується тільки однією функцією $\beta(u)$. *Перший шлях* аналізу полягає в пошуку значення константи зв'язку в НТ u^* у вигляді розкладу за малим параметром, яким зазвичай є $\varepsilon = 4 - d$ [71] (або псевдо- ε параметер для масивної схеми, розрахованої при певному d , див. посилання [19] у роботі [340]). Аналіз пертурбативних

функцій РГ за допомогою *другого способу* полягає у фіксуванні d , а потім у чисельному розв'язуванні рівнянь на НТ. Цей метод зазвичай називається у літературі підходом при фіксованому d [338, 341, 342]. Тоді як у багатьох задачах ці два способи взаємодоповнюють один одного, для деяких випадків тільки один з підходів, а саме при фіксованій вимірності простору, приводить до кількісних оцінок. Так, добре відомо, що для моделі Ізінга з нескорельованим безладом ε -розклад перетворюється у $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад, на основі якого не можна отримати надійні кількісні оцінки [22].

Відомо, що ряди теорії збурень для функцій РГ є, в найкращому випадку, асимптотичними за своєю природою. Вони характеризуються факторіальним ростом коефіцієнтів, що означає нульовий радіус збіжності [7, 8]. Тому, щоб отримати оцінки на їх основі, потрібно застосовувати процедури пересумовування. Один зі способів, які ми найчастіше застосовуємо у цій роботі, є метод Паде-Бореля. Процедура основана на інтегральному перетворенні Бореля [343] і використовує екстраполяцію Паде-апроксимантами як проміжний крок [344].

Розглянемо цей метод на прикладі ряду, що має L доданків:

$$f(u) = \sum_{l=0}^L a_l u^l, \quad (1.70)$$

і для якого будуємо образ Бореля

$$f^B(u, s) = \sum_{l=0}^L \frac{a_l (us)^l}{l!}. \quad (1.71)$$

Зрозуміло, що при оберненому перетворенні Бореля $\int_0^\infty ds \exp(-s) f^B(u, s)$ ми отримаємо вихідний ряд (1.70).

Далі образ Бореля екстраполюється раціональною апроксимантою Паде $[K/M]$ (де $K + M \leq L$). У більшості наших задач ми використовуємо апроксиманти з лінійним знаменником за s :

$$f^B(u, s) \Rightarrow [L - 1/1](s) = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} b_l(u) s^l}{1 + c_1(u) s}, \quad (1.72)$$

з коефіцієнтами $b_l(u)$, $c_1(u)$, що виражаються через початкові коефіцієнти $a_l u^l$.

В результаті пересумовані функції f^{Res} отримуються за допомогою оберненого перетворення Бореля:

$$f^{\text{Res}}(u) = \int_0^{\infty} ds \exp(-s) [L - 1/1](s). \quad (1.73)$$

1.5. Висновки

У цьому розділі здійснено огляд результатів, що стосуються критичної поведінки моделей магнітних систем, які враховують наявність структурного безладу різних типів, анізотропії, фрустрацій. Подано також короткий опис основного методу досліджень. Можна зробити висновок, що в той час як асимптотична критична поведінка магнетиків детально досліджена аналітично та методами чисельних симуляцій, ефективній критичній поведінці, особливо в контексті критичної динаміки, приділялось набагато менше уваги. Також магнетики з протяжними домішками опинились поза увагою дослідників, які працюють методами комп'ютерного експерименту. Для двовимірних неупорядкованих систем недостатньо досліджено явище самоусереднення та вплив далекосяжно скорельованого безладу. Для систем з двома зв'язаними параметрами порядку актуальним залишається питання характеру мультикритичної поведінки. Питання про рід фазового переходу в неолінійне впорядкування є непроясненим для фрустрованих магнетиків. Враховуючи це, сформульовано завдання даної дисертаційної роботи, представлені у Вступі.

РОЗДІЛ 2

КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА МАГНЕТИКІВ З ПРОТЯЖНИМИ ДОМІШКАМИ

У цьому розділі проаналізовано критичні властивості моделі магнетика з протяжними паралельними дефектами структури. Цей тип безладу призводить до появи в системі анізотропного скейлінгу. Зокрема, у рамках теоретико-польового підходу РГ розраховано кількісні характеристики цього скейлінгу для динамічної моделі типу А, а саме динамічні критичні показники для двох кореляційних довжин: для флуктуацій вздовж напрямку дефектів і для флуктуацій у перпендикулярному напрямку. Співвідношення цих динамічних показників дає оцінку для показника анізотропії. Значення останнього тут також обчислюється за допомогою методу МК з використанням скінчено-розмірного скейлінгу. Також проведено аналіз неасимптотичної критичної поведінки. Основні результати цього розділу викладені у роботах [35, 38, 41, 47, 57, 66].

2.1. Динамічний критичний показник для магнетика з паралельними протяжними немагнітними домішками для динаміки моделі А

2.1.1. Модель з протяжними домішками

Розглянемо ефективний гамільтоніан моделі n -векторного магнетика з ε_d -вимірними дефектами, що простягаються через систему вздовж напрямку, що описується координатою $\mathbf{r}_{||}$ і випадково розподілені у перпендикулярних напрям-

ках $\mathbf{r}_\perp$ [102, 142]:

$$\mathcal{H} = \int d^d r \left[\frac{1}{2} (\mu_0^2 + V(\mathbf{r})) \vec{\phi}_0^2(\mathbf{r}) + (\nabla_\perp \vec{\phi}_0(\mathbf{r}))^2 + \alpha_0 (\nabla_\parallel \vec{\phi}_0(\mathbf{r}))^2 + \frac{u_0}{4!} (\vec{\phi}_0^2(\mathbf{r}))^2 \right]. \quad (2.1)$$

Тут α_0 – це неперенормована константа анізотропії, а $V(\mathbf{r})$ – потенціал домішок, який вважається розподіленим за розподілом Гауса з нульовим середнім і корелятором:

$$\overline{V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')} = -v_0 \delta^{d-\varepsilon_d}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp). \quad (2.2)$$

Тут риска зверху означає усереднення за розподілом потенціалу, $(-v_0)$ – додатня константа, пропорційна до концентрації домішок і величини потенціалу. Домішки розглядаються як ε_d -вимірні об'єкти, кожен з яких простягається через систему вздовж координатного напрямку позначеного як $x_\parallel$, у той час як у решті $d - \varepsilon_d$ вимірах вони розподілені випадковим чином. Оператори $\nabla_\perp$ і $\nabla_\parallel$ означають похідні за координатами $\mathbf{r}_\perp$ та $\mathbf{r}_\parallel$, відповідно. Вважається, що лінійний розмір дефектів є набагато більшим, ніж лінійна відстань між дефектами у довільно вибраній парі. Це припущення справедливе для концентрації дефектів, що набагато нижча порогу протікання.

Модель, яка описується ефективним гамільтоніаном (2.1), має багату скейлінгову поведінку. Як ми вже зазначали у оглядовому розділі (підрозділ 1.2.2), ця система не є ізотропною. Через просторову анізотропію існують дві кореляційні довжини: перпендикулярна і паралельна до напрямку протяжних дефектів ($\xi_\perp$ та $\xi_\parallel$). При наближенні до критичної температури T_c їх розбіжність характеризується відповідними критичними показниками $\nu_\perp$, $\nu_\parallel$.

Кореляція флуктуацій параметра порядку двох різних точок системи набуває орієнтаційної залежності [146]. Тому потрібно розділяти критичні показники $\eta_\perp$ та $\eta_\parallel$, що характеризують поведінку парної кореляційної функції у різних напрямках. Просторова анізотропія також модифікує критичну динаміку поблизу стану рівноваги, приводячи до появи двох динамічних показників $z_\parallel$ і $z_\perp$ [153]. У той же час магнітна сприйнятливості є ізотропною величиною [145, 146], оскільки всі компоненти параметра порядку взаємодіють з дефектами у той самий спосіб.

Її можна виразити через парну кореляційну функцію [147, 148]:

$$\begin{aligned}\chi(k_{\perp}, k_{\parallel}, t) &= |t|^{-\gamma} g\left(\frac{k_{\perp}}{|t|^{\nu_{\perp}}}, \frac{k_{\parallel}}{|t|^{\nu_{\parallel}}}, \pm 1\right) = \\ &= k_{\perp}^{\eta_{\perp}-2} g_{\perp}\left(1, \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}}}, \frac{|t|}{k_{\perp}^{1/\nu_{\perp}}}\right) = \\ &= k_{\parallel}^{\eta_{\parallel}-2} g_{\parallel}\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}^{\nu_{\perp}/\nu_{\parallel}}}, 1, \frac{|t|}{k_{\parallel}^{1/\nu_{\parallel}}}\right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

У р-нні (2.3) $k_{\parallel}$, $k_{\perp}$ – компоненти моменту імпульсу вздовж ε_d та $d - \varepsilon_d$ напрямків, відповідно, γ – критичний показник магнітної сприйнятливості, а g , $g_{\perp}$ і $g_{\parallel}$ позначають скейлінгові функції. Для моделі виконуються такі скейлінгові співвідношення [102, 142, 147, 148]:

$$\gamma = (2 - \eta_{\perp})\nu_{\perp} = (2 - \eta_{\parallel})\nu_{\parallel}. \quad (2.4)$$

Критичний показник теплоємності α пов'язаний з $\nu_{\perp}$, $\nu_{\parallel}$ співвідношенням гіперскейлінгу, що відрізняється від звичайного [146]:

$$\alpha = 2 - (d - \varepsilon_d)\nu_{\perp} - \varepsilon_d\nu_{\parallel}. \quad (2.5)$$

Усі інші скейлінгові співвідношення є стандартними. Це означає, що потрібно розрахувати принаймні три незалежні статичні показники (напр. $\nu_{\parallel}$, $\nu_{\perp}$, γ) замість двох, як в стандартному випадку, щоб знайти інші статичні показники зі скейлінгових співвідношень.

Ми розглядаємо для моделі (2.8) випадок релаксаційної критичної динаміки з незбережним параметром порядку, тобто динаміку моделі А [85]. У цьому випадку множина повільнозмінних величин складається тільки з компонент параметра порядку $\vec{\phi}_0$. Тоді динамічні рівняння та кореляції теплового шуму задаються р-нями (1.14) і (1.15).

В рамках теоретико-польового підходу у формалізмі Бауша-Янсена-Вагнера [339], описаного у підрозділі 1.4.2, лагранжіан загального вигляду (1.42) для нашої моделі перепишеться:

$$\mathcal{L}[\tilde{\phi}, \phi] = \int d^d r dt \sum_i \tilde{\phi}_0^i \left[\frac{\partial \phi_0^i}{\partial t} + \overset{\circ}{\Gamma} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_0^i} - \overset{\circ}{\Gamma} \tilde{\phi}_0^i \right]. \quad (2.6)$$

Тут $\tilde{\phi}^i$ – компоненти допоміжного поля відгуку, введеного для усереднення за тепловим шумом, $\mathring{\Gamma}$ – кінетичний коефіцієнт Онзагера. Кореляційна і функція відгуку розраховуються за допомогою вагової функції $\mathcal{P}[\tilde{\phi}, \phi] \sim e^{-\mathcal{L}[\tilde{\phi}, \phi]}$.

Відомо, що при дослідженні динамічних властивостей неупорядкованих систем усереднення за випадковими дефектами можна застосувати прямо до динамічної вагової функції $\mathcal{P}[\tilde{\phi}, \phi]$. Як встановлено у роботі [262], конфігураційне усереднення можна провести, уникаючи застосування методу реплік [107]. Однак це приводить до тих самих рядів теорії збурень для реном-групових функцій, що отримані за допомогою формалізму реплік. Таким чином, обидва підходи дають еквівалентні результати для динаміки. Однак при аналізі тільки статичної поведінки немає такої альтернативи (див. наприклад [11, 22]). Оскільки у цьому розділі розглядаються і статична, і динамічна критичність, ми використовуємо реплічний трюк, представляючи логарифм вагової функції наступним чином:

$$\ln \mathcal{P}[\tilde{\phi}, \phi] = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\overline{\mathcal{P}[\tilde{\phi}, \phi]^N} - 1}{N}. \quad (2.7)$$

У кінцевому рахунку це веде до вивчення лагранжіану наступної форми $\mathcal{L}[\tilde{\phi}, \phi]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\tilde{\phi}, \phi] = & \sum_{\alpha} \left\{ \int d^d r dt \sum_i \tilde{\phi}_{0,\alpha}^i \left[\frac{\partial \phi_{0,\alpha}^i}{\partial t} + \right. \right. \\ & \left. \mathring{\Gamma}(\mu_0^2 - \nabla_{\perp}^2 - a_0 \nabla_{\parallel}^2) \phi_{0,\alpha}^i - \mathring{\Gamma} \tilde{\phi}_{0,\alpha}^i + \sum_j \mathring{\Gamma} \frac{u_0}{3!} \phi_{0,\alpha}^i \phi_{0,\alpha}^j \phi_{0,\alpha}^j \right] + \\ & \left. \sum_{i,j,\beta} \frac{\mathring{\Gamma}^2 v_0}{2} \int d^d r d^d r' dt dt' \delta(\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}) \tilde{\phi}_{0,\alpha}^i(\mathbf{r}, t) \phi_{0,\alpha}^i(\mathbf{r}, t) \tilde{\phi}_{0,\beta}^j(\mathbf{r}', t') \phi_{0,\beta}^j(\mathbf{r}', t') \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тут підсумовування за грецькими індексами пробігає від 1 до N , позначаючи різні репліки та латинські індекси набувають значень від 1 до n , позначаючи компоненти параметра порядку. Щоб вивчити поведінку цієї моделі (2.8) поблизу критичної точки ми застосуємо схему мінімального віднімання у рамках теоретико-польової РГ. Опис цього підходу подано у наступному підрозділі.

2.1.2. Метод теоретико-польової РГ

Опис властивостей моделі (2.8) на великих масштабах поблизу ФП другого роду проводиться, використовуючи метод теоретико-польової РГ, описаний у підрозділі 1.4. Особливістю моделі (2.1) є те, що до перенормування констант зв'язку u_0, v_0 , кінетичного коефіцієнта $\dot{\Gamma}$ та полів $\phi, \tilde{\phi}$ додається перенормування константи анізотропії a_0 , яке описується функцією:

$$\zeta_a(u, v) = \frac{\partial \ln a}{\partial \ln \kappa} \Big|_0. \quad (2.9)$$

Тут, a – перенормована константа анізотропії, κ – масштабуючий параметер, позначення $|_0$ означає диференціювання при фіксованих неперенормованих параметрах.

Рівняння на НТ (1.64) у нашому випадку переписуться як:

$$\beta_u(u^*, v^*) = 0, \quad \beta_v(u^*, v^*) = 0. \quad (2.10)$$

У стійкій і фізично досяжній НТ (у нашому випадку, $u > 0, v < 0$) значення ζ -функцій дають критичні показники магнітної сприйнятливості, кореляційної довжини та часу релаксації:

$$\gamma^{-1} = \frac{2 - \zeta_{\phi^2}(u^*, v^*)}{2 - \zeta_{\phi}(u^*, v^*)}, \quad (2.11)$$

$$\nu_{\perp}^{-1} = 2 - \zeta_{\phi^2}(u^*, v^*), \quad (2.12)$$

$$z_{\perp} = 2 + \zeta_{\Gamma}(u^*, v^*).$$

Варто відзначити, що між показниками, які описують паралельні і перпендикулярні кореляційні довжини та часи релаксації, утримуються такі співвідношення [145]:

$$\begin{aligned} \nu_{\parallel} &= \nu_{\perp} \left(1 - \frac{\zeta_a}{2}\right), \\ z_{\parallel} &= z_{\perp} / \left(1 - \frac{\zeta_a}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для кількісного опису динамічної критичної поведінки магнітних систем з протяжними домішками, ми зосередимось на функціях РГ отриманих у робо-

ті [142] у двопетловому наближенні (ми використовуємо позначення ζ -функцій замість γ -функцій як в тій роботі):

$$\begin{aligned} \beta_u/u &= -\varepsilon + \frac{(n+8)}{6}u + 2v - \frac{(3n+14)}{12}u^2 - v^2 \frac{1}{144} \left[328 + 32 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon + \varepsilon_d} \right] \\ &\quad - \frac{1}{12}uv \left[\frac{2}{3}(11n+58) + (n-4) \frac{\varepsilon_d}{3(\varepsilon + \varepsilon_d)} \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \beta_v/v &= -\varepsilon - \varepsilon_d + \frac{4}{3}v + \frac{n+2}{3}u - \frac{7}{6}v^2 \\ &\quad - vu \frac{n+2}{18} \left[11 - \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon + \varepsilon_d} \right] - \frac{5}{12} \frac{n+2}{3} u^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\zeta_\phi = \frac{v^2}{36} + \frac{n+2}{36}vu + \frac{n+2}{72}u^2, \quad (2.16)$$

$$\zeta_{\phi^2} = u \frac{n+2}{6} + \frac{v}{3} - \frac{n+2}{6}u^2 - 24v^2 - \frac{n+2}{24}vu \left[6 - \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon + \varepsilon_d} \right] + \zeta_\phi, \quad (2.17)$$

$$\zeta_a = \frac{v}{3} - \frac{5}{36}v^2 - \frac{(n+2)}{36}vu, \quad (2.18)$$

$$\zeta_\Gamma = -\frac{v}{3} + \frac{(n+2)(6 \ln \frac{4}{3} - 1)}{72}u^2 + \frac{(n+2)}{36}vu + \frac{5}{36}v^2. \quad (2.19)$$

Тут, $\varepsilon = 4 - d$ і застосована реплічна границя $N = 0$. Підставляючи у рівняння (2.14)-(2.17), (2.19) $\varepsilon_d = 0$, можна отримати ренорм-групові функції n -векторного магнетика з точковими дефектами [29, 74, 136].

Опис критичної поведінки магнетиків з протяжними домішками, виконаний у роботах [102, 142, 145–148, 152, 154, 155], базувався на подвійному розкладі за двома параметрами ε , ε_d , виходячи з того, що обидва є того ж самого порядку малості. Хоча це досить просто з технічної точки зору, однак таке твердження викликає певні зауваження. Справді, покладання ε малим параметром слідує з того факту, що воно є відхиленням від верхньої критичної вимірності, де теорія ϕ^4 стає асимптотично вільною [7–9], у той час як ε_d є вимірністю самих дефектів і, очевидно, має інший фізичний зміст. Таким чином, бажано шукати інших альтернативних шляхів аналізу функцій РГ (2.14)-(2.19). На щастя, така альтернатива існує і використовується у теоретико-польовому підході до критичних явищ [341, 342]. У роботах [156, 157] було запропоновано розширити підхід при фіксованій вимірності простору на прямий розрахунок ренорм-групових функцій даної моделі, тобто

розглядати їх безпосередньо при $d = 3$ ($\varepsilon = 1$) для різних фіксованих значень (нецілої) вимірності дефектів ε_d . У наших розрахунках (див. підрозділ 2.1.3) ми використаємо обидва підходи, застовуючи ε , ε_d розклад, а також працюючи при фіксованій вимірності простору.

У підході теоретико-польової РГ розвинення ренорм-групових функцій у вигляді рядів за степенями констант зв'язку виявляється розбіжним; більш того, такі ряди характеризуються факторіальним ростом коефіцієнтів, і, як правило, є асимптотичними [7–9]. Щоб коректно врахувати внески вищих порядків, потрібно застосовувати спеціальні засоби пересумовування [343]. У роботі [157] аналізувалась статична критична поведінка і застосовувалась техніка пересумовування Чізгольма-Бореля. У цій процедурі образ Бореля вихідної функції екстраполюється раціональною апроксимантою Чізгольма $[K/M](x, y)$ [345]. Вона утворюється відношенням двох поліномів порядку K і M таким чином, що її розклад у ряд Тейлора до відповідного степеня дорівнює образу Бореля вихідної функції. Пересумована функція тоді розраховується за допомогою оберненого перетворення Бореля цієї апроксиманти. Деталі можна знайти у роботі [96].

2.1.3. Результати

Критична поведінка моделі (2.8) знаходиться під впливом таких нерухомих точок: гаусова НТ $\mathbf{G}$ ($u^* = v^* = 0$), $O(n)$ -симетрична НТ чистого магнетика $\mathbf{P}$ ($u^* \neq 0, v^* = 0$) і випадкова НТ $\mathbf{R}$ ($u^* \neq 0, v^* \neq 0$), що керує критичною поведінкою, спричиненою безладом (див. Рис. 2.10). Полімерна НТ з $u^* = 0, v^* > 0$ є недосяжною з початкових умов на константи зв'язку і, таким чином, знаходиться поза інтересом цієї роботи. Залежно від значень глобальних параметрів d, ε_d, n одна з вище наведених нерухомих точок є стійкою і в асимптотичному режимі визначає критичність. Однак, як ми покажемо у підрозділі 2.3, підхід до асимптотичного режиму і відповідно ефективна критична поведінка знаходяться під впливом усіх цих нерухомих точок.

Для $d=3$ -вимірних магнетиків, які ми розглядаємо, існує перехід між НТ $\mathbf{P}$

і НТ $\mathbf{R}$, що відповідає зміні універсальних властивостей n -векторного магнетика з розведенням ε_d -вимірними дефектами. Відповідно до узагальненого критерію Гаріса [102], цей перехід відбувається при певному граничному значенні $n_c(\varepsilon_d)$. При $n > n_c$, НТ $\mathbf{P}$ є стійкою, що означає відсутність змін критичної поведінки, у той час як для значення $n < n_c$ стійкою є нерухома точка НТ $\mathbf{R}$, демонструючи суттєвість безладу в цьому випадку. З узагальненого критерію Гаріса можна отримати граничне значення $\varepsilon_d^{\text{marg}}$ як функцію n . Використовуючи результати шестипетлевого наближення [10] для критичного показника кореляційної довжини $\nu_p(n)$ чистого n -векторного магнетика, отримується: $\varepsilon_d^{\text{marg}}(n = 1) = -0.173$; $\varepsilon_d^{\text{marg}}(n = 2) = 0.016$; $\varepsilon_d^{\text{marg}}(n = 3) = 0.172$; $\varepsilon_d^{\text{marg}}(n = 4) = 0.300$. Ці оцінки показані в оглядовому розділі на Рис. 1.1 квадратами, з'єднаними суцільною лінією. Рис. 1.1 слугує фазовою діаграмою n -векторного магнетика з протяжними домішками: нова критична поведінка очікується в області $\varepsilon_d - n$ площини, позначеній як “Diluted”. У частині площини, позначеній як “Pure”, асимптотична критична поведінка не відчуває присутності дефектів на відміну від ефективної критичної поведінки. Далі ми проведемо аналіз критичної динаміки в обох областях фазової діаграми.

Схема при фіксованій вимірності $d = 3$

Почнемо з розгляду β -функцій РГ (2.14), (2.15): фіксуючи значення $\varepsilon = 1$ (тобто $d = 3$) і ввіажаючи ε_d змінним параметром, ми шукаємо спільні нулі пересумованих функцій β_u і β_v . Чисельні значення координат стійкої НТ для тривимірної n -компонентного магнетика з $n = 1, 2, 3, 4$ можна знайти у роботі [157].

Щоб розрахувати значення критичного показника $z_\perp$ підставимо р-ня (2.19) для ζ_Γ у р-ня (2.12), застосовуючи процедуру пересумовування для утвореного ряду і насамкінець оцінимо його у стійкій НТ. Варто відзначити, що через не-симетричність функції ζ_Γ відносно змінних u і v (а саме, вона не містить члену лінійного за u) апроксиманта Чізгольма, вибрана для аналітичного продовження, відрізняється від тих, що використані для β -функцій. Значення критичного

показника $z_{||}$ отримується, використовуючи співвідношення (2.13).

Табл. 2.1. Значення динамічних критичних показників тривимірних n -компонентних магнетиків для різних фіксованих значень вимірності протяжних дефектів ε_d .

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
ε_d	$z_{\perp}$	$z_{ }$	$z_{\perp}$	$z_{ }$	$z_{\perp}$	$z_{ }$	$z_{\perp}$	$z_{ }$
0	2.172	-	2.065	-	2.062	-	2.058	-
0.1	2.248	2.094	2.079	2.068	2.062	2.062	2.058	2.058
0.2	2.302	2.111	2.135	2.073	2.062	2.062	2.058	2.058
0.3	2.340	2.127	2.183	2.074	2.095	2.063	2.058	2.058
0.4	2.367	2.142	2.223	2.081	2.133	2.063	2.083	2.061
0.5	2.386	2.156	2.256	2.087	2.166	2.064	2.111	2.062
0.6	2.399	2.169	2.284	2.092	2.195	2.067	2.138	2.065
0.7	2.408	2.181	2.307	2.096	2.219	2.069	2.162	2.067
0.8	2.413	2.194	2.326	2.100	2.241	2.070	2.184	2.069
0.9	2.416	2.206	2.342	2.104	2.260	2.072	2.203	2.070
1.0	2.418	2.217	2.356	2.107	2.276	2.073	2.219	2.071
1.1	2.418,	2.228	2.368	2.109	2.290	2.073	2.233	2.071

У Таблиці 2.1 ми подаємо отримані результати для критичних показників $z_{||}$, $z_{\perp}$ тривимірного n -компонентного магнетика. Випадок $\varepsilon_d = 0$ відповідає точковим дефектам. Як вже було зазначено у першому розділі, для цього випадку тільки модель Ізінга ($n = 1$) відчуває вплив безладу, і, отже, для систем з $n > 1$ значення критичних показників не змінюються у присутності структурного безладу. Наш результат можна порівняти з динамічними показниками чистих і розведених моделей Ізінга, як показано у Таблицях 2.2 і 2.3. Коли ε_d зростає, для $n = 2, 3, 4$ критичні показники залишаються постійними і дорівнюють відповідним показникам чистої моделі, доки n не зрівняється з n_c для заданого ε_d і для $n > n_c$ значення показників починають збільшуватися, тому що вони належать до неупорядкованого класу універсальності.

Цікава особливість даних, представлених у Таблиці 2.1, полягає в тому, що для кожного фіксованого ε_d відношення $z_{||} < z_{\perp}$ зберігається. Можна навести наступну фізичну інтерпретацію цього факту. Як це було відзначено для ізотропних систем [85], динамічний критичний показник z пропорційний до критичного

Табл. 2.2. Значення динамічного критичного показника z для чистої тривимірної моделі Ізінга. МС: Симуляції МК; exp: експериментальні оцінки для FeF_2 . Теоретичні оцінки, $\sim \varepsilon^2(\varepsilon^3)$: пряма підстановка $\varepsilon = 1$ у $\sim \varepsilon^2(\varepsilon^3)$ -розклади; $\sim \varepsilon^3$, res: пересумовування ε^3 розкладу; 4 loops, res: пересумовування чотирипетлевих масивних ренорм-групових функцій при $d = 3$.

	Метод	Результат
Ref. [346]	МС	2.04 ± 0.03
Ref. [347]	МС	2.06 ± 0.02
Ref. [348]	МС	2.03 ± 0.01
Ref. [349]	МС	2.032 ± 0.004
Ref. [350]	МС	2.055 ± 0.003
Ref. [351]	exp	2.1 ± 0.1
Ref. [142]	$\sim \varepsilon^2$	2.014
Eq. (2.26)	$\sim \varepsilon^3$	2.024
Eq. (2.26)	$\sim \varepsilon^3$, res	2.012
Ref. [87]	4 loops, res	2.017

Табл. 2.3. Значення динамічного критичного показника z для тривимірної моделі Ізінга з точковими нескорельованими дефектами. МС: Симуляції МК; exp: експериментальні оцінки для $\text{Fe}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}\text{F}_2$. Теоретичні оцінки, $\sim \varepsilon^{1/2}$: пряма підстановка $\varepsilon = 1$ у $\varepsilon^{1/2}$ -розклад; $\sim \varepsilon^3$, 2 loops, res: пересумовування дво-петлевих масивних ренорм-групових 3d функцій.; $\sim \varepsilon^{1/2}(\varepsilon^{3/2})$ res: підстановка дво-(три-)петлевих пересумованих координат НТ у двопетлеві розклади для z .

	Метод	Результат
Ref. [134]	МС	2.13 ± 0.05
Ref. [352]	МС	2.4 ± 0.1
Ref. [137]	МС	2.62 ± 0.07
Ref. [138]	exp	2.18 ± 0.10
Ref. [133]	$\sim \varepsilon^{1/2}$	2.336
Ref. [134]	2 loops, res	2.237
Ref. [136]	$\sim \varepsilon^{1/2}$, res	2.023
Ref. [135]	$\sim \varepsilon^{3/2}$, res	2.180

показника парної кореляційної функції η :

$$z = 2 + c\eta. \quad (2.20)$$

Для систем, які ми тут розглядаємо, критичні показники $\eta_{\perp}$ і $\eta_{\parallel}$, що характеризують поведінку спінової парної кореляційної функції в напрямках, перпендикулярному і паралельному до протяжних дефектів, відрізняються [145, 146]. Оскільки протяжні дефекти руйнують зв'язки, вздовж яких взаємодіють спіни, що перпендикулярні до напрямку протяжних дефектів, то в паралельному напрямку флуктуації сильніші, і тому $\eta_{\parallel} < \eta_{\perp}$. Таким чином, з р-ня (2.20) ми отримуємо підтвердження наших результатів для $z_{\parallel}$, $z_{\perp}$. Проте в анізотропному випадку коефіцієнт c в р-ні (2.20) також залежить від напрямку. Тому, вище наведена аргументація є скоріше якісною спробою дати фізичну інтерпретацію спостережуваного співвідношення $z_{\parallel} < z_{\perp}$.

Роботи [156, 157] також торкалися питання про наявність верхньої граничної вимірності для дефектів ε_d . У нашому аналізі ми спостерігаємо зникнення стійкої досяжної НТ при ε_d трохи вище 1. Можна запропонувати таку можливу фізичну інтерпретацію: протяжні дефекти великої вимірності (наприклад, паралельні дефекти у вигляді площин з $\varepsilon_d = 2$) можуть розділяти систему на невзаємодіючі області, тим самим перешкоджаючи феромагнітному впорядкуванню. У роботі [353] досліджувались магнетики зі спіновими взаємодіями, скорельованими у двох вимірах і випадково розподіленими у перпендикулярному напрямку. Хоча така система відрізняється від тих, що розглядаються тут, обидві моделі мають ряд загальних рис. Зокрема, було передбачено розмивання ФП через наявність плоских дефектів, і це явище було пояснено існуванням (хоча й з малою імовірністю) нескінченних просторових областей, які не мають дефектів і тому можуть перебувати в упорядкованій фазі локально.

Щоб підтвердити отримані результати ми також намагалися застосувати пересумовування Паде-Бореля для оцінки значень для $z_{\perp}$, $z_{\parallel}$. У цій процедурі ряди (2.14), (2.15) за двома змінними переписуються у термінах резольвентного ряду [354] за однією змінною і тоді застосовується Паде-апроксиманта для аналітичного продовження. Ми тут не подаємо отримані результати, оскільки вони дають близькі значення до тих, що отримані у таблиці 2.3 і відтворюють таку саму поведінку.

$\varepsilon, \varepsilon_d$ -розклад

Іншою можливістю отримати оцінки для динамічного критичного показника n -векторного магнетика з протяжними дефектами є пересумовування подвійних $\varepsilon, \varepsilon_d$ розкладів, отриманих у двопетловому наближенні у роботі [142]. Для $n < n_c$, випадкова НТ $\mathbf{R}$ є стійкою і вираз для $z_\perp$ і функція анізотропії ζ_α для $n \neq 1$ мають вигляд [142]:

$$\begin{aligned} z_\perp = & 2 - \frac{n+2}{4(n-1)}\varepsilon + \frac{(n+8)}{8(n-1)}\tilde{\varepsilon} \\ & + \{-4(n+2)[5n^2 + 42n + 112 - 192(n-1)\ln(4/3)]\varepsilon^2 \\ & - 4(n+2)[27n^2 - 264n - 240 + 576(n-1)\ln(4/3)]\varepsilon\tilde{\varepsilon} \\ & + [59n^3 - 528n^2 - 2928n - 896 + 1728(n+2)(n-1)\ln(4/3)]\tilde{\varepsilon}^2\} \\ & \times (1024(n-1)^3)^{-1}; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha = & \frac{(n+2)}{4(n-1)}\varepsilon + \frac{n+8}{8(n-1)}\tilde{\varepsilon} \\ & + [-4(n+2)(5n^2 + 10n + 144)\varepsilon^2 - 4(n+2)(27n^2 - 168n - 336)\varepsilon\tilde{\varepsilon} \\ & + (59n^3 - 240n^2 - 2640n - 1472)\tilde{\varepsilon}^2][1024(n-1)^3]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon_d$.

У той час при $n > n_c$, чиста НТ $\mathbf{P}$ є стійкою, тому в цьому випадку критична поведінка є ізотропною і динамічний показник z має вигляд:

$$z = 2 + 0.363 \frac{(n+2)\varepsilon^2}{(n+8)^2}. \quad (2.23)$$

Як відомо [83, 127–129], через виродження β -функцій слабо-розведеної моделі Ізінґа з точковими дефектами, звичайний ε -розклад для критичних показників перетворюється на $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад. Це зберігається і для протяжних дефектів: дійсно, випадок $n = 1$ можна аналізувати окремо, оскільки вирази (2.21), (2.22) містять полюси при $n = 1$, і це приводить до $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладів для критичних показників [142]. Зокрема, у відповідних виразах для z можна отримати лише найнижчий нетривіальний порядок. Крім того, $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад не дозволяє отримати надійну числову оцінку [29]. Тому для невпорядкованої моделі Ізінґа, схема при фіксованій

вимірності у підрозділі 2.1.3 залишається єдиним способом отримати чисельні оцінки.

Щоб дістати чисельну оцінку для n_c в рамках $\varepsilon, \varepsilon_d$ -розкладів, ми підставляємо у модифікований критерій Гаріса п'ятипетлевий ε -розклад для критичного показника кореляційної довжини ν_p для чистої n -компонентної моделі, наведений у роботі [355], і отримуємо такий розклад:

$$\begin{aligned} n_c = & \left(-4 + 8\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} - 2.50000\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\varepsilon} - 1.500000\tilde{\varepsilon} - 2.448919\frac{\tilde{\varepsilon}^3}{\varepsilon} + 3.014557\tilde{\varepsilon}^2 \right. \\ & + 4.141561\varepsilon\tilde{\varepsilon} - 1.682130\frac{\tilde{\varepsilon}^4}{\varepsilon} - 14.12940\varepsilon^2\tilde{\varepsilon} - 0.5736055\varepsilon\tilde{\varepsilon}^2 \\ & + 7.657623\tilde{\varepsilon}^3 + 55.57104\varepsilon^3\tilde{\varepsilon} - 16.25104\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}^2 - 37.62878\varepsilon\tilde{\varepsilon}^3 \\ & \left. + 22.53257\tilde{\varepsilon}^4 - 3.345417\frac{\tilde{\varepsilon}^5}{\varepsilon} \right) \left(2 - \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon_d. \end{aligned} \quad (2.24)$$

При підстановці $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ (тобто $\varepsilon_d = 0$) відтворюється ε -розклад для n_c для моделі з точковими нескорельованими дефектами [73].

Щоб оцінити n_c чисельно для різних фіксованих значень d, ε_d , слід застосувати пересумовування. Як відомо [33, 73], навіть простий Паде-аналіз дає збіжні результати для граничних вимірностей. З Паде-аналізу [344] відомо, що найкраща збіжність досягається уздовж головної діагоналі Паде-таблиці, тому ми використовуємо діагональну $[2/2]$ Паде-апроксиманту. У тривимірному випадку ($\varepsilon = 1$) це дає: $n_c(\varepsilon_d = 0) = 1.92$ (що добре узгоджується з відомими шестипетлевими результатами для точкового безладу $n_c = 1.942 \pm 0.026$ [72] і $n_c = 1.912 \pm 0.004$ [73]), $n_c(\varepsilon_d = 0.1) = 2.48$, $n_c(\varepsilon_d = 0.2) = 3.10$, $n_c(\varepsilon_d = 0.3) = 3.77$, $n_c(\varepsilon_d = 0.4) = 4.54$. Отримані результати подані штриховою лінією на Рис. 1.1 в оглядовому розділі.

Щоб оцінити динамічні критичні показники в НТ $\mathbf{R}$, ми застосовуємо до функцій метод пересумовування Чізгольм-Бореля (2.21), (2.22), розглядаючи їх як ряд за двома змінними $\varepsilon, \varepsilon_d$ і використовуючи апроксиманту Чізгольма. У відповідному двопетлевому наближенні динамічні критичні показники в чистій НТ $\mathbf{R}$ задаються р-ням (2.23) і цей вираз занадто короткий, щоб його пересумовувати. Тому оцінимо його при $\varepsilon = 1$ та різних n прямою підстановкою. Результати

представлені в таблиці 2.4. Вони якісно підтверджують наші висновки, зроблені на підставі техніки пересумовування при фіксованій вимірності у підрозділі 2.1.3 (див. Табл. 2.3). Розбіжність між даними, отриманими за допомогою обох технік, може служити також оцінкою точності застосованої схеми теорії збурень.

Зазначимо, що для динамічного критичного показника z n -векторного магнетика в рамках з динамікою моделі А відомі трипетлеві ряди. Вираз, знайдений у роботі [86], має вигляд:

$$z = 2 + 0.726(1 - \varepsilon \cdot 0.1885)\eta. \quad (2.25)$$

Підставляючи ε -розклад для η [355] у (2.25), отримуємо:

$$z = 2 + 0.363 \frac{(n+2)\varepsilon^2}{(n+8)^2} + \left(0.0908 \frac{(n+2)(-n^2+56n+272)}{(n+8)^4} - 0.363 \frac{0.1885n+0.3770}{(n+8)^2} \right) \varepsilon^3 \quad (2.26)$$

Чисельні оцінки цього ряду, отримані з допомогою пересумовування Паде-Бореля, подані у таблиці 2.1 для $n = 1$ і в порівнянні зі значеннями, отриманими іншими підходами.

Усі значення критичних показників для систем з протяжними домішками, були отримані лише теоретично. Тому вони потребують свого підтвердження з даних реальних або чисельних експериментів. У наступному підрозділі буде проаналізоване значення показника анізотропії для ґраткової системи спінів Ізінґа з паралельними лінійними дефектами.

2.2. Монте Карло аналіз показника анізотропії моделі Ізінґа з лінійними паралельними домішками

Оскільки нас найбільш цікавить випадок спінів Ізінґа $n = 1$ і лінійних паралельних протяжних дефектів $\varepsilon_d = 1$, то приведемо нижче чисельні оцінки критичних показників, отриманих в рамках підходу РГ для цього випадку. Оцінки, які базуються на $\sqrt{\varepsilon}$ розкладі, є такими [142]:

$$\nu_{\perp} = 0.67, \nu_{\parallel} = 0.84, \gamma = 1.34, z_{\perp} = 2.67, z_{\parallel} = 2.22. \quad (2.27)$$

Табл. 2.4. Динамічний критичний показник n -компонентної моделі з протяжними домішками, обчислений на основі пересумовування подвійного $\varepsilon, \varepsilon_d$ -розкладу (р-ня (2.21)).

	$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
ε_d	$z_{\perp}$	$z_{\parallel}$	$z_{\perp}$	$z_{\parallel}$	$z_{\perp}$	$z_{\parallel}$
0	2.0145	-	2.0150	-	2.0151	-
0.1	2.021	2.0147	2.0150	2.0150	2.0151	2.0151
0.2	2.046	2.0150	2.0150	2.0150	2.0151	2.0151
0.3	2.067	2.0151	2.0511	2.020	2.0151	2.0151
0.4	2.175	2.094	2.088	2.050	2.024	1.984
0.5	2.209	2.110	2.129	2.081	2.064	2.020
0.6	2.238	2.122	2.167	2.101	2.114	2.054
0.7	2.270	2.138	2.210	2.120	2.158	2.085
0.8	2.287	2.146	2.247	2.140	2.195	2.113
0.9	2.315	2.157	2.282	2.153	2.244	2.126
1.0	2.333	2.171	2.317	2.169	2.279	2.141
1.1	2.354	2.175	2.346	2.176	2.314	2.164

Достовірніші оцінки отримуються з допомогою пересумовування двопетлевих функцій РГ для статичних показників [157]:

$$\nu_{\perp} = 0.750, \nu_{\parallel} = 0.880, \gamma = 1.483, \quad (2.28)$$

і для динамічних показників, розрахованих у попередньому підрозділі (див. 2.1) :

$$z_{\perp} = 2.418, z_{\parallel} = 2.217. \quad (2.29)$$

Варто перевірити ці результати з допомогою МК симуляцій. Далі ми покажемо, як для того, щоб витягнути кількісні характеристики критичної поведінки з даних МК, отриманих для скінченних систем, використовують скінченно-розмірний скейлінг.

2.2.1. Анізотропний скінченно-розмірний скейлінг

МК симуляції проводяться для систем скінченного розміру, в той час як сам ФП відбувається в термодинамічній границі, коли система безмежна. Тому

скінченно-розмірний скейлінг (CPC) [356–360] відіграє ключову роль при розрахунку критичних показників термодинамічних функцій з даних МК. Згідно теорії CPC, у безпосередній близькості до критичної точки $\tau \rightarrow 0$ спостережувані величини, наприклад, параметр порядку M і магнітна сприйнятливості χ ізотропної системи змінюються з лінійним розміром системи L як:

$$M(\tau \rightarrow 0) = L^{-\beta/\nu} \mathcal{M}(L), \quad (2.30)$$

$$\chi(\tau \rightarrow 0) = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L), \quad (2.31)$$

де $\mathcal{M}$, $\tilde{\chi}$ – це скейлінгові функції намагнічення і сприйнятливості. У цьому випадку не має залежності від напрямку в ґратці (x , y , і z напрямки еквівалентні для тривимірної моделі). Величина, що становить особливий інтерес в МК симуляціях, а саме кумулянт Біндера четвертого порядку [361], змінюється з L як:

$$U_4(\tau, L) = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle}{3\langle M^2 \rangle^2} = \tilde{U}_4(\tau L^{1/\nu}), \quad (2.32)$$

де $\langle M^2 \rangle$, $\langle M^4 \rangle$ – другий і четвертий моменти розподілу параметра порядку, $\tilde{U}_4$ – скейлінгова функція. В ізотропній моделі усі криві температурної залежності U_4 для систем різного розміру перетинаються в одній точці, що вказує положення критичної температури на осі температур. Це справедливо також для випадку, якщо утримувати сторони симуляційного боксу різними, але зі сталим співвідношенням: усі криві для різних розмірів при різних узагальнених співвідношеннях сторін перетинаються у термодинамічній границі в критичній температурі [362].

Однак існують системи, для яких характерний сильний анізотропний скейлінг при критичності, тобто критичні показники кореляційних довжин цих систем у різних напрямках відрізняються. Така поведінка спостерігається у моделі Ізінґа із взаємодією наступних найближчих сусідів у точці Ліфшиця [363], при нерівноважному ФП у керованих дифузивних системах [364–367], у моделі Ізінґа з диполями у площині [368], у керованій моделі Ізінґа з тертям [369, 370], модель Ізінґа зі зсувним напруженням [371, 372], у проблемі локалізації-делокалізації у міжфазній області [373]. Спільною особливістю вище згаданих систем є наявність осі анізотропії, що приводить до існування двох характеристичних масштабів довжини: $L_{||}$

вздовж осі анізотропії і $L_{\perp}$ у перпендикулярних напрямках. Згідно з узагальненням концепції СКС для систем з двома характеристичними масштабами довжини [374], властивості термодинамічних функцій залежать від “узагальненого співвідношення сторін” $\rho = L_{\parallel}/L_{\perp}^{\theta}$, з показником анізотропії $\theta = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$. Таким чином, рівняння (2.30), (2.31) модифікуються:

$$M(\tau \rightarrow 0) = L_{\parallel}^{-\beta/\nu_{\parallel}} \mathcal{M}_{\parallel}(L_{\parallel}/L_{\perp}^{\theta}), \quad (2.33)$$

$$\chi(\tau \rightarrow 0) = L_{\parallel}^{\gamma/\nu_{\parallel}} \tilde{\chi}_{\parallel}(L_{\parallel}/L_{\perp}^{\theta}). \quad (2.34)$$

Відзначимо, що (2.33), (2.34) можна еквівалентно представити як:

$$M(\tau \rightarrow 0) = L_{\perp}^{-\beta/\nu_{\perp}} \mathcal{M}_{\perp}(L_{\perp}/L_{\parallel}^{1/\theta}), \quad (2.35)$$

$$\chi(\tau \rightarrow 0) = L_{\perp}^{\gamma/\nu_{\perp}} \tilde{\chi}_{\perp}(L_{\perp}/L_{\parallel}^{1/\theta}), \quad (2.36)$$

де скейлінгова функція $\mathcal{M}_{\parallel}(\rho) = \rho^{-\beta/\nu_{\parallel}} \mathcal{M}_{\perp}(\rho^{-1/\theta})$ і $\tilde{\chi}_{\parallel}(\rho) = \rho^{\gamma/\nu_{\parallel}} \tilde{\chi}_{\perp}(\rho^{-1/\theta})$. Анізотропний СКС для кумулянту Біндера в критичній точці передбачає

$$U_4(\tau \rightarrow 0) = \tilde{U}_4(L_{\parallel}/L_{\perp}^{\theta}). \quad (2.37)$$

Таким чином, щоб отримати значення критичних показників, потрібно проводити МК симуляції, утримуючи значення $L_{\parallel}/L_{\perp}^{\theta}$ фіксованим. Можна використати значення показників (2.27)-(2.29) для того, щоб розрахувати показник анізотропії θ для нашої моделі. Використовуючи результати $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладів (2.27), ми можемо оцінити $\theta = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp} \simeq 1.25$. Беручи до уваги, що $\nu_{\parallel}/\nu_{\perp} = z_{\perp}/z_{\parallel}$ [142], наступні оцінки можемо отримати за допомогою результатів пересумовування двопетлевих функцій РГ $\theta = \nu_{\parallel}/\nu_{\perp} = 1.173$ з (2.28) і $\theta = z_{\perp}/z_{\parallel} = 1.091$ з (2.29). Усі оцінки дають $\theta > 1$. Фізично це легко зрозуміти: у паралельному напрямку флуктуації сильніші, тому що вони не обмежені дефектами і кореляційна довжина у цьому напрямку розбігається різкіше.

Для того, щоб оцінити θ прямо з МК симуляцій, незалежно від передбачень РГ, ми можемо використати співвідношення, що характеризує систему з анізотропним скейлінгом, для якої $L_{\perp} \gg L_{\parallel}$ при $\tau \rightarrow 0$ [368, 375]:

$$\xi_{\perp}(L_{\parallel}) \sim L_{\parallel}^{1/\theta}. \quad (2.38)$$

Таке співвідношення успішно застосовувалось при аналізі фазових переходів другого роду у моделях Ізінґа з тертям [369, 370] і зі зсувним напруженням [372].

2.2.2. Деталі симуляцій

Ми розглядаємо тривимірну модель Ізінґа на простій кубічній ґратці з кількістю вузлів $L_\perp \times L_\perp \times L_\parallel = V$. Явно гамільтоніан моделі задається (1.22). У нашому випадку однокомпонентних спінів $\vec{S}_\mathbf{r} \equiv s_\mathbf{r}$, де $s_\mathbf{r} = \pm 1$. Тоді $c_\mathbf{r} = \{0, 1\}$ характеризують чи вузол $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $1 \leq x \leq L_\perp$, $1 \leq y \leq L_\perp$, $1 \leq z \leq L_\parallel$ зайнятий спіном $s_\mathbf{r}$ ($c_\mathbf{r} = 1$), чи він відповідає немагнітному вузлу ($c_\mathbf{r} = 0$). Приймаємо, що спіни на найближчих вузлах взаємодіють феромагнітно з постійною обмінною взаємодією $J > 0$.

Немагнітні вузли ($c_\mathbf{r} = 0$) у нашій моделі розташовані як паралельні лінії і орієнтовані вздовж однієї осі (ми вибрали вісь z). Довжина цих ліній співпадає з розміром системи у напрямку осі z , позначимо її $L_\parallel$. Рис. 2.1 показує можливу конфігурацію таких ліній.

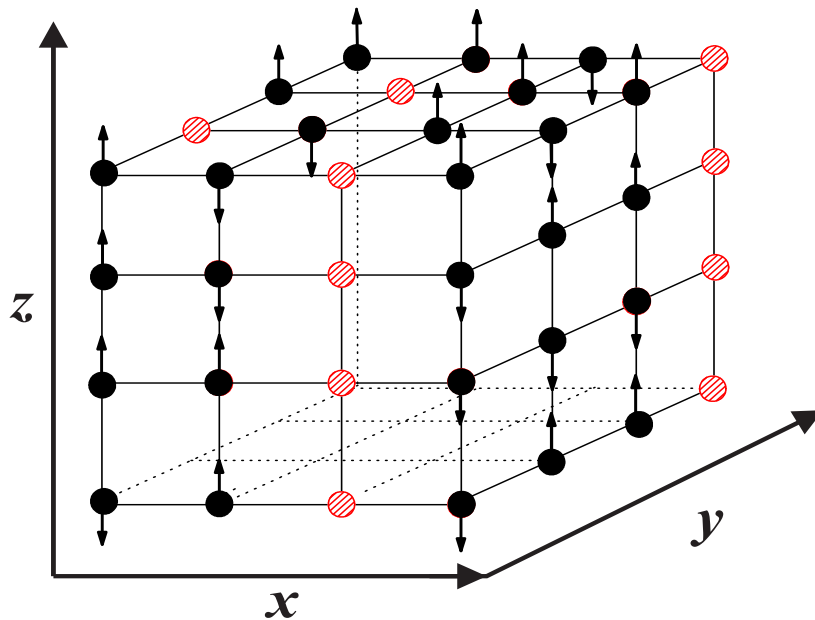


Рис. 2.1. Приклад ґратки розміру $4 \times 4 \times 4$ зі спінами Ізінґа (чорні кружки) і немагнітними домішками (світлі кружки), зібраними у $n_{\text{imp}} = 4$ ліній.

Ми генеруємо розподіл домішок для даної концентрації p для ґратки роз-

міру V таким чином: розраховуємо ціле число $n_{\text{imp}} = \text{int}(pL_{\perp}^2)$ ліній домішок з довжиною $L_{\parallel}$, тоді випадковим чином розподіляємо точки перетину цих ліній з площиною $x - y$, як показано на Рис. 2.1.

Обчислюємо такі степені намагнічення ($k = 1, 2, 4$)

$$M^k = \left(\frac{1}{V} \sum_{\{\mathbf{r}\}} c_{\mathbf{r}} s_{\mathbf{r}} \right)^k, \quad (2.39)$$

де $\{\mathbf{r}\}$ означає підсумовування за усіма вузлами ґратки. Зі степенів намагнічення ми конструюємо магнітну сприйнятливість і кумулянт Біндера наступним чином:

$$\chi = V \left(\overline{\langle M^2 \rangle} - \overline{\langle |M| \rangle^2} \right), \quad (2.40)$$

$$U_4 = 1 - \left(\frac{\overline{\langle M^4 \rangle}}{3 \overline{\langle M^2 \rangle^2}} \right). \quad (2.41)$$

Тут спершу проводимо термодинамічне усереднення степенів намагніченості для кожної реалізації безладу (позначаємо це кутовими дужками, тобто $\langle M^2 \rangle$). Тоді усереднюємо за різними реалізаціями безладу. Останнє усереднення позначаємо верхньою рисою. Фіксуємо $J/k_B = 1$ в симуляціях, у цьому випадку $\beta = 1/T$ – це обернена температура.

Обчислюємо також кореляційні довжини для напрямків, паралельних до ліній домішок $\xi_{\parallel}$ і перпендикулярних до них $\xi_{\perp}$, з допомогою перетворення Фур'є подібним чином, як це проводиться для ізотропних систем [376]. Вводимо такі величини $s(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_{\mathbf{r}} s_{\mathbf{r}}$, де $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – хвильовий вектор. Ми позначимо $\langle \chi_0 \rangle = \langle |s(0, 0, 0)|^2 \rangle$, $\langle \chi_1^{\parallel} \rangle = \langle |s(2\pi/L_{\parallel}, 0, 0)|^2 \rangle$, $\langle \chi_1^{\perp} \rangle = \langle |s(0, 0, 2\pi/L_{\perp})|^2 \rangle$ термодинамічне усереднення компонент Фур'є спінів для окремої реалізації розташування домішок:

$$\xi_{\parallel} = \frac{1}{2 \sin(\pi/L_{\parallel})} \sqrt{\frac{\langle \chi_0 \rangle}{\langle \chi_1^{\parallel} \rangle} - 1}, \quad \xi_{\perp} = \frac{1}{2 \sin(\pi/L_{\perp})} \sqrt{\frac{\langle \chi_0 \rangle}{\langle \chi_1^{\perp} \rangle} - 1}. \quad (2.42)$$

Симуляції проводяться в рамках гібридного методу МК [377]. Кожен крок МК складається з одного перекидання кластеру Вольфа, за яким слідує $V/4$ спроб

перекидання спінів, згідно з правилом Метрополіса. Оновлення кластерів Вольфа запобігає критичному сповільненню, у той час як перекидання Метрополіса для одиничних спінів для системи з домішками забезпечує оновлення слабо з'єднаних областей.

У нашому дослідженні ми працюємо з концентрацією домішок $p = 0.2$. Така концентрація часто використовується у симуляціях МК моделі Ізінга з безладом [131, 165, 166, 178, 179], оскільки у цьому випадку концентрація магнітних вузлів $1 - p = 0.8$ далека від перколяційного порогу і від чистої системи. Додатковою емпіричною причиною вибору саме цього значення є те, що для тривимірної моделі Ізінга з нескорельованими домішками поправки до скейлінгу при концентрації магнітних вузлів 0.8 виявились найменшими [131].

2.2.3. Результати симуляцій і їх аналіз

У цьому підрозділі, застосовуючи вище описаний формалізм, ми приведемо три оцінки показника анізотропії, отриманих з передбачень анізотропного СРС для різних величин. З СРС сприйнятливості отримаємо також оцінку для $\gamma/\nu_{\perp}$.

Розрахунок кореляційної довжини

Щоб використати (2.38), потрібно проводити розрахунки при критичній температурі нескінченної системи. Вважатимемо, що значення критичної температури безмежної системи є дуже близьким до значення псевдо-критичної температури системи з максимально доступним (для наших симуляцій) розміром. У цьому випадку його дає температура, при якій спостерігається максимум сприйнятливості $\chi_{\max}$. Ми проводимо розрахунки для кубічної системи розміру 128^3 з концентрацією домішок $p = 0.2$. Усереднення за безладом можна проводити в рамках одного з двох можливих протоколів. Згідно першої процедури, для кожної реалізації безладу отримують температурну залежність сприйнятливості. Тоді усі ці криві усереднюються, щоб дістати одну криву χ в залежності від β . Тоді значення β , при якому $\chi(\beta)$ має максимум, асоціюється з критичною температурою (ми

називатимемо цей спосіб *метод А*). Другою альтернативою є усереднення температур, при яких $\chi_{\max}$ досягається для кожної реалізації (ми називаємо цей спосіб *метод В*).

Результати, отримані обома методами, подані на Рис. 2.2. Дві криві, зображені неперервними лініями на рисунку, показують поведінку $\chi(\beta)$ для двох окремих реалізацій безладу, у той час як пунктирна крива показує функцію $\chi(\beta)$, усереднену за 320 різними зразками (реалізаціями безладу). Використовуючи *метод А*, спершу усереднимо сприйнятливості і тоді знайдемо точку $\beta_{\max}^A = 0.2565(1)$ – фіолетовий ромб на Рис. 2.2. Використовуючи *метод В*, ми спершу знайдемо сприйнятливості для кожної конфігурації безладу, і тоді усереднимо положення цих максимумів за зразками, отримавши $\beta_{\max}^B = 0.25648(5)$ – чорний квадрат на Рис. 2.2. Ці два значення для $\beta_{\max}$ для *методів А і В* співпадають у межах

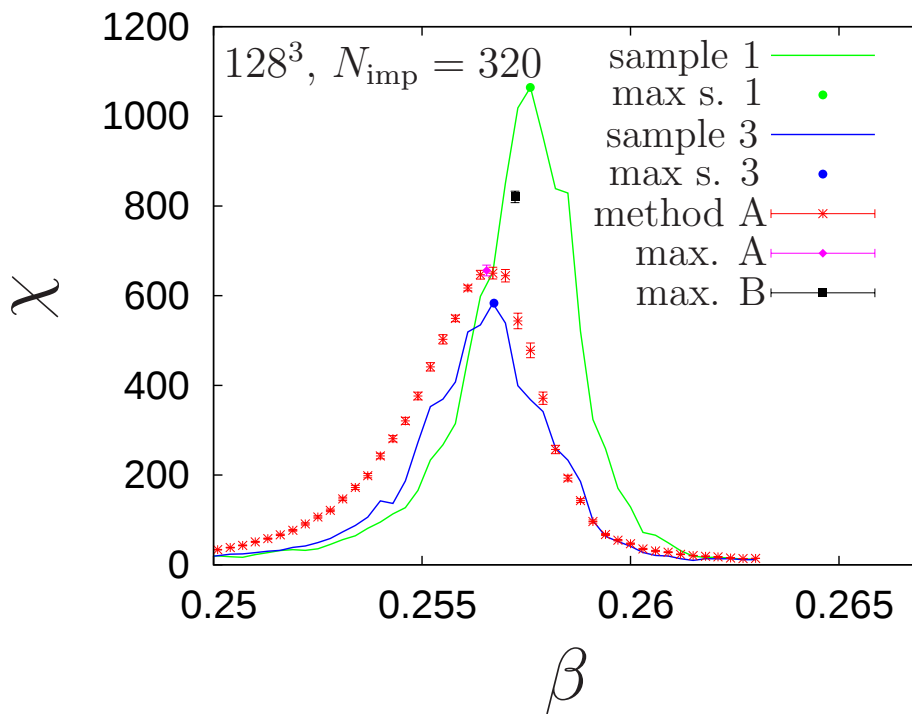


Рис. 2.2. Максимум магнітної сприйнятливості χ при $\beta_{\max}^A = 0.2565(1)$ для *методу А* і $\beta_{\max}^B = 0.25648(5)$ для *методу В* для системи 128^3 і $p = 0.2$.

чисельної точності розрахунків. *Метод А* відповідає усередненню вільної енергії за реалізаціями безладу, і далі ми використовуємо отримане значення критичної точки $\beta_{\max}^A = 0.2565(1)$. Зі значенням критичної температури ми можемо викона-

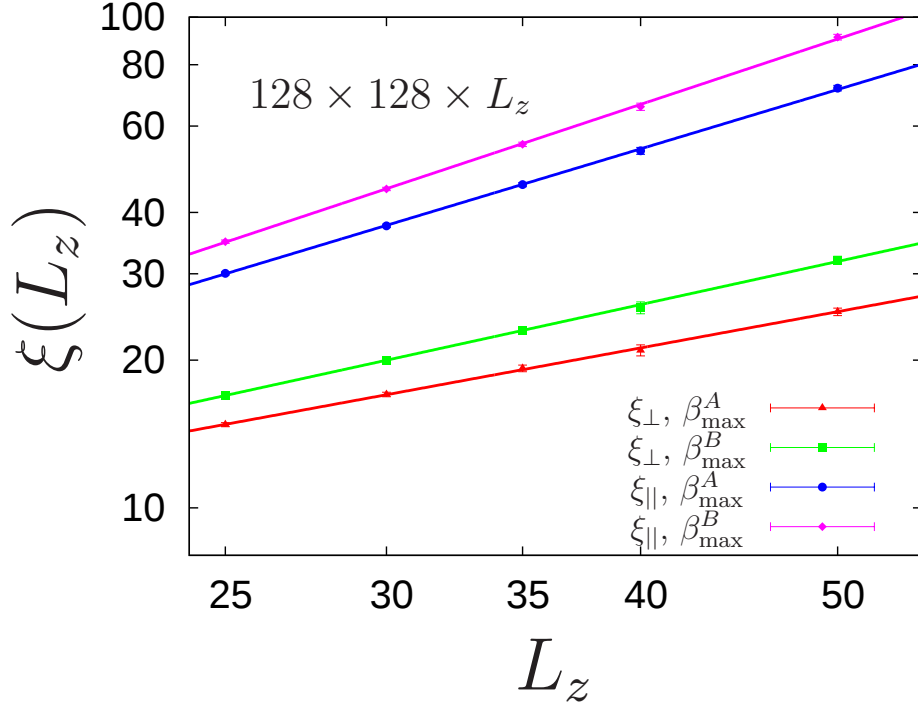


Рис. 2.3. Результати апроксимації ξ у вигляді степеневої залежності від $L_{\parallel}$ для $128 \times 128 \times L_{\parallel}$ і $p = 0.2$ при $\beta_{\max}^A = 0.25655(10)$ для *методу A* і $\beta_{\max}^B = 0.25648(5)$ для *методу B*.

ти симуляції і через співвідношення (2.38) отримати показник анізотропії θ . Для цього ми аналізуємо кореляційну довжину $\xi_{\perp}$ системи розміру $128 \times 128 \times L_{\parallel}$, змінюючи $L_{\parallel}$ для двох значень $\beta_{\max}$. Результати симуляцій $L_{\parallel} = 25 - 50$ подані на Рис. 2.3, де ми зображаємо ξ для $\perp$ і $\parallel$ напрямків як функцію $L_{\parallel}$. Тоді ми виконаємо апроксимацію даних для $\xi_{\perp}$ згідно формули:

$$\xi_{\perp}(L_{\parallel}) = aL_{\parallel}^b, \quad (2.43)$$

використовуючи параметри підгонки a, b . Для *методу A* ми дістаємо $a = 1.27(4)$, $b = 0.76(1)$, у той час як у *методі B* ми отримуємо оцінки $a = 1.06(3)$, $b = 0.81(5)$. Порівнюючи (2.43) з (2.38), отримуємо $\theta = 1/b$ з наступними оцінками: $\theta \approx 1.31$ (*метод A*) та $\theta \approx 1.23$ (*метод B*). Приймаючи ці значення як інтервал точності θ і визначаючи, $1.2 \lesssim \theta \lesssim 1.3$, ми бачимо, що вони достатньо добре узгоджуються з існуючими аналітичними оцінками РГ (див підрозділ 2.2.1).

Розрахунок кумулянту Біндера

Інший спосіб обчислити значення показника θ є наступним. Ми очікуємо, що усі криві для температурної залежності кумулянту Біндера U_4 для систем різних розмірів, але при фіксованому узагальненому співвідношенні сторін з властивим θ перетнуться у критичній точці. Таким чином, ми можемо розглядати систему розміру $L_\perp \times L_\perp \times L_\parallel$, одночасно утримуючи $L_\parallel = L_\perp^\theta$ для різних значень θ . Для цієї системи ми розраховуємо кумулянт $U_4(\beta, L_\perp)$ як функцію оберненої температури β для різних значень $L_\perp$. При властивому значенні θ^* ми очікуємо перетин кривих. Ми виконуємо симуляції для $L_\perp = 20, 40, 60, 80, 100$, усереднення проводилось для $N_{\text{imp}} = 128$ реалізацій безладу.

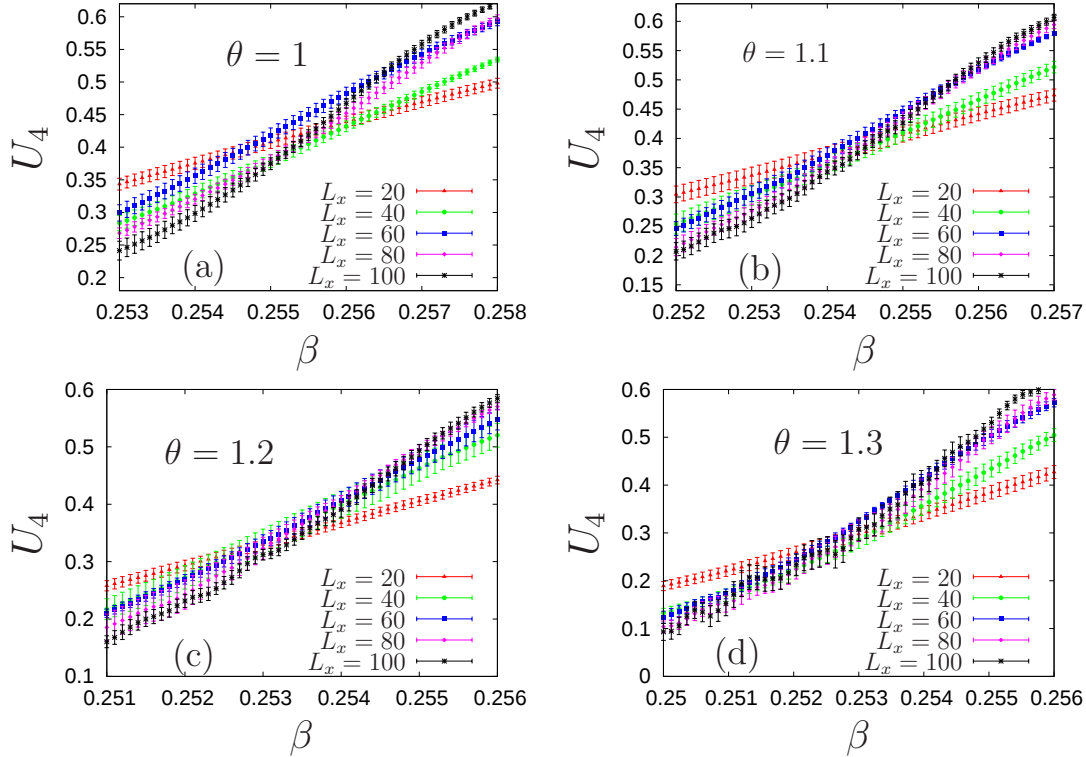


Рис. 2.4. Кумулянти намагнічення U_4 як функція оберненої температури β для $L_\parallel = L_\perp^\theta$: (a) $\theta = 1.0$; (b) $\theta = 1.1$; (c) $\theta = 1.2$; (d) $\theta = 1.3$.

На Рис. 2.4(a)-(d) зображено кумулянт для значень $\theta = 1, 1.1, 1.2, 1.3$, відповідно. Кожна крива зображає $U_4(\beta)$, усереднене за 128 реалізаціями безладу. Як можна бачити, присутність безладу розмиває єдину точку перетину в область температур, де усі криві перетинаються. Найвужча область очікується

для значення θ , яке є достатньо близьким до дійсного. Щоб проаналізувати цю ситуацію для різних значень θ , ми використаємо наступну процедуру. Розділимо повний набір $N_{\text{imp}} = 128$ різних реалізацій безладу на вісім серій і обчислюємо середнє значення (усереднене за $128/8 = 16$ реалізацій) інваріанту U_4^k для кожної серії $k = 1, 2, \dots, 8$. Пізніше ми використаємо усереднення за U_4^k для визначення чисельної точності. На Рис. 2.5(а) зображено порівняння результатів для U_4^k як функцію β для двох різних серій $k = 1$ (лінії) і $k = 2$ (трикутники) для $\theta = 1$ і різних розмірів $L_{\perp} = 20, 40, 60, 80, 100$. На цьому рисунку спостерігається відмінність між графіками для двох серій через флуктуації, спричинені домішками. Наша ціль – дослідити розкид точок перетину. В ідеальному випадку, графіки для систем п'яти розмірів повинні перетнутись в десяти точках. На Рис. 2.5(б) приведені дані для $U_4^{k=1}$ і точки перетину (β_{ij}^k, U_{ij}^k) позначено чорними кружками. Тут пара індексів ij позначає системи двох різних розмірів з $i = 1, 2, 3, 4, 5$ для $L_{\perp} = 20, 40, 60, 80, 100$. Графіки для систем деяких розмірів перетинаються поза розглянутим інтервалом температур для β , а саме, для $L_{\perp} = 40$ і для $L_{\perp} = 80, 100$. У цьому випадку ми вибираємо “точкою перетину” точку між лівими або правими кінцями цих ліній, залежно з якого боку відстань між кінцями є меншою.

Ще однією можливою причиною появи багатьох точок перетину є велике розсіяння точок графіків, викликане чисельною неточністю. У такому випадку виконуємо усереднення за усіма точками перетину і отримуємо усереднену точку. Тоді ми розраховуємо середні значення оберненої температури

$$\beta_{\text{av}}^k = \frac{1}{10} \sum_i^5 \sum_{j<i}^5 \beta_{ij}^k,$$

і кумулянта

$$U_{\text{av}}^k = \frac{1}{10} \sum_i^5 \sum_{j<i}^5 U_{ij}^k,$$

за десятьма точками перетину для систем п'ятих розмірів для кожної серії k . Ми спостерігаємо (як очікувалось), що середнє точок перетину не співпадає з перетином усереднених ліній.

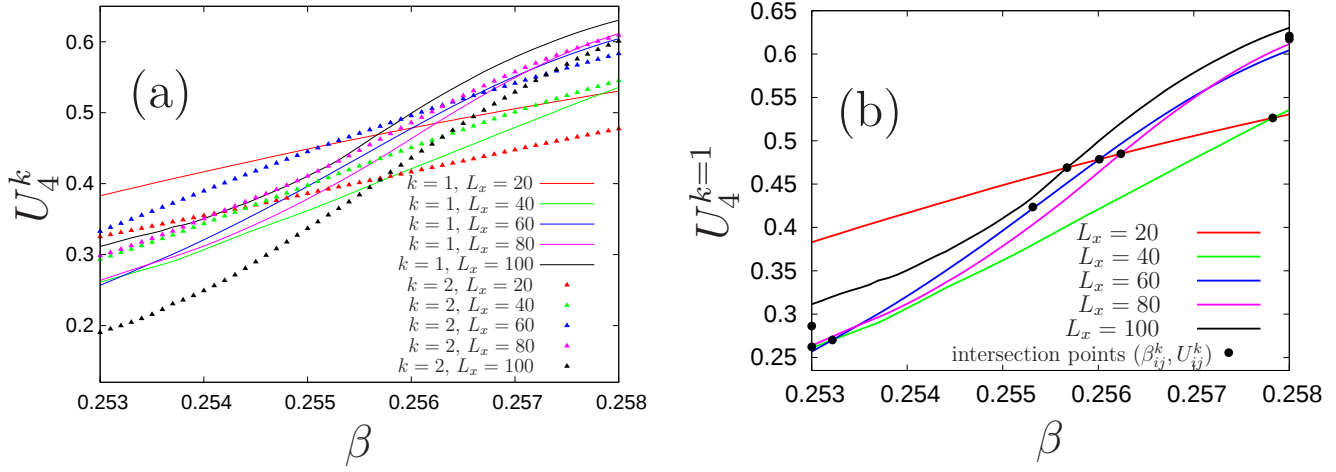


Рис. 2.5. Кумулянт U_4^k для k -ої серії як функція β для $\theta = 1$ і різних значень $L_\perp = 20, 40, 60, 80, 100$: (a) Порівняння результатів для $k = 1$ (лінії) і $k = 2$ (символи). Відзначимо, що деякі пари графіків (наприклад, для $L_\perp = 40$ і $L_\perp = 80, 100$ для $k = 1$) мають перетин у межах розглянутої області. (b) Результати для точок перетину (β_{ij}^k, U_{ij}^k) при $k = 1$.

Тепер ми можемо обчислити середні значення квадратів відхилення від середніх значень для оберненої температури

$$\Delta\beta^2 = \frac{1}{8 \times 10} \sum_{k=1}^8 \sum_i^5 \sum_{j<i}^5 (\beta_{ij}^k - \beta_{av}^k)^2,$$

і для кумулянту

$$\Delta U_4^2 = \frac{1}{8 \times 10} \sum_{k=1}^8 \sum_i^5 \sum_{j<i}^5 (U_{ij}^k - U_{av}^k)^2,$$

і розрахувати точність обчислень. На Рис. 2.6(a) ми подаємо $\Delta\beta^2$ як функцію θ . Амплітуда квадрату відхилень оберненої температури є порядку 10^{-6} , що узгоджується з середньою відстанню між точками $\Delta\beta \sim 10^{-3}$. Ми не спостерігаємо помітного мінімуму в інтервалі $1.0 \leq \theta \leq 1.3$, і чисельна точність є порівнювана з розкидом точок. На Рис. 2.6(b) ми подаємо дані для середнього квадрату відхилень для кумулянта ΔU_4^2 . Розподіл точок є дуже подібним до того, що отримується для оберненої температури. Точка для $\theta = 1.1$ є нижче своїх сусідів, але відстань між цими точками є порядку чисельної точності. Таким чином, вище описана процедура підтверджує значення $\theta = 1.1$ як оптимальне.

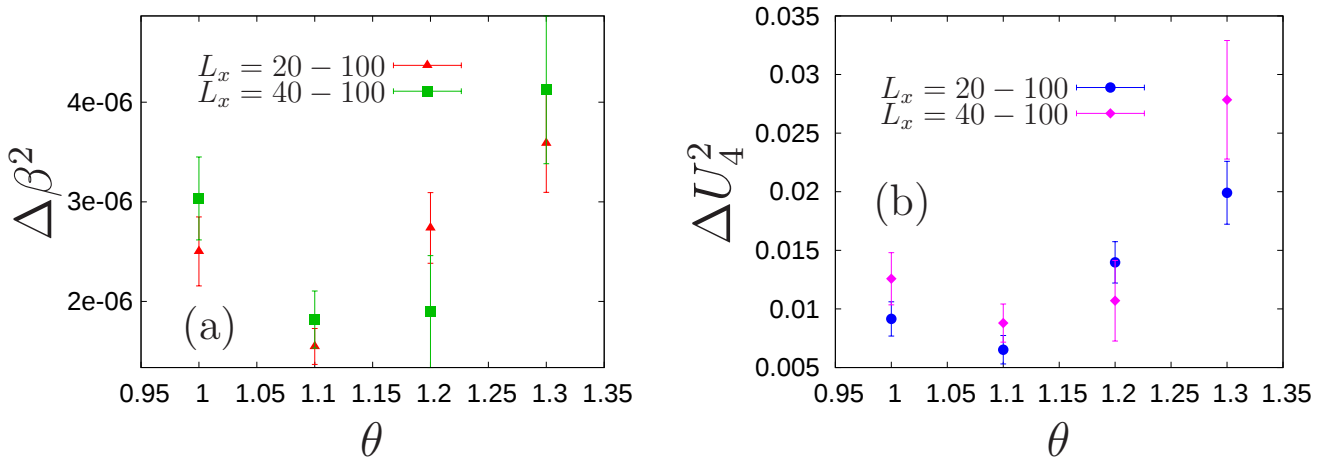


Рис. 2.6. (а) Середнє квадратів відхилень точок перетину для оберненої температури $\Delta\beta^2$ як функція θ ; (б) середнє квадрату точок перетину для відхилень кумулянта ΔU_4^2 як функція θ .

Обчислення сприйнятливості

У цьому підрозділі опишемо результати обчислень магнітної сприйнятливості при критичній точці β_c з різними значеннями показника θ . На Рис. 2.7 ми подаємо магнітну сприйнятливість χ як функцію розміру системи $L_\perp$ у подвійному логарифмічному масштабі для $\beta_{\max}^A = 0.2565(1)$. Проводимо апроксимацію магнітної сприйнятливості за допомогою лінійної функції $L_\perp$ у подвійному логарифмічному масштабі: $\chi = aL_\perp^b$, де a і b – параметри апроксимації. Тоді ми оцінюємо відхилення значень сприйнятливості, отриманих з симуляцій від тих, що отримані з процедури апроксимації з допомогою величини $\hat{\chi}^2$ визначеної як

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\chi_i - f(L_i)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.44)$$

де $N = 8$ – це число значень χ_i , розраховане для $i = 1, 2, \dots, N$ значень $L_i = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100$ розміру системи $L_\perp$, $f(x)$ – апроксимуюча функція, σ_i^2 – це відповідна дисперсія, визначена межами похибки.

Те саме число МК кроків використовується для даного значення показника θ . Таким чином, дисперсія σ_i є найменшою для малих значень розміру системи $L_\perp$ і зростає для більших значень $L_\perp$. Повне число МК кроків спадає із зростанням θ (з 5×10^6 для $\theta = 1$ до 5×10^5 для $\theta = 1.45$).

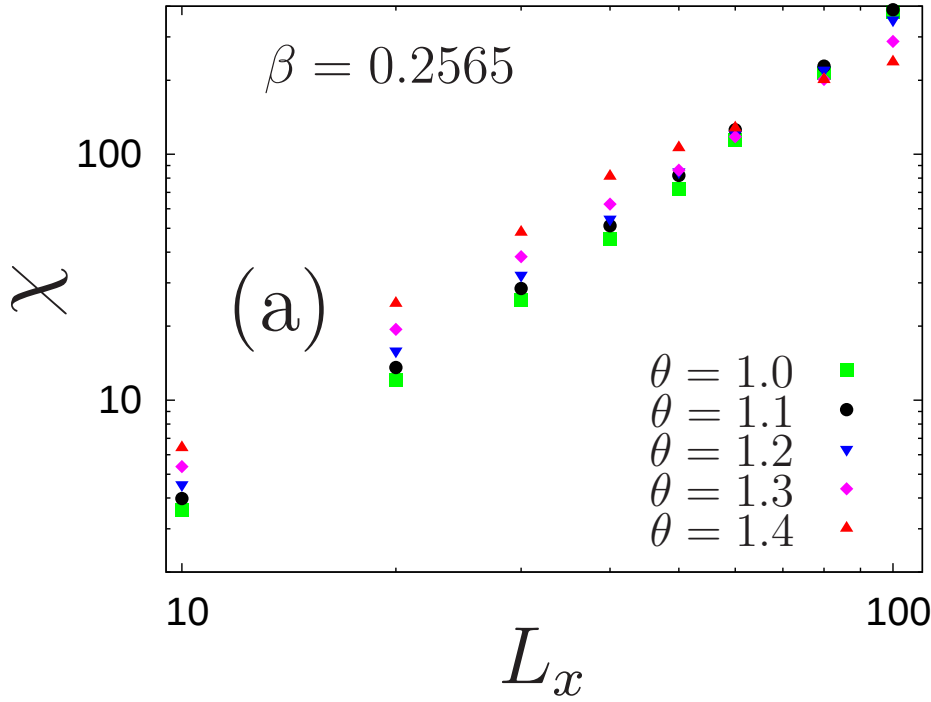


Рис. 2.7. Магнітна сприйнятливість χ як функція розміру системи $L_{\perp}$ для різних значень $\theta = 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ у точці $\beta_{\max}^A = 0.2565(1)$.

Параметр процедури апроксимації $\hat{\chi}^2$ характеризує “якість” даних по відношенню до пропонованої функціональної залежності. У нашому випадку цей параметр описує відхилення точок від прямої лінії у представленні подвійного логарифмічного масштабу. Ми зображаємо $\hat{\chi}^2$ як функцію θ на Рис. 2.8. Загальною тенденцією є спадання $\hat{\chi}^2$ із зростанням θ , тому що через менше число МК кроків дисперсія є більшою у цьому випадку. Ми спостерігаємо мінімум в області $\theta \approx 1.2 - 1.3$. На жаль, для цієї процедури ми не можемо обчислити дисперсію (точність) $\delta\hat{\chi}^2$, тому ми повторимо процедуру у дещо інший спосіб. Ми розіб’ємо 320 реалізацій безладу (для кожного значення $L_{\perp}$ для фіксованого θ) у 10 серій і проведемо апроксимацію $\ln(\chi) \simeq \ln(a_k) + b_k \ln(L_{\perp})$ для кожної серії, отримуючи деяке значення $\hat{\chi}_k^2$. Тоді ми усереднюємо ці значення, розраховуючи чисельну точність і подаючи результати на Рис. 2.9(a) (чорні кружки для $\hat{\chi}_k^2$ і червоні трикутники для середніх значень). Можна побачити, що $\hat{\chi}^2$ досягає мінімуму при $\theta^* \simeq 1.25$. На Рис. 2.9(b) ми подаємо значення показника степеня як функцію θ . Значення b при θ^* дає оцінку для $\gamma/\nu_{\perp} \simeq 1.85 \pm 0.05$, використовуючи вікно зна-

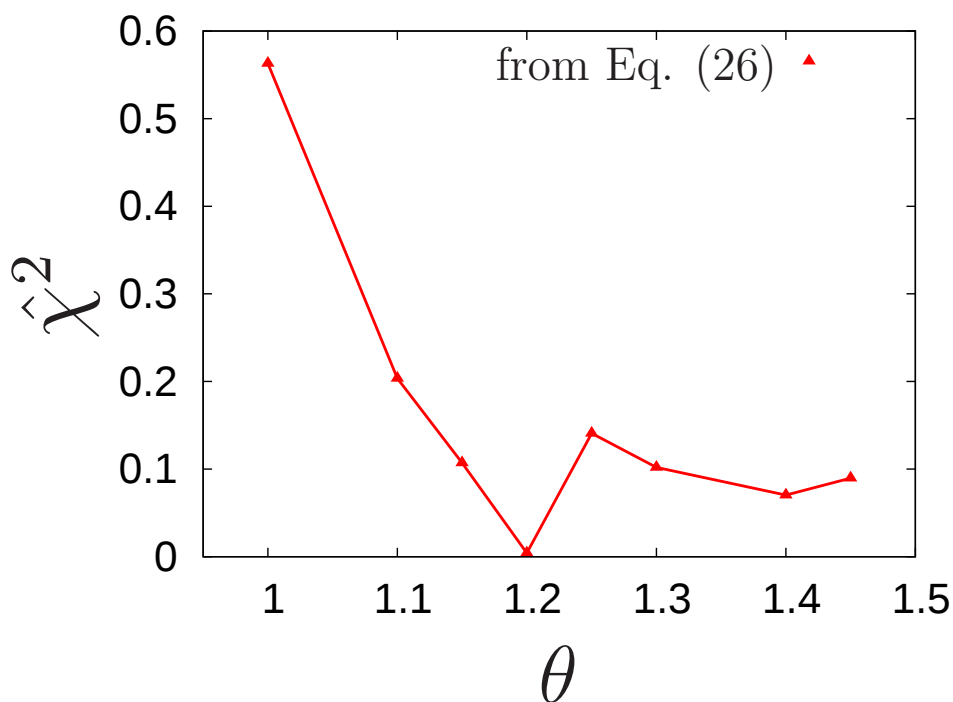


Рис. 2.8. Параметр відхилення $\hat{\chi}^2$ від лінійної підгонки (Eq. (2.44)) магнітної сприйнятливості як функція θ .

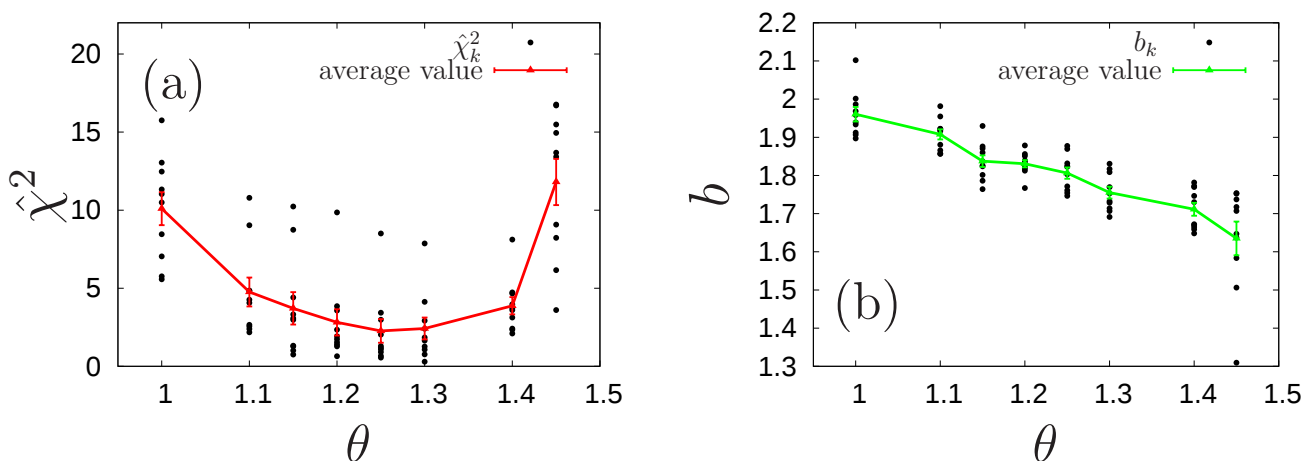


Рис. 2.9. (a) Параметр $\hat{\chi}^2$ лінійної апроксимації ($\hat{\chi}_k^2$ для кожної серії показано чорними кружками, усереднений результат – червоними трикутниками) як функція θ ; (b) Результат показника степеня b у формулі підгонки (b_k для кожної серії показано чорними кружками, усереднений результат – зеленими трикутниками) як функція θ .

чень $1.1 \leq \theta \leq 1.3$. Ми представляємо також оцінку $\gamma/\nu_{\perp} = 1.90 \pm 0.08$, отриману з даних Рис. 2.9 для значення $\theta = 1.1$, вказаного як оптимальне у підрозділі 2.2.3 при аналізі кумулянту Біндера.

Ми застосовували процедуру, описану вище, також для обчислення намагнічення. Однак у цьому випадку не отримали задовільних результатів. Це відбулось тому, що намагнічення є величиною, що прямує до нуля у критичній точці, а тому є дуже чутливою до відповідного визначення критичної температури.

2.3. Ефективні критичні показники моделі магнетика з протяжними домішками

Отримані вище результати стосувались асимптотичної критичної поведінки моделі (2.8). У цьому підрозділі обговоримо ефективну критичну поведінку, яка спостерігається при наближенні до критичної точки T_c [69, 378]. Така поведінка характеризується ефективними критичними показниками, що керують законами скейлінгу, коли ще не досягнуто T_c . Розрахунки ефективних критичних показників для моделей з протяжними домішками не розглядалися поки-що ні в динаміці, ні для статичної поведінки. Однак, саме ці показники, в основному, спостерігаються в числових та реальних експериментах, які можуть проводитись поза межами асимптотичної області.

Ефективні критичні показники визначаються як логарифмічні похідні відповідних досліджуваних величин за приведеною температурою $\tau = |T - T_c|/T_c$ [69, 378]. Наприклад, ефективний критичний показник для кореляційної довжини, перпендикулярної до домішок, визначається як:

$$\nu_{\perp}^{\text{eff}}(\tau) = -\frac{d \ln \xi_{\perp}(\tau)}{d \ln \tau}. \quad (2.45)$$

У границі $T \rightarrow T_c$ ефективний показник співпадає з асимптотичним $\nu_{\perp}^{\text{eff}} = \nu_{\perp}$. У рамках теоретико-польового підходу РГ ефективні показники розраховуються, використовуючи значення констант зв'язку (розв'язки рівнянь на потоки), які залежать від параметра потоку ℓ . Наприклад, ефективні показники для кореляційної довжини і часу релаксації перпендикулярних до напрямку протяжних

домішок визначаються як:

$$1/\nu_{\perp}^{\text{eff}}(\ell) = 2 - \zeta_{\phi^2}(u(\ell), v(\ell)) + \dots; \quad (2.46)$$

$$z_{\perp}^{\text{eff}}(\ell) = 2 + \zeta_{\Gamma}(u(\ell), v(\ell)) + \dots \quad . \quad (2.47)$$

Параметр потоку ℓ пов'язаний з температурною відстанню до критичної точки через обернену кореляційну довжину. Тому залежність ефективних показників від параметра потоку відповідає залежності від приведеної температури (у загальному випадку ця залежність не задається степеневим законом, а є більш складною і повинна розраховуватись у неасимптотичній теорії). У (2.46) і (2.47) члени, позначені трикрапками, походять від зміни амплітудної частини перпендикулярних кореляційної довжини і критичного часу релаксації відповідно. У подальших розрахунках ми будемо нехтувати цією частиною, оскільки внесок амплітудної функції кросовера малий (таке наближення було успішно застосовано у дослідженнях розведених моделей [27, 29, 136, 379, 380]).

Розв'язуючи рівняння на потоки для різних початкових умов, ми можемо отримати різні потоки в просторі констант зв'язку. Ми вибираємо ці умови поблизу гаусової НТ ($\mathbf{G}$), очікуючи, що значення констант зв'язку малі (у бекграунді). У рівняннях на потоки (1.61) ми використовуємо β -функції (2.14), (2.15), пересумовані при фіксованому d методом Чисгольм-Бореля. Це дозволяє дослідити також випадок системи Ізінга ($n = 1$), для котрої β -функції вироджуються на однопетлевому рівні і $\sqrt{\varepsilon}$ -розклад не дає чисельної оцінки [29].

Потоки РГ при $n = 1$ для двох найцікавіших випадків $\varepsilon_d = 0$ і $\varepsilon_d = 1$ показані на Рис. 2.10 (пунктирні лінії для $\varepsilon_d = 0$ і суцільні лінії для $\varepsilon_d = 1$). Перший випадок відповідає точковим дефектам, тоді як другий відповідає лініям дефектів. Ми розглядаємо однакові початкові умови для обох випадків з невеликим (потоки 1 і 1') і великим (потоки 2 і 2') значенням співвідношення v/u . Співвідношення v/u визначає ступінь безладу. Таким чином, ми можемо спостерігати різницю у поведінці систем з низьким і високим розведенням.

Використовуючи потоки, наведені на Рис. 2.10, ми можемо отримати статичні і динамічні ефективні показники. Нижче ми наводимо показники $\nu_{\perp}^{\text{eff}}$ і $z_{\perp}^{\text{eff}}$.

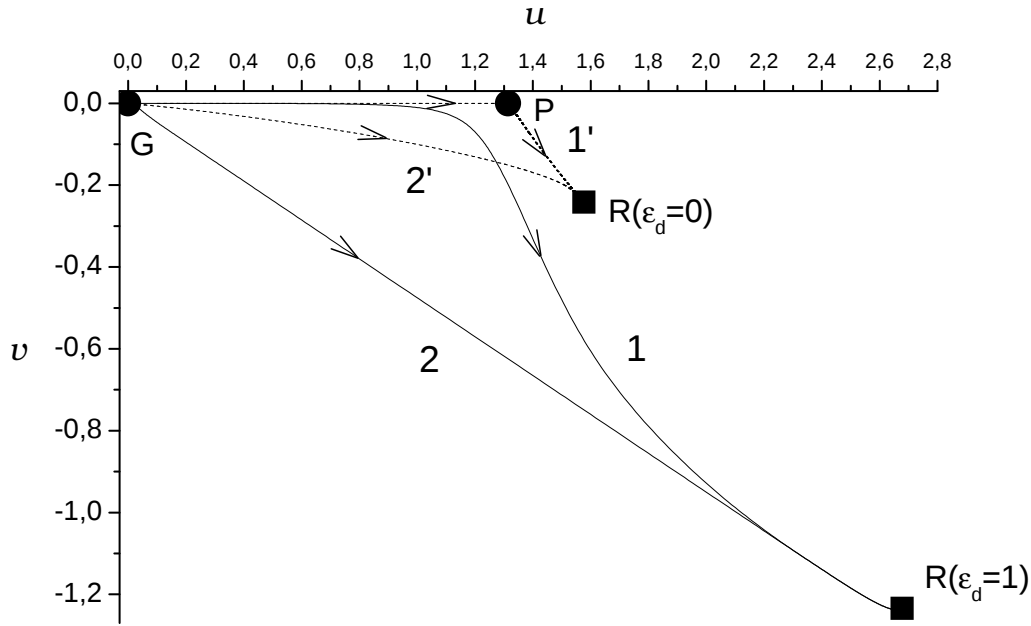


Рис. 2.10. Потоки для випадку $n = 1$. Штрихові лінії відповідають випадку нескорельованих точкових дефектів, $\varepsilon_d = 0$, у той час як неперервні лінії відповідають системі з протяжними дефектами $\varepsilon_d = 1$. Початкові значення є однаковими для кривих 1 і 1' (мале відношення v/u) та для 2 і 2' (велике відношення v/u).

Згідно р-ня (2.13) паралельні ефективні показники $\nu_{\parallel}^{\text{eff}}$ і $z_{\parallel}^{\text{eff}}$ мають якісно подібну поведінку. Відхилення ефективних показників від середньо-польових значень $z_{\perp}^{\text{eff}} = 2$ і $\nu_{\perp}^{\text{eff}} = 1/2$, що відповідають потокам з Рис. 2.10, наведено на Рис. 2.11 та Рис. 2.12 відповідно. Спочатку ми порівняємо поведінку ефективних показників одновісного $n = 1$ магнетика при $\varepsilon_d = 0$ і $\varepsilon_d = 1$. Як видно з рисунків 2.11 та 2.12, навіть слабе розведення лініями дефектів призводить до швидшого кросовера до нового класу універсальності (криві 1 на Рис. 2.11 та Рис. 2.12), і ефективні показники не відчувають вплив чистої НТ **P**. Така поведінка якісно відрізняється від тієї, що спостерігається при розведенні точковими домішками, де відповідні ефективні показники для чистої НТ **P** спостерігаються у відносно широкій області (крива 1' на обох фігурах). Зазначимо, що динамічний критичний показник $z_{\perp}^{\text{eff}}$ при $\varepsilon_d = 1$ підходить до свого асимптотичного значення згори. Така немонотонна поведінка характерна для залежностей статичних величин для системи з точковими дефектами [22, 29]. Однак ми не спостерігаємо немонотонну поведінку для $\nu_{\perp}^{\text{eff}}$. Це може бути особливістю статичного ефективного критичного показника

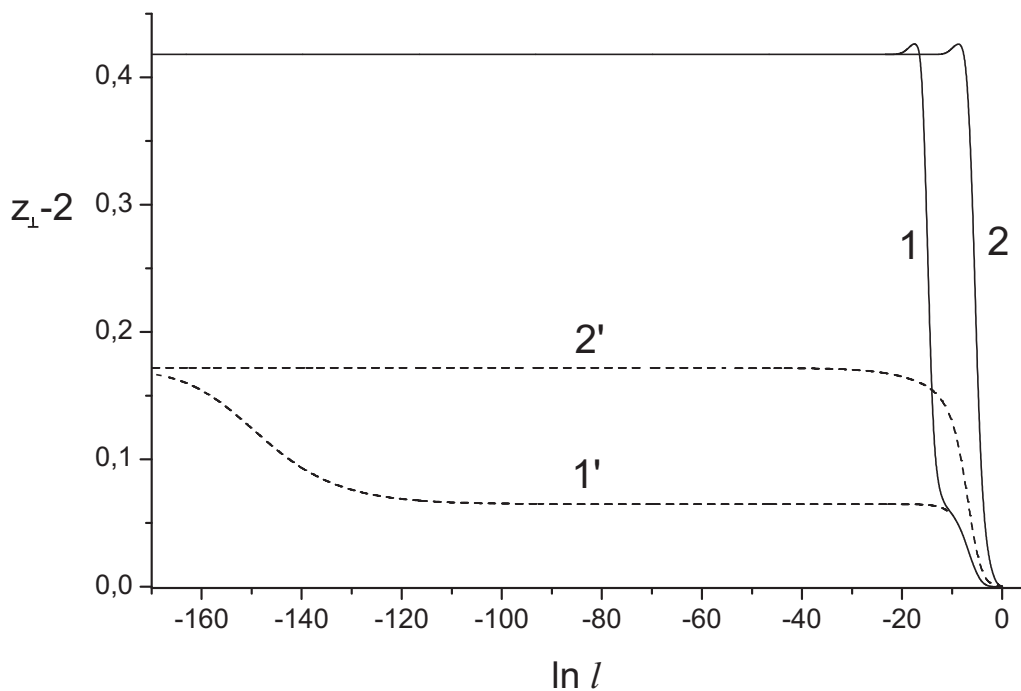


Рис. 2.11. Поведінка динамічного ефективного показника $z_{\perp}^{\text{eff}}$ для $n = 1$ у випадку $\varepsilon_d = 0$ (пунктирні лінії) і $\varepsilon_d = 1$ (неперервні лінії). Криві відповідають потокам з Рис.2.10.

системи з протяжними домішками або наслідком використаного наближення.

Ми також розглядаємо статичну та динамічну ефективну поведінку для різних значень параметра порядку. На Рис. 2.13 і Рис. 2.14 представлено $z_{\perp}^{\text{eff}} - 2$ і $\nu_{\perp}^{\text{eff}} - 1/2$, отримані відповідно для однакових початкових умов та різних значень $n = 1, 2, 3, 4$. Немонотонний характер залежності показників від логарифму параметра потоку спостерігається лише для $z_{\perp}^{\text{eff}} - 2$ при $n = 1$.

2.4. Висновки

У цьому розділі було досліджено критичну динаміку типу моделі А магнітних систем з ε_d -вимірними немагнітними домішками паралельної орієнтації. Основним зацікавленням було отримати надійні кількісні оцінки для динамічних критичних показників цих систем. Присутність протяжних домішок призводить до появи анізотропії, тому існують дві кореляційні довжини, паралельна і перпендикулярна до протяжних дефектів, розбіжність яких поблизу критичної температури характеризується різними показниками. Динамічна критична поведінка

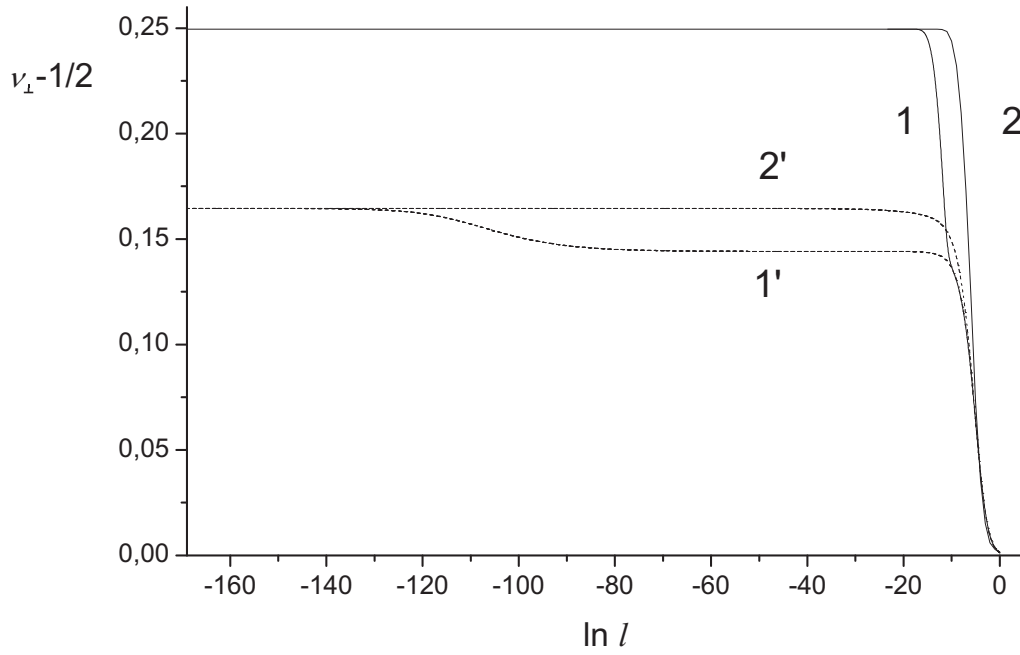


Рис. 2.12. Поведінка ефективного критичного показника перпендикулярної кореляційної довжини $\nu_{\perp}^{\text{eff}}$ для $n = 1$ у випадку $\varepsilon_d = 0$ (пунктирні лінії) і $\varepsilon_d = 1$ (неперервні лінії). Криві відповідають потокам з Рис.2.10.

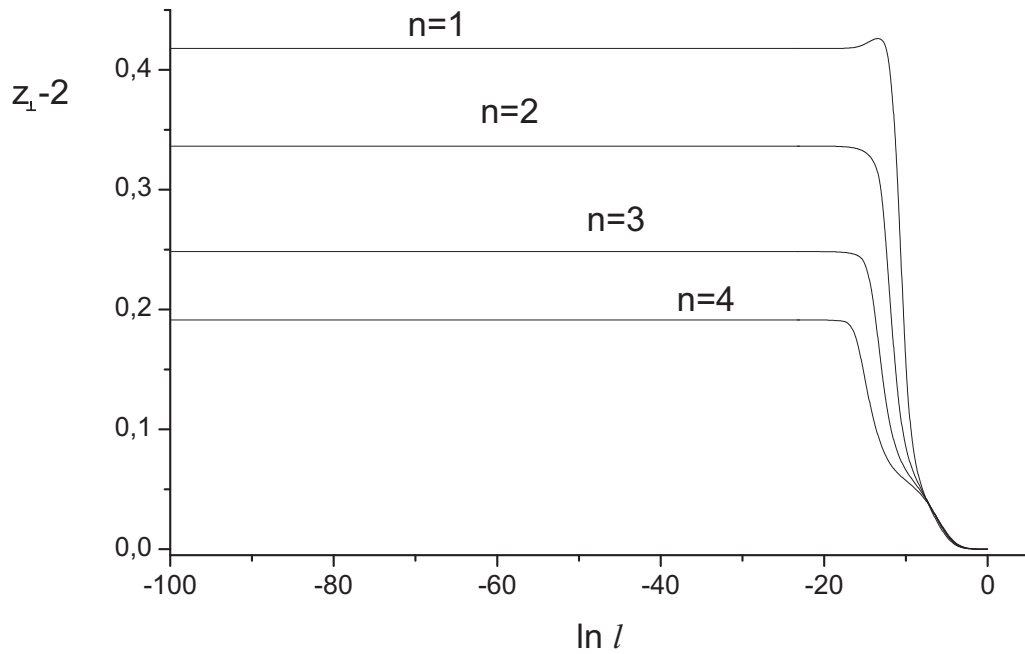


Рис. 2.13. Поведінка динамічного ефективного показника $z_{\perp}^{\text{eff}}$ для систем з протяжними домішками з $\varepsilon_d = 1$ і різними n . Початкові умови однакові у всіх випадках (мале співвідношення v/u).

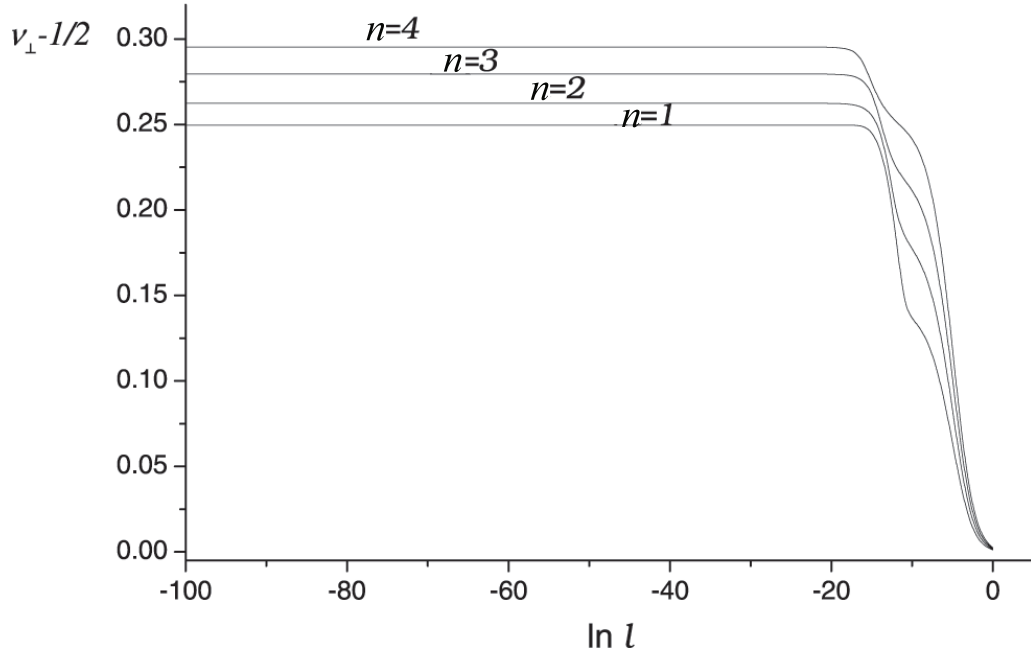


Рис. 2.14. Поведінка ефективного критичного показника перпендикулярної кореляційної довжини $\nu_{\perp}^{\text{eff}}$ для систем з протяжними домішками з $\varepsilon_d = 1$ і різними n . Початкові умови однакові у всіх випадках (мале співвідношення v/u).

також модифікується, так що з'являються два часи, що характеризують критичну релаксацію в напрямках, паралельних і перпендикулярних до протяжних домішок. Перші результати, отримані для таких систем, базуються на подвійному розкладі за параметрами $\varepsilon, \varepsilon_d$ і, таким чином, мають радше якісний характер.

Ми застосували пересумовування до функцій РГ моделі, отриманих в рамках схеми мінімального віднімання [102, 142, 152], розглядаючи їх безпосередньо для фіксованого $d = 3$ і фіксованого параметру ε_d . Випадок $\varepsilon_d = 0$ описує точковий заморожений безлад і відповідає відомим результатам. Для $\varepsilon_d > 0$ було знайдено, що співвідношення $z_{\perp} > z_{\parallel}$ зберігається для кожного ε_d і n , це пов'язано з тим, що протяжні дефекти руйнують взаємодію між спінами вздовж зв'язків, перпендикулярних до напрямку протяжних дефектів, так що в паралельному напрямку флуктуації сильніші.

Дані таблиць 2.1, 2.4 дають чисельні значення для динамічних критичних показників n -векторного магнетика з протяжними ε_d -мірними дефектами для динаміки моделі А. Ці дані разом з можливими сценаріями ефективної критичної

поведінки, розглянутими у підрозділі 2.3, можуть посприяти експериментальним дослідженням впливу протяжних дефектів на критичність. Як ми вже зазначали, точкові дефекти змінюють клас універсальності при $d = 3$ тільки для ізінгівських магнетиків ($n = 1$). Значення критичного показника z чистої і розведеної (точковими домішками) моделей Ізінга наведені в Таблицях 2.2, 2.3, відповідно. Порівнюючи дані у цих таблицях, можна помітити збільшення показника для розведеної моделі щодо чистого. Це відповідає сильнішій розбіжності часу релаксації (збільшення ефектів критичного сповільнення). Далі, порівнюючи Таблиці 2.3 і 2.1, видно, що протяжні домішки роблять цей ефект більш вираженим, приводячи до подальшого збільшення обох показників $z_{\perp}, z_{\parallel}$.

Такий же порядок значень критичних показників зберігається також і для статичних показників [156, 157]. Тому також було досліджено статичну скейлінгову поведінку термодинамічних величин за допомогою симуляцій МК у безпосередній близькості до критичної точки для тривимірної системи Ізінга з випадково розподіленими паралельними лінійними протяжними дефектами, змодельованими як немагнітні домішки, зібрані у лінії вздовж просторової вимірності z . Ми розглянули комбінований алгоритм, використовуючи методи Вольфа і Метрополіса. Наші результати послідовно інтерпретуються у рамках теорії анізотропного СРС.

Ми оцінили значення показника анізотропії θ , використовуючи три різні методи, а саме, залежність кореляційної довжини $\xi_{\perp}$ від лінійного розміру системи поблизу критичної точки, з температурної залежності кумулянта Біндера четвертого порядку, з СРС сприйнятливості. Отримані оцінки попадають в область значень $1.1 \leq \theta \leq 1.3$ і підтверджують передбачення РГ для нашої розглянутої моделі.

Ми також оцінили значення $\gamma/\nu_{\perp}$ з анізотропного СРС для сприйнятливості. Отримана оцінка $\gamma/\nu_{\perp} \simeq 1.85$ є дещо нижчою відповідних значень РГ $\gamma/\nu_{\perp} \simeq 2.0$, $\gamma/\nu_{\perp} \simeq 1.98$. Значення $\gamma/\nu_{\perp} \simeq 1.9$, отримане для $\theta = 1.1$, краще узгоджується з теоретичними результатами.

Незважаючи на суттєві зусилля, чисельні значення отриманих критичних

показників не дуже точні. Це відбулось через складність чисельної техніки для роботи з анізотропними системами (див. наприклад роботу [381]), але з представлених тут результатів симуляцій МК, ми можемо безпечно зробити висновок на користь існування анізотропної критичної точки, оскільки анізотропний скейлінг, в загальному, чудово підтверджується.

Ми також проаналізували можливі реалізації підходу до асимптотичного режиму, обчислюючи ефективні критичні показники перпендикулярної критичної довжини та перпендикулярного часу релаксації для магнетика з лінійними паралельними дефектами. Результати показують, що немонотонний підхід до критичного режиму (характерний для магнетиків з точковим безладом [27]) тут спостерігається тільки для критичного динамічного показника $z_{\perp}$ ізінгівської системи ($n = 1$). Для $n > 1$ та для статичного показника $\nu_{\perp}$ немонотонної поведінки не спостерігається, що може бути наслідком використаного наближення.

РОЗДІЛ 3

КРИТИЧНА ПОВЕДІНКА МАГНЕТИКІВ З ВИПАДКОВОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ

Цей розділ присвячений дослідженню критичної поведінки неупорядкованих магнетиків з випадковою анізотропією. Для таких систем важливе значення має розподіл осі випадкової анізотропії. У першому підрозділі розглядається питання про можливість критичної поведінки для розподілів, які в теорії поля приводять до ефективних гамільтоніанів з п'ятьма константами зв'язку. Оскільки усі дослідження узгоджуються з існуванням ФП другого роду тільки для анізотропного розподілу, то в останньому підрозділі здійснений теоретичний опис критичного сповільнення у цьому випадку. Основна увага при цьому приділена ефективній динамічній критичній поведінці.

Основні результати цього розділу викладені у роботах [34, 37, 53, 54, 58, 60, 66].

3.1. Фазовий перехід у моделі з випадковою анізотропією

Спершу розглянемо можливість реалізації критичної поведінки в моделі магнетика з випадковою анізотропією в залежності від розподілу осі випадкової анізотропії.

За допомогою, зокрема, перетворення Стратоновича-Габарда спінову ґраткову модель (1.26) можна перевести у теорію ϕ^4 з таким ефективним гамільто-

ніаном:

$$\mathcal{H} = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} \left[|\nabla \vec{\phi}_0|^2 + \mu_0^2 |\vec{\phi}_0|^2 \right] + \frac{u_0}{4!} |\vec{\phi}_0|^4 - \bar{D} (\hat{x} \vec{\phi}_0)^2 \right\}. \quad (3.1)$$

Тут поле $\vec{\phi}_0$ є n -компонентним вектором, $\bar{D}$ є пропорційне до константи анізотропії спінового гамільтоніану (1.26), неперенормована маса μ_0^2 пропорційна до температурної відстані до критичної точки чистої системи, а u_0 визначається силою анізотропії спінової моделі та константою зв'язку чистого n -векторного магнетика (для деталей див. [34, 238]). При усередненні за конфігураціями замороженого безладу [94] для векторів $\{\hat{x}_{\mathbf{r}}\}$ [34, 203] використовується метод реплік [107]. При цьому потрібно вибрати певний розподіл $p(\hat{x})$ локальних одиничних векторів $\hat{x}$ у n -вимірному гіперпросторі. Надалі розглянемо окремі випадки.

Для *ізотропного розподілу* одиничному вектору $\hat{x}_{\mathbf{r}}$ дозволяється направлятись у будь-якому напрямі n -вимірного гіперпростору з однаковою імовірністю

$$p_1(\hat{x}) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}, \quad (3.2)$$

де $\Gamma(x)$ це гамма-функція Ойлера. У цьому випадку усереднення приводить до такого ефективного гамільтоніану [203]

$$\begin{aligned} : \mathcal{H}_{\text{eff}} = & - \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} [\mu_0^2 |\phi|^2 + |\nabla \phi|^2] + \frac{v_0}{4!} |\phi|^4 + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^N |\vec{\phi}_0^\alpha|^4 \right. \\ & \left. + \frac{z_0}{4!} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{i, j=1}^n \phi_{0,i}^\alpha \phi_{0,j}^\alpha \phi_{0,i}^\beta \phi_{0,j}^\beta \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $\phi = \{\vec{\phi}_0^1(\mathbf{r}), \dots, \vec{\phi}_0^N(\mathbf{r})\}$ ($\vec{\phi}_0^\alpha(\mathbf{r}) = \{\phi_{0,1}^\alpha(\mathbf{r}), \dots, \phi_{0,n}^\alpha(\mathbf{r})\}$) є реплікований N раз n -компонентний параметр порядку, так що $|\phi|^2 = \sum_i^n \sum_\alpha^N |\phi_{0,i}^\alpha|^2$, μ_0 – неперенормована маса. Знаки неперенормованих констант зв'язку $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $z_0 < 0$ задовольняють $z_0/v_0 = -n$.

У випадку *кубічного розподілу* для осі локальної анізотропії, напрям якої вказує $\hat{x}_{\mathbf{r}}$, дозволяється спрямовуватись тільки вздовж n осей гіперкубічної ґратки з розподілом

$$p_2(\hat{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left\{ \delta^{(n)}(\hat{x} - \hat{k}_i) + \delta^{(n)}(\hat{x} + \hat{k}_i) \right\}, \quad (3.4)$$

де $\hat{k}_i, \dots, \hat{k}_n$ це одиничні вектори вздовж осей, а $\delta(y)$ – це дельта-функція Дірака. Усереднюючи за випадковими змінними $\{\hat{x}_r\}$, для цього розподілу отримуємо [203]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & - \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} [\mu_0^2 |\phi|^2 + |\nabla \phi|^2] + \frac{v_0}{4!} |\phi|^4 + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^N |\vec{\phi}_0^\alpha|^4 \right. \\ & \left. + \frac{w_0}{4!} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{i=1}^n (\phi_i^\alpha)^2 (\phi_{0,i}^\beta)^2 + \frac{y_0}{4!} \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^N (\phi_{0,i}^\alpha)^4 \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тут неперенормовані константи зв'язку u_0 , v_0 , w_0 задовольняють умови $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $w_0 < 0$ та $w_0/v_0 = -n$. Доданок з коефіцієнтом y_0 у (3.5) не є результатом усереднення, але повинен включатись, оскільки він генерується при дослідженні пертурбативною теоретико-польовою РГ. Тому константа зв'язку y_0 може бути довільного знаку.

Обидва розподіли, ізотропний (3.2) і кубічний (3.4), можна скомбінувати у вигляді так званого тримодального розподілу [240–242]:

$$p(\hat{x}) = qp_1(\hat{x}) + (1 - q)p_2(\hat{x}). \quad (3.6)$$

Тут напрямки випадкового вектора $\hat{x}$ вибираються або з розподілу (3.2) з імовірністю q , або з розподілу (3.4) з імовірністю $(1 - q)$. У такому випадку отримується ефективний гамільтоніан, що містить усі доданки гамільтоніанів (3.3) та (3.5) [236, 239]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} = & - \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} [\mu_0^2 |\phi|^2 + |\nabla \phi|^2] + \frac{v_0}{4!} |\phi|^4 + \frac{u_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^N |\vec{\phi}_0^\alpha|^4 \right. \\ & + \frac{w_0}{4!} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{i=1}^n (\phi_{0,i}^\alpha)^2 (\phi_{0,i}^\beta)^2 + \frac{y_0}{4!} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^N (\phi_{0,i}^\alpha)^4 \\ & \left. + \frac{z_0}{4!} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{i,j=1}^N \phi_{0,i}^\alpha \phi_{0,j}^\alpha \phi_{0,i}^\beta \phi_{0,j}^\beta \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тут константи зв'язку є такими $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $w_0 < 0$, $z_0 < 0$, а знак константи y_0 , як і у попередньому випадку, є довільним. Відношення z_0/v_0 і w_0/v_0 для розподілу

(3.6) відрізняється від відповідних відношень для ізотропного (3.2) і кубічного (3.5) розподілів:

$$\frac{z_0}{v_0} = -\frac{2qn}{n(1-q)+2}, \quad (3.8)$$

$$\frac{w_0}{v_0} = -\frac{(1-q)(n+2)n}{n(1-q)+2}. \quad (3.9)$$

Для значень (3.8) з $q = 1$ ми відтворюємо $z_0/v_0 = -n$, як і має бути для (3.2), а для (3.9) при $q = 0$ ми відтворимо $w_0/v_0 = -n$, як і має бути для кубічного розподілу.

Ефективний гамільтоніан типу (3.7) можна отримати для більш загальних розподілів осі локальної анізотропії (для деталей див. роботу [209]). Варто зауважити, що (3.7) можна отримати, виконавши усереднення тільки за ізотропним розподілом (3.2), але для моделі, що включає також постійну одно-іонну кубічну анізотропію. У такому випадку виходить (3.7) з константами зв'язку $u_0, v_0 > 0$, $z_0 < 0$ та $z_0/v_0 = -n$, знак y_0 у цьому випадку залежить від знаку постійної одно-іонної кубічної анізотропії. При цьому вже доданок з коефіцієнтом w_0 у (3.5) не є результатом усереднення, але повинен включатись, оскільки генерується при застосуванні РГ, а тому є довільного знаку [236].

Також можна розглянути умови для фізичної стійкості моделі (3.7), як це робилось у роботах [209, 236]. Для цього припускаємо, що ефективний гамільтоніан має стійкий мінімум, що характеризується параметром порядку Φ . Розглянемо випадки, коли симетрія параметру порядку порушується з вибором (i) $\phi_i^\alpha = \Phi$, (ii) $\phi_i^\alpha = \Phi\delta_{\alpha 1}\delta_{i 1}$, (iii) $\phi_i^\alpha = \Phi\delta_{i 1}$ та (iv) $\phi_i^\alpha = \Phi\delta_{\alpha 1}$. Тоді ми отримаємо такі умови на області стійкості гамільтоніану (3.7):

$$(i) \quad nNv_0 + nu_0 + Nw_0 + y_0 + nNz_0 > 0, \quad (3.10)$$

$$(ii) \quad u_0 + v_0 + w_0 + y_0 + z_0 > 0, \quad (3.11)$$

$$(iii) \quad Nv_0 + u_0 + Nw_0 + y_0 + Nz_0 > 0, \quad (3.12)$$

$$(iv) \quad nu_0 + nv_0 + w_0 + y_0 + nz_0 > 0. \quad (3.13)$$

Якщо врахувати, що релевантними у реплічній границі, є тільки умови стійкості

для реплічно-симетричних конфігурацій [236], то для $n = 0$ залишаються тільки такі умови:

$$(i) \quad nu_0 + y_0 > 0 \quad (3.14)$$

$$(iii) \quad u_0 + y_0 > 0. \quad (3.15)$$

Насамкінець хочемо зауважити, що гамільтоніан (3.7) при перегрупованні компонент реплікованих полів перетворюється в ефективний гамільтоніан задачі про критичну поведінку моделі з низьковимірними дефектами [237].

3.1.1. Перенормування

У загальному вершинні функції (1.31) мають складну тензорну структуру. Наприклад, вершинну функцію $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma\tau}^{(0,4)ijkl}$ зручно розбити на частини, які мають ту саму тензорну структуру, що й різні члени неперенормованої моделі (3.7):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma\tau}^{(0,4)ijkl} &= \overset{\circ}{\Gamma}_v^{(0,4)} S_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\tau} + \overset{\circ}{\Gamma}_u^{(0,4)} S_{ijkl} F_{\alpha\beta\gamma\tau} \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}_w^{(0,4)} F_{ijkl} S_{\alpha\beta\gamma\tau} + \overset{\circ}{\Gamma}_y^{(0,4)} F_{ijkl} F_{\alpha\beta\gamma\tau} \\ &+ \overset{\circ}{\Gamma}_z^{(0,4)} A_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\tau}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де введені такі тензори:

$$\begin{aligned} F_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il}, \\ S_{ijkl} &= \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ S_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\tau} &= \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\tau} + \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{\alpha\tau} \delta_{\beta\gamma}), \\ A_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\tau} &= \frac{3}{2} S_{ijkl} S_{\alpha\beta\gamma\tau} - \frac{1}{2} S_{ijkl}^{\alpha\beta\gamma\tau}, \end{aligned}$$

а δ_{ab} є символом Кронекера.

На відміну від попереднього розділу тут будемо працювати в рамках масивної схеми теоретико-польової РГ. Для цієї схеми умови нормування формулюються при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі та мають наступну форму:

$$\Gamma^{(0,2)}(k; -k; \mu^2; \{u_i\}) \Big|_{k=0} = \mu^2, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{d}{dk^2} \Gamma^{(0,2)}(k; -k; \mu^2; \{u_i\}) \right|_{k=0} = 1, \quad (3.18)$$

$$\left. \Gamma_{\lambda_i}^{(0,4)}(\{k\}; \mu^2; \{u_i\}) \right|_{\{k\}=0} = \mu^{4-d} u_i, \quad (3.19)$$

$$\left. \Gamma^{(1,2)}(p; k_1, k_2; \mu^2; \{u_i\}) \right|_{k_1=k_2=p=0} = 1. \quad (3.20)$$

Неперенормовані константи зв'язку $\{u_{i,0}\} = \{u_0, v_0, w_0, y_0, z_0\}$ зв'язані з перенормованими за допомогою перенормовуючих множників:

$$u_{i,0} = \mu^{4-d} \frac{Z_{u_i}}{Z_\phi^2} u_i. \quad (3.21)$$

Функції РГ дозволяють обчислити чисельні характеристики скейлінгової поведінки системи у критичній області, яка задається НТ:

$$\beta_{u_i}(\{u_i^*\}) = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.22)$$

Функції РГ

Застосовуючи схему перенормування (3.17)–(3.21) до моделі (3.7), ми отримали функції РГ у двопетловому наближенні. Отримані вирази для них подані нижче, де однопетлевий інтеграл $D_2 = \int \frac{d^d p}{(p^2+1)^2}$ було включено у переозначення констант зв'язку $u_i \rightarrow u_i/D_2$, $\beta_{u_i} \rightarrow \beta_{u_i}/D_2$:

$$\begin{aligned} \beta_v = & -\varepsilon \left\{ v - \frac{1}{6} \left[(nN+8)v^2 + 2uw + 2uz + 2wz + 3z^2 + 2(n+2)uv + 2(N+2)vw \right. \right. \\ & \left. \left. + 6vy + 2(n+N+1)vz \right] - \frac{1}{9} \left[2(5nN+22)v^3 + 4u^2w + 4uw^2 + 4u^2z \right. \right. \\ & \left. \left. + 16uwz + 4w^2z + 2(n+8)uz^2 + 2(N+8)wz^2 + 3yz^2 + 3(n+N+3)z^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + 24(n+2)v^2u + 24(N+2)v^2w + 72v^2y + 24(n+N+1)v^2z + 6(n+2)vu^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 6(N+2)vw^2 + 36vwy + 18vy^2 + 12(N+4)vwz + 36vyz + 60uvw \right. \right. \\ & \left. \left. + 3(nN+n+N+15)vz^2 + 36uvy + 12(n+4)uvz \right] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left[(nN+2)v^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + (n+2)vu^2 + (N+2)vw^2 + 3vy^2 + \frac{nN+n+N+3}{2}vz^2 + 2(n+2)v^2u \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(N+2)v^2w + 6v^2y + 2(n+N+1)v^2z + 6uvw + 6uvy \right. \right. \end{aligned}$$

$$+2(n+2)uvz + 6vwy + 2(N+2)vwz + 6vyz \Big] i_2 \Big\}, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \beta_u = & -\varepsilon \left\{ u - \frac{1}{6} \left[(n+8)u^2 + 12uv + 4uw + 6uy + 2(n+5)uz + 6yz \right] \right. \\ & - \frac{1}{9} \left[2(5n+22)u^3 + 6(nN+14)uv^2 + 2(N+6)uw^2 + 36uwy + 18uy^2 \right. \\ & + 24(n+5)vu^2 + 12(N+6)uvw + 108uvy + 68u^2w + 72u^2y \\ & + 12(3n+N+11)uvz + 4(7n+29)u^2z + 4(N+20)uwz + 72vyz \\ & + 132uyz + 24wyz + 18y^2z + (nN+5N+17n+67)uz^2 \\ & + 3(N+14)yz^2 \Big] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left[(nN+2)v^2u + (n+2)u^3 + (N+2)w^2u \right. \\ & + 3y^2u + \frac{nN+n+N+3}{2} z^2u + 2(n+2)vu^2 + 2(N+2)uwv + 6uyv \\ & + 2(n+N+1)uzv + 6u^2w + 6u^2y + 2(n+2)u^2z + 6wyu \\ & \left. \left. + 2(N+2)wzu + 6yzu \right] i_2 \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \beta_w = & -\varepsilon \left\{ w - \frac{1}{6} \left[(N+8)w^2 + 12vw + 4uw + 6wy + 2(N+5)wz + 6yz \right] \right. \\ & - \frac{1}{9} \left[2(5N+22)w^3 + 6(nN+14)wv^2 + 2(n+6)wu^2 + 36uwy + 18wy^2 \right. \\ & + 24(N+5)vw^2 + 12(n+6)uvw + 108vwy + 68w^2u + 72w^2y \\ & + 12(n+3N+11)vwz + 4(7N+29)w^2z + 4(n+20)uwz + \\ & + 72vyz + 132wyz + 24uyz + 18y^2z + (nN+5+17N+67)wz^2 \\ & + 3(n+14)yz^2 \Big] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left[(nN+2)v^2w + (n+2)wu^2 + (N+2)w^3 \right. \\ & + 3wy^2 + \frac{nN+n+N+3}{2} wz^2 + 2(N+2)uvw + 2(N+2)vw^2 + 6vyw \\ & + 2(n+N+1)vzw + 6uw^2 + 6uyw + 2(n+2)uzw + 6w^2y \\ & \left. \left. + 2(N+2)w^2z + 6yzw \right] i_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
\beta_y = -\varepsilon \Bigg\{ & y - \frac{1}{6} \left[9y^2 + 8uw + 12uy + 12vy + 12wy + 6yz \right] - \frac{1}{9} \left[54y^3 + 96uvw \right. \\
& + 4(n+18)u^2w + 252uwy + 4(N+18)uw^2 + 6(nN+14)v^2y \\
& + 6(n+14)u^2y + 6(N+14)w^2y + 12(n+14)uvy + 144vy^2 \\
& + 12(N+14)vwy + 144uy^2 + 144wy^2 + 8(n+N+10)uwz + \\
& + 12(n+N+7)vyz + 126y^2z + 12(N+12)wyz + 12(n+12)uyz \\
& + 3(n+N+13)yz^2 \Big] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{9} \left[(nN+2)v^2y + (n+2)u^2y \right. \\
& + (N+2)w^2y + 3y^3 + \frac{nN+n+N+3}{2} z^2y + 2(n+2)uvy \\
& + 2(N+2)vwy + 6vy^2 + 2(n+N+1)vzy + 6uwy + 6uy^2 \\
& \left. + 2(n+2)uzy + 6wy^2 + 2(N+2)wzy + 6y^2z \right] i_2 \Bigg\} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_z = -\varepsilon \Bigg\{ & z - \frac{1}{6} \left[(n+N+4)z^2 + 12vz + 4uz + 4wz \right] - \frac{1}{9} \left[(2nN+5n+5N+27)z^3 \right. \\
& + 6(nN+14)v^2z + 2(n+6)u^2z + 2(N+6)w^2z + 12wyz + 2(5N+22)wz^2 \\
& + 24yz^2 + 44uwz + 12uyz + 2(5n+22)uz^2 + 12(n+6)uvz \\
& + 12(N+6)v wz + 36vyz + 12(2n+2N+15)vz^2 \Big] \left(i_1 - \frac{1}{2} \right) \\
& + \frac{2}{9} \left[(nN+2)v^2z + (n+2)u^2z + (N+2)w^2z + 3y^2z + 2(n+2)vuz \right. \\
& + 2(N+2)v wz + \frac{nN+n+N+3}{2} z^3 + 6vyz + 2(n+N+1)vz^2 + 6vwz \\
& \left. + 6uyz + 2(n+2)uz^2 + 6wyz + 2(N+2)wz^2 + 6yz^2 \right] i_2 \Bigg\} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Тут i_1 та i_2 – петлеві інтеграли, які розраховуються при фіксованій вимірності простору. При $d = 3$ вони мають значення $i_1 = 1/6$ та $i_2 = -2/27$ [382], а для довільного d їхні значення подані, зокрема, у роботах [383–385].

Наша основна мета проаналізувати отримані функції РГ у реплічній границі $N = 0$, що відповідає неупорядкованим системам з замороженим структурним безладом. Однак варто розглянути випадок довільних N та n . Окрім академічно-

го інтересу, такі випадки можуть описувати фізичні ситуації: граничні випадки гамільтоніану при $w = y = z = 0$ відповідають nN -векторній моделі [33, 84], яка при $n = 1$ та довільному N відповідає кубічній моделі [11, 84], а для $n = 2$, $N = 2$ і $N = 3$ описує клас структурних фазових переходів [386]. Інший приклад задає ефективний Гамільтоніан (3.7) з $w = z = 0$. При $N = 0$ він описує розведену кубічну модель [387], а при $n = 2$ та довільному ненульовому N відповідає тетрагональній моделі [11].

Та спочатку, слідуючи за роботою [209], наголосимо, що отримані функції (3.23)-(3.27) мають задовільняти властивості, які задаються ефективним гамільтоніаном (3.7) та співпадати з результатами для простіших моделей, які є граничними випадками (3.7). Ми зробили такі перевірки для отриманих функцій і переконались, що вони, як і має бути:

- є інваріантні при одночасній ваємозаміні констант зв'язку $u \leftrightarrow w$ та вимірностей реплік і параметра порядку $n \leftrightarrow N$;
- співпадають з відповідними функціями nN при $w = y = z = 0$ або $u = y = z = 0$ (див. роботи [33, 84, 388] та цитування в них);
- відтворюють відповідні функції $(n \times N)$ -компонентної кубічної моделі при $u = w = z = 0$ (див. роботи [11, 84, 389, 390] та цитування в них);
- співпадають з функціями РГ розведеної кубічної моделі з $w = z = 0$ і $N = 0$ [387], та тетрагональної моделі для $w = z = 0$ з $n = 2$ [11, 388];
- при $u = z = 0$ і $n = 0$ вони задовільняють тотожності:

$$\begin{aligned}\beta_v(v, 0, w, y, 0) + \beta_w(v, 0, w, y, 0) &= \beta_{\text{RIM},v}(v+w, y), \\ \beta_y(v, 0, w, y, 0) &= \beta_{\text{RIM},y}(v+w, y),\end{aligned}\quad (3.28)$$

де $\beta_{\text{RIM},v}(v, y)$, $\beta_{\text{RIM},y}(v, y)$ – це відповідні β -функції моделі Ізінґа з розведенням (RIM) [22];

- при $z = 0$ і $N = 0$ співпадають з функціями RAM з кубічним розподілом, отриманими у роботах [208, 209];

- відтворюють при $w = y = 0$ і $n = 0$ з функціями RAM з ізотропним розподілом, отриманими у роботах [207].

Зазначимо, щоб співставити результати, треба враховувати відмінність в перенормуванні та в позначенні констант зв'язку та вимірностей параметра порядку і реплік.

Двопетлеві β -функції отримані у роботі [239] не задовольняють повністю ці умови. Звернемо увагу на декілька з них. Так, не задовільняється перша умова: для позначень роботи [239] вона полягала би у одночасній заміні $v \leftrightarrow w$ і $n \leftrightarrow t$ у відповідних функціях. Але, оскільки у роботі [239] функції подані при $n = 0$, то у не відповідності функцій умові можна переконатись, поклавши $t = 0$ у β_v роботи [239] та зробивши заміну $v \leftrightarrow w$. Тоді, поклавши $t = 0$ у β_w [239], можна порівняти обидві функції. Отримані функції не співпадають, як мало б бути. Функції роботи [239] також не співпадають повністю з граничними випадками кубічного розподілу [208] та ізотропного розподілу [238].

3.1.2. Аналіз РГ

Як і в попередньому розділі, тут можна проводити аналіз двома способами: за допомогою ε -розкладу, або безпосередньо при $d = 3$, провівши пересумовування. Ми використаємо обидва підходи, аналізуючи однопетлеві функції за допомогою ε -розкладу та застосовуючи процедуру пересумовування до двопетлевих виразів у фіксованій вимірності простору $d = 3$.

Однопетлеве наближення

Як було сказано раніше, при ненульовому N наша модель також представляє інтерес, тому ми тут розглянемо цей випадок в однопетлевому наближенні. Використавши явний вираз для однопетлевого інтегралу D_2 через ε , ми отримали такі однопетлеві вирази для β -функцій у ε -розкладі:

$$\begin{aligned} \beta_v = & -\varepsilon v + \frac{1}{6} \left[(nN + 8)v^2 + 2uw + 2uz + 2wz + 3z^2 + 2(n + 2)uv \right. \\ & \left. + 2(N + 2)vw + 6vy + 2(n + N + 1)vz \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\beta_u = -\varepsilon u + \frac{1}{6} \left[(n+8)u^2 + 12uv + 4uw + 6uy + 2(n+5)uz + 6yz \right], \quad (3.30)$$

$$\beta_w = -\varepsilon w + \frac{1}{6} \left[(N+8)w^2 + 12vw + 4uw + 6wy + 2(N+5)wz + 6yz \right], \quad (3.31)$$

$$\beta_y = -\varepsilon y + \frac{1}{6} \left[9y^2 + 8uw + 12uy + 12vy + 12wy + 6yz \right], \quad (3.32)$$

$$\beta_z = -\varepsilon z + \frac{1}{6} \left[(n+N+4)z^2 + 12vz + 4uz + 4wz \right]. \quad (3.33)$$

В загальному випадку система рівнянь (3.29) має 32 розв'язки, з яких 16 отримуються при $z = 0$, описуючи таким чином систему з кубічним розподілом (3.4).

Ці розв'язки подано у таблиці 3.1 під номерами I – XIII, що позначають групи точок з тими ж самими нульовими константами зв'язку. Перші 14 нерухомих точок відповідають точкам, знайденим у роботах [203, 208, 209]. Зазначимо, що координати декількох точок мають полюси при $N \rightarrow 0$ (це стосується НТ XII та НТ XIII у таблиці 3.1), а тому не існують в границі $N \rightarrow 0$. Такі нерухомі точки з ($v^* \neq 0, y^* \neq 0, u^* = w^* = z^* = 0$ і $w^* \neq 0, y^* \neq 0, v^* = u^* = z^* = 0$) можна отримати у наступному наближенні з допомогою $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу [22, 83, 127–129]. Це також стосується НТ FP IX при $N = 0$ та $n = 2$ [208].

Решту 16 нерухомих точок, для яких $z^* \neq 0$, можна знайти подібним чином, як це зроблено в роботі [237]. Тільки 6 з них можна отримати аналітично при $N \neq 0$, координати інших можна знайти тільки чисельно. Нерухомі точки XIV – XVI з $z^* \neq 0$, які знаходяться аналітично, подані у таблиці 3.1. Аналіз стійкості усіх знайдених точок показує, що тільки НТ III є повністю стійкою для випадку $N = 0$. Однак, вона не є досяжною з фізичних початкових умов для (3.7), що характерно і для граничних випадків, розглянутих у роботах [34, 207–209, 238]. Потоки РГ для констант зв'язку зі знаками, вказаними під р-ням (3.7), що стартують з умов (3.8) і (3.9) через сепаратиси не досягнуть області притягання НТ III.

Ми також дослідили стійкість нерухомих точок при інших значеннях N (зокрема, для $n = 2, n = 3$ і $N = 1, N = 2, N = 3$). У цих випадках знову тільки НТ III є стійкою ($N = 1$) або повністю стійких точок немає взагалі.

Таким чином, наш аналіз однопетлевих результатів показує відсутність непе-

Табл. 3.1. Нерухомі точки як функції n та N у першому порядку за ε . Подано тільки точки, які можна отримати аналітично (22 з усіх 32 нерухомих точок). Решту 10 можна отримати, розв'язучи рівняння на НТ чисельно. Тут, $x_{\pm} = (n + N - 2 \pm \sqrt{(n + N - 2)^2 - 12nN + 48})/(8 - 2nN)$; $A_{\pm}(n, N) = (n + N - 2 + 2n\sigma(n, N) \pm \sqrt{(n + N - 2 + 2n\sigma(n, N))^2 + 4(4 - nN)(2\sigma(n, N) + 3)})/(8 - 2nN)$, $\sigma(n, N) = -(n - N + 6)/(n + 4)$; $A_{\pm}(N, n) = (n + N - 2 + 2N\sigma(N, n) \pm \sqrt{(n + N - 2 + 2N\sigma(N, n))^2 + 4(4 - nN)(2\sigma(N, n) + 3)})/(8 - 2nN)$, $\sigma(N, n) = -(N - n + 6)/(N + 4)$; $\alpha_{\pm} = ((N - 4)\gamma + 2n \pm \sqrt{((N - 4)\gamma + 2n)^2 + 8(4 - nN)\gamma})/(8 - 2nN)$, $\beta_{\pm} = -((4 - N)\gamma + 8 \pm \sqrt{((4 - N)\gamma + 8)^2 - 96\gamma})/6$, $\gamma = (n + 4)/(N + 4)$, $B_{\pm\pm} = 12\alpha_{\pm} + 6\beta_{\pm} + (N + 8)\gamma + 4$, $\rho = n + N + 4$, $\zeta(n, N) = (nN + 8)(n + 8)$, $\Sigma_{\pm}(n, N) = \sigma(n, N) + 3A_{\pm}(n, N)$.

FP	v^*	u^*	w^*	y^*	z^*
I.	0	0	0	0	0
II.	0	$\frac{6}{n+8}\varepsilon$	0	0	0
III.	$\frac{6}{nN+8}\varepsilon$	0	0	0	0
IV.	0	0	$\frac{6}{N+8}\varepsilon$	0	0
V.	0	0	0	$\frac{2}{3}\varepsilon$	0
VI.	$\frac{6(n-4)}{24(n+2)-\zeta(n,N)}\varepsilon$	$\frac{6(nN-4)}{\zeta(n,N)-24(n+2)}\varepsilon$	0	0	0
VII.	$\frac{6(N-4)}{24(N+2)-\zeta(N,n)}\varepsilon$	0	$\frac{6(nN-4)}{\zeta(N,n)-24(N+2)}\varepsilon$	0	0
VIII.	0	$\frac{2}{n}\varepsilon$	0	$\frac{2(n-4)}{3n}\varepsilon$	0
IX.	$\frac{2(n-4)}{(8-nN)n-16}\varepsilon$	$\frac{2(4-nN)}{(8-nN)n-16}\varepsilon$	0	$\frac{2}{3}\frac{(nN-4)(n-4)}{(nN-8)n+16}\varepsilon$	0
X.	$\frac{2(n-4)}{(8-nN)N-16}\varepsilon$	0	$\frac{2(4-nN)}{(8-nN)N-16}\varepsilon$	$\frac{2}{3}\frac{(nN-4)(N-4)}{(nN-8)N+16}\varepsilon$	0
XI. a	$\frac{6\alpha_+}{B_{++}}\varepsilon$	$\frac{6}{B_{++}}\varepsilon$	$\frac{6\gamma}{B_{++}}\varepsilon$	$\frac{6\beta_+}{B_{++}}\varepsilon$	0
b	$\frac{6\alpha_+}{B_{+-}}\varepsilon$	$\frac{6}{B_{+-}}\varepsilon$	$\frac{6\gamma}{B_{+-}}\varepsilon$	$\frac{6\beta_-}{B_{+-}}\varepsilon$	0
c	$\frac{6\alpha_-}{B_{-+}}\varepsilon$	$\frac{6}{B_{-+}}\varepsilon$	$\frac{6\gamma}{B_{-+}}\varepsilon$	$\frac{6\beta_+}{B_{-+}}\varepsilon$	0
d	$\frac{6\alpha_-}{B_{--}}\varepsilon$	$\frac{6}{B_{--}}\varepsilon$	$\frac{6\gamma}{B_{--}}\varepsilon$	$\frac{6\beta_-}{B_{--}}\varepsilon$	0
XII.	$\frac{2}{nN}\varepsilon$	0	0	$\frac{2}{3}\frac{nN-4}{nN}\varepsilon$	0
XIII.	0	0	$\frac{2}{N}\varepsilon$	$\frac{2}{3}\frac{N-4}{N}\varepsilon$	0
XIV. a	$\frac{6x_+}{\rho+12x_+}\varepsilon$	0	0	0	$\frac{6}{\rho+12x_+}\varepsilon$
b	$\frac{6x_-}{\rho+12x_-}\varepsilon$	0	0	0	$\frac{6}{\rho+12x_-}\varepsilon$
XV. a	$\frac{6A_+(n,N)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(n,N)}$	$\frac{6\sigma(n,N)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(n,N)}$	0	0	$\frac{6\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(n,N)}$
b	$\frac{6A_-(n,N)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(n,N)}$	$\frac{6\sigma(n,N)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(n,N)}$	0	0	$\frac{6\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(n,N)}$
XVI. a	$\frac{6A_+(N,n)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(N,n)}$	0	$\frac{6\sigma(N,n)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(N,n)}$	0	$\frac{6\varepsilon}{\rho+4\Sigma_+(N,n)}$
b	$\frac{6A_-(N,n)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(N,n)}$	0	$\frac{6\sigma(N,n)\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(N,n)}$	0	$\frac{6\varepsilon}{\rho+4\Sigma_-(N,n)}$

ревного ФП для моделі з випадковою анізотропією з ефективним гамільтоніаном (3.7). Далі ми покажемо, що цей результат залишається в силі й у двопетлевому наближенні на противагу до твердження роботи [239].

Двопетлеве наближення

Тут ми проаналізуємо отримані функції РГ у двопетлевому наближенні. Як вже показано для граничного випадку моделі з трьома константами зв'язку [208], розрахунок нерухомих точок на основі поправок ε^2 дає результати з поганою збіжністю. Тому проводимо наш аналіз функцій РГ пересумованих за допомогою методу Паде-Бореля [391, 392], узагальненого на випадок декількох змінних за допомогою “резольвентного” ряду [354]. У нашій роботі конструємо його за допомогою додаткової змінної s таким чином:

$$F(\{u_i\}, s) = \sum_{1 \leq i+j+k+l+p \leq 3} c_{ijopq} u^i v^j w^o y^p z^q s^{i+j+o+p+q-1} = \sum_{0 \leq l \leq 2} a_l(\{u_i\}, c) s^l, \quad (3.34)$$

що при $s = 1$ відтворюється вихідний ряд, коефіцієнти a_l при цьому неявно залежать від констант зв'язку і коефіцієнтів c_{ijopq} . Тепер для змінної s будуємо образ Бореля подібним чином, як ми робили в (1.71):

$$F^B(\{u_i\}, s) = \sum_{0 \leq l \leq 2} \frac{a_l}{l!} s^l, \quad (3.35)$$

і апроксимуємо Паде-апроксимантою $[1/1]$ за s , подібно до того, як ми робили для функції однієї змінної (1.72):

$$F^B(\{u_i\}, s) \Rightarrow [1/1](s). \quad (3.36)$$

Тоді пересумована функція отримується в результаті оберненого перетворення Бореля:

$$F^{\text{res}}(\{u_i\}) = \int_0^\infty ds \exp(-s) [1/1](s). \quad (3.37)$$

Зосередимось на випадку реплічної границі $N = 0$ для $n = 2$, $n = 3$. Пересумовуючи для цих значень β -функції (3.23)–(3.27) та розв'язуючи отриману

систему п'яти нелінійних рівнянь на НТ, знайдено нерухомі точки, подані у Таблицях 2.1, 2.2. Приведено тільки результати для нерухомих точок дійсними координатами. У граничних випадках ізотропного та кубічного розподілів отримані результати відтворюють уже відомі [207, 208, 238].

Табл. 3.2. Нерухомі точки для випадку $n = 2$ розраховані в масивній схемі перенормування у двопетлевому наближенні.

FP	v^*	u^*	w^*	y^*	z^*
I	0	0	0	0	0
II	0	0.9107	0	0	0
III	1.1857	0	0	0	0
IV	0	0	1.1857	0	0
V	0	0	0	1.0339	0
VI	-0.0322	0.9454	0	0	0
VII	2.1112	0	-2.1112	0	0
VIII	0	1.5509	0	-1.0339	0
IX	-0.4401	2.3900	0	-1.5933	0
X. α	-0.1387	0	-0.2667	1.5509	0
β	0.6678	0	-0.6678	1.0339	0
XI. α	-0.0899	-0.0081	-0.3262	1.5727	0
β	0.3486	-0.2398	-0.4969	1.4538	0
γ	0.4128	0.5013	0.7676	-0.5706	0
δ	0.4755	1.2862	1.1146	-2.4093	0
ϵ	1.9951	-1.7745	-2.4995	1.9710	0
XII	0.4755	0	0	-2.4093	0
XIII	0	0	-0.4401	1.5933	0
XIV. α	0.5349	0	0	0	0.5325
β	1.4650	0	0	0	-1.6278
XV. α	0.3427	2.0830	0	0	-1.1498
β	0.7991	0.7341	0	0	-0.5360
XVI. α	0.5929	0	-1.1857	0	1.1857
β	1.0556	0	2.1112	0	-2.1112
XVII. α	-0.2201	2.3900	0.4401	-1.5933	-0.4401
β	0.1106	1.9238	0.5040	-1.4409	-0.5040
γ	0.3339	1.5509	0.6678	-1.0339	-0.6678
δ	0.7139	1.1670	2.4589	-1.9465	-2.4077
ϵ	0.7394	1.1381	2.4016	-1.8889	-2.4016
ζ	0.7971	-0.3573	-0.7735	0.5750	0.7735

Табл. 3.3. Нерухомі точки для випадку $n = 3$ розраховані в масивній схемі перенормування у двопетлевому наближенні.

FP	v^*	u^*	w^*	y^*	z^*
I	0	0	0	0	0
II	0	0.8102	0	0	0
III	1.1857	0	0	0	0
IV	0	0	1.1857	0	0
V	0	0	0	1.0339	0
VI	0.1733	0.6460	0	0	0
VII	2.1112	0	-2.1112	0	0
VIII	0	0.8394	0	-0.0485	0
IX	0.1695	0.7096	0	-0.1022	0
X. α	0.6678	0	-0.6678	1.0339	0
β	-0.1387	0	-0.2667	1.5509	0
XI. α	-0.0879	-0.0070	-0.3295	1.5731	0
β	0.2833	-0.1901	-0.5381	1.5365	0
γ	0.4371	0.4027	0.7289	-0.5051	0
δ	0.5704	1.0219	1.1630	-2.2717	0
XII	0.4755	0	0	-2.4093	0
XIII	0	0	-0.4401	1.5933	0
XIV	0.5386	0	0	0	0.4431
XV	0.8450	0.5934	0	0	-0.4506
XVI	0.5753	0	-0.4570	0	0.6462
XVII	0.8962	-0.3497	-0.8276	0.7597	0.5187

На відміну від однопетлевого випадку, де відома кількість розв'язків, тут аналізується система неалгебраїчних рівнянь, а тому наперед не відомо скільки розв'язків можна отримати. Тому така процедура може привести до хибних точок, які не передбачені пертурбативним підходом, та які не співпадають з гаусовою НТ при $d = 4$, а також можуть з'являтися та зникати зі зростанням порядку використаних петлевих розкладів. Якщо такі розв'язки існують та виявляються стійкими, потрібно провести детальний аналіз, щоб перевірити чи точка є справжнім розв'язком, чи хибним (див. Розділ 7). На щастя, у нашому випадку всі такі точки виявились нестійкими. Для зручності використовуємо попередню класифікацію, використану для нерухомих точок однопетлевого наближення у 3.1, згруповуючи під одним номером нерухомі точки з тими самими нульовими координатами.

Модель з випадковою анізотропією описують тільки фізичні точки з константами зв'язку $u^* > 0$, $v^* > 0$, $z^* < 0$, та w^* і y^* довільного знаку. З таких точок стійкою є лише “полімерна” $O(N = 0)$ НТ, яка є стійкою для будь-якого n (НТ III у таблицях 3.2, 3.3), але, як і для ε -розкладу, вона виявляється недосяжною з початкових умов. НТ з координатами $u^* = v^* = z^* = 0$, $w^* < 0$, та $y^* > 0$, яка відповідає стійкій НТ гамільтоніану (3.5), має одне від'ємне власне значення, пов'язане з константою зв'язку z . Тому стійка і фізично досяжна НТ для RAM при кубічному розподілі локальної осі анізотропії (3.4) (НТ XIII таблиць 3.2, 3.3) виявляється нестійкою до збурень з ненульовим z . Оскільки поява збурення з z пов'язана з наявністю ізотропного розподілу, то напрошується висновок, що будь-який розподіл, що включає (3.2), приведе до відсутності критичної точки.

Подібний аналіз було проведено також в рамках схеми мінімального віднімання теоретико-польової РГ. Знову таки у двопетлевому наближенні не було виявлено повністю стійких нерухомих точок, крім НТ III, яка є недосяжна з фізичних початкових умов. Таким чином, наш аналіз двопетлевих β -функцій дає вагомі підстави для висновку, що в RAM з розподілами осі випадкової анізотропії, усереднення за якими дає ефективний гамільтоніан (3.7), відсутня НТ, яка є одночасно стійкою та досяжною з початкових умов. Враховуючи результати досліджень іншими підходами, це можна інтерпретувати як відсутність феромагнітно-

го впорядкування у даній моделі, що не виключає можливості квазі-довгосяжного впорядкування [226, 393, 394], однак такий аналіз неможливий в рамках даного методу.

3.2. Критичне сповільнення для моделі з випадковою анізотропією

У цьому підрозділі ми перейдемо до опису критичної поведінки магнетиків з випадковою анізотропією. Оскільки тільки для анізотропного (кубічного) розподілу ми маємо угоджену картину аналітичних і чисельних досліджень про існування ФП другого роду у ферромагнітний стан, то зосередимось тут на цьому випадку. Динамічні моделі для систем з *ізотропним* розподілом локальної осі анізотропії були розглянуті у роботах [106, 262, 263], розрахунки у першому порядку РГ були виконані у роботі [141]. У цей час проблема динамічної критичної поведінки РМ з анізотропним розподілом випадкових осей, як нам відомо, залишалась недослідженою.

Тут ми розглядаємо чисто релаксаційну динаміку тривимірної ($d = 3$) моделі з випадковою анізотропією з незбережним параметром порядку (модель А у класифікації роботи [85]) та з кубічним розподілом випадкових осей (3.4). Оскільки статична критична поведінка таких магнетиків (при $n > 1$) належить до класу універсальності випадкової моделі Ізінґа [207–209, 236, 237], теплоємність її не розбігається [11, 22]. Тому критична динаміка такої моделі визначається в асимптотиці, динамічним критичним показником моделі А для магнетика Ізінґа з випадковими вузлами для будь-якого числа компонент n параметра порядку. Однак, у неасимптотичній області модель має багату ефективну критичну поведінку, як буде показано нашим подальшим аналізом. Враховуючи, що саме ефективна поведінка спостерігається як в експериментах, так і в симуляціях МК, важливо мати передбачення РГ для типових сценаріїв підходу до критичності у магнетиках з випадковою анізотропією.

3.2.1. Модельні рівняння і перенормування

Прийmemo, що динаміка моделі (3.1) з розподілом (3.4) для осей випадкової анізотропії є повністю релаксаційна n -компонентним параметром порядку $\vec{\phi}_0 \equiv \vec{\phi}_0(\mathbf{r})$. У цьому випадку, як і в попередньому розділі, динамічні рівняння та кореляція теплових шумів задається виразами (1.14) і (1.15).

Ми досліджуємо критичну динаміку неупорядкованих магнетиків у рамках методу теоретико-польової РГ на основі формулювання Буша-Янсена-Вагнера [339], де досліджуються відповідні лагранжіани (див. підрозділ 1.4.2). Для нашого випадку ефективний лагранжіан буде мати такий самий вигляд, як і в попередньому розділі (2.6). Однак ефективний гамільтоніан $\mathcal{H}$ буде задаватись р-ням (3.1).

При вивченні критичних властивостей неупорядкованих систем потрібно проводити усереднення за безладом. Як ми вже згадували раніше, при дослідженні динаміки не обов'язково використовувати метод реплік [262]. На відміну від попереднього розділу, тут ми будемо користуватись саме підходом без реплік. Після усереднення за змінними $\hat{x}$ з розподілом (3.4) лагранжіан запишеться:

$$\mathcal{L} = \left\{ \int d^d r dt \sum_i \tilde{\phi}_{i,0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\Gamma}(\mu_0^2 - \nabla^2) \right) \phi_{i,0} - \dot{\Gamma} \tilde{\phi}_{i,0} + \frac{\dot{\Gamma} v_0}{3!} \phi_{i,0} \sum_j \phi_{j,0} \phi_{j,0} + \frac{\dot{\Gamma} y_0}{3!} \phi_i^3 \right] + \int dt' \sum_i \tilde{\phi}_{i,0}(t) \phi_{i,0}(t) \left[\frac{\dot{\Gamma}^2 u_0}{3!} \sum_j \tilde{\phi}_{j,0}(t') \phi_{j,0}(t') + \frac{\dot{\Gamma}^2 w_0}{3!} \tilde{\phi}_{i,0}(t') \phi_{i,0}(t') \right] \right\}. \quad (3.38)$$

Тут μ_0^2 пропорційне до температурної відстані до критичної точки, а $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $w_0 < 0$ – неперенормовані константи зв'язку. Більше того, v_0 і w_0 пов'язані з моментами розподілу (3.4) таким чином, що $w_0/v_0 = -n$.

Ми аналізуємо динамічні вершинні функції для лагранжіану (3.38), що залежить від неперенормованих величин (позначених верхніми та нижніми індексами 'о') за допомогою теорії поля [7–9]. Оскільки статичні функції РГ отримані для нашої моделі раніше у двопетлевому наближенні [34], потрібно лише розрахувати двоточкову динамічну вершинну функцію $\dot{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}^{i,j}(\mu_0^2, \{u_{i,0}\}, \dot{\Gamma}, k, \omega) = \dot{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}(\mu_0^2, \{u_{i,0}\}, \dot{\Gamma}, k, \omega) \delta_{i,j}$. Її перенормування дозволить отримати функцію ζ_{Γ} .

Динамічний асимптотичний критичний показник z задається у стійкій і досяжній НТ:

$$z = 2 + \zeta_{\Gamma}(u^*, v^*, w^*, y^*). \quad (3.39)$$

У свою чергу ефективний динамічний показник z_{eff} розраховується у неасимптотичній області, де перенормовані константи зв'язку не досягають своїх значень у НТ і означаються розв'язками рівнянь на потоки (1.61):

$$z_{\text{eff}} = 2 + \zeta_{\Gamma}(u(\ell), v(\ell), w(\ell), y(\ell)). \quad (3.40)$$

Ми нехтуємо внесками до z_{eff} , які дають амплітудні функції, оскільки вважаємо їх малими.

3.2.2. Результати

Статичні функції $\text{P}\Gamma$ у рамках схеми мінімального віднімання відомі у двопетловому наближенні [34]. У рамках масивної схеми перенормування вони були розраховані вже у п'ятипетловому наближенні [209]. Розраховуючи динамічну функцію ζ_{Γ} у двопетловому порядку, використовуємо статичні функції $\text{P}\Gamma$ того ж самого порядку [34]. Оскільки відомо, що ряди для цих статичних функцій, у кращому випадку, асимптотичні, ми використовуємо схему пересумовування Паде-Бореля [392], детально описану в роботі [34]. У нашому дослідженні ми використовуємо значення нерухомих точок та розв'язки рівнянь на потоки, отримані на основі згаданих пересумованих функцій, додаючи до них новий двопетлевий вираз для функції ζ_{Γ} . Він отриманий при перенормуванні вершинної функції $\tilde{\Gamma}_{\phi\phi}^{i,j}$ і записується:

$$\begin{aligned} \zeta_{\Gamma} = & -\frac{(v+w)}{3} + \frac{(6\ln(4/3)-1)}{24}(y^2 + \frac{2}{3}uy + \frac{n+2}{3}u^2) + \\ & \frac{1}{36}((n+2)uv + 5v^2 + 5w^2 + 10vw + 3yw + 3uw + 3vy). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Розв'язок рівняння на НТ (1.64) для статичних β -функцій при фіксованій вимірності простору $d = 3$ приводить до 16 нерухомих точок [34] (див. також підрозділ 3.1). Область фізичних значень $u > 0$, $v > 0$, $w < 0$ включає 10 нерухомих

точок. Нижче ми перераховуємо найбільш цікаві нерухомі точки разом з асимптотичним значенням показника z (для числових значень координат НТ, отриманих в двопетлевому наближенні за допомогою пересумовування Паде-Бореля див.[34], значення показника z отримуємо прямою підстановкою координат нерухомих точок у р-ня (3.39)):

- Гаусова НТ I: $u^* = v^* = w^* = y^* = 0$; $z(\forall n) = 2$;
- чиста НТ II: $u^* \neq 0, v^* = w^* = y^* = 0$; $z(n=2) = 2.053, z(n=3) = 2.051$;
- полімерна НТ III: $v^* \neq 0, u^* = w^* = y^* = 0$; $z(\forall n) = 1.815$;
- НТ Ізінґа V: $y^* \neq 0, u^* = v^* = w^* = 0$; $z(\forall n) = 2.052$;
- кубічна НТ VIII: $u^* \neq 0, y^* \neq 0, v^* = w^* = 0$; $z(n=2) = 2.157, z(n=3) = 2.042$;
- НТ Ізінґа X: $v^* \neq 0, y^* = -w^*, u^* = 0$; $z(\forall n) = 2.052$;
- НТ моделі Ізінґа з випадковими вузлами XIII: $w^* \neq 0, y^* \neq 0, u^* = v^* = 0$; $z(\forall n) = 2.139$.

Тут ми зберігаємо таку ж нумерацію нерухомих точок як у роботах [34, 203, 207–209, 236], крім останньої точки, де ми дали номер згідно підрозділу 3.1. З вище вказаного списку стійкі лише нерухомі точки моделі Ізінґа з випадковими вузлами (XIII) та полімерна (III). Однак, як вже раніше було сказано, полімерна НТ недоступна з початкових фізичних умов. Це приводить до висновку, що НТ XIII визначає критичну поведінку. Тому n -векторні магнетики з кубічним розподілом випадкових осей належать до класу універсальності Ізінґа з випадковими вузлами. Неасимптотична критична поведінка RAM суттєво відрізняється від відповідної поведінки у моделі з випадковими вузлами, як це було продемонстровано в статті у роботі [34]. Це так само стосується і неасимптотичної динамічної критичної поведінки: критичне сповільнення RAM визначається ефективним показником z_{eff} , як пояснено нижче.

Переходи між різними нерухомими точками приводять до багатой картини можливих потоків РГ [34]. На багато потоків впливають НТ V і НТ X, що описує клас універсальності чистої моделі Ізінґа. Підставляючи у (3.40) декіль-

ка типових потоків РГ, які починаються з фізичної області початкових значень констант зв'язку, можна отримати різні режими наближення ефективного динамічного критичного показника z_{eff} до асимптотики. Залежність z_{eff} від параметра потоку ℓ для легкоплощинного ($n = 2$) і гейзенберівського ($n = 3$) магнетиків показані на Рис. 3.1 і 3.2 відповідно. Потік 3 був вибраний так, щоб знаходитись під впливом обох ізінгівських НТ V і НТ X, тому обидві криві 3 з рисунків 3.1 і 3.2 демонструють, що може існувати велика область для z_{eff} з динамічними значеннями показника чистої однокомпонентної (Ізінга) моделі А. Криві 6 відповідають потокам, які наближаються до чистої НТ II і криві 7 – потокам, які підходять до кубічної НТ VIII.

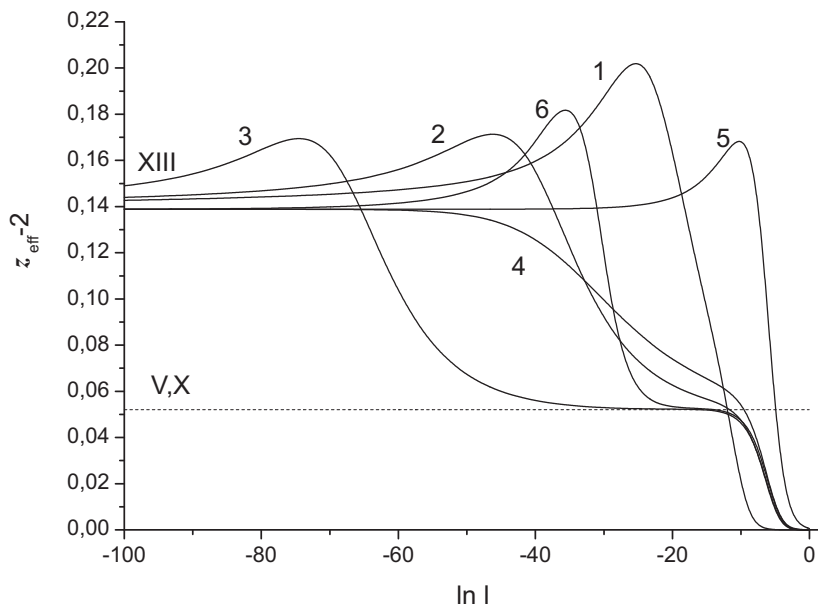


Рис. 3.1. Ефективний критичний показник z_{eff} як функція логарифму параметра потоку для вимірності параметра порядку $n = 2$. Штрихова лінія вказує на значення z при НТ V, НТ X. Див. текст для деталей.

Хоча асимптотичні показники магнетиків з випадковою анізотропією є такими ж, як і для випадкових (розведених) ізінгівських магнетиків, підхід до асимптотичної області суттєво відрізняється від розведених магнетиків. Він визначається найменшим статичним показником стійкості $\omega = -0.0036$ [34], що дорівнює за абсолютним значенням відношенню критичних показників теплоємності α та кореляційної довжини ν моделі Ізінга з випадковими вузлами [209]. Унаслідок цього поправка Вагнера до скейлінгу є $\Delta = \omega\nu = -\alpha$. Оцінка у високих порядках

петлевого розкладу дає $\Delta \approx 0.049 \pm 0.009$ [209]. Таке невелике значення Δ означає, що підхід до асимптотичних значень дуже повільний. Тому експериментально або у чисельному моделюванні буде спостерігатися практично лише неасимптотична критична поведінка, що регулюється ефективними критичними показниками.

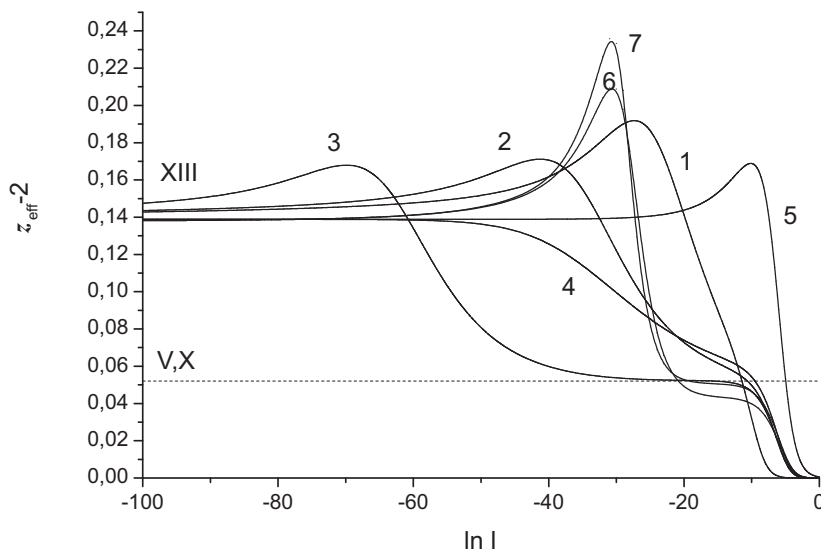


Рис. 3.2. Ефективний критичний показник z_{eff} як функція логарифму параметра потоку для вимірності параметра порядку $n = 3$. Штрихова лінія вказує на значення z при НТ V, НТ X.

Як видно з рисунків 3.1, 3.2, ще однією особливістю ефективного показника z_{eff} може бути те, що він досягає свого асимптотичного значення z завжди з області $z_{\text{eff}} > z$. Таким чином, в експериментальній ситуації спадання z_{eff} може слугувати очевидністю підходу до асимптотики. Зазначимо, що такий сценарій є особливістю критичного сповільнення магнетиків з випадковою анізотропією. Коли безлад впроваджується шляхом розведення немагнітної компонентою, підхід z_{eff} до асимптотичного значення не є обов'язково тільки зверху (див. підрозділ 2.3).

3.3. Висновки

У цьому розділі було досліджено критичну динаміку типу моделі А магнітних систем зі структурним безладом типу випадкової анізотропії. Вплив розподілу осей випадкової анізотропії для таких систем має кардинальний ефект. Тому

ми спочатку розглянули в рамках теорії поля моделі RAM з так званим тримодальним розподілом осей випадкової анізотропії, який є комбінацією ізотропного та кубічного розподілів. У рамках масивної схеми ми розраховували функції РГ для моделі (3.7) при довільних n і N у двопетловому наближенні. Ми перевірили, що наші функції відтворюють результати попередніх досліджень у граничних випадках ізотропного та кубічного розподілів. Застосовуючи пересумовування, ми знайшли нерухомі точки при $d = 3$, то дослідили їх на стійкість. Наш аналіз показує, що єдина повністю стійка точка НТ ХІІІ недосяжна з фізичних початкових умов. Це вказує на відсутність неперервного ФП, заперечуючи твердження роботи [239] про існування такого ФП нового класу універсальності. Ми показали, що висновки роботи [239] основані на помилкових β -функціях РГ, які не відповідають відомим результатам.

Хоча наш аналіз не є математично строгим доведенням, в комбінації з іншими аналітичними та чисельними дослідженнями (див. оглядовий розділ) може служити аргументом на користь відсутності низьковимірного феромагнітного впорядкування у магнетиках з випадковою анізотропією, які мають ізотропний розподіл осей випадкової анізотропії. У той час довгосяжне феромагнітне впорядкування може зберегтись для анізотропного розподілу осей випадкової анізотропії [395–397]. Це не виключає існування квазі-довгосяжної фази, яка, однак, не доступна у рамках нашого методу [226, 393, 394].

Крім того, отримані нами двопетлові РГ функції (3.23)–(3.27) для загальних n та N можна використати для вивчення критичних властивостей інших теоретико-польових моделей.

Ми також проаналізували критичне сповільнення у магнетиках з випадковою анізотропією. Оскільки аналітичні та чисельні підходи узгоджуються, що ці магнетики мають ФП другого роду у феромагнітне впорядкування для анізотропного (*кубічного*) розподілу осей випадкової анізотропії, був проведений тільки аналіз цього випадку. Для дослідження релаксаційної динаміки незбереженого параметра порядку ми доповнили попередні статичні розрахунки [34, 207–209], розрахунком двопетлової динамічної функції РГ ζ_T , заданої р-ням (3.41). Поєд-

нуючи цей результат з попередніми даними для статичної критичної поведінки, ми отримали чисельні значення для ефективного критичного показника z_{eff} , який визначає критичне сповільнення часу релаксації, при наближенні до T_c .

Хоча асимптотична динамічна критична поведінка систем з випадковою анізотропією з *кубічним розподілом* є такою ж, як і для моделі Ізінґа з випадковими вузлами, перехід між різними нерухомими точками значно впливає на неасимптотичні критичні властивості, що приводить до можливої реалізації різних сценаріїв динамічної критичної поведінки. Оскільки підхід до асимптотики дуже повільний, це може спостерігатися в реальних та чисельних експериментах. Обчислені ефективні показники можуть приймати значення, суттєво відмінні від асимптотичних ($z = 2.139$ у наших розрахунках). Наприклад, у великій області z_{eff} може бути рівним показнику чистої моделі Ізінґа ($z = 2.052$). Ще одною особливою рисою критичного уповільнення магнетиків з випадковою анізотропією, яку передбачає наш аналіз, є те, що z_{eff} завжди досягає свого асимптотичного значення z з області $z_{\text{eff}} > z$, на відміну від розведених магнетиків (див. підрозділ. [2.3](#)).

РОЗДІЛ 4

ВПЛИВ ЗВ'ЯЗКУ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКУ З ПОВІЛЬНОЗМІННИМИ ВЕЛИЧИНАМИ НА КРИТИЧНУ ДИНАМІКУ СТРУКТУРНО НЕВПОРЯДКОВАНИХ МАГНЕТИКІВ

У цьому розділі проводиться дослідження критичної динамічної поведінки магнетиків зі структурним безладом при наявності зв'язку параметра порядку з повільнозмінними величинами (тими, які підпорядковуються законам збереження). У найпростішому випадку цей зв'язок можна задати тільки у статичному гамільтоніані, тоді динаміка параметра порядку та повільнозмінної величини (наприклад енергії) описується рівняннями моделі С. Тут для цієї моделі у рамках теоретико-польової РГ розраховано динамічне відношення амплітуд в однопетлевому наближенні. Розраховано фазову діаграму у параметричній площині вимірності простору та вимірності параметра порядку з використанням результатів високих порядків збурень для простіших моделей. Для магнетиків з випадковими вузлами та магнетиків з випадковою анізотропією з кубічним розподілом осі випадкової анізотропії у двопетлевому наближенні розраховано ефективний динамічний критичний показник для параметра порядку (а для магнетиків з випадковою анізотропією ще й для збережної величини) в залежності від різних початкових значень параметрів моделі. Основні результати цього розділу викладені у роботах [36, 39–42, 49, 55, 56, 59–63, 66].

4.1. Модель С

У динамічній критичній поведінці поблизу рівноваги важливим є зв'язок між параметром порядку і збережними густинами. У найпростішому випадку такий зв'язок реалізується у рамках так званої моделі С [85, 398], де незбережний параметер порядку пов'язаний зі скалярною збереженою густиною тільки в статичному гамільтоніані. Будучи досить простою, ця модель може використовуватись для опису різних фізичних систем.

Системи з незбережним параметром порядку, зв'язаним зі збереженою величиною, можна зустріти у різних фізичних контекстах. Так, у ґратковій моделі інтерметалічних сплавів [399] незбережний параметер порядку відповідає різниці концентрацій атомів певного сорту на парній і непарній підґратках. Він пов'язаний зі збереженою величиною - концентрацією атомів цього сорту у всій системі. У переохолоджених рідинах доля локальних структур є незбережним параметром, зв'язаним зі збереженою густиною рідини [400]. Шари на твердому субстраті [401] також описуються моделлю з незбережним параметром порядку і додатковою зв'язаною збереженою густиною. Системи, що містять відпалені домішки з довгими часами релаксації, також демонструють певну подібність з моделлю С [133]. Також аргументувалось, що релятивістична скалярна теорія поля у $2+1$ вимірах узгоджується з динамікою моделі С [402]. Нещодавно модель С застосовувалась для опису ФП типу тверде тіло-рідина [403]. Модель С використовувалась для опису критичної динаміки теплопровідності при ФП в надпровіднику [404], в той час як динаміка моделі А для зарядженого надпровідника досліджувалась у роботі [405].

Чисельні симуляції критичної динаміки моделі С проводились для антиферомагнетика типу Ізінґа зі збережним повним намагніченням і не збережним підґратковим намагніченням [406, 407], а також для магнетика Ізінґа зі збереженою енергією [408].

Теоретичні дослідження динамічного класу універсальності моделі С проводились спочатку в рамках динамічної версії пертурбативної теоретико-польової

РГ [19, 20]. Поведінка моделі С з n -компонентним параметром порядку аналізувалася $\varepsilon = 4 - d$ розкладом у різних областях площини (n, d) у першому порядку теорії збурень [398] і пізніше у двопетлевому порядку [90, 409]. Результати роботи [409] були скоректовані пізнішими розрахунками [88, 410].

Згідно з двопетлевими результатами [88, 410] на площині $(n, \varepsilon = 4 - d)$ можна виділити три різні області (режими): (1) *незв'язаний режим* (область $\mathcal{D}$), де збережна густина від'єднується від параметра порядку і відповідно динаміка параметра порядку описується моделлю А з динамічним критичним показником $z = 2 + c\eta$, у той час як динамічний показник збережної густини $z_m = 2$; (2) *режим слабого скейлінгу* (область $\mathcal{W}$), де параметр порядку і збережна густина мають різний скейлінг, для параметру порядку $z = 2 + c\eta$, а для збережної густини $z_m = 2 + \alpha/\nu$, α і ν – критичні показники теплоємності і критичної довжини відповідно; (3) *режим сильного скейлінгу* (область $\mathcal{S}$), де параметр порядку і збережна густина підпорядковуються скейлінгу з однаковим критичним показником $z = z_m = 2 + \alpha/\nu$.

Під знаком питання перебуває існування ще однієї області (4) так званого *режиму аномального скейлінгу* (область $\mathcal{A}$) передбаченої у рамках однопетлевого порядку [398] для d поблизу 4 при $2 < n < 4$. У цій області параметр порядку поводить себе набагато швидше, ніж збережна густина, і тому для неї скейлінг є під запитанням. Було продемонстровано, що область $\mathcal{A}$ є артефактом ε -розкладу в рамках коректних двопетлевих розрахунків [88, 410].

У цьому розділі у рамках моделі С розглядається критична динаміка магнітних систем з безладом. Але навіть повна картина динамічної поведінки моделі С для ідеальних систем залишається ще не вивченою. Тому спочатку розглянемо дві підзадачі, що стосуються моделі С без безладу, а потім розглянемо застосування цієї моделі для опису динамічної поведінки магнетиків з випадковими вузлами та магнетиків з випадковою анізотропією. Перш за все розглянемо основні означення та теоретико-польовий опис для моделі С.

4.1.1. Динамічний скейлінг

Гіпотеза динамічного скейлінгу стверджує, що динамічні критичні явища описуються одним часовим масштабом. Часовий масштаб визначається залежністю характеристичної частоти параметра порядку від хвильового вектора при ФП. Ця залежність є степеневою і визначає динамічний критичний показник z . Однак це справедливо тільки у випадку *сильного* динамічного скейлінгу, в той час як у випадку *слабкого* динамічного скейлінгу поряд з динамічним критичним показником для параметра порядку ϕ в описі з'являється і динамічний критичний показник також для збережної густини m . Динамічні кореляційні функції для параметра порядку $C_{\phi\phi}(\xi, k, \omega)$ і для збережної густини $C_{mm}(\xi, k, \omega)$ можуть бути отримані з експериментів з розсіяння. Гіпотеза динамічного скейлінгу стверджує, що динамічні кореляційні функції є однорідними функціями аргументів і тому їх можна виразити у формі:

$$C_{aa}(\xi, k, \omega) = \frac{C_{aa}^{(s)}(\xi, k)}{\omega_a(\xi, k)} \mathcal{F}_a\left(\frac{\omega}{\omega_a(\xi, k)}, k\xi\right), \quad (4.1)$$

де $a = \phi, m$. $C_{aa}^{(s)}(\xi, k)$ позначає статичну кореляційну функцію, а $\omega_a(\xi, k)$ – характеристична частота для параметра порядку і збережної густини залежно від позначення a . Відзначимо, що для кожної динамічної кореляційної функції вводиться її власний часовий масштаб з допомогою відповідної характеристичної частоти:

$$x = k\xi, \quad y_a = \frac{\omega}{\omega_a(\xi, k)}. \quad (4.2)$$

$\mathcal{F}_a(y_a, x)$ – динамічна функція форми. Статичні кореляційні функції і характеристичні частоти знову підлягають скейлінговим співвідношенням. Зі статичного скейлінгу відомо, що кореляційні функції мають таку форму:

$$C_{\phi\phi}^{(s)}(\xi, k) = k^{-2+\eta} g_{\phi}(x), \quad C_{mm}^{(s)}(\xi, k) = g_m(x), \quad (4.3)$$

де $g_a(x)$ – статична функція форми. Вони набувають скінченних значень у критичній границі $x \rightarrow \infty$, що приводить до відношень амплітуд, коли їх розглядають

вище і нижче критичної температури. Критичний показник η часто називають аномальною вимірністю. Характеристичні частоти задовільняють також динамічне скейлінгове співвідношення:

$$\omega_a = A_a k^{z_a} f_a(x) \quad \text{з} \quad a = \phi, m \quad (z_\phi = z). \quad (4.4)$$

У критичній області, $x > 1$, універсальні скейлінгові функції f_a досягають скінченних ненульових границь для $x \rightarrow \infty$, у той час як у гідродинамічній області, $x < 1$, у границі $x \rightarrow 0$ скейлінгова функція f_ϕ розбігається як x^{-z} , а f_m як x^{-z_m+2} відповідно до її збережних властивостей. Характеристичні частоти мають форму:

$$\omega_\phi = \bar{A}_\phi \xi^{-z} = \Gamma_\phi(\xi), \quad (4.5)$$

$$\omega_m = \bar{A}_m \xi^{-z_m+2} k^2 = D(\xi) k^2. \quad (4.6)$$

Можна означити відношення різних динамічних величин, що стають універсальними в асимптотичній границі. Такі відношення можуть включати динамічні величини вище і нижче температури ФП T_c . У системах, що описуються принаймні двома динамічними змінними, також можна означити відношення динамічних величин, визначених вище T_c для кожної з цих змінних окремо. Однією з таких величин є динамічне відношення амплітуд [411]:

$$R(k, \xi) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{\omega_m(k, \xi)}{\omega_\phi(k, \xi) x^2} \right], \quad (4.7)$$

для випадку *сильного* скейлінгу, де $z_m = z$. Границя $k \rightarrow 0$ береться перед тим, як ξ спрямовується до ∞ (або $T \rightarrow T_c$) для того, щоб гарантувати підхід до асимптотики з гідродинамічної області. Підставляючи вирази для характеристичних частот, р-ня (4.5) і (4.6), це відношення виражається через гідродинамічні коефіцієнти переносу:

$$R = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{D(\xi)}{\Gamma_\phi(\xi) \xi^2} = \frac{\lambda(\xi) \chi_\phi(\xi)}{\Gamma(\xi) \chi_m(\xi) \xi^2}. \quad (4.8)$$

Тут у правій стороні рівняння введені кінетичні коефіцієнти Γ і λ для параметра порядку і збережної густини через співвідношення $\Gamma_\phi(\xi) = \Gamma(\xi)/\chi_\phi(\xi)$ і

$D(\xi) = \lambda(\xi)/\chi_m(\xi)$. χ_ϕ і χ_m – це відповідні сприйнятливості. Коли T прямує до T_c і досягає *асимптотичної* області, модельні параметри (що з’являються у кінетичних коефіцієнтах і сприйнятливостях) набувають значень у фіксованих точках, і відношення амплітуд досягає універсального значення залежно від просторової вимірності d і числа компонент n параметра порядку.

Такі відношення амплітуд визначені також для складніших випадків, коли динаміка параметра порядку містить поряд зі статичним зв’язком також члени міжмодового зв’язку, як, наприклад, для надплинного переходу. Найбільш помітним прикладом є універсальне відношення амплітуд теплопровідності при ФП у надплинному ^4He [91]. Однак для надплинного переходу виявляється, що асимптотичне значення цього амплітудного відношення не досягається в експериментально доступній області, а тому потрібно порівнювати його з неасимптотичним відповідником.

4.1.2. Кореляційні функції і перенормування

Розрахунок різних досліджуваних величин виконується за допомогою петлевого розвинення за константами зв’язку, присутніми в теоретичній моделі (тобто у неквадратичній частині відповідного динамічного функціоналу). Перенормування видаляє полюси, присутні в вершинних функціях. Однак скінченні амплітудні функції містять логарифмічні члени, що розбігаються в границі малого модуля хвильового вектора k , частоти ω та/або нескінченної кореляційної довжини. Правильне представлення цих логарифмічних членів у формі степеневих законів (експоненціювання) приводить пертурбативний результат до скейлінгової форми. Це експоненціювання, однак, є неоднозначним у високих порядках.

Тим не менше воно корисне для використання загальних скейлінгових законів, оскільки дозволяє комбінувати результати отримані у різних петлевих порядках. У багатьох задачах критичної динаміки (і це також стосується моделі С) динамічний показник z можна точно знайти, залишається лише розрахувати функції скейлінгу. Ці функції можуть бути добре представлені у найнижчих пе-

тлевих порядках, тоді можна провести експоненціювання, потім ідентифікувати вирази для критичних показників, а тоді замінити їх точними значеннями. Тобто значеннями у НТ в асимптотичному виразі, зокрема, розрахованими у вищих петлевих наближеннях. Це важливо, оскільки значення відношення часових масштабів у НТ може значно змінюватися у двопетлевому порядку по відношенню до однопетлевого.

4.1.3. Основні співвідношення

У рамках вибраного підходу, який оснований на роботі Бауша, Янсена, Вагнера [339], динамічні кореляційні функції $\mathring{C}_{aa}(\xi, k, \omega)$ можна виразити через вершинні функції $\mathring{\Gamma}_{a\tilde{a}}(\xi, k, \omega)$ таким чином:

$$\mathring{C}_{aa}(\xi, k, \omega) = -\frac{\mathring{\Gamma}_{\tilde{a}\tilde{a}}(\xi, -k, -\omega)}{|\mathring{\Gamma}_{a\tilde{a}}(\xi, -k, -\omega)|^2}, \quad (4.9)$$

де $a = \phi, m$, як і раніше.

Статична кореляційна функція $\mathring{C}_{aa}^{(s)}$ дорівнює динамічній кореляційній функції при початковому часі $t = 0$. Це веде до

$$\mathring{C}_{aa}^{(s)}(\xi, k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathring{C}_{aa}(\xi, k, \omega) \quad (4.10)$$

для функцій в Фур'є просторі. Зв'язок зі статичною вершинною функцією задається таким чином:

$$\mathring{C}_{aa}^{(s)}(\xi, k) = \frac{1}{\mathring{\Gamma}_{aa}(\xi, k)}. \quad (4.11)$$

4.1.4. Перенормування

Схема перенормування приводить до наступних співвідношень для кореляційних і вершинних функцій. Кореляційні функції перенормовуються як

$$C_{\phi\phi} = Z_{\phi}^{-1} \mathring{C}_{\phi\phi}, \quad C_{mm} = Z_m^{-2} \mathring{C}_{mm} \quad (4.12)$$

незалежно від того чи вони статичні, чи динамічні. Статичні вершинні функції перенормовується так:

$$\Gamma_{\phi\phi} = Z_{\phi} \mathring{\Gamma}_{\phi\phi}, \quad \Gamma_{mm} = Z_m^2 \mathring{\Gamma}_{mm}, \quad (4.13)$$

у той час як динамічні вершинні функції задовільняють співвідношення (1.58), (1.59). Замінюючи в основних співвідношеннях (4.9), (4.10) і (4.11) функції на їх перенормовані відповідники з використанням (4.12), (4.13), (1.58), (1.59), можна побачити, що вони залишаються справедливими також для перенормованих функцій. Це відбувається також і для співвідношень (1.43) і (1.45), приводячи до перенормування для динамічних функцій:

$$\Omega_{\phi\tilde{\phi}} = Z_{\phi}^{1/2} Z_{\tilde{\phi}}^{1/2} \mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}, \quad \Omega_{m\tilde{m}} = Z_m Z_{\tilde{m}} \mathring{\Omega}_{m\tilde{m}}. \quad (4.14)$$

Варто взяти до уваги, що для збережної густини справедливий зв'язок $Z_{\tilde{m}} = Z_m^{-1}$, який можна підставити у рівняння вище. Тому в представленій схемі перенормування у р-нях (4.9)-(4.11) неперенормовані функції можна прямо замінити на їх перенормовані відповідники.

Функції РГ

З перенормовуючих множників введених вище ми отримаємо ζ -функції, що описують критичну поведінку нашої моделі (див. р-ня (1.60)).

Особливим випадком є аддитивне перенормування A_{ϕ^2} для теплоємності у моделі Гінзбурга-Ландау-Вільсона (1.53). Це приводить до додаткової функції РГ

$$B_{\phi^2}(u) = \kappa^{\varepsilon} Z_{\phi^2}^2 \mu \frac{d}{d\kappa} \left(Z_{\phi^2}^{-2} \kappa^{-\varepsilon} A_{\phi^2} \right), \quad (4.15)$$

що з'являється у статичних і динамічних ζ -функціях.

Оскільки у статистиці збережні величини можна відінтегрувати, це приводить до зв'язку із статичними Z -факторами, що з'являються у моделі А (див. А.2). Співвідношення (1.52) та (1.50) приводять тоді до

$$\zeta_{\gamma}(u, \gamma) = 2\zeta_m(u, \gamma) + \zeta_{\phi}(u) + \zeta_{\phi^2}(u), \quad (4.16)$$

$$\zeta_m(u, \gamma) = \frac{1}{2}\gamma^2 B_{\phi^2}(u). \quad (4.17)$$

Вилучаючи ζ_m підстановкою р-ня (4.17) у р-ня (4.16) знаходимо:

$$\zeta_\gamma(u, \gamma) = \gamma^2 B_{\phi^2}(u) + \zeta_\phi(u) + \zeta_{\phi^2}(u). \quad (4.18)$$

ζ -функції для кінетичних коефіцієнтів Γ та λ , які отримуються підстановкою (1.48) та (1.57) у означення (1.60), матимуть вигляд:

$$\zeta_\Gamma(\{u, \gamma, W\}) = -\frac{1}{2}\zeta_{\tilde{\phi}}(\{u, \gamma, W\}) + \frac{1}{2}\zeta_\phi(u), \quad (4.19)$$

$$\zeta_\lambda(u, \gamma) = \gamma^2 B_{\phi^2}(u). \quad (4.20)$$

Останнє співвідношення отримується з врахуванням р-ня (4.17).

Для того, щоб дослідити динамічні критичні точки моделі С, зручно ввести відношення масштабів часу $W = \Gamma/\lambda$. Відповідна ζ - функція для цього динамічного параметру, використовуючи співвідношення (4.19) і (4.20), знаходиться у вигляді:

$$\zeta_W(u, \gamma, W) = \frac{1}{2}\zeta_\phi(u) - \frac{1}{2}\zeta_{\tilde{\phi}}(u, \gamma, W) - \gamma^2 B_{\phi^2}(u). \quad (4.21)$$

Статичні критичні властивості нашої моделі описуються рівняннями на потоки:

$$l \frac{du}{dl} = \beta_u(u), \quad l \frac{d\gamma}{dl} = \beta_\gamma(u, \gamma), \quad (4.22)$$

з параметром потоку ℓ і β -функціями, які ми можемо записати згідно р-ня (1.62) як:

$$\beta_u(u) = u f_u(u) = u(-\varepsilon - 2\zeta_\phi(u) + \zeta_u(u)), \quad (4.23)$$

$$\beta_\gamma(u, \gamma) = \gamma \left(-\frac{\varepsilon}{2} - \zeta_\phi(u) - \zeta_m(u, \gamma) + \zeta_\gamma(u, \gamma) \right). \quad (4.24)$$

Динамічні критичні властивості визначаються рівнянням потоку для відношення масштабів часу W , яке має вигляд

$$l \frac{dW}{dl} = \beta_W(u, \gamma, W), \quad (4.25)$$

де β -функція для W , згідно з р-ня (1.62), означається як

$$\beta_W(u, \gamma, W) = W \zeta_W(u, \gamma, W), \quad (4.26)$$

оскільки Γ , λ та їх відношення W є безрозмірними параметрами.

Використовуючи співвідношення між ζ -функціями для β_γ і β_W отримуємо:

$$\begin{aligned} \beta_\gamma(u, \gamma) &= \gamma f_\gamma(u, \gamma) = \gamma \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \zeta_{\phi^2}(u) + \frac{1}{2} \gamma^2 B_{\phi^2}(u) \right) \\ &= \gamma \left(-\frac{\hat{\mathcal{A}}(u)}{2} + \frac{1}{2} \gamma^2 B_{\phi^2}(u) \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\beta_W(u, \gamma, W) = W \left(\frac{1}{2} \zeta_\phi(u) - \frac{1}{2} \zeta_{\tilde{\phi}}(u, \gamma, W) - \gamma^2 B_{\phi^2}(u) \right), \quad (4.28)$$

де $\hat{\mathcal{A}}(u) = \varepsilon - 2\zeta_{\phi^2}(u)$ дорівнює відношенню залежних від параметрів функцій критичних показників теплоємності $\alpha(u)$ і кореляційної довжини $\nu(u)$.

Асимптотичні властивості

Спільний нуль β -функцій (4.23), (4.27), (4.28) визначає значення у нерухомій точці: $\{\alpha^*\} = \{u^*, \gamma^*, W^*\}$. Нулі функції β_u можна отримати незалежно від інших β -функцій. Для кожної НТ u^* отримуються два значення γ^* з β_γ :

$$\gamma^{*2}=0 \quad \text{і} \quad \gamma^{*2} = \frac{\hat{\mathcal{A}}(u^*)}{B_{\phi^2}(u^*)} = \frac{\alpha}{\nu B_{\phi^2}(u^*)}, \quad (4.29)$$

де α і ν – критичні показники теплоємності і кореляційної довжини, розраховані у відповідній НТ u^* . Тоді результати для статичних нерухомих точок підставляються у β_W для того, щоб знайти відповідні значення W^* .

Як уже наголошувалось НТ, яка відповідає критичній точці системи, має бути (і) досяжна з фізичних початкових умов та (ii) стійка. Зі структури β -функцій (4.23), (4.27), (4.28) видно, що стійкість будь-якої НТ по відношенню до параметрів u , γ і W визначається тільки похідними відповідних β -функцій:

$$\omega_u(u^*) = \left. \frac{\partial \beta_u(u)}{\partial u} \right|_{\{\alpha^*\}}, \quad (4.30)$$

$$\omega_\gamma(u^*, \gamma^*) = \left. \frac{\partial \beta_\gamma(u, \gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\{\alpha^*\}}, \quad (4.31)$$

$$\omega_\rho(u^*, \gamma^*, W^*) = \left. \frac{\partial \beta_W(u, \gamma, W)}{\partial W} \right|_{\{\alpha^*\}}. \quad (4.32)$$

Більш того, використовуючи (4.27), ми можемо записати:

$$\omega_\gamma = -\frac{\hat{A}(u)}{2} + \frac{3}{2}\gamma^2 B_{\phi^2}(u), \quad (4.33)$$

що у НТ α_i^* веде до:

$$\omega_\gamma|_{\alpha_i=\alpha_i^*} = -\frac{\alpha}{2\nu} \quad \text{для} \quad \gamma^{*2} = 0, \quad (4.34)$$

$$\omega_\gamma|_{\alpha_i=\alpha_i^*} = \frac{\alpha}{\nu} \quad \text{для} \quad \gamma^{*2} \neq 0. \quad (4.35)$$

Таким чином, стійкість по відношенню до параметра γ визначається знаком α . Для системи з нерозбіжною теплоємністю ($\alpha < 0$) при критичній точці, $\gamma^* = 0$ є стійкою НТ.

Функції РГ ζ_Γ , ζ_λ , розраховані у стійкій і досяжній з початкових умов НТ $\{\alpha^*\}$, визначають асимптотичні динамічні критичні показники для параметра порядку і збережної величини через співвідношення:

$$z = 2 + \zeta_\Gamma(u^*, \gamma^*, W^*), \quad (4.36)$$

$$z_m = 2 + \zeta_\lambda(u^*, \gamma^*). \quad (4.37)$$

У той час ефективні відповідники цих показників у неасимптотичній області визначаються розв'язком рівняння на потоки (4.22) та (4.25) як

$$z_{\text{eff}} = 2 + \zeta_\Gamma(u(\ell), \gamma(\ell), W(\ell)), \quad (4.38)$$

$$z_m^{\text{eff}} = 2 + \zeta_\lambda(u(\ell), \gamma(\ell)). \quad (4.39)$$

У границі $\ell \rightarrow 0$ ефективні показники досягають своїх асимптотичних значень.

Статичні функції РГ для моделі С на даний час відомі у високих порядках теорії збурень. У рамках схеми мінімального віднімання п'ятипетлеві результати доступні для функцій β_u , ζ_ϕ , ζ_{ϕ^2} [355, 412]. Функція $B_{\phi^2}(u)$ була отримана також у

рамках п'ятипетлевого наближення [413]. У той час як єдина динамічна функція відома тільки у двопетлевому наближенні [88, 410]. Ці вирази будуть служити нам у подальшому для аналізу фазової діаграми моделі С у параметричному просторі вимірностей параметра порядку і фізичного простору.

4.2. Розрахунок динамічного амплітудного відношення в однопетлевому наближенні

4.2.1. Вершинні функції в однопетлевому порядку

Після введення кореляційної довжини ξ статична вершинна функція параметра порядку в однопетлевому наближенні зводиться до

$$\mathring{\Gamma}_{\phi\phi}(\xi, k) = \xi^{-2} + k^2, \quad (4.40)$$

у той час як відповідна функція для збережної густини має вигляд:

$$\mathring{\Gamma}_{mm}(\xi, k) = 1 - \frac{n}{2} \gamma_0^2 \mathring{I}_m^{(s)}(\xi, k), \quad (4.41)$$

із статичним однопетлевым інтегралом:

$$\mathring{I}_m^{(s)}(\xi, k) = \int_{k'} \frac{1}{(\xi^{-2} + k'^2)(\xi^{-2} + (k' + k)^2)}. \quad (4.42)$$

Для опису динаміки також потрібно розрахувати функції $\mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}(\xi, k, \omega)$ і $\mathring{\Omega}_{m\tilde{m}}(\xi, k, \omega)$. З них можна визначити усі інші динамічні функції. В однопетлевому порядку ми отримуємо:

$$\mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}(\xi, k, \omega) = 1 + \mathring{W} \gamma_0^2 \mathring{I}_\phi^{(d)}(\xi, k, \omega), \quad (4.43)$$

$$\mathring{\Omega}_{m\tilde{m}}(\xi, k, \omega) = 1 + k^2 \frac{n}{2} \frac{\gamma_0^2}{\mathring{W}} \mathring{I}_m^{(d)}(\xi, k, \omega). \quad (4.44)$$

Динамічні однопетлеві інтеграли виражаються:

$$\mathring{I}_\phi^{(d)}(\xi, k, \omega) = \int_{k'} \frac{1}{(\xi^{-2} + k'^2) \left[\frac{-i\omega}{\lambda} + \mathring{W}(\xi^{-2} + k'^2) + (k' + k)^2 \right]} \quad (4.45)$$

$$\mathring{I}_m^{(d)}(\xi, k, \omega) = \int_{k'} \frac{1}{(\xi^{-2} + k'^2)(\xi^{-2} + (k+k')^2)} \frac{1}{\left[\frac{-i\omega}{\Gamma} + 2\xi^{-2} + k'^2 + (k'+k)^2 \right]}. \quad (4.46)$$

Застосовуючи схему перенормування до (4.41), (4.43) і (4.44), отримуємо перенормовані функції у вигляді:

$$\Gamma_{mm}(\xi, k) = 1 - \frac{n}{2} \gamma^2 I_m^{(s)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}\right), \quad (4.47)$$

$$\Omega_{\phi\bar{\phi}}(\xi, k, \omega) = 1 + W \gamma^2 I_\phi^{(d)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}, \frac{\omega}{\kappa^2}\right), \quad (4.48)$$

$$\Omega_{m\tilde{m}}(\xi, k, \omega) = 1 + \frac{n}{2} \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2 \frac{\gamma^2}{W} I_m^{(d)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}, \frac{\omega}{\kappa^2}\right), \quad (4.49)$$

де κ представляє довільний масштаб хвильового вектора. Перенормовані відповідники інтегралів у (4.48) і (4.49) визначаються як:

$$I_m^{(s)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}\right) = \kappa^\varepsilon A_d^{-1} \left(\mathring{I}_m^{(s)}(\xi, k) - [\mathring{I}_m^{(s)}(\xi, 0)]_S \right), \quad (4.50)$$

$$I_\phi^{(d)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}, \frac{\omega}{\kappa^2}\right) = \kappa^\varepsilon A_d^{-1} \left(\mathring{I}_\phi^{(d)}(\xi, k, \omega) - [\mathring{I}_\phi^{(d)}(\xi, 0, 0)]_S \right), \quad (4.51)$$

$$I_m^{(d)}\left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}, \frac{\omega}{\kappa^2}\right) = \kappa^{2+\varepsilon} A_d^{-1} \mathring{I}_m^{(d)}(\xi, k, \omega), \quad (4.52)$$

де $[\dots]_S$ позначає сингулярну частину інтеграла, яка містить полюси за ε . Інтеграл (4.52) не має полюсів при $k = 0$, $\omega = 0$, тому нічого не потрібно віднімати.

$$A_d = \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \quad (4.53)$$

є геометричним фактором, де Ω_d – це поверхня d -вимірної сфери одиничного радіусу, а $\Gamma(x)$ – Γ -функція Ойлера.

4.2.2. Загальні вирази для однопетлевих інтегралів

Для того, щоб отримати явні вирази для динамічних кореляційних функцій для параметра порядку і збережної густини два інтеграли в (4.43) і (4.44) потрібно

розрахувати для скінченної частоти, модуля хвильового вектора і кореляційної довжини.

Параметр порядку

Узагальнена форма однопетлевого інтегралу у динамічній кореляційній функції пераметра порядку (4.43) є такою:

$$I_{\phi\phi}^{(1L)} = \int_{k'} \frac{1}{(a + k'^2)(b + \beta k'^2 + (k + k')^2)}. \quad (4.54)$$

Розкриваючи знаменники за допомогою методу множників Фейнмана і проводячи інтегрування за k' , отримуємо

$$I_{\phi\phi}^{(1L)} = \frac{A_d}{\varepsilon} \frac{1 - \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \beta} \int_0^1 d\tilde{x} \left[(1 - \tilde{x})a + \frac{\tilde{x}b}{1 + \beta} + \frac{\tilde{x}}{1 + \beta} \left(1 - \frac{\tilde{x}}{1 + \beta} \right) k^2 \right]^{-\frac{\varepsilon}{2}}. \quad (4.55)$$

Знаходячи параметричні інтеграли у ε -розкладі, результат до порядку ε^0 є таким:

$$I_{\phi\phi}^{(1L)} = \frac{A_d}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \beta} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \ln \frac{b + \frac{\beta k^2}{1 + \beta}}{1 + \beta} + (1 + \beta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left(y_+ \ln \frac{(1 + \beta)y_+ - 1}{(1 + \beta)y_+} + y_- \ln \frac{(1 + \beta)y_- - 1}{(1 + \beta)y_-} \right) \right] \right\}, \quad (4.56)$$

де $y_{\pm}$ визначається як

$$y_{\pm} = \frac{1}{2k^2} \left[b - (1 + \beta)a + k^2 \pm \sqrt{(b - (1 + \beta)a + k^2)^2 + 4ak^2} \right]. \quad (4.57)$$

Параметри a , b , а також β , що з'являються у (4.54), можна ідентифікувати, порівнюючи з (4.45). Видаляючи полюси за ε з (4.56), отримується перенормована форма інтегралу (4.45):

$$I_{\phi}^{(d)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + W} \left\{ 1 - \ln k^2 - \ln \frac{W}{1 + W} - \ln \left(-\frac{i\omega}{\lambda k^2 W} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + W} \right) + \right. \\ \left. (1 + W) \left(y_+ \ln \frac{(1 + W)y_+ - 1}{(1 + W)y_+} + y_- \ln \frac{(1 + W)y_- - 1}{(1 + W)y_-} \right) \right\}, \quad (4.58)$$

де вже у цьому випадку $y_{\pm}$ є таким виразом:

$$y_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{x^2} - \frac{i\omega}{\lambda k^2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{i\omega}{\lambda k^2}\right)^2 + \frac{4}{x^2}} \right].$$

Збережна густина

Узагальнена форма однопетлевого інтегралу у динамічній кореляційній функції (4.44) є такою:

$$I_{mm}^{(1L)} = \int_{k'} \frac{1}{(a + k'^2)(a + (k + k')^2)(b + k'^2 + (k + k')^2)}. \quad (4.59)$$

Двічі розкриваючи знаменники за допомогою методу множників Фейнмана і проводячи інтегрування за k' , отримуємо

$$I_{mm}^{(1L)} = \frac{A_d}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 d\tilde{x} \int_0^1 d\tilde{y} \tilde{y} \times \frac{1}{\left[\tilde{y}a + (1 - \tilde{y})\frac{b}{2} + \frac{1+\tilde{y}(2\tilde{x}-1)}{2} \left(1 - \frac{1+\tilde{y}(2\tilde{x}-1)}{2}\right) k^2\right]^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}. \quad (4.60)$$

Отриманий інтеграл не містить полюсів за ε , тому в однопетловому наближенні достатньо його розрахувати при $\varepsilon = 0$. Проводячи інтегрування за $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$, ми приходимо до виразу:

$$I_{mm}^{(1L)} = \frac{A_d}{8} \frac{1}{a - \frac{b}{2}} \left\{ S \ln \left(\frac{1+S}{1-S} \right)^2 + \frac{4}{k^2} \left(a - \frac{b}{2}\right) \ln \frac{4a}{2b + k^2} + 2 \frac{\bar{W}}{k^2} \ln \frac{k^2 + 2(a + \frac{b}{2}) - \bar{W}}{k^2 + 2(a + \frac{b}{2}) + \bar{W}} \right\}. \quad (4.61)$$

Тут було введено такі параметри:

$$S = \sqrt{1 + \frac{4a}{k^2}} \quad (4.62)$$

і

$$\bar{W} \equiv \sqrt{4 \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + k^2(k^2 + 2b)}. \quad (4.63)$$

Параметри a і b в (4.59) можна ідентифікувати, співставляючи з (4.46). Перенормований інтеграл (4.46) отримується, використовуючи вираз (4.61) і означення (4.52)

$$I_m^{(d)} = \frac{\Gamma}{4i\omega} \left\{ s \ln \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^2 + \frac{2i\omega}{\Gamma k^2} \ln \frac{4x^{-2}}{2 \left(-\frac{i\omega}{\Gamma k^2} + \frac{2}{x^2} \right) + 1} + 2\bar{W}' \ln \frac{s^2 - \frac{i\omega}{\Gamma k^2} - \bar{W}'}{s^2 - \frac{i\omega}{\Gamma k^2} + \bar{W}'} \right\}, \quad (4.64)$$

де введено параметри

$$s = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}, \quad (4.65)$$

і

$$\bar{W}' \equiv \sqrt{\left(1 - \frac{i\omega}{\Gamma k^2} \right)^2 + \frac{4}{x^2}}. \quad (4.66)$$

4.2.3. Характеристичні частоти

Є декілька можливостей означити характеристичну частоту для частотно залежної функції. Ми означуємо характеристичну частоту через динамічну кореляційну функцію при нульовій частоті, яка прямо розраховується з вершинної функції

$$\frac{1}{\omega_a(\xi, k)} = \frac{\mathring{C}_{aa}(\xi, k, \omega = 0)}{2\mathring{C}_{aa}^{(s)}(\xi, k)} = \frac{C_{aa}(\xi, k, \omega = 0)}{2C_{aa}^{(s)}(\xi, k)} \quad (4.67)$$

для параметра порядку і збережної величини. Відзначимо, що так само, як і кореляційна довжина, характеристична частота не перенормовується згідно з р-ня (4.12).

Характеристична частота параметра порядку

Підставляючи р-ня (4.9) у (4.67) та використовуючи (1.43), (1.45) і (4.48), приходимо до характеристичної частоти параметра порядку:

$$\omega_\phi(\xi, k) = \Gamma(\xi^{-2} + k^2) \left\{ 1 - W\gamma^2 I_\phi^{(d)} \left(\kappa\xi, \frac{k}{\kappa}, 0 \right) \right\}. \quad (4.68)$$

Підставляючи явний вираз однопетлевого інтеграла параметра порядку (4.58) при $\omega = 0$ у (4.68), отримуємо

$$\omega_\phi(\xi, k) = \Gamma k^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left\{ 1 - \frac{\zeta_\Gamma}{2} \left[1 - 2 \ln \frac{k}{\kappa} + W \ln \frac{W}{1+W} - \ln \left(\frac{1}{1+W} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1+W}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{1+W} \right) \right] \right\}, \quad (4.69)$$

з x , означеним у р-ні (4.2). У даному рівнянні вже ідентифікований однопетлевий вираз

$$\zeta_\Gamma = \frac{W}{1+W} \gamma^2 \quad (4.70)$$

динамічної ζ -функції параметра порядку. Варто відмітити, що є два різні типи логарифмічних членів: (i) логарифми з k , що приводять до степеневих законів для характеристичної частоти при T_c для малих модулів хвильового вектора k у так званій критичній області; (ii) логарифми з x , які приводять до степеневі поведінки скейлінгових функцій для малих значень скейлінгової змінної x , щоб забезпечити перехід з критичної в гідродинамічну область. Відповідно два експоненціювання буде проведено у подальшому:

i) щоб отримати асимптотичний критичний показник модуля хвильового вектора, вклад, пропорційний до $\ln k$, може бути експоненційований як k^{ζ_Γ} ,

ii) щоб отримати скінченну амплітудну функцію в границях $x \rightarrow 0$ і $x \rightarrow \infty$, префактор $1 + \frac{1}{x^2}$ доповнюють до $(1 + \frac{1}{x^2})^{1+\zeta_\Gamma/2}$, що приводить до логарифмічних вкладів у амплітудній функції, які роблять її скінченною у згаданих границях.

В обох випадках різниця між розкладеним і експоненційованим виразами проявляється тільки у рамках двопетлевого порядку. Два згаданих кроки приводять до такого виразу:

$$\omega_\phi(\xi, k) = \kappa^2 \Gamma \left(\frac{k}{\kappa} \right)^{2+\zeta_\Gamma} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2+\zeta_\Gamma}{2}} \times \left\{ 1 - \frac{\zeta_\Gamma}{2} \left[1 + W \ln \frac{W}{1+W} - \ln \left(\frac{1}{1+W} + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{1+W}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{1+W} \right) \right] \right\}. \quad (4.71)$$

Табл. 4.1. Значення нерухомих точок моделі С для $n = 1$ і $d = 3$ для статичного зв'язку γ^{*2} , відношення часових масштабів W^* , динамічного критичного показника z і граничне значення n_c *сильного* динамічного скейлінгу (ці значення взяті з роботи [410]). R і $R(\infty)$ розраховані у нерухомих точках згідно р-нь (4.81) і (4.84), відповідно.

петля	γ^{*2}	W^*	z	n_c	R	$R(\infty)$
1, ε -exp.	2/3	1	2.33	2	1.05	0.72
2, ε -exp.	0.2	0.56	2.01	2	1.82	1.55
2, $d = 3$	0.35	0.49	2.18	1.3	2.12	1.45

Скейлінгову функцію $f_\phi(x)$ можна тепер ідентифікувати як

$$f_\phi(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2+\zeta_\Gamma}{2}} \left\{ 1 - \frac{\zeta_\Gamma}{2} \left[1 + W \ln \frac{W}{1+W} - \ln \left(\frac{\frac{x^2}{1+W} + 1}{1+x^2} \right) - \frac{1+W}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^2}{1+W} \right) \right] \right\}. \quad (4.72)$$

В асимптотичній області можна вставити значення γ^* і W^* у НТ. ζ -функцію $\zeta_\Gamma^* \equiv \zeta_\Gamma(\gamma^*, W^*)$ можна тоді замінити динамічним критичним показником z через співвідношення $z = 2 + \zeta_\Gamma^*$ з відповідною поведінкою у границях $x \rightarrow 0$ і $x \rightarrow \infty$. В іншому випадку (4.72) вона буде неасимптотичним виразом, що залежить від потоків $\gamma(l)$ і $W(l)$. Характеристична частота може бути записана як

$$\omega_\phi(\xi, k) = \kappa^2 \Gamma \left(\frac{k}{\kappa} \right)^{2+\zeta_\Gamma} f_\phi(x), \quad (4.73)$$

що узгоджується з (4.4). Перевагою представленого підходу є те, що можна підставляти значення у НТ для γ і W , отримані у будь-якому петлевому порядку і/або з допомогою процедури пересумовування без руйнування скейлінгових властивостей відповідно до рівнянь (4.5) і (4.6), оскільки $z = 2 + \zeta_\Gamma^*$.

Тепер у нас є скейлінгова функція форми, де ми відділили її сингулярну поведінку від частини, що містить лише пертурбативні вклади, що скінченні у всіх границях. Тому ми можемо поширити цей однопетлевий вираз для скейлінгової функції, використовуючи результати, отримані у вищих петлевих порядках. Наприклад, можна підставити точне значення для динамічного критичного пока-

зника $z = 2 - \alpha/\nu$ моделі С у НТ або навіть експериментальні значення, якщо вони доступні. Можна також використати отримані у вищих порядках результати теорії збурень для значення динамічного відношення масштабів часу W у НТ. Похибка, зроблена таким способом, буде тільки у вкладах теорії збурень до амплітуд сингулярної поведінки скейлінгової функції у різних границях.

На Рис. 4.1 зображена скейлінгова функція з р-ня (4.72), використовуючи значення статичного зв'язку γ і відношення часових масштабів W у нерухомих точках для трьох випадків, представлених у Таблиці 4.1.

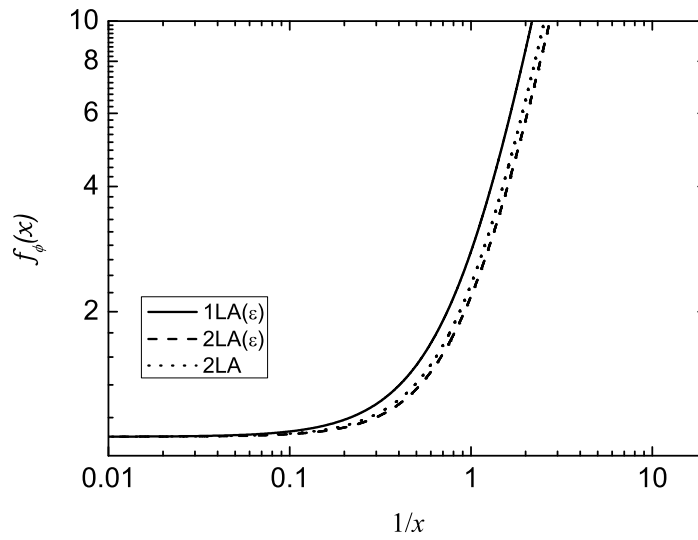


Рис. 4.1. Скейлінгова функція ширини динамічних кореляцій параметра порядку згідно з р-ня (4.72).

Характеристична частота збережної густини

Цю ж саму процедуру як для характеристичної частоти параметра порядку тепер застосуємо до характеристичної частоти збережної густини. Рівняння (4.9), (1.43), (1.45), (4.47) і (4.49) разом (4.67) приводять до виразу:

$$\omega_m(\xi, k) = \lambda k^2 \left\{ 1 - \frac{n}{2} \gamma^2 \left[I_m^{(s)} \left(\kappa \xi, \frac{k}{\kappa} \right) + \frac{k^2}{\kappa^2 W} I_m^{(d)} \left(\kappa \xi, \frac{k}{\kappa}, 0 \right) \right] \right\}. \quad (4.74)$$

Беручи (4.64) при $\omega = 0$, характеристична частота збережної густини у першому порядку за ε має вигляд:

$$\omega_m(\xi, k) = \lambda k^2 \left\{ 1 - \frac{\zeta_\lambda}{2} \left[1 - \ln \left(\frac{sk}{2\kappa} \right)^2 - a(W, x) \right] \right\}, \quad (4.75)$$

де параметр s означено в (4.65).

Функція $a(W, x)$ визначається як:

$$\begin{aligned} a(W, x) = & \left(1 + s - \frac{1}{W} \left(1 + \frac{1}{s} \right) \right) \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) \\ & + \left(1 - s - \frac{1}{W} \left(1 - \frac{1}{s} \right) \right) \ln \left(1 - \frac{1}{s} \right). \end{aligned} \quad (4.76)$$

У р-ні (4.75) вже ідентифікована однопетлева ζ -функція

$$\zeta_\lambda = \frac{n}{2} \gamma^2. \quad (4.77)$$

З тих самих причин, що обговорювались вище, вклад $\ln \left(\frac{sk}{2\kappa} \right)^2 = 2 \ln \frac{k}{\kappa} + \ln \frac{s^2}{4}$ буде поданий у вигляді степеневі функції k . Це приводить до

$$\omega_m(\xi, k) = \kappa^2 \lambda \left(\frac{k}{\kappa} \right)^{2+\zeta_\lambda} \left\{ 1 - \frac{\zeta_\lambda}{2} \left(1 - \ln \frac{s^2}{4} - a(W, x) \right) \right\}. \quad (4.78)$$

Для зручності ми вводимо степінь виразу $1 + 1/x^2$, оскільки він з'являється в характеристичній частоті параметра порядку замість степеня s . Тоді скейлінгова функція ідентифікується як

$$f_m(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{\zeta_\lambda}{2}} \left\{ 1 - \frac{\zeta_\lambda}{2} \left[1 - a(W, x) - \ln \left(\frac{s^2}{4(1+x^{-2})} \right) \right] \right\}. \quad (4.79)$$

Як обговорювалась у попередньому підрозділі, можна підставити значення γ^* і W^* у нерухомих точках для того, щоб отримати асимптотичний вираз. Як наслідок, ζ -функцію $\zeta_\lambda^* \equiv \zeta_\lambda(\gamma^*)$ можна замінити динамічним показником z_m через співвідношення $z_m = 2 + \zeta_\lambda^*$. Тоді скейлінгова функція (4.78) є тільки функцією x . Згідно з (4.4) характеристична частота є

$$\omega_m(\xi, k) = \kappa^2 \lambda \left(\frac{k}{\kappa} \right)^{2+\zeta_\lambda} f_m(x). \quad (4.80)$$

Зазначимо, що на цьому кроці ми не прив'язуємо характеристичну ширину до масштабу заданого параметром порядку. Це буде зроблено у наступному підрозділі.

На Рис. 4.2 зображена скейлінгова функція p -ня (4.78), використовуючи значення статичного зв'язку γ і відношення часових масштабів W у нерухомих точках для трьох випадків, представлених у Таблиці 4.1.

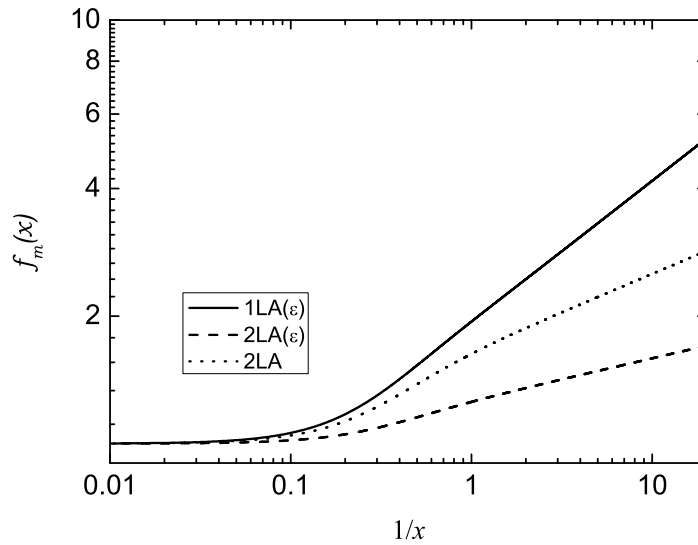


Рис. 4.2. Скейлінгова функція ширини динамічних кореляцій збережної густини згідно з p -ня (4.79).

4.2.4. Динамічне відношення амплітуд

Підставляючи характеристичні частоти (4.80) і (4.73) у загальне означення (4.7) відношення амплітуд [91, 411], отримуємо

$$R = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{W^*} \frac{f_m(x)}{f_\phi(x)x^2}. \quad (4.81)$$

Відзначимо, що у цьому виразі зберігається структура означень, і характеристичні частоти розраховуються окремо. Підставляючи амплітудні функції (4.72) і (4.79)

та беручи границю $x \rightarrow 0$, отримуємо

$$R = \frac{1}{W} \left[1 + \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{n}{2} + \frac{W^2}{1+W} \ln \frac{W}{1+W} \right) \right] \quad (4.82)$$

У цьому виразі відношення двох амплітудних функцій вже подано у розкладеному вигляді. Цей вираз відрізняється від результату, знайденого у р-ні (6.49) роботи [91]. Там при вкладі γ^2 замість $n/2$ стоїть значення n , цю різницю можна прослідкувати до вибраної процедури видалення полюсів, що з'являються у динамічних кореляційних функціях і функціях відгуку. Наш метод слідує систематичній теоретико-польовій процедурі схеми мінімального віднімання.

В асимптотичній границі параметри γ і W набувають значень у НТ. Підставляючи ці значення, отримані в одній петлі для $n = 1$:

$$R = \left[1 + \frac{\varepsilon}{6} (1 - \ln 2) \right] = 1.05 \quad \text{при } \varepsilon = 1, \quad (4.83)$$

ми отримуємо значення що узгоджується з результатом [90], однак не узгоджується зі значенням $R = 1.5$ у [91].

Узагальнення динамічного амплітудного відношення

Можна узагальнити асимптотичне динамічне амплітудне відношення, щоб підходити до критичної точки з будь-якого напрямку в k - ξ^{-1} -площині:

$$R(x) = \lim_{k \rightarrow 0, \xi \rightarrow \infty, x} \left[\frac{\omega_m(k, \xi)}{\omega_\phi(k, \xi)} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] = \frac{1}{W^*} \frac{f_\phi(x)}{f_m(x)} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right). \quad (4.84)$$

Для перевірки теоретичного результату $R(x \rightarrow \infty)$ потрібно провести вимірювання характеристичної частоти для $x \rightarrow \infty$ при T_c , але при скінченному модулі хвильового вектора. Обидві частоти можна знайти з експериментів по розсіянню. Залежність $R(x)$ від x показана на Рис. 4.3. Для $x \rightarrow \infty$ отримується значення $R(\infty)$ (див. Таблицю 4.1).

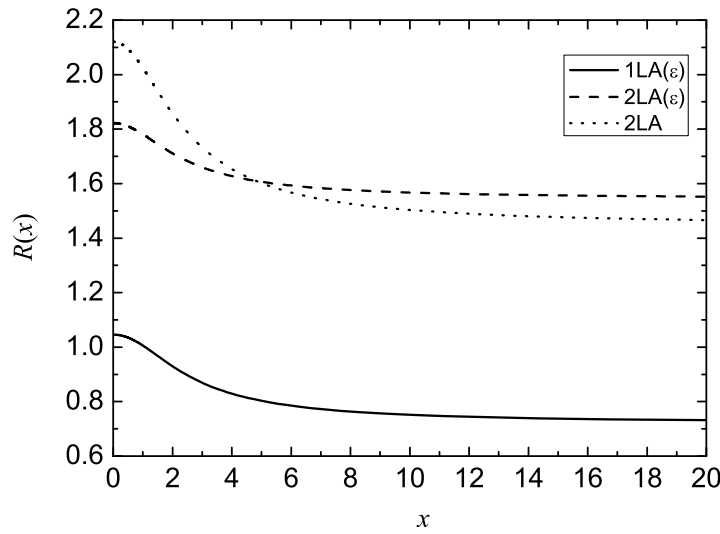


Рис. 4.3. Узагальнене динамічне відношення амплітуд як функція скейлінгової змінної x (р-ня (4.84)). У гідродинамічній границі $x \rightarrow 0$ отримується попередньо означене асимптотичне значення (див. Таблицю 4.1). Використані різні наближення для значень у НТ. Неперервна лінія: однопетлевий ε -розклад; штрихова лінія: двопетлевий ε -розклад; пунктирна лінія: двопетлевий результат при фіксованій вимірності $d = 3$.

4.2.5. Обговорення випадку слабого динамічного скейлінгу

Хоча при $d = 3$ обидві нерухомі точки режиму слабого скейлінгу $W^* = 0$ і $1/W^* = 0$ нестійкі, ми розглядаємо ці випадки, як такі, що представляють дуже малі і, відповідно, дуже великі значення відношення часових масштабів.

(1) $W^* = 0$: у цьому випадку параметр порядку є повільнішим за збережну густину і, оскільки статичний зв'язок у динамічних величинах і у відповідних ζ -функціях завжди з'являється у комбінаціях $W\gamma^2/(1+W)$, модель зводиться до моделі А з $z = 2 + \eta$ та $z_m = 2$; скейлінгові функції характеристичної частоти даються виразами ван Хоа.

(2) $1/W^* = 0$: У цьому випадку збережна густина є повільнішою ніж параметр порядку. У двопетлевому порядку цю ситуацію визнали нестійкою в усіх просторових вимірностях [88, 410]. У цьому випадку вклади теорії збурень зі статичним зв'язком залишаються і з'являються члени з логарифмічною розбіжністю

у ζ -функції.

4.3. Фазова діаграма моделі С у параметричному просторі вимірностей параметра порядку та простору

Як згадувалось у підрозділі 4.1, для фазової діаграми моделі С у параметричному просторі (n, d) властиві такі області: *незв'язаний режим* (область $\mathcal{D}$), *режим слабого скейлінгу* (область $\mathcal{W}$), *режим сильного скейлінгу* (область $\mathcal{S}$) та *режим аномального скейлінгу* (область $\mathcal{A}$). Остання область знаходиться під запитанням.

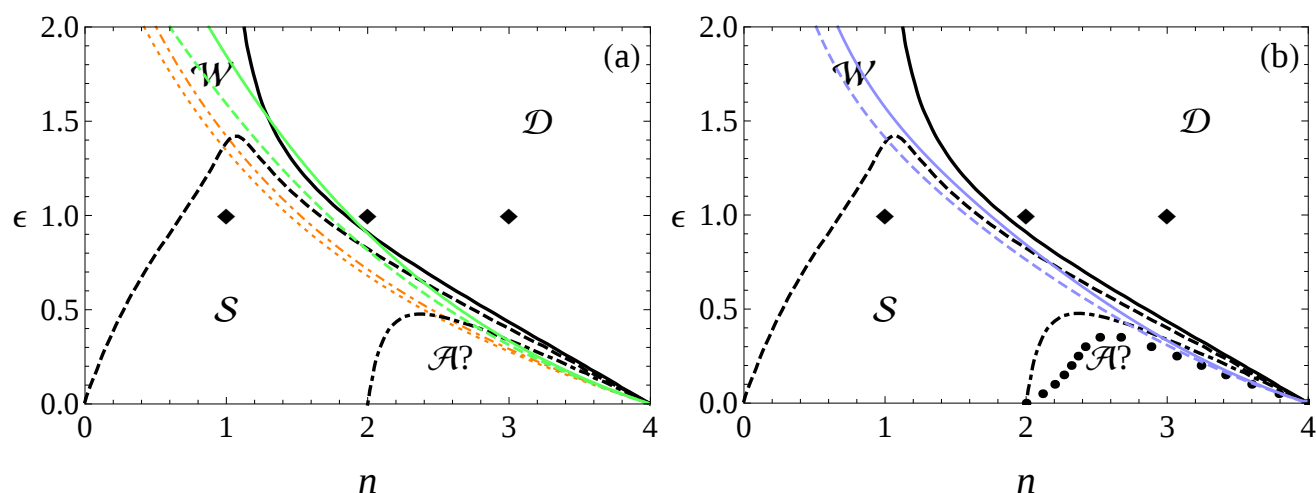


Рис. 4.4. Фазова діаграма для моделі С у площині $(n, \varepsilon = 4 - d)$, отримана у рамках пертурбативного теоретико-польового підходу з пересумовуванням ε -розкладу (а) і при пересумовуванні функцій РГ при фіксованому d (б) у порівнянні з непертурбативними результатами [89]. Неперевні лінії відділяють незв'язну область $\mathcal{D}$ від області слабого скейлінгу $\mathcal{W}$, штрихові лінії відділяють область слабого скейлінгу $\mathcal{W}$ від області сильного скейлінгу $\mathcal{S}$. Зелені криві (а): пересумовування Паде-Бореля ε -розкладів, дані нашої роботи; сині криві (б): підхід при фіксованій вимірності на основі пересумованих п'яти-петлевих функцій, дані нашої роботи; чорні криві: аналіз НПРГ, дані роботи [89]. Двопетлові результати [22] так само представлені на (а) пунктирною та штрих-пунктирною оранжевими лініями. Чорна штрих-пунктирна лінія обмежує аномальну область $\mathcal{A}$, передбачену НПРГ (дані роботи [89]), для значення чорних крапок дивись текст. Ромби позначають розташування тривимірних моделей Ізінга, Х-У та Гайзенберга на площині (n, d) .

У цьому підрозділі ми ще раз проаналізуємо результати пертурбативного підходу для границь цих областей, залучаючи, де це можливо, результати високих порядків теорії збурень.

4.3.1. Нерухомі точки та їхня стійкість

Відношення W набуває значень від нуля до нескінченності. Тому, щоб працювати у просторі скінченних параметрів, корисно ввести параметер $\rho = W/(1+W)$. Тоді замість рівняння потоку (4.25) для W з'являється р-ня потоку для ρ :

$$\ell \frac{d\rho}{d\ell} = \beta_\rho(u, \gamma, \rho), \quad (4.85)$$

де згідно (4.26)

$$\beta_\rho(u, \gamma, \rho) = \rho(\rho-1)\zeta_W(u, \gamma, \rho) = \rho(\rho-1)\zeta_W(u, \gamma, \rho). \quad (4.86)$$

У р-ні (4.86) ζ_W – функція РГ, що описує перенормування відношення кінетичних коефіцієнтів W .

У такому випадку НТ $\{\alpha^*\} = \{u^*, \gamma^*, \rho^*\}$ визначається як одночасний нуль β -функцій (4.23), (4.27), (4.86). Р-ня (4.23) і (4.27) дають статичні нерухомі точки, у той час як р-ня (4.86) визначає області існування різних можливих динамічних нерухомих точок. Аналізуючи структуру р-ня (4.86), можна побачити, що вона має три різні нерухомі точки (принаймні у двопетлевому наближенні): $\rho^* = 0$, $\rho^* = 1$, і $\rho^* = \rho_C$ ($0 < \rho_C < 1$). Перші два розв'язки існують для будь-якого n і d , у той час як розв'язок $\rho^* = \rho_C$ знаходиться з $\zeta_W(u^*, \gamma^*, \rho^*) = 0$ й існує тільки у певній області площини (n, d) .

Стійкість НТ по відношенню до ρ визначатиметься тепер похідною функції β_ρ :

$$\omega_\rho(u^*, \gamma^*, \rho^*) = \left. \frac{\partial \beta_\rho(u, \gamma, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\{\alpha^*\}}. \quad (4.87)$$

Динамічний критичний показник для параметра порядку буде визначатись р-ням (4.36), де замість W^* підставляємо ρ^* .

Координати нерухомих точок моделі C , а також їхня стійкість були визначені у роботах [88, 410]. Тут ми представимо лише нерухомі точки, які, будучи стійкими для деяких зачень n та d , описують режими скейлінгу моделі C у відповідних областях площини (n, d) , див. опис під Рис. 4.4. НТ $\{u_H, 0, 0\}$ описує ситуацію, коли збережна густина від'єднується від параметра порядку (область $\mathcal{D}$), у той час як НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$ відповідає режиму слабого скейлінгу, де параметр порядку і збережна густина масштабуються з різними показниками (область $\mathcal{W}$). Режим сильного скейлінгу (область $\mathcal{S}$) описується НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C < 1\}$, яка існує тільки при певних значеннях n та d , як і було сказано раніше. У цьому режимі обидві величини мають той самий критичний показник $z = z_m$, що є наслідком $\zeta_W(u_H, \gamma_C, \rho_C < 1) = 0$, тому у цій НТ ζ -функції кінетичних коефіцієнтів рівні між собою (див. р-ня (4.86) і (4.36), (4.37)). Область $\mathcal{A}$, де поведінка збережної густини є набагато повільніша, ніж поведінка параметра порядку, відповідає області стійкості НТ $\{u_H, \gamma_C, 1\}$. Однак вона виявляється нестійкою у рамках пертурбативної теоретико-польової РГ [88, 410], тому область $\mathcal{A}$ не існує у рамках цього варіанту РГ.

Відомо (див. наприклад [88, 410]), що ω_γ керує стійкістю НТ $\{u_H, 0, 0\}$ та НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$. Залежно від n і d , показник стійкості ω_γ може бути додатнім для $\{u_H, 0, 0\}$ і від'ємним $\{u_H, \gamma_C, 0\}$ або навпаки. Тому умова перетворення ω_γ в нуль визначає границю між областями стійкості для НТ $\{u_H, 0, 0\}$ і НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$:

$$\omega_\gamma(u_H, 0) = 0. \quad (4.88)$$

Можна показати [88, 410], що ця умова еквівалентна перетворенню в нуль критичного показника теплоємності α :

$$\alpha(n, \varepsilon) = 0. \quad (4.89)$$

Таким чином, ця умова дає нам границю $n_\alpha(\varepsilon)$ (або $\varepsilon_\alpha(n)$) у параметричному просторі (n, d) між областями $\mathcal{D}$ і $\mathcal{W}$.

Границя між стійкістю НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$ і НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C\}$ визначається пока-

зником стійкості по відношенню до ρ :

$$\omega_\rho(u^*, \gamma^*, \rho^*) = (1 - 2\rho^*)\zeta_W(u^*, \gamma^*, \rho^*) + \rho^*(1 - \rho^*) \left. \frac{\partial \zeta_W(u, \gamma, \rho)}{\partial \rho} \right|_{\{\alpha^*\}}. \quad (4.90)$$

Зазначимо, що для $\rho^* = 1$ показник стійкості розбігається як $\ln(1 - \rho^*)$. Тому $\rho^* = 1$ ніде не є стійкою, принаймні у двопетлевому наближенні (див. р-ня (85) у роботі [88]). Якщо $\zeta_W(u^*, \gamma^*, \rho^*)$ дорівнює нулеві, НТ є маргінальною. Тому значення n і d , при яких задовільняється умова

$$\omega_\rho(u_H, \gamma_C, 0) = 0, \quad (4.91)$$

дають нам границю між областями стійкості НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$ і НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C\}$. Як було показано [88, 410], ця умова еквівалентна умові

$$c\eta = \frac{\alpha}{\nu}, \quad (4.92)$$

у всіх порядках теорії збурень, $c\eta = z - 2$ – це частина динамічного критичного показника моделі А. Тому (4.92) визначає границю $n_1(\varepsilon)$ (або $\varepsilon_1(n)$) між областю слабого скейлінгу $\mathcal{W}$, що описується НТ $\{u_H, \gamma_C, 0\}$, і областю сильного скейлінгу $\mathcal{S}$, що описується НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C\}$.

Умови (4.89) і (4.92) справедливі в усіх порядках теорії збурень, і вони включають критичні показники $O(n)$ симетричної моделі. Критичні показники є універсальними величинами, що залежать тільки від глобальних характеристик, таких як вимірність простору d і вимірність параметра порядку n . У рамках РГ критичні показники можна розраховувати як функції d і n . Таким чином, вивчаючи залежність критичних показників від d та n , ми можемо витягти розмежовуючі лінії між областями $\mathcal{D}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{S}$ у (n, d) просторі з (4.89) і (4.92). Причому умова (4.89) є повністю статична і розділяє області, де статичний зв'язок γ є суттєвим або несуттєвим, а умова (4.92) є динамічною умовою. Вона відділяє область, де статичний зв'язок γ є суттєвий, а параметр порядку описується динамікою моделі А, від області, де присутня справжня динаміка моделі С. Таким чином, можна покращити двопетлові результати для цих граничних ліній, використовуючи

теоретико-польові результати отримані у вищих порядках для теорії ϕ^4 і моделі А.

У наступних двох підрозділах ми використаємо два альтернативні способи аналізу пертурбативних функцій РГ для аналізу умов (4.89) і (4.92): ε -розклад підхід при фіксованій вимірності простору.

4.3.2. ε -розклади у високих порядках для граничних ліній

Умови (4.89) і (4.92) включають статичні критичні показники, а також динамічний критичний показник моделі А для $O(n)$ симетричної моделі. Ці величини відомі тепер у високих порядках пертурбативної РГ. Тому ми можемо використати ці вирази, щоб аналізувати умови (4.89) і (4.92). Зокрема, умова, що визначає $\varepsilon_\alpha(n)$ (4.89), співпадає з умовою для граничної вимірності n_c слабо розведеної $O(n)$ моделі згідно критерію Гаріса [123, 414]. Ми можемо використати відомий ε -розклад для $n_c \equiv n_\alpha$, отриманий на основі п'ятипетлевих функцій РГ схеми мінімального віднімання [414]:

$$n_\alpha = 4 - 4\varepsilon + 4.707199\varepsilon^2 - 8.727517\varepsilon^3 + 20.878373\varepsilon^4. \quad (4.93)$$

Тепер розглянемо умову (4.92). Зазначимо, що динамічна величина sn для системи з $O(n)$ -симетричним параметром порядку тепер відома у чотирипетлевому порядку у рамках схеми мінімального віднімання РГ [415], у той час як вирази для статичних критичних показників цієї моделі отримані у наступному п'ятому порядку [355, 412]. Щоб працювати узгоджено, обмежимося тільки чотирипетлевими виразами для статичних показників. Підставляючи їх у (4.92), а тоді утримуючи коефіцієнти як функції n і розкладаючи (4.92) за ε , ми отримаємо n_1 у формі:

$$n_1 = 4 - 4.181523\varepsilon + 4.751724\varepsilon^2 - 8.701434\varepsilon^3. \quad (4.94)$$

Формально, чисельні значення для n_α (4.93) і n_1 (4.94) при даній вимірності простору можна отримати, зафіксувавши значення ε . Однак відомо, що ряди для

функцій РГ мають асимптотичну природу [416, 417], тому потрібно застосовувати певні процедури пересумовування, щоб дістати достовірну інформацію на їх основі. Різні процедури пересумовування були успішно застосовані для чисельного аналізу ε -розкладів для деяких граничних вимірностей (границь стійкості) статичних теоретико-польових моделей у роботах [414, 418], а також є змістом Розділу 6 цієї дисертації. Щоб знайти граничні лінії з (4.93) і (4.94), ми можемо застосувати до них техніку пересумовування Паде-Бореля. Така процедура пересумовування була успішно використана у різноманітних задачах теорії критичних явищ [391, 392].

Застосовуючи до (4.93) схему пересумовування (1.71)-(1.73) з $u = \varepsilon$ і тоді фіксуючи значення ε , ми можемо отримати відповідні значення n_α , а проводячи ці дії для (4.94), ми можемо отримати чисельне значення n_1 . Однак треба відзначити, що розклад (4.94) є на один порядок коротшим, ніж (4.93). Щоб отримати граничні лінії у тому ж самому порядку, ми нехтуємо вкладом ε^4 для n_α (4.93). Тому, застосовуючи процедуру Паде-Бореля (1.71)-(1.73) до (4.93) без останнього вкладу і до (4.94) і змінюючи ε від 0 до 2, ми дістаємо границі $n_\alpha(\varepsilon)$ і $n_1(\varepsilon)$, подані на Рис. 4.4а зеленими неперервною і штриховою лініями. Як можна бачити, область для режиму слабкого скейлінгу є більшою, порівняно з тим, що дають результати двопетлевого порядку [88, 410], і в якісному узгодженні з результатами непертурбативної РГ [89]. Так, граничні лінії є дуже близькими до непертурбативних результатів поблизу $\varepsilon = 1$.

4.3.3. Пересумовування функцій РГ при фіксованій вимірності простору

Граничні лінії

Як ми вже зазначили, статичні функції РГ відомі до порядку п'яти петель у рамках схеми мінімального віднімання РГ [355, 412], а також встановлена факторіальна розбіжність їх коефіцієнтів за константою зв'язку u [416]. Тому ми застосовуємо процедуру (1.71)-(1.73) до п'ятипетлевої статичної функції РГ

$f_u(u)$, а також до поліномів $f_\gamma(\gamma, u) - \gamma^2 B_{\phi^2}(u)/2 = \hat{\mathcal{A}}(u)/2$ та $\zeta_\phi(u)/u^2$. Зазначимо, що у наших розрахунках ми використовуємо двопетлевий вираз для $B_{\phi^2}(u)$: $B_{\phi^2}(u) = n/2$.

Хоча ми працюємо у *підході з фіксованою вимірністю*, для того, щоб дістати відповідні граничні лінії, ми фіксуємо значення n , а тоді розв'язуємо систему рівнянь. Зокрема, розв'язуючи систему рівнянь $f_u(u_H) = 0$ і (4.88), де відповідні функції замінені на їх пересумовані відповідники, при фіксованих значеннях n ми знаходимо граничну лінію стійкості $\varepsilon_\alpha(n)$, що відділяє у площині (n, ε) область незв'язаного скейлінгу $\mathcal{D}$ від області слабого скейлінгу $\mathcal{W}$. Результат показано на Рис. 4.4b неперечною синією лінією.

У подібний спосіб, розв'язуючи систему рівнянь $f_u(u_H) = 0$, $f_\gamma(u_H, \gamma) = 0$ і (4.91), що містять пересумовані функції для фіксованих значень n , ми знаходимо границю стійкості $\varepsilon_1(n)$, що розділяє у площині (n, ε) області слабого скейлінгу $\mathcal{W}$ і області сильного скейлінгу $\mathcal{S}$. Результат показано на Рис. 4.4b штриховою синією лінією.

Узгодження цих результатів з результатами підходу НПРГ [89] (чорні криві на Рис. 4.4) є дещо гіршим, ніж для ε -розкладу для граничних ліній (зелені криві на Рис. 4.4a). Тим не менше якісний зсув за ε для фіксованого n присутній в області $n > 1$ і $\varepsilon < 1$ порівняно з двопетлевими результатами. Також область $\mathcal{W}$ для режиму слабого скейлінгу є ширшою, ніж у рамках двопетлевого наближення [88, 410]. Можливе існування аномального режиму $\mathcal{A}$ розглянуто нижче.

Стійкість НТ, що описує режим $\mathcal{S}$ і можливе існування області $\mathcal{A}$

Існування області $\mathcal{A}$ у площині (n, d) пов'язане з поведінкою НТ $\{u_H, \gamma_S, \rho_S\}$. Для деяких значень n при малому ε значення ρ_S прямує до одиниці, наближаючись до НТ $\{u_H, \gamma_S, 1\}$, що є нестійкою у рамках двопетлевого наближення [88, 410]. Також доведено, що у цьому порядку наближення значення ρ_S є дуже близьким до одиниці, але ніколи не досягає цього значення. Тим не менше, значення $\rho \rightarrow 1$ означає, що відношення масштабів часу $W \rightarrow \infty$, тому поведінка параметра порядку є набагато швидшою, ніж збережної густини. Однак

динамічні критичні показники для параметра порядку та для збережної густини залишаються однаковими для усіх значень НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C\}$.

Ми перевіримо цей результат роботи [22], шукаючи розв'язки на НТ β -функцій (4.23), (4.27), (4.86) з усіма ненульовими координатами $\{u^*, \gamma^*, \rho^*\}$, використовуючи ті самі пересумовані п'ятипетлеві функції, як і раніше. Ми розраховуємо також критичний показник ω_ρ для цієї НТ. Наші результати для ρ_C і ω_ρ отримані при фіксованому значенні $\varepsilon = 0.25$ як функція n , показана на Рис. 4.5.

Рис. 4.5 якісно підтверджує ситуацію, що спостерігається вже у двопетлевому порядку [88, 410]. Значення ρ_C чисельно завжди менше, ніж 1, однак цього не помітно у рамках роздільної здатності Рис. 4.5, а ω_ρ завжди додатне. Це означає, що НТ $\{u_H, \gamma_C, \rho_C\}$ є стійкою у всій області існування. Ці результати очікувані, оскільки тільки двопетлеві вирази доступні саме для динамічних функцій РГ: врахування високих порядків теорії збурень тільки для статичних функцій суттєво не змінює результатів для динамічних змінних.

Однак шукаючи наш розв'язок для відношення масштабів часу у знайденій підходом непертурбативної РГ області $\mathcal{A}$, спостерігаємо наступне: зі збільшенням n від малих значень до більших при фіксованій вимірності простору аж до границі незв'язної області величина ρ_C спочатку зростає, а потім спадає, показуючи максимум. Цей максимум завжди менший одиниці, однак нижче $\varepsilon = 0.4$ цей максимум є порядку $\rho_C \approx 0.99$. Із подальшим зменшенням ε величина ρ ніби переходить у плато, значення якого майже 1 у певній області n (див. Рис. 4.5), це якісно узгоджується із існуванням області $\mathcal{A}$.

Конкретніше ми визначаємо область, де ρ_C зростає до значень дуже близьких до одиниці. Ми обираємо значення n , коли ρ_C перевищує 0.999 як ліву частину границі для цієї підозрілої області. Тоді ми вибираємо локацію 'дзьоба' на вставці Рис. 4.5 як праву частину цієї границі. Дані, отримані таким способом, показані на Рис. 4.4 чорними крапками для значень ε від 0.05 до 0.35 з розміром кроку 0.05. Для $\varepsilon = 0$ ми подаємо одно-петлеві значення $n = 2$ і $n = 4$. Ця область також позначена '+' у верхньому малюнку Рис. 4.5. Як можна побачити на Рис. 4.4, ця штучна область виглядає подібною до області $\mathcal{A}$, знайденої в аналізі НПРГ

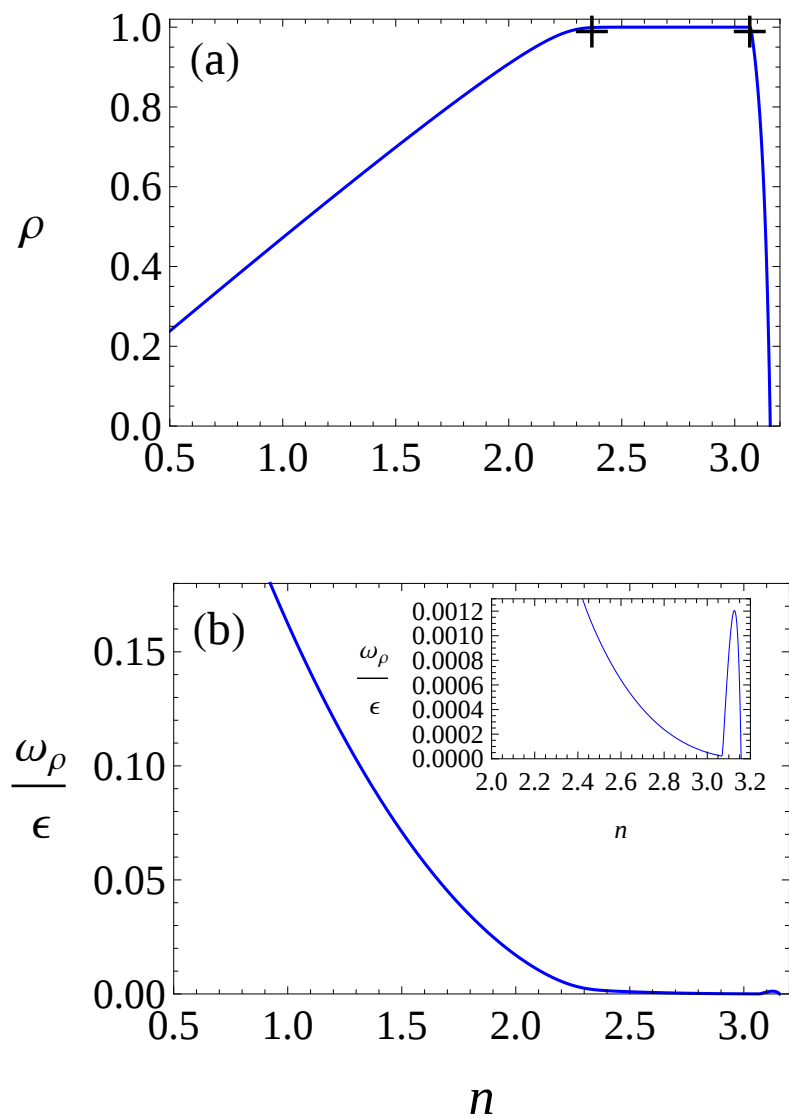


Рис. 4.5. Значення ρ_C знайдене з $\zeta(u_H, \gamma_C, \rho_C) = 0$ (а), а також $\omega_\rho(u_H, \gamma_C, \rho_C)$ знайдена (4.90) при $\epsilon = 0.25$ (б) як функції вимірності параметра порядку n , отримані на основі пересумованих п'ятипетлевих статичних функцій РГ. У вставці показано праву нижню частину відповідного рисунку. Символи '+' позначають штучну область для $\epsilon = 0.25$, показану чорними крапками на Рис. 4.4.

[89], однак піднімання обмежуючого значення $\rho = 0.999$ до вищих значень, проте нижчих 1, зсуває ліву частину границі до вищих значень n . У границі $\rho \rightarrow 1$ ця область звичайно зникає у нашому підході.

4.3.4. Обговорення

Отримані у цьому підрозділі результати якісно підтверджують результати НПРГ [89] для $\varepsilon \leq 1$ і $n \geq 1$, що показують ширшу область для режиму слабого скейлінгу і більших значень $\varepsilon_\alpha(n)$ і $\varepsilon_1(n)$ у порівнянні з результатами, отриманими на основі двопетлевих функцій РГ без пересумовування. Однак є помітні відхилення у інших областях (n, ε) -площини. Зазначимо, що моделі типу ϕ^4 не є пристосовані для дослідження $d < 3$, оскільки у нижчих вимірах інша фізика. Більше того, для $\varepsilon > 1$ (тобто для $d < 3$) очевидно, що ε -розклад не працює, тому що параметр розкладу ε тепер не є малим. У дослідженні НПРГ [89] використано тільки наближення локального потенціалу з масштабно залежною константою при градієнтному члені (так зване наближення LPA') з розкладом локального потенціалу у формі типу ϕ^4 . Це наближення полягає у припущенні, що кореляційні функції з великим числом частинок мають малий вплив на потоки РГ для функцій малого числа частинок, а також у припущенні, що аномальна вимірність є малою. Але це не справджується у випадку низько-вимірних систем ($d < 3$), таким чином тут потрібно використовувати розклади, що включають вищі порядки поля для дослідження випадку $d < 3$.

Скінченні розклади у рамках підходу НПРГ мають інший незручний ефект: вони спричиняють залежність фізичних значень від вибору функції обрізання, що використовується для придушення низько-імпульсних флуктуацій. Підхід НПРГ в роботі [89] використовує різке θ -обрізання, яке, хоч і неаналітичне за природою, приводить до аналітичних виразів непертурбативних β -функцій. Однак можуть використовуватися інші функції обрізання, такі як експоненційна або степенева. Наприклад, дані дослідження непертурбативної РГ двовимірної моделі $O(2)$ за допомогою оптимізованої експоненційної функції обрізання дуже добре узгоджу-

ються з універсальними особливостями переходу Костерліца-Таулеса [419]. Імовірно, немонотонна поведінка граничної лінії між областями $\mathcal{W}$ та $\mathcal{S}$, отримана в роботі [89] (чорна штрихова крива на Рис. 4.4), є наслідком використання функції θ -обрізання. У будь-якому випадку цікаво було б мати дані для іншого вибору функції обрізання. Перевірка поведінки моделі $\mathcal{C}$ при $n \rightarrow 0$, запропонована у роботі [89] на основі моделювання МК для моделей випадкових блукань без самоперетинів у фрактальних вимірностях, не є вірогідною, оскільки подібність цієї моделі і $O(n \rightarrow 0)$ була доведена лише для статичного випадку [14]. Більше того, зв'язок між нецілою вимірністю, що виникає внаслідок аналітичного продовження в теоріях поля (наприклад, через ε -розклад), та фрактальною вимірністю, не є прямим [149–151, 383, 385].

Умови, що регулюють межі між областями $\mathcal{D}$ та $\mathcal{W}$ (4.89), а також між $\mathcal{W}$ та $\mathcal{S}$ (4.92), справедливі у всіх порядках теорії збурень. Тому це також можна перевірити у рамках підходу НПРГ на основі більш простих $O(n)$ -моделі та динамічної моделі $\mathcal{A}$. Однак у критичній динаміці модель $\mathcal{A}$ була вивчена у рамках НПРГ тільки для скалярного параметра порядку [420]. Крім того, незважаючи на останні дослідження $O(n)$ моделей з нецілою розмірністю простору у рамках НПРГ [421, 422], умова для занулення показника α не була предметом зацікавлення.

Найбільш цікавою особливістю моделі $\mathcal{C}$ є те, що результати НПРГ показують існування аномальної області $\mathcal{A}$. У рамках цього підходу область $\mathcal{A}$ описується стійким розв'язком з $\gamma \neq 0$ та $\rho = 1$, а також з критичними показниками $z < z_m$. Цей результат вимагає підтвердження дослідженнями з більш розробленими наближеннями, а також іншими варіантами функції обрізання. Що стосується пертурбативного теоретико-польового підходу РГ, то перевірити існування області $\mathcal{A}$ можна лише тоді, коли будуть доступні динамічні функції РГ у високих порядках. Вони, можливо, призведуть до нових розв'язків для динамічних нерухомих точок або до зміни стійкості вже наявних. Проте слід обережно довіряти новим розв'язкам, отриманим лише у високих порядках теорії збурень, оскільки вони можуть бути суперечливими (про це докладніше у Розділі 7, де обговорюється неузгодження результатів підходу пертурбативної теоретико-польової РГ та

підходу НПРГ для фрустрованих магнетиків)

4.4. Критична динаміка моделі С для неупорядкованих магнетиків

Оскільки системи зі структурною неоднорідністю характеризуються в основному нерозбіжною теплоємністю [11, 22], то це має вагоме значення для динамічної поведінки моделі С. Зокрема, у такому випадку зв'язок збережених величин з параметром порядку у системах з безладом не є суттєвим [140–142]. Цей висновок справедливий тільки для асимптотичних властивостей моделі. У той час як зрозуміло, що у розведених магнетиках більшість експериментів та симуляцій проводяться у неасимптотичній області [11, 22, 26–28, 30, 423]. У цьому підрозділі ми розглянемо вплив безладу типу випадкових вузлів на зв'язок збереженої величини з параметром порядку.

Артефактом однопетлевого наближення теоретико-польової РГ для розведених магнітних систем є виродження статичних β -функцій для випадку Ізінга $n = 1$. Як тепер добре встановлено, це приводить до використання $\sqrt{\epsilon}$, а не до ϵ -розкладів [83, 127–129]. Тому застосування двопетлевого наближення стає неуправданим для достовірного опису.

4.4.1. Модель і перенормування

Щоб визначити модель С у присутності структурного безладу ми запишемо статичний функціонал $\mathcal{H}$, який описує поведінку неупорядкованої магнітної системи при рівновазі за присутністю зв'язку з незбереженою величиною:

$$\mathcal{H}_{rs} = \mathcal{H}_{eff} + \int d^d r V(r) |\vec{\phi}_0|^2, \quad (4.95)$$

де $V(x)$ – це потенціал домішок, який вводить безлад у систему, а $\mathcal{H}$ задається р-ням (1.16).

Властивості випадкового потенціалу $V(x)$ керуються розподілом Гауса

$$\mathcal{P}_V = \mathcal{N}_V \exp \left(-\frac{\int d^d r V(r)^2}{8\Delta_0} \right), \quad (4.96)$$

з додатньою дисперсією Δ_0 , яка пропорційна до концентрації немагнітних домішок.

Динамічні р-ня для нашої системи будуть задаватись (1.17)-(1.18) тільки з заміною $\mathcal{H}_{eff}$ на $\mathcal{H}_{rs}$.

Для дослідження статистики в подальшому треба враховувати, що ми розглядаємо заморожений безлад. Усереднюючи значення вільної енергії неупорядкованої системи за розподілом (4.96) із застосуванням методу реплік [107], отримуємо ефективний статичний функціонал, що містить нові члени, спричинені безладом [83]. Тоді критичні властивості вивчаються на основі властивостей ефективного функціоналу на великих масштабах.

Процедури дослідження критичної динаміки можуть бути різними. Ми будемо розглядати критичну динаміку неупорядкованих моделей у рамках теоретико-польового методу РГ на основі підходу Бауша-Янсена-Вагнера [339], що вивчає відповідні лагранжіани моделі. Тому ми повинні отримати лагранжіан для нашої моделі на основі модельних рівнянь (1.17), (1.18) та (4.95). Потім після усереднення за випадковим потенціалом (4.96), ми отримуємо у лагранжіані нові вклади, обумовлені безладом. У цьому випадку не обов'язково застосувати метод реплік [262]. Результати можна записати у формі (докладніше див. A.1) $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{rs}$ з гаусовою (незбуреною) частиною:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \int d^d r dt \left\{ -\dot{\Gamma} \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_{0,i} \tilde{\phi}_{0,i} + \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_{0,i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\Gamma}(\mu_0^2 - \nabla^2) \right) \phi_{0,i} \right. \\ \left. + \dot{\lambda} \tilde{m}_0 \nabla^2 \tilde{m}_0 + \tilde{m}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\lambda} \nabla^2 \right) m_0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

частиною, що описує взаємодію:

$$\mathcal{L}_{int} = \int d^d r dt \sum_i \left\{ \frac{1}{3!} \dot{\Gamma} u_0 \tilde{\phi}_{0,i} \phi_{0,i} \sum_j \phi_{0,j} \phi_{0,j} + \dot{\Gamma} \gamma_0 m_0 \tilde{\phi}_{0,i} \phi_{0,i} \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\dot{\lambda}\gamma_0\tilde{m}_0\nabla^2\phi_{0,i}\phi_{0,i} \right\}, \quad (4.98)$$

і частиною, що описує безлад:

$$\mathcal{L}_{rs} = \int d^d r dt \int dt' \sum_j 2\tilde{\Gamma}^2 \Delta_0 \tilde{\phi}_{0,i}(r, t) \phi_{0,i}(r, t) \tilde{\phi}_{0,j}(r, t') \phi_{0,j}(r, t') \quad (4.99)$$

з новим допоміжним полем відгуку $\tilde{\phi}_{0,i}$. Константа u_0 задається (1.21). Відношення u_0/Δ_0 визначає ступінь безладу в системі.

При дослідженні властивостей теорії з ефективним лагранжіаном $\mathcal{L}$ на великих масштабах та на великих часах використовується техніка діаграм Фейнмана для того, щоб отримати динамічні вершинні функції. Деталі розрахунку динамічної вершинної функції $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\phi},\phi}$ подані в Додатку A.1. Перенормування вершинних функцій приводить до функцій РГ, що описують критичну динаміку нашої моделі. Ми використовуємо схему мінімального віднімання з регуляризацією вимірності для розрахунку цих функцій. Загальні співвідношення розглядаються у наступних підрозділах. Подробиці процедури перенормування подані в оглядовому розділі (див. підрозділ 1.4.3).

4.4.2. Результати в однопетлевому наближенні

Хоча результати однопетлевого наближення містять недоліки, вже згадані раніше, у цьому наближенні ми дістаємо якісно правильну картину ефектів, які безлад спричиняє в динаміці. Тому обговоримо цей випадок більш детально.

Ми цікавимось динамічними властивостями неупорядкованої моделі С у рамках першого нетривіального порядку розкладу за перенормованими константами зв'язку, тобто в однопетлевому порядку. Статичні функції β_u і β_Δ для неупорядкованих систем відомі у наближеннях вищих порядків [29, 75]. Однак, працюючи у тому ж самому порядку і для статистики, і для динаміки, ми обмежуємо вирази для β_u і β_Δ до однопетлевого наближення:

$$\beta_{1u} = u \left(-\varepsilon + \frac{n+8}{6}u - 24\Delta \right), \quad (4.100)$$

$$\beta_{1\Delta} = \Delta \left(-\varepsilon - 16\Delta + \frac{n+2}{3}u \right). \quad (4.101)$$

Зазначимо, що область фізичних значень констант зв'язку u, Δ для розведених магнетиків обмежена $u \geq 0, \Delta \geq 0$. Інша функція β_γ отримується, використовуючи статичну однопетлеву ζ -функцію:

$$\beta_{1\gamma} = \gamma \left(-\frac{\varepsilon}{2} - 4\Delta + \frac{n+2}{6}u + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 n}{2} \right). \quad (4.102)$$

Для отримання динамічної функції β_W , нам потрібно спершу розрахувати перенормовуючий множник $Z_{\tilde{\phi}}$. З однопетлевої частини $Z_{\tilde{\phi}}$ (див. Додаток A.2) згідно формули (1.60) ми отримуємо $\zeta_{\tilde{\phi}}$ -функцію. Використовуючи отриманий результат разом з однопетлевою статичною ζ -функцією, дістаємо β_W у такому вигляді:

$$\beta_W = W \left(4\Delta + \gamma^2 \frac{W}{1+W} - \frac{\gamma^2 n}{2} \right). \quad (4.103)$$

Прирівнюючи праву частину рівнянь (4.100)–(4.103) до нуля, отримуємо систему рівнянь на НТ. Структура функцій β_u та β_Δ приводить до існування чотирьох нерухомих точок: гаусової НТ **G** $\{u^* = 0, \Delta^* = 0\}$, “полімерної” НТ **U** $\{u^* = 0, \Delta^* \neq 0\}$, НТ чистої системи **P** $\{u^* \neq 0, \Delta^* = 0\}$ і змішаної НТ **M** $\{u^* \neq 0, \Delta^* \neq 0\}$. Залежно від значень у НТ u^* і Δ^* можна знайти значення власних параметрів моделі С. Як уже згадано, кожній НТ відповідають два значення $\gamma^{*2} = 0$ або $\gamma^{*2} \neq 0$, і це збільшує вдвічі число нерухомих точок, див. Таблицю 4.2. Зазначимо, що нерухомі точки з ненульовим γ^{*2} ми позначаємо штрихом '. Ми не будемо у подальшому розглядати НТ **U** та НТ **U'**, оскільки вони лежать поза фізичною областю додатніх значень Δ .

Поміж решти нерухомих точок тільки одна є стійкою залежно від вимірності параметра порядку n . Для $n > 4$ НТ **P** стійка, у той час як для $1 < n < 4$ стійкою є НТ **M**. Тому однопетлеве значення граничної вимірності $n_c(\varepsilon) = 4$ визначає граничну лінію, на якій $\alpha = 0$. У вищих петлевих порядках картина нерухомих точок не змінюється, крім зміни функції граничного значення $n_c(\varepsilon)$. Оцінки, отримані на основі шестипетлевих розрахунків [72, 73], дають безумовно $n_c < 2$ при $d = 3$.

Табл. 4.2. Однопетлові нерухомі точки моделі С з безладом і їх стійкість для $\varepsilon = 4 - d > 0$. Зазначте, що γ^{*2} має бути додатньою величиною для існування для того, щоб НТ була дійсною.

FP	u^*	Δ^*	γ^{*2}	ρ^*	стійкість
G	0	0	0	$0 \leq \rho^* \leq 1$	нестійка
G'			$\frac{2}{n}\varepsilon$	0	нестійка
				$n/2$	
P	$\frac{6\varepsilon}{n+8}$	0	0	$0 \leq \rho^* \leq 1$	маргінальна для $n > 4$
P'			$\frac{2}{n} \frac{(4-n)\varepsilon}{n+8}$	0	нестійка
				$n/2$	
U	0	$-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	нестійка
U'			$\frac{\varepsilon}{n}$	1	
				0	нестійка
M	$\frac{3\varepsilon}{2(n-1)}$	$\frac{(4-n)\varepsilon}{32(n-1)}$	0	$3n/4$	стійка для $n < 4/3$
				1	стійка для $n > 4/3$
M'			$\frac{2}{n} \frac{n-4}{4(n-1)}\varepsilon$	0	0
1	нестійка				
0	нестійка				
			$3n/4$	нестійка	
			1	нестійка	

Як уже було сказано раніше, для обговорення динамічних нерухомих точок вводимо параметр $\rho = W/(1+W)$, що має значення в нерухомих точках у скінченній області параметричного простору. Перейшовши до функції β_ρ і прирівнявши її до нуля, та використовуючи значення в нерухомих точках з Таблиці 4.2, можна знайти значення ρ^* . Вони також представлені у Таблиці 4.2.

Кожен ненульовий розв'язок γ^{*2} приводить до трьох динамічних нерухомих точок: з $\rho^* = 0$ (тобто $W^*=0$), $\rho^*=1$ (тобто $W^*=\infty$) або $0 < \rho^* < 1$ відповідно. Для НТ, яка відповідає $\gamma^{*2} = 0$, ситуація буде виглядати таким чином. Для НТ **М** тільки дві нерухомі точки з $\rho^* = 0$ і $\rho^* = 1$ існують, тоді як для НТ **Р** та НТ **Г** дозволене будь-яке значення ρ^* між 0 і 1. Перевіряючи стійкість цих нерухомих точок, бачимо, що для $1 < n < 4$ тільки НТ **М** з $\rho^* = 0$ є стійкою.

Відповідне однопетлеве асимптотичне значення динамічного критичного показника у цьому випадку збігається з однопетлевим результатом для чистої релаксацийної моделі (модель А) з безладом: $z = 2 + \frac{(4-n)\varepsilon}{8(n-1)}$ [133, 141]. Для $n > 4$ НТ **Р** є маргіальною, а всі інші нерухомі точки нестійкі. Формально потік з початкових значень з ρ_i закінчується у деякій НТ **Р** з $\rho^*(\rho_i)$, залежного від цього початкового значення ρ_i . Тому тут отримується ціла лінія нерухомих точок при $u^* \neq 0$, $\Delta^* = \gamma^* = 0$. У цьому випадку однопетлевий результат для z співпадає зі значенням теорії ван Хова $z = 2$. Оскільки в однопетлевому наближенні $n_c(\varepsilon) = 4$ НТ **М** та НТ **Р** обумовлюють критичну поведінку неупорядкованої моделі для $n < 4$ та $n > 4$ відповідно.

4.4.3. Двопетлеві результати

Статичні функції РГ відомі в наближеннях високих порядків теорії збурень та у рамках різних схем перенормування [11, 22]. Двопетлеві вирази для функцій β_u , β_Δ , β_γ у рамках схеми мінімального віднімання можна отримати у реплічній границі з результатів роботи [424], і вони мають вигляд:

$$\beta_u = \beta_{1u} + u \left(-\frac{3n+14}{12}u^2 + \frac{22n+116}{3}u\Delta - 328\Delta^2 \right), \quad (4.104)$$

$$\beta_{\Delta} = \beta_{1\Delta} + \Delta \left(-5 \frac{n+2}{36} u^2 + 22 \frac{n+2}{3} u \Delta - 168 \Delta^2 \right), \quad (4.105)$$

$$\beta_{\gamma} = \beta_{1\gamma} + \gamma \left(-\frac{5(n+2)}{72} u^2 + \frac{5(n+2)}{3} u \Delta - 20 \Delta^2 \right). \quad (4.106)$$

Динамічна функція β_{ρ} задається формулами (4.21) і (4.86), де функції $\zeta_{\tilde{\phi}}$ і ζ_{ϕ} потрібні також для розрахунку динамічного критичного показника z , B_{ϕ^2} є таким самим, як і в однопетлевому наближенні. ζ_{ϕ} можна отримати у реплічній границі з результатів [424]:

$$\zeta_{\phi} = -\frac{n+2}{72} u^2 + \frac{n+2}{3} u \Delta - 4 \Delta^2. \quad (4.107)$$

Для розрахунку $\zeta_{\tilde{\phi}}$ використовуємо схему РГ, детально описану у першому розділі (підрозділ 1.4). Ми отримуємо $\zeta_{\tilde{\phi}}$ з двопетлевого виразу для $Z_{\tilde{\phi}}$ (див. Додаток A.2):

$$\begin{aligned} \zeta_{\tilde{\phi}} = & -8\Delta + 3 \frac{n+2}{3} u \Delta - 44\Delta^2 - \frac{n+2}{6} u^2 \left(\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \right) \\ & - 2\gamma^2 \frac{W}{1+W} + \left[\frac{n+2}{3} u \left(1 - 3 \ln \frac{4}{3} \right) \right. \\ & \left. + \gamma^2 \frac{W}{1+W} \left(\frac{n}{2} - \frac{W}{1+W} - \frac{3(n+2)}{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{1+2W}{1+W} \ln \frac{(1+W)^2}{1+2W} \right) \right] \gamma^2 \frac{W}{1+W} \\ & - 12\Delta \gamma^2 \frac{W}{1+W} + 4\Delta \gamma^2 \frac{W}{1+W} \left[W \ln \frac{W}{1+W} - 3 \ln(1+W) - \frac{W}{1+W} \ln W \right]. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Прирівнюючи константу зв'язку Δ у (4.108) до нуля, відтворюємо результат для двопетлевого наближення для чистої моделі С, у той час як вираз (4.108) з $\gamma = 0$ відповідає функції $\zeta_{\tilde{\phi}}$ моделі А з розведенням, що широко досліджувалось [133–136]. Член $\gamma^2 \Delta$ є власним вкладом невпорядкованої моделі С.

Для невпорядкоавного магнетика Ізінга техніка ε -розкладу приводить фактично до $\sqrt{\varepsilon}$ -розкладу [83, 127–129], що не дає достатньо достовірних результатів для $\varepsilon = 1$ [29, 75]. Таким чином, ми будемо працювати з другим способом аналізу безпосередньо у тривимірному просторі.

Оскільки ряди для функцій РГ, як відомо, є асимптотичними у кращому випадку, то нерухомі точки констант зв'язку розведеної моделі не отриму-

ються у двопетлевому наближенні без застосування [11, 22]. Ми використовуємо тут процедуру пересумовування Паде-Бореля, узагальнену на випадок декількох змінних за допомогою резольвентного ряду (3.34)-(3.37) для функцій $\{\beta_u/u, \beta_\Delta/\Delta, \beta_\gamma/\gamma - \gamma^2 n/4\}$.

Нерухомі точки і їхня стійкість

Ми можемо аналізувати функції РГ β_u і β_Δ незалежно від інших. Результати для цих статичних функцій вже відомі [11, 22]. Зокрема, результат двопетлевого наближення якісно повторює результати однопетлевого наближення, а саме отримуються гаусова НТ **G**, НТ чистої системи **P** та змішана НТ **M**. Однак, всупереч однопетлевим результатам, НТ **M** знаходиться також для випадку Ізінга $n = 1$.

Серед інших нерухомих точок лише одна є стійкою в залежності від вимірності параметра порядку n . Так, для $n < n_c$, НТ **M** стійка, при $n = n_c$ НТ **M** та НТ **P** обмінюються стійкістю, і при $n > n_c$ НТ **P** стає стійкою. Для границі стійкості при $d = 3$ ми знаходимо $n_c = 1.55$, що дещо менше, ніж оцінки у високих порядках [72, 73].

Зі структури двопетлевої функції β_γ (4.106) можна зробити висновок, що всі описані вище нерухомі точки існують при $\gamma^* = 0$. Аналізуючи β_γ , знаходимо, що тільки гаусова НТ **G** і НТ **P** мають відповідники з додатнім ненульовим γ^* : НТ **G'** для усіх n , НТ **P'** для $n < n_c$ відповідно. Значення модельних параметрів у нерухомих точках і динамічні показники для них подані у Таблиці 4.3 для числа компонент параметра порядку $n = 1, 2, 3$.

Для НТ **G** при будь-якому n отримується лінія нерухомих точок для відношення масштабів часу $0 \leq \rho \leq 1$. Для нерухомих точок з $\gamma^* = 0$ тільки два значення $\rho^* = 0$ і $\rho^* = 1$ знаходяться, у той час як для точок **P'** і **G'** отримуються три розв'язки $\rho^* = 0$, $\rho^* = 1$ і ненульовий розв'язок з $0 < \rho^* < 1$. Усі нерухомі точки подані у Таб. 4.3. Ми позначаємо нерухомі точки з $\rho^* = 1$ нижнім індексом 1, у той час як точки з $\rho^* = 0$ не мають додаткових індексів. Оскільки НТ **P'** з не нульовим розв'язком $0 < \rho^* < 1$ відповідає НТ чистої моделі С, ми позначаємо її як **C**, а НТ **G'** з не нульовим ρ^* ми позначаємо як **G'_C**.

Аналізуючи показники стійкості ω_γ і ω_ρ ми бачимо, що тільки НТ **М** є стійкою для $n = 1$, а НТ **Р** стійка при $n = 2, 3$. Це означає, що критична поведінка моделі **A** досягається в асимптотиці у будь-якому випадку (клас універсальності динаміки моделі **A** для розведеної моделі при $n < n_c$ і клас універсальності динаміки чистої моделі **A** при $n > n_c$). Як наслідок, збережна густина для усіх n асимптотично відділяється і формально її динамічний критичний показник приймає значення ван Хова $z_m = 2$, як і очікувалось згідно аргументів [140, 141].

Показники стійкості є подані у Таблиці 4.4. Вони визначають “швидкість” потоків РГ поблизу нерухомої точки. Невелике значення показника стійкості, розрахованого у НТ, означає повільний підхід до цієї точки у відповідному напрямку. Наприклад, для НТ **М** при $n = 1$ отримується $\omega_\gamma = 0.002$, що приводить до повільного підходу γ до свого значення у НТ $\gamma^* = 0$.

У Таблиці 4.3 ми даємо числові значення асимптотичного динамічного критичного показника z , обчислені для всіх нерухомих точок. Якщо потік з початкових значень констант зв’язку проходить біля однієї з цих точок, то можна спостерігати ефективну критичну поведінку, яка визначається значеннями критичних показників, що відповідають цій НТ.

Потоки і ефективні показники z_{eff}

Неасимптотична поведінка описується потоком для статичних констант зв’язку та динамічного параметру при перенормуванні. Його можна отримати, розв’язуючи рівняння на потоки (4.22) і (4.85). Використовуючи розв’язок, ми отримуємо поведінку ефективного критичного показника z_{eff} з безперервною зміною параметра потоку.

Спочатку ми розглянемо випадок спінів Ізінґа $n = 1$. Ми представимо статичні потоки у підпросторі $u - \Delta - \gamma$, а також “проекцію” динамічних потоків на підпростір параметрів моделі $u - \Delta - \rho$ на Рис. 4.6. Усі потоки отримані для початкових значень з $\gamma(\ell_0) = 0.1$. Розв’язки рівнянь на потоки, представлені на Рис. 4.6, отримані для різних відношень $\Delta(\ell_0)/u(\ell_0)$, а також різних значень $\rho(\ell_0)$. Потоки, що починаються з початкових умов з малим відношенням $\Delta(\ell_0)/u(\ell_0)$ (криві

Табл. 4.3. Двопетлові значення для нерухомих точок невідсортованої моделі С.

n	FP	u^*	Δ^*	γ^*	ρ^*	z
$\forall n$	G	0	0	0	$0 \leq \rho^* \leq 1$	2
$n = 1$	G'	0	0	1.4142	0	2
	G'_C	0	0	1.4142	0.3446	3
	G'₁	0	0	1.4142	1	∞
	P	1.3146	0	0	0	2.052
	P₁	1.3146	0	0	1	2.052
	P'	1.3146	0	0.4582	0	2.052
	C	1.3146	0	0.4582	0.2664	2.105
	P'₁	1.3146	0	0.4582	1	2.052
	M	1.6330	0.0209	0	0	2.139
	M₁	1.6330	0.0209	0	1	2.139
$n = 2$	G'	0	0	1	0	2
	G'_C	0	0	1	0.6106	3
	G'₁	0	0	1	1	∞
	P	1.1415	0	0	0	2.053
	P₁	1.1415	0	0	1	2.053
$n = 3$	G'	0	0	0.8165	0	2
	G'_C	0	0	0.8165	0.7993	3
	G'₁	0	0	0.8165	1	∞
	P	1.0016	0	0	0	2.051
	P₁	1.0016	0	0	1	2.051

Табл. 4.4. Показники стійкості нерухомих точок, поданих у Таблиці 4.3

n	FP	ω_u	ω_Δ	ω_γ	ω_ρ
$\forall n$	G	-1	-1	-0.5	0
$n = 1$	G'	-1	-1	1	-1
	G'_C	-1	-1	1	0.976
	G'₁	-1	-1	1	$-\infty$
	P	0.566	-0.105	-0.053	0.052
	P₁	0.566	-0.105	-0.053	-0.052
	P'	0.566	-0.105	0.105	-0.053
	C	0.566	-0.105	0.105	0.041
	P'₁	0.566	-0.105	0.105	$-\infty$
	M	0.494	0.194	0.002	0.139
	M₁	0.494	0.194	0.002	-0.139
$n = 2$	G'	-1	-1	1	-1
	G'_C	-1	-1	1	0.745
	G'₁	-1	-1	1	$-\infty$
	P	0.581	0.078	0.039	0.053
	P₁	0.582	0.078	0.039	-0.053
$n = 3$	G'	-1	-1	1	-1
	G'_C	-1	-1	1	0.522
	G'₁	-1	-1	1	$-\infty$
	P	0.597	0.222	0.111	0.051
	P₁	0.597	0.222	0.111	-0.051

a,c,e), відповідають малому ступіню безладу. На них впливають нестійкі P , P' , C і G'_C , у той час як потоки з великим безладом (криві b, d, h) знаходяться під впливом лише НТ G'_C .

Рис. 4.7 представляє залежності z_{eff} від параметра потоку для кривих на Рис. 4.6. Особливістю усіх кривих є немонотонна поведінка ефективного динамічного критичного показника з підходом до асимптотичного значення. Експериментальні дослідження виконуються в основному в неасимптотичній області. Як впливає з Рис. 4.7, можна спостерігати значення динамічного показника z , що перевищує, або є меншим, ніж асимптотичне значення. Наше *асимптотичне* значення $z = 2.14$ є дещо меншим, ніж центральне значення експериментального результату $z = 2.18 \pm 0.10$ [138], отримане для динаміки розведеної системи Ізінга, проте цей експериментально отриманий результат збігається з нашими *неасимптотичними* спостереженнями.

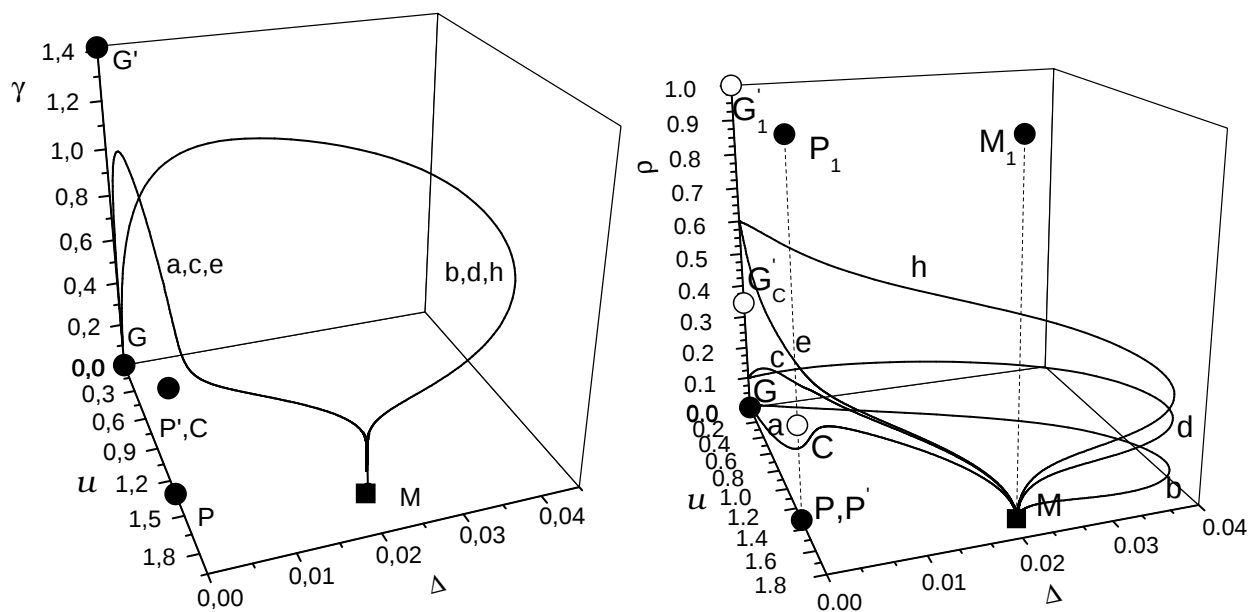


Рис. 4.6. Статичні (лівий малюнок) і динамічні (правий малюнок) потоки неупорядкованої моделі C для $n = 1$ ($n < n_c$). Чорні круги означають нестійкі нерухомі точки з $\gamma^* = 0$, порожні круги позначають проекції нестійких НТ з ненульовим γ^* , у той час як чорний квадрат позначає стійку НТ.

Цікаво також поглянути на вклади різного походження до ефективного динамічного критичного показника z_{eff} . Вони показані на Рис. 4.8 для потоків a та h Рис. 4.6 відповідно. Вклади складаються з (i) членів, уже присутніх у моделі A

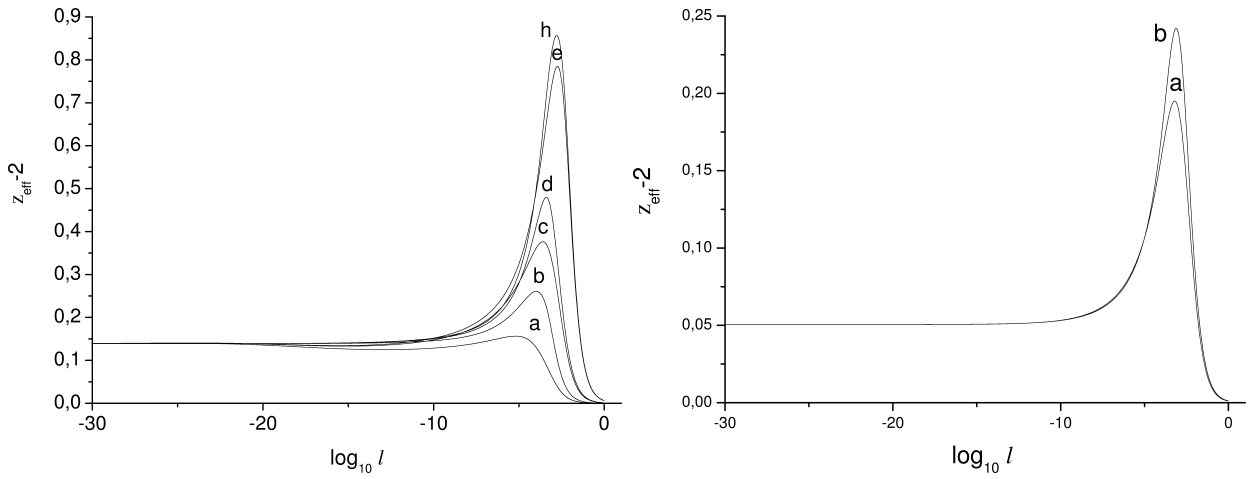


Рис. 4.7. Залежності ефективного динамічного показника від параметра потоку для вимірності параметра порядку $n = 1$ і $n = 3$. Криві отримані на основі потоків Рис. 4.6 і Рис. 4.9.

(штрихова крива Рис. 4.8), (ii) членів, присутніх лише у чистій моделі С (пунктирна крива), і (iii) членів, наявних лише у розбавленій моделі С (штрих-пунктирна крива). Взаємодія між цими вкладками дає повний ефективний показник z_{eff} (суцільна лінія) і може привести до майже асимптотичного значення показника, хоча значення параметрів ще знаходяться далеко від асимптотики. Це важливий момент, оскільки асимптотичне значення однієї фізичної величини не означає обов'язково, що інші величини також досягли асимптотики. Це пов'язано з різними залежностями фізичних величин від параметрів моделі.

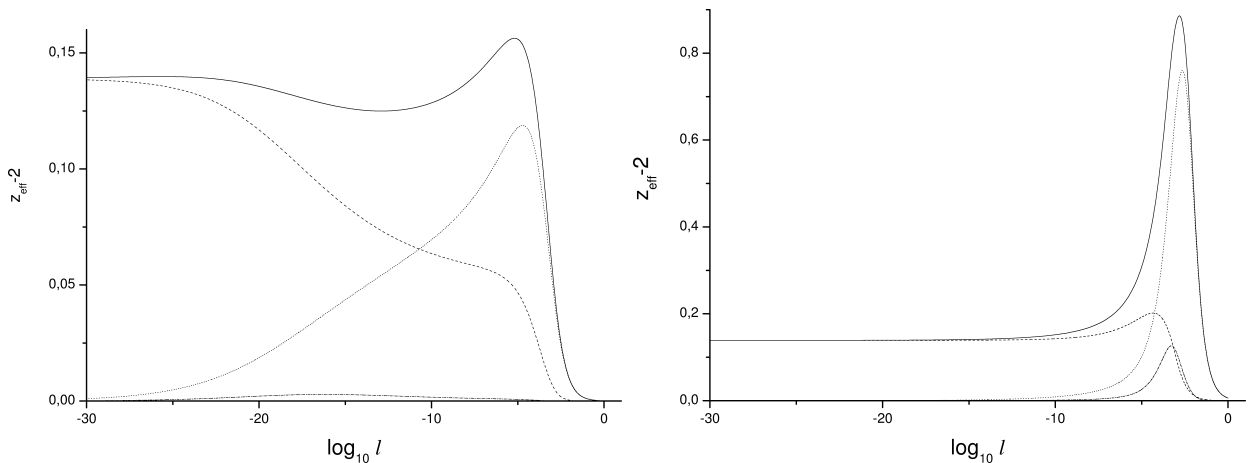


Рис. 4.8. Різні внески до ефективного критичного показника, що відповідає потокам а і h з Рис. 4.6. Неперевні лінії представляють повний z_{eff} , для пояснення інших ліній див. текст.

Другий важливий випадок, який ми розглянемо тут, – це гайзенберґівські системи $n = 3$. В асимптотиці їх критична поведінка характеризується НТ **Р**. Статичні потоки та проекції динамічних потоків у цьому випадку показано на Рис. 4.9. Існує суттєва різниця з однопетлевою картиною. В однопетлевому наближенні стійка НТ є маргінальною: для цієї НТ допускається кожне значення ρ^* від 0 до 1. Тому, починаючи з різних початкових значень, потоки приходять у різні ρ^* . На відміну від цього, Рис. 4.9 показує, що у рамках двопетлевого наближення усі потоки залишаються поблизу початкового значення ρ . Тільки тоді, коли потоки досягають області $u = u^*$, $\Delta = 0$, ρ починає опускатись до значення у НТ $\rho^* = 0$. Це може бути пов'язано з маргінальністю в однопетлевому порядку. Поведінка z_{eff} , що відповідає потоку а з Рис. 4.9, показана на правому графіку Рис. 4.7. Ми представляємо залежності ефективного динамічного критичного показника від параметра потоку тільки для одного набору значень $\gamma(\ell_0)$ і $\rho(\ell_0)$ (але для двох різних відношень $u(\ell_0)/\Delta(\ell_0)$), оскільки для інших значень $\gamma(\ell_0)$ і $\rho(\ell_0)$ спостерігаємо подібну поведінку: пік збільшується для більших $\gamma(\ell_0)$ і/або $\rho(\ell_0)$. Експериментальні дослідження дають для невідпорядкованого магнетика Гайзенберґа значення критичного показника $z = 2.3 \pm 0.1$ [425], що перевищує значення динамічного показника для чистої моделі А з $n = 3$ (у нашому випадку $z = 2.05$). Це може бути наслідком того, що вимірювання виконувались у неасимптотичній області.

4.5. Критична динаміка моделі С для магнетиків з випадковою анізотропією

4.5.1. Модельні рівняння

Ефективний статичний функціонал $\mathcal{H}_{RAM}$, який описує поведінку моделі з випадковою анізотропією поблизу рівноважного стану записується:

$$\mathcal{H}_{RAM} = \mathcal{H}_{eff} + \int d^d r \bar{D} \left(\hat{x} \vec{\phi}_0 \right)^2, \quad (4.109)$$

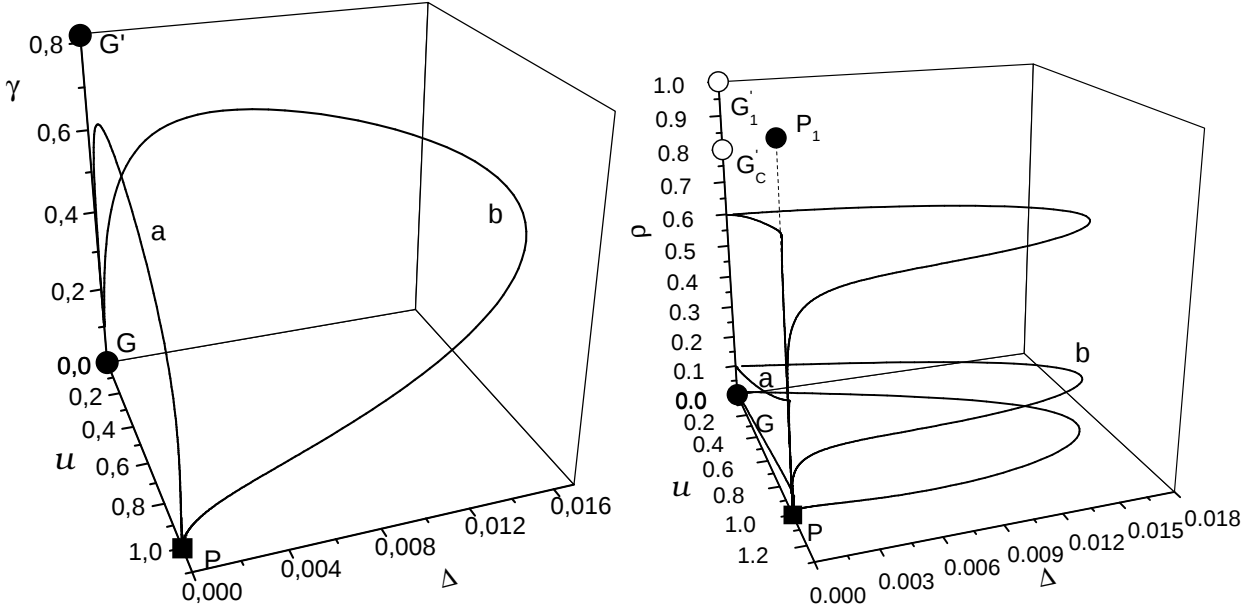


Рис. 4.9. Статичні (лівий графік) та динамічні (правий графік) потоки неупорядкованої моделі С для $n = 3$ ($n > n_c$). Незаповнені круги означають нестійкі нерухомі точки з $\gamma^* = 0$, чорні круги вказують проекції нестійких точок з ненульовим γ^* , тоді як квадрат позначає стійку НТ.

де $\bar{D}$ – це константа анізотропії, пропорційна до D р-ня (1.26), а $\mathcal{H}_{eff}$ задається рівням (1.16).

Динамічні рівняння моделі знову визначаються виразами (1.17)-(1.18) тільки тепер з заміною $\mathcal{H}_{eff}$ на $\mathcal{H}_{RAM}$ (4.109).

Як і у попередніх випадках, вивчаємо критичну динаміку, застосовуючи підхід Бауша-Янсена-Вагнера [339] динамічної теоретико-польової РГ. Після усереднення за безладом динамічна поведінка моделі С для системи з випадковою анізотропією буде описуватись таким лагранжіаном:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \int d^d r dt \left\{ \sum_i \tilde{\phi}_{i,0} \frac{\dot{\Gamma} y_0}{3!} \phi_{i,0}^3 + \int dt' \sum_i \tilde{\phi}_{i,0}(t) \phi_{i,0}(t) \times \left[\frac{\dot{\Gamma}^2 v_0}{3!} \sum_j \tilde{\phi}_{j,0}(t') \phi_{j,0}(t') + \frac{\dot{\Gamma}^2 w_0}{3!} \tilde{\phi}_{i,0}(t') \phi_{i,0}(t') \right] \right\}, \quad (4.110)$$

де $\mathcal{L}_0$ і $\mathcal{L}_{int}$ задаються рівнями (4.97) і (4.98), відповідно. Зазначимо, що тепер неперенормована маса μ_0^2 насправді означає $\mu_0^2 - \bar{D}/n$, а константи зв'язку мають такі знаки $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $w_0 < 0$. Константи зв'язку v_0 і w_0 генеруються

усередненням за конфігураціями і їхні значення зв'язані з моментами розподілу (3.4) (див. підрозділ 3.1). Доданок з коефіцієнтом y_0 у (4.110) не є результатом усереднення, але повинен включатись, оскільки він генерується при дослідженні пертурбативною теоретико-польовою РГ. Тому константа зв'язку y_0 може бути довільного знаку.

4.5.2. Результати

Асимптотичні властивості

Статичні двопетлеві функції РГ для РАМ з кубічним розподілом випадкових осей у схемі мінімального віднімання отримані у роботі [34].

Їх доповнює функція ζ_Γ , яку отримуємо з двопетлевого результату для динамічної функції ζ_ϕ (розрахованої з перенормовуючого множника Z_ϕ , див. (A.17) у Додатку A.3). Ми дістаємо такий двопетлевий вираз для ζ_Γ :

$$\begin{aligned} \zeta_\Gamma = & -\frac{v+w}{3} + \gamma^2 \rho + \frac{(6 \ln(4/3) - 1)}{24} \left(\frac{(n+2)}{3} u^2 + \frac{2}{3} uy + y^2 \right) + \\ & \frac{1}{36} (5v^2 + (n+2) uv + 10vw + 3vy + 3uw + 5w^2 + 3wy) - \\ & \frac{\rho \gamma^2}{2} \left(\left(\frac{(n+2)}{3} u + y \right) (1 - 3 \ln(4/3)) + \right. \\ & \left. \rho \gamma^2 \left(\frac{n}{2} - \rho - \frac{3(n+2)}{2} \ln(4/3) + (1 + \rho) \ln(1 - \rho^2) \right) + v + w \right) + \\ & \gamma^2 \rho \left(\frac{v+w}{6} \right) \left(\frac{\rho^2 \ln(\rho)}{1 - \rho} + (3 + \rho) \ln(1 - \rho) \right). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Двопетлевий результат [410] для чистої моделі С відтворюється, покладаючи (4.111) константи зв'язку v, w, y рівними нулеві. У той час як, покладаючи $\gamma = 0$ у (4.111), відтворюємо результат для моделі А з випадковою анізотропією [39]. Члени з $\gamma^2 v, \gamma^2 w, \gamma^2 y$ представляють власний вклад саме моделі С для магнетиків з випадковою анізотропією.

Аналіз статичних функцій $\beta_{\{u_i\}}$ при фіксованій вимірності $d = 3$ говорить про існування 16 нерухомих точок [34] (див. підрозділ 3.1). Тільки 10 з цих не-

рухомих точок попадають в область фізичних значень з $u > 0$, $v > 0$, $w < 0$. Відповідні значення координат нерухомих точок подані у роботі [34].

Для кожної статичної НТ $\{u_i^*\}$ ми отримуємо множину динамічних нерухомих точок з різними γ^* і ρ^* . Нерухомі точки, отримані для $n = 2, 3$, подані у Таблицях 4.5 та 4.6 відповідно. Показники стійкості ω_γ і ω_ρ також подані у таблицях. Тут ми зберігаємо нумерацію нерухомих точок, яка використовувалась у розділі 3. Зі статистики відомо, що НТ XIII визначає критичну поведінку RAM з кубічним розподілом. Ця НТ є тієї самої природи, що і НТ моделі Ізінга з випадковими вузлами, тому усі статичні критичні показники співпадають з критичними показниками згаданої моделі. Оскільки показник теплоємності у цьому випадку є від'ємним, асимптотична критична динаміка описується моделлю А. Однак неасимптотичні критичні властивості магнетиків з випадковою анізотропією відрізняються від властивостей ізінгівських магнетиків з випадковими вузлами у статистиці [34], а також у динаміці [39]. Однак для моделі С, що тут розглядається, неасимптотична критична поведінка значно відрізняється від поведінки для моделі А, як буде видно нижче.

Неасимптотичні властивості

Існування такої великої кількості динамічних нерухомих точок робить неасимптотичну критичну поведінку складнішою, ніж у моделі А. Ми представляємо тут результати для $n = 3$. Для $n = 2$ поведінка є якісно подібною. Розв'язуючи рівняння на потоки для різних початкових умов, отримуємо різні потоки в просторі параметрів моделі. Проекція найбільш характерних потоків у підпростір $w - y - \rho$ представлена на рис. 4.10. Порожні кола вказують нестійкі точки справжньої моделі С, тоді як чорні круги представляють нестійкі точки моделі А. Чорний квадрат означає стійку НТ.

Початкові умови для констант зв'язку $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$, $y(0)$ для потоків є такими самими, як у роботах [34, 39]. Ми вибираємо $\gamma(0) = 0.1$ і $\rho(0) = 0.6$. Багато потоків відчують вплив двох ізінгівських нерухомих точок V_C і X_C . Підставляючи розв'язки рівнянь на потоки у вирази для динамічних показників, отримаємо

Табл. 4.5. Двопетлові значення для динамічних нерухомих точок магнетиків з випадковою анізотропією з $n = 2$ (модель C).

FP	γ^*	ρ^*	ω_γ	ω_ρ	z
I	0	$0 \leq \rho^* \leq 1$	0	0	2
I'	1	0	1	-1	2
I_C	1	0.6106	1	0.745	3
I'₁	1	1	1	$-\infty$	∞
II	0	0	0.0387	0.0526	2.0526
II₁	0	1	0.0387	-0.0526	2.0526
III	0	0	-0.1686	-0.1850	1.8150
III₁	0	1	-0.1686	0.1850	1.8150
III_C	.5806	0	0.3371	-0.5222	1.8150
III'₁	.5806	1	0.3371	∞	$-\infty$
V	0	0	-0.0525	0.0523	2.0523
V₁	0	1	-0.0525	-0.0523	2.0523
V'	.3240	0	0.1050	-0.0527	2.0523
V_C	.3240	0.5241	0.1050	0.0277	2.1050
V'₁	.3240	1	0.1050	$-\infty$	∞
VI	0	0	-0.0049	-0.0417	2.0107
VI₁	0	1	-0.0049	0.0417	2.0107
VI'	0.0986	0	0.0097	0.00095	2.0107
VI'₁	0.0986	1	0.0097	∞	$-\infty$
VIII	0	0	-0.0525	0.1569	2.1569
VIII₁	0	1	-0.0525	-0.1569	2.1569
VIII'	0.3240	0	0.1050	0.0519	2.1569
VIII'₁	0.3240	1	0.1050	$-\infty$	∞
X	0	0	-0.0525	0.0523	2.0523
X₁	0	1	-0.0525	-0.0523	2.0523
X'	.3240	0	0.1050	-0.0527	2.0523
X_C	.3240	0.5241	0.1050	0.0277	2.1050
X'₁	.3240	1	0.1050	$-\infty$	∞
XIII	0	0	0.0018	0.1388	2.1388
XIII₁	0	1	0.0018	-0.1388	2.1388

Табл. 4.6. Двопетлові значення для динамічних нерухомих точок магнетиків з випадковою анізотропією з $n = 3$ (модель С).

FP	γ^*	ρ^*	ω_γ	ω_ρ	z
I	0	$0 \leq \rho^* \leq 1$	0	0	2
I'	0.8165	0	1	-1	2
I_C	0.8165	0.7993	1	0.5218	3
I'₁	0.8165	1	1	$-\infty$	∞
II	0	0	0.1109	0.0506	2.0506
II₁	0	1	0.1109	-0.0506	2.0506
III	0	0	-0.1686	-0.1850	1.8150
III₁	0	1	-0.1686	0.1850	1.8150
III'	0.4741	0	.3371	-0.5222	1.8150
III'₁	0.4741	1	0.3371	∞	$-\infty$
V	0	0	-0.0525	0.0523	2.0523
VI₁	0	1	-0.0525	-0.0523	2.0523
VI'	0.2646	0	0.1050	-0.0527	2.0523
VI_C	0.2646	0.7617	0.1050	0.0157	2.1050
VI'₁	0.2646	1	0.1050	$-\infty$	∞
VI	0	0	-0.0162	-0.0401	1.9599
VI₁	0	1	-0.0162	0.0401	1.9599
VI'	0.1467	0	0.0323	-0.0724	1.9599
VI'₁	0.1467	1	0.0323	∞	$-\infty$
VIII	0	0	0.1051	0.0425	2.0425
VIII₁	0	1	0.1051	-0.0425	2.0425
IX	0	0	-0.0161	-0.0384	1.9616
IX₁	0	1	-0.0161	0.0384	1.9616
IX'	0.1466	0	0.0322	-0.0707	1.9616
IX'₁	0.1466	1	0.0322	∞	$-\infty$
X	0	0	-0.0525	0.0523	2.0523
X₁	0	1	-0.0525	-0.0523	2.0523
X'	0.2646	0	0.1050	-0.0527	2.0523
X_C	0.2646	0.7617	0.1050	0.0157	2.1050
X'₁	0.2646	1	0.1050	$-\infty$	∞
XIII	0	0	0.0018	0.1388	2.1388
XIII₁	0	1	0.0018	-0.1388	2.1388

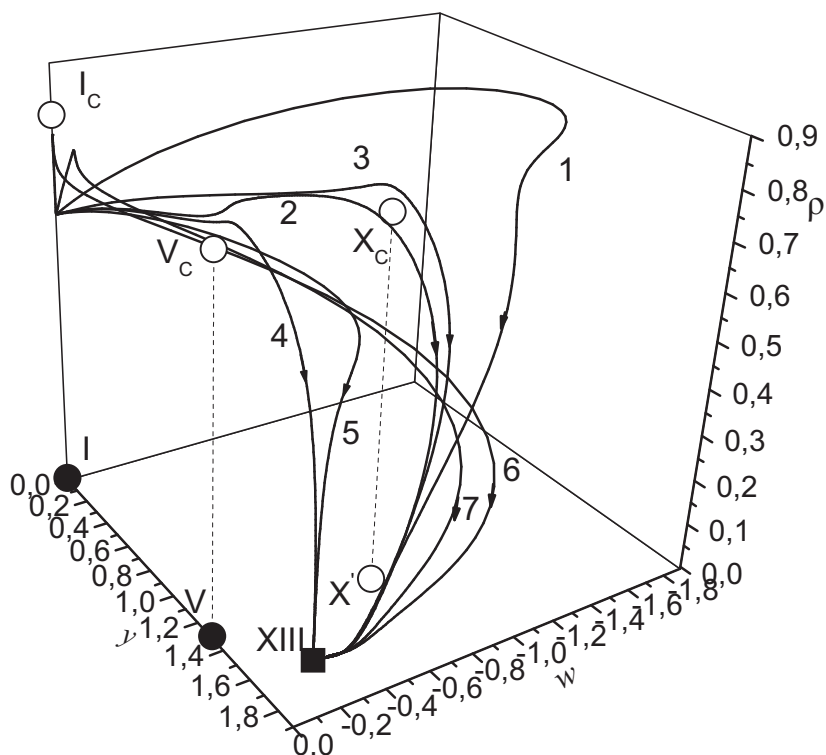


Рис. 4.10. Проекції потоків для $n = 3$ у підпросторі констант зв'язку $w - y - \rho$. Порожні круги представляють проекції нестійких нерухомих точок з ненульовим γ^* . Чорні круги позначають нестійкі нерухомі точки з $\gamma^* = 0$. Чорний квадрат показує стійку НТ.

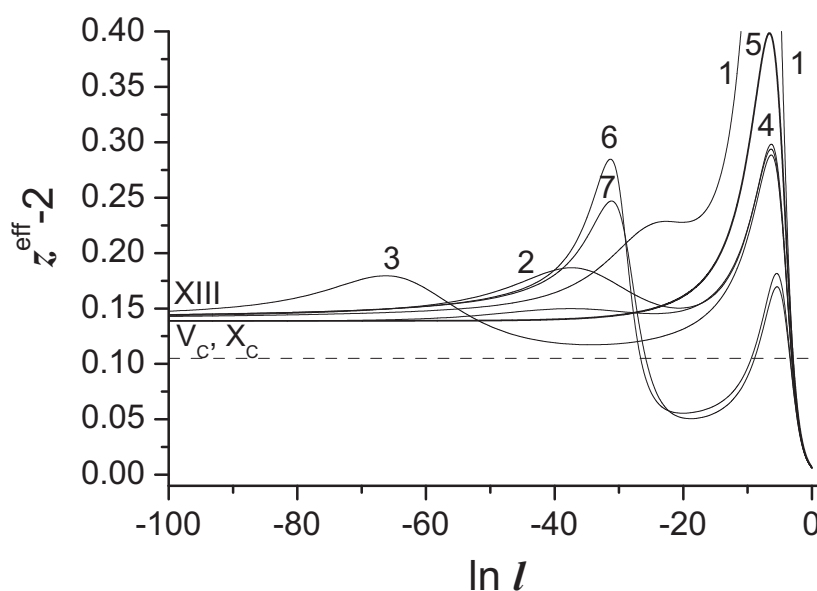


Рис. 4.11. Залежність ефективного критичного показника параметра порядку для динаміки моделі С від логарифма параметра потоку. Див. текст для повного опису.

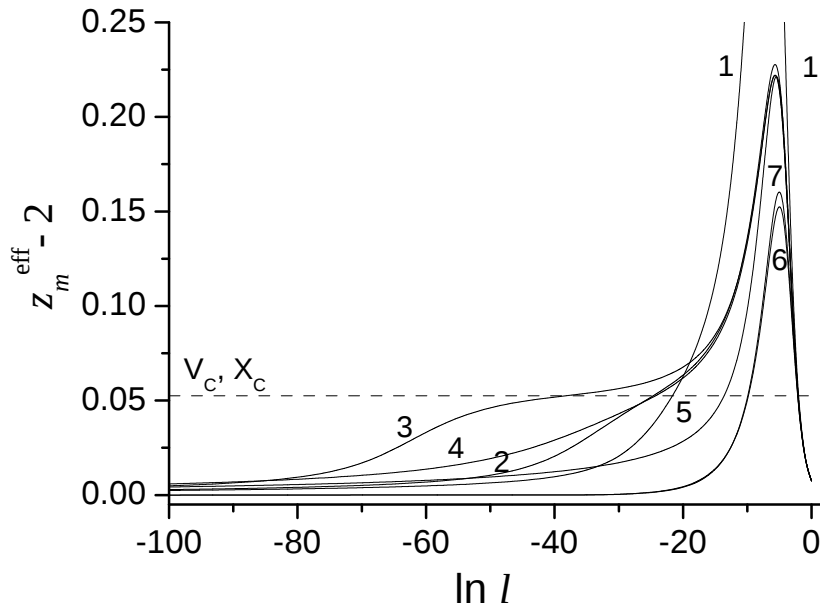


Рис. 4.12. Залежність ефективного критичного показника збережної величини для динаміки моделі С від логарифма параметра потоку. Див. текст для повного опису.

ефективні показники z^{eff} і z_m^{eff} . Залежність z^{eff} від параметру потоку ℓ , що відповідає потокам 1-7, показана на Рис. 4.11. Подібно Рис. 4.12 показує цю залежність для ефективного показника збережної густини z_m^{eff} . Потік 3 знаходиться під впливом обох нерухомих точок V_C і X_C . Таким чином, ефективні показники демонструють область із значеннями, які є близькими до значень моделі С у випадку магнетика Ізінга (див. криву 3 на рисунках 4.11 і 4.12). Асимптотичні значення, які відповідають нерухомих точкам V_C і X_C , позначені штриховою лінією. Вони відповідають значенням, асимптотично отриманим у чистій моделі С з $n = 1$, оскільки НТ V_C і НТ X_C є тої ж самої природи, що і НТ чистої моделі С. Криві 6 відповідають потокам поблизу чистої НТ II. Тоді як крива 7 відповідає потоку поблизу кубічної НТ VIII.

Основна відмінність поведінки ефективного динамічного показника z^{eff} у моделі С від поведінки у моделі А є поява кривих з декількома піками. Значення піку, що з'являється в правій частині, залежить від початкового стану $\gamma(0)$ і $\rho(0)$. Це продемонстровано на Рис. 4.13.

Ефективна поведінка двох динамічних критичних показників для параметра порядку та збережної густини може бути цілком відмінною, як можна побачити,

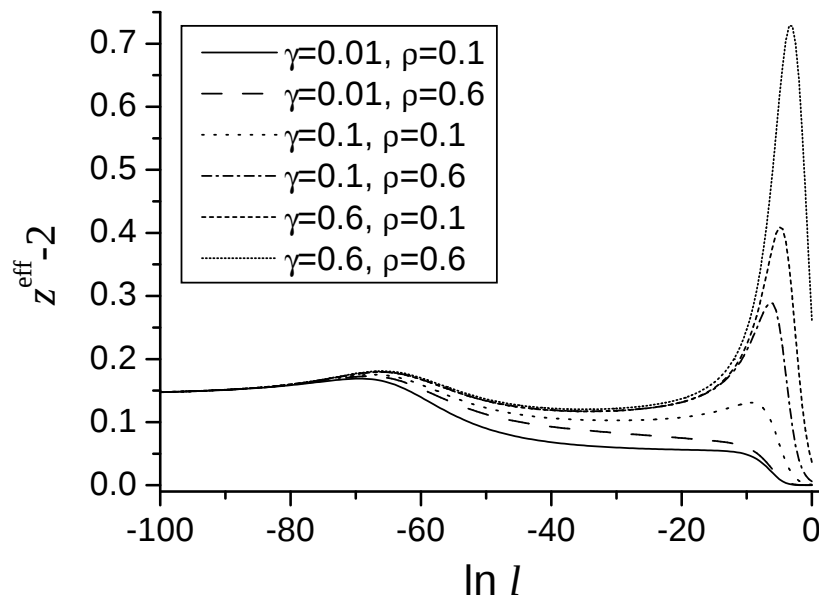


Рис. 4.13. Залежність z^{eff} від логарифма параметра потоку для різних початкових значень γ і ρ .

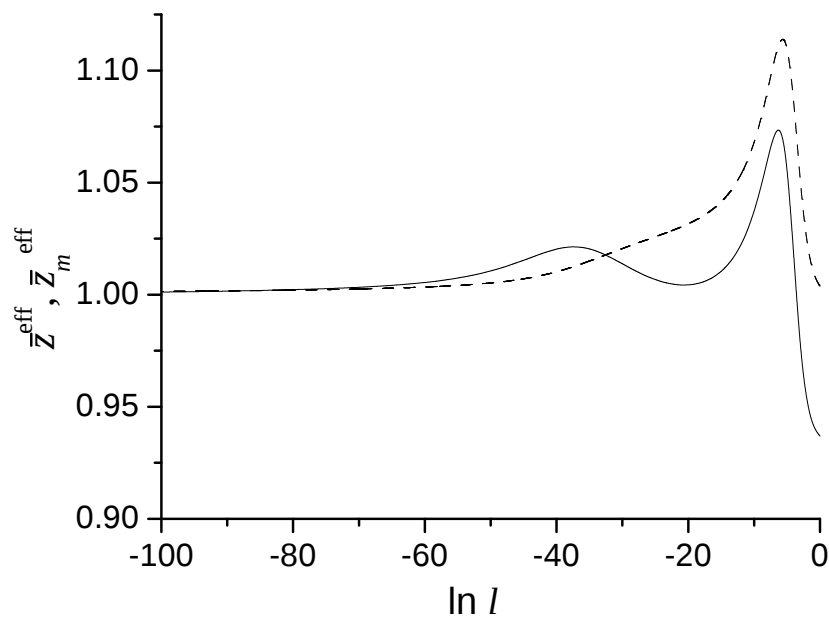


Рис. 4.14. Нормовані ефективні динамічні критичні показники параметра порядку і збережної густини $\bar{z}^{\text{eff}}$ (суцільна лінія), $\bar{z}_m^{\text{eff}}$ (штрихова лінія), які відповідають потоку 2.

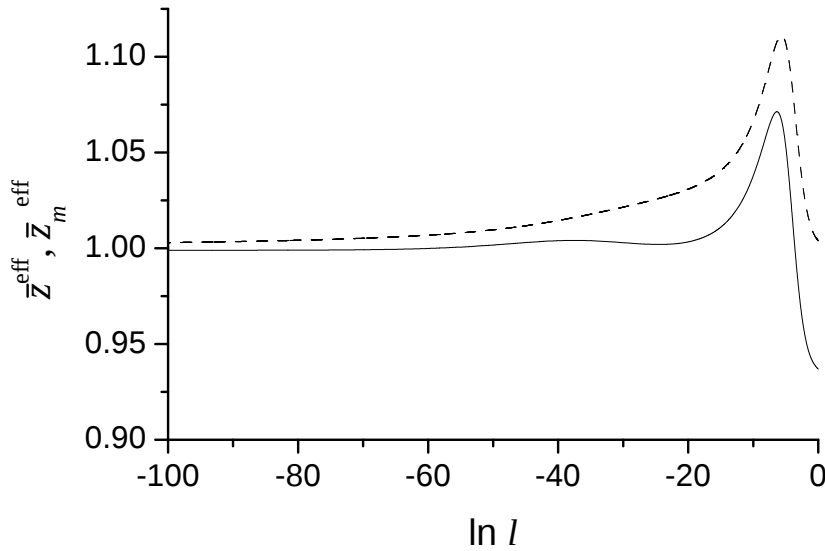


Рис. 4.15. Залежності нормованих критичних показників параметра порядку і збережної густини, які відповідають потоку 4. Позначення ті самі, як у Рис. 4.14.

порівнюючи Рис. 4.11 і Рис. 4.12. Однак можна запитати, чи обидва показники досягають асимптотичних значень однаковим чином. Для цього ми вводимо нормування значення ефективних показників за їх значеннями в асимптотиці. Зокрема, ми вводимо позначення $\bar{z}^{\text{eff}} = z^{\text{eff}}/z$, $\bar{z}_m^{\text{eff}} = z_m^{\text{eff}}/z_m$ для показника параметра порядку і збережної густини відповідно. Рис. 4.14 і Рис. 4.15 показують поведінку нормованих показників параметра порядку і збережної густини для потоків 2 і 4 відповідно. Це показує, що підхід до асимптотики для показників параметра порядку та показників збереженої густини відбувається по-різному для різних потоків, тобто для різних початкових умов. Для системи з малим ступенем безладу (малими $v(0)$ та $w(0)$, потік 4) підхід динамічного показника параметра порядку до асимптотичного режиму є швидшим, ніж для збережної густини, у той час як для системи з більшою величиною безладу (потік 2) підхід обидвох величин є майже одночасним.

4.6. Висновки

У цьому розділі досліджено критичну динаміку моделі С для магнетиків зі структурним безладом, а саме для магнетиків з випадковими вузлами та для

магнетиків з випадковою анізотропією. Модель С навіть без додавання структурного безладу, є досить складною для дослідження (див. недавній огляд [20]). Для моделі С без безладу розраховано динамічні кореляційні функції в однопетлево-му наближенні. На основі них обчислено характеристичні частоти та розраховано динамічне відношення амплітуд характеристичних частот параметра порядку та збережної величини, яке є універсальною величиною. Здійснено узагальнення для виразу цього відношення у параметричній площині кореляційної довжини та хвильового вектора.

Також здійснено перегляд фазової діаграми моделі С, отриманої у рамках двопетлевих результатів теоретико-польової пертурбативної РГ. Розрахунки проводились на основі високих порядків РГ для $O(n)$ моделі і для динамічного критичного показника моделі А з використанням процедур пересумовування.

Отримана фазова діаграма якісно підтверджує результати НПРГ [89] для високих вимірностей $\varepsilon \leq 1$ та вимірності параметра порядку $n \geq 1$, що показують ширшу область для режиму слабого скейлінгу. Спостерігаються помітні відхилення в інших областях (n, ε) -площини, що можна пояснити недосконалістю моделей типу ϕ^4 для опису фізики у низьких вимірах та специфічним вибором наближень та параметрів моделі у підході НПРГ.

Для магнетиків з безладом в асимптотиці збережена густина відокремлюється від параметра порядку, та динамічна критична поведінка обох розглянутих моделей з безладом є такою ж, як і для моделі Ізінґа з випадковими вузлами. Однак існування багатьох нерухомих точок і, відповідно, кросовер між ними значно впливає на неасимптотичні критичні властивості. У залежності від початкових значень параметрів моделей спостерігаються різні сценарії динамічної критичної поведінки. Основною особливістю є наявність додаткових піків на кривих для ефективних динамічних критичних показників у порівнянні з ефективною критичною динамікою моделі А.

Оскільки підхід до асимптотики є дуже повільним, то в експериментах і в числових моделюваннях можуть спостерігатися ефективні показники. Для магнетиків з випадковими вузлами при вимірності параметра порядку $n < n_c$ показник

z_{eff} може або перевищувати асимптотичне значення, показуючи пік, або монотонно досягти асимптотичного значення. Для випадку $n > n_c$ показник z_{eff} завжди показує а немонотонну поведінку. При цьому для обох типів безладу ефективний показник параметра порядку може приймати значення, далекі від асимптотичного (асимптотичне значення у двопетлевому розрахунку – $z = 2.139$).

Те саме стосується і ефективного критичного показника збережної густини, який був розрахований для магнетиків з випадковою анізотропією з кубічним розподілом осі випадкової анізотропії. Він може бути далеко від свого асимптотичного значення ван Хофа $z_m = 2$. Наприклад, можна спостерігати значення z^{eff} та z_m^{eff} , близькі до значень для чистої моделі Ізінґа з динамікою моделі С.

РОЗДІЛ 5

ВПЛИВ СТРУКТУРНОГО БЕЗЛАДУ НА КРИТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ДВОВИМІРНИХ МАГНЕТИКІВ

У цьому розділі досліджено критичні властивості двовимірних систем, що містять структурний безлад. У рамках цієї проблеми було розклянуто три задачі, яким присвячені окремі підрозділи. У першому підрозділі розглядається задача про самоусереднення термодинамічних характеристик двовимірної моделі Ізінґа з нескорельованим безладом поблизу критичної точки. Використовуючи представлення цієї моделі у теорії ферміонівських полів Майорани, з допомогою методів РГ отримано явні вирази функції розподілу для флуктуацій внутрішньої енергії та теплоємності. У наступних двох підрозділах розглядається вплив далекосяжно скорельованого безладу на критичну поведінку тієї ж двовимірної моделі Ізінґа та так званої моделі Ашкіна-Телера з N_i “кольорами”. Тут з використанням представлення моделі за допомогою ферміонівських полів Дірака у рамках РГ, розраховано критичні показники і продемонстровано, що обидві моделі належать до одного класу універсальності. Основні результати цього розділу викладені у роботах [46, 50–53, 67, 68].

5.1. Самоусереднення термодинамічних величин двовимірної моделі Ізінґа з безладом

Сильні флуктуації, спричинені замороженням безладом, у деяких випадках можуть призвести до втрати самоусереднення [289, 426–428], тобто поведінка великого зразка з певною реалізацією домішок (такого як матеріальні зразки, до-

ступні в експериментах) не достатньо добре буде описуватись усередненням за ансамблем, яке зазвичай розраховується в аналітичних або чисельних підходах. Це впливає також на інтерпретацію отриманих даних і на можливість порівняння теоретичних та експериментальних результатів. Наявність або відсутність самоусереднення пов'язана з питанням суттєвості (relevance - в сенсі РГ) безладу для досліджуваних систем [289, 427], і це також впливає як на статичні, так і динамічні властивості [429, 430]. Нещодавно, явний вираз для функції розподілу імовірностей критичних флуктуацій вільної енергії слабо неупорядкованого ізінгівського феромагнетика був отриманий при вимірностях простору $d < 4$, а при $d = 3$ була отримана універсальна форма цієї функції розподілу [431]. Оскільки вільну енергію не можна явно виміряти в експериментальних або числових дослідженнях, то бажано вивчати властивості самоусереднювання величин, які можна безпосередньо виміряти.

Системою, яка викликає значне зацікавлення, є модель Ізінга у двох вимірах, оскільки для неї доступні точні результати у чистому випадку [270]. Коли для цієї моделі розглядати безлад у формі випадкових зв'язків, то критерій Гаріса не може дати висновок про його суттєвість, оскільки $\alpha = 0$ і система є маргінальною. Однак на сьогодні добре встановлено, що такий слабкий безлад “маргінально” модифікує критичну поведінку таких систем, так що логарифмічна сингулярність теплоємності перетворюється на подвійну логарифмічну сингулярність [273, 274, 277, 278]. Оскільки вже вивчалися багато аспектів цієї задачі, включаючи, наприклад, ефект скорельованого безладу [50, 180], питанню розподілу імовірностей вимірюваних величин через наявність безладу і їх самоусередненої поведінки уваги приділялось менше. Починаючи з перших робіт [426, 427], як міра самоусереднення розглядається відносна дисперсія термодинамічних спостережуваних. Було показано, що для несуттєвого безладу відносна дисперсія слабо спадає як степінь L , вказуючи присутність “слабкого самоусереднення”, у той час як для суттєвого безладу ця величина наближається до ненульової константи при $L \rightarrow \infty$, демонструючи втрату самоусереднення [427]. Результати чисельних досліджень цієї величини для неупорядкованої двовимірної моделі Ізінга

[277, 426, 429, 432], де безлад є гранично суттєвим, не давали однозначного висновку. Нижче ми отримаємо форму функцій розподілу флуктуацій, викликаних безладом, і обговоримо її асимптотику при $L \rightarrow \infty$.

5.1.1. Ферміонне представлення для двовимірної моделі Ізінга з безладом

Добре відомо, що критичну поведінку двовимірної феромагнітної моделі Ізінга можна описати в термінах вільних двокомпонентних спінових полів Грасмана-Майорани $\Psi(\mathbf{r}) = (\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}))$ з таким гамільтоніаном (див. наприклад [433]):

$$H_0[\Psi; \tau] = \frac{1}{2} \int d^2r [\bar{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\partial} \Psi(\mathbf{r}) + \tau \bar{\Psi}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r})], \quad (5.1)$$

де $\tau = (T - T_c)/T_c \ll 1$ (замість τ коректніше вживати в гамільтоніані масу $\mu \sim \tau$, однак для наших розрахунків провідних асимптотик це не має великого значення). Далі,

$$\hat{\partial} = \hat{\sigma}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\sigma}_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.2)$$

де

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

– матриці Паулі і $\bar{\psi} \equiv \psi \hat{\sigma}_3$. При заданому значенні параметра τ статистична сума $Z(\tau)$ системи (5.1) буде такою:

$$Z(\tau) = \int \mathcal{D}\Psi \exp\{-H_0[\Psi; \tau]\}, \quad (5.4)$$

де міри інтегрування означені як

$$\int \mathcal{D}\Psi = \prod_{\mathbf{r}} \left[- \int d\psi_1(\mathbf{r}) d\psi_2(\mathbf{r}) \right], \quad (5.5)$$

а інтегрування і правила перестановки є такими:

$$\int d\psi_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \quad \int d\psi_\alpha(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) = - \int \psi_\alpha(\mathbf{r}) d\psi_\alpha(\mathbf{r}) = 1, \quad (5.6)$$

$$\psi_\alpha(\mathbf{r})\psi_\beta(\mathbf{r}') = -\psi_\beta(\mathbf{r}')\psi_\alpha(\mathbf{r}), \quad [\psi_\alpha(\mathbf{r})]^2 = 0. \quad (5.7)$$

Тоді вільна енергія запишеться:

$$F(\tau) = -\ln[Z(\tau)]. \quad (5.8)$$

Зауважте, що ми не включаємо звичайний температурний множник у визначення вільної енергії (5.8). Наш аналіз проводиться поблизу T_c , яка для спрощення покладається 1, і ми дивимося тільки за провідними членами розкладу (сингулярностями) за параметром $\tau = (T - T_c)/T_c = T - 1$. Таким чином, у границі $\tau \rightarrow 0$:

$$F(\tau) = -T \ln[Z(\tau)] = -\ln[Z(\tau)] - \tau \ln[Z(\tau)] = -\ln[Z(\tau)] + O(\tau). \quad (5.9)$$

Просте інтегрування р-ня (5.4) дає

$$Z(\tau) = \left[\det(\hat{\partial} + \tau \hat{\sigma}_0) \right]^{1/2}, \quad (5.10)$$

де $\hat{\sigma}_0$ – одинична матриця, і вираз з правого боку рівняння є символічним позначенням детермінанта $L^2 \times L^2$ матриці, яка визначає гамільтоніан (5.1), записаний у дискретному вигляді на $L \times L$ ґратці. Вільна енергія запишеться

$$F(\tau) = -\frac{1}{2} \ln \left[\det(\hat{\partial} + \tau \hat{\sigma}_0) \right] \sim -L^2 \int_{|p|<1} d^2p \ln(p^2 + \tau^2). \quad (5.11)$$

Зазначимо, що відома логарифмічна розбіжність теплоємності у границі $\tau \rightarrow 0$ слідує безпосередньо прямо з р-ня (5.11):

$$C(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} F(\tau) \sim L^2 \int_{|p|<1} \frac{d^2p}{p^2 + \tau^2} \sim L^2 \int_{|\tau|}^1 \frac{dp}{p} \sim L^2 \ln \frac{1}{|\tau|}. \quad (5.12)$$

Присутність слабого замороженого безладу в системі можна описати, прийнявши, що через безлад локальна температура переходу стає просторово неоднорідною, і це можна подати як заморожені просторові флуктуації температурного параметра τ у гамільтоніані (5.1) (див., наприклад, роботу [224]). Іншими

словами, критична поведінка слабо неупорядкованої двовимірної моделі Ізінґа описується спіновим гамільтоніаном

$$H[\Psi; \tau, \delta\tau] = \frac{1}{2} \int d^2r \left[\bar{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\partial} \Psi(\mathbf{r}) + (\tau + \delta\tau(\mathbf{r})) \bar{\Psi}(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) \right], \quad (5.13)$$

де випадкова функція $\delta\tau(\mathbf{r})$ характеризується просторово нескорельованим гаусовим розподілом з нульовим середнім, $\overline{\delta\tau(\mathbf{r})} = 0$, і дисперсією

$$\overline{\delta\tau(\mathbf{r})\delta\tau(\mathbf{r}')} = 2g_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.14)$$

де константа зв'язку $g_0 \ll 1$ визначає силу безладу. Для даної реалізації замороженої функції $\delta\tau(\mathbf{r})$ статистична сума досліджуваної системи має вигляд:

$$Z[\tau; \delta\tau] = \int \mathcal{D}\psi \exp\{-H[\Psi; \tau, \delta\tau]\} = \exp\{-F[\tau; \delta\tau]\}, \quad (5.15)$$

де $F[\tau; \delta\tau]$ – це випадкова функція вільної енергії. Внутрішня енергія даної реалізації є першою похідною цієї вільної енергії за температурним параметром:

$$E[\tau; \delta\tau] = \frac{\partial}{\partial \tau} F[\tau; \delta\tau]. \quad (5.16)$$

Зрозуміло, що $E[\tau; \delta\tau]$ мусить бути сингулярною функцією τ в границі $\tau \rightarrow 0$ (у чистій системі $E_0(\tau) \sim \tau \ln(1/|\tau|)$). Поза тим, $E[\tau; \delta\tau]$ також мусить бути *випадковою* функцією, яка флюктує від зразка до зразка. Функція розподілу цих флюктуацій є основною метою цього дослідження.

5.1.2. Формалізм реплік

З означення (5.16) ми маємо:

$$E[\tau; \delta\tau] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F[\tau + \epsilon; \delta\tau] - F[\tau; \delta\tau]). \quad (5.17)$$

Тому для даного скінченного значення ϵ (яке потрібно покласти нулю в кінці обчислень) отримуємо:

$$\epsilon E[\tau; \delta\tau] = F[\tau + \epsilon; \delta\tau] - F[\tau; \delta\tau]. \quad (5.18)$$

Згідно з означенням вільної енергії р-ня (5.15), це співвідношення можна представити у термінах відношення двох статистичних сум:

$$\exp\{-\epsilon E[\tau; \delta\tau]\} = Z[\tau + \epsilon; \delta\tau] Z^{-1}[\tau; \delta\tau]. \quad (5.19)$$

Піднімаючи обидві сторони рівності до степеня N і проводячи усереднення за безладом, знаходимо:

$$\int dE P_\tau(E) \exp(-\epsilon N E) = \overline{Z^N[\tau + \epsilon; \delta\tau] Z^{-N}[\tau; \delta\tau]}. \quad (5.20)$$

Тут, $P_\tau(E)$ – розподіл імовірності випадкової внутрішньої енергії системи при заданому значенні параметра τ і $\overline{(\dots)}$ позначає усереднення за випадковою функцією $\delta\tau(\mathbf{r})$. Слідуючи стандартному реплічному формалізму, співвідношення (5.20) можна представити у такому вигляді:

$$\int dE P_\tau(E) \exp(-\epsilon N E) = \lim_{M \rightarrow 0} \overline{Z^N[\tau + \epsilon; \delta\tau] Z^{M-N}[\tau; \delta\tau]} \equiv \lim_{M \rightarrow 0} \mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon). \quad (5.21)$$

У термінах цього формалізму спочатку приймається, що обидва M і N є цілими числами, такими що $M > N$. Тоді, після отримання $\mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon)$ як аналітичної функції M і N , ці параметри аналітично можна продовжити на множину довільних дійсних значень і взяти границю $M \rightarrow 0$. Насамкінець ми вводимо новий аналітичний параметр $s = \epsilon N$ і беремо границю $\epsilon \rightarrow 0$, так що співвідношення (5.21) стає перетворенням Лапласа функції розподілу імовірностей $P_\tau(E)$:

$$\int dE P_\tau(E) \exp(-s E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow 0} \mathcal{Z}(M, s/\epsilon; \tau, \epsilon) \equiv \tilde{\mathcal{Z}}(s, \tau). \quad (5.22)$$

Тому, попередня процедура, хоча не дуже добре обґрунтована з математичної точки зору, принаймні формально дозволяє реконструювати функцію $P_\tau(E)$ за допомогою оберненого перетворення Лапласа:

$$P_\tau(E) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \tilde{\mathcal{Z}}(s, \tau) \exp(sE). \quad (5.23)$$

Продовжуючи, розглянемо структуру реплічної статистичної суми $\mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon)$. Згідно з означеннями (5.15) та (5.21) маємо:

$$\mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon) = \int \mathcal{D}\Psi \overline{\left(\exp \left\{ - \sum_{a=1}^N H[\Psi_a; \tau + \epsilon, \delta\tau] - \sum_{a=N+1}^M H[\Psi_a; \tau, \delta\tau] \right\} \right)}. \quad (5.24)$$

Підставляючи сюди гамільтоніан (5.13), проводячи усереднення за $\delta\tau(\mathbf{r})$ і використовуючи рівняння (5.14), ми знаходимо:

$$\mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon) = \int \mathcal{D}\Psi \exp \left\{ - \mathcal{H}_{M,N}[\Psi; \tau, \epsilon] \right\} \equiv \exp \left\{ - \mathcal{F}(M, N; \tau, \epsilon) \right\}, \quad (5.25)$$

де $\mathcal{F}(M, N; \tau, \epsilon)$ можна назвати “реплічною вільною енергією” і

$$\mathcal{H}_{M,N}[\Psi; \tau, \epsilon] = \int d^2r \left[\frac{1}{2} \sum_{a=1}^M \bar{\Psi}_a(\mathbf{r}) \hat{\partial} \Psi_a(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^M \mu_a (\bar{\Psi}_a(\mathbf{r}) \Psi_a(\mathbf{r})) - \frac{1}{4} g_0 \sum_{a,b=1}^M (\bar{\Psi}_a(\mathbf{r}) \Psi_a(\mathbf{r})) (\bar{\Psi}_b(\mathbf{r}) \Psi_b(\mathbf{r})) \right], \quad (5.26)$$

де

$$\mu_a = \begin{cases} (\tau + \epsilon) & \text{для } a = 1, \dots, N, \\ \tau & \text{для } a = N + 1, \dots, M. \end{cases} \quad (5.27)$$

Отриманий вираз (5.26), має форму ефективного гамільтоніану випадкової моделі Ізінґа, але з реплічно залежними масами. Як ми побачимо далі, ця різниця буде впливати на властивості розподілу внутрішньої енергії. У наступному підрозділі введемо функцію $\mathcal{F}(M, N; \tau, \epsilon)$ рівняння (5.25), використовуючи стандартні процедури підходу РГ.

5.1.3. Розрахунки РГ

Добре відомо, що теорія спірного поля з чотириферміонними взаємодіями є перенормовною у двох вимірах, і р-ня перенормування приводять до асимптотики для константи зв'язку g і маси μ (див., наприклад, роботу [224]). Перенормування реплічного гамільтоніану (5.26) можна досягти стандартним способом,

відінтегровуючи короткохвильові флуктуації у шарі $\tilde{\Lambda} < p < \Lambda$, де Λ та $\tilde{\Lambda}$ позначає вихідне і нове значення ультрафіолетового обрізання імпульсу, відповідно. Можна легко побачити, що перенормування константи зв'язку g і маси μ_a у гамільтоніані (5.26) подане наступними рівняннями (див. рівняння (4.28) у [224]):

$$\frac{d}{d\kappa} g(\kappa) = -\frac{1}{\pi} (2 - M) g^2(\kappa), \quad (5.28)$$

$$\frac{d}{d\kappa} \mu_a(\kappa) = -\frac{1}{\pi} \left(\mu_a(\kappa) - \sum_{b=1}^M \mu_b(\kappa) \right) g(\kappa), \quad (5.29)$$

де $\kappa = \ln(\Lambda/\tilde{\Lambda})$ і

$$\mu_a(\kappa) = \begin{cases} \tilde{\mu}(\kappa) & \text{for } a = 1, \dots, N \\ \mu(\kappa) & \text{for } a = N + 1, \dots, M, \end{cases} \quad (5.30)$$

з початковими умовами $g(0) = g_0$, $\tilde{\mu}(0) = (\tau + \epsilon)$ і $\mu(0) = \tau$. Підставляючи рівняння (5.30) у (5.29), ми отримуємо:

$$\frac{d}{d\kappa} \tilde{\mu}(\kappa) = -\frac{1}{\pi} \left[\tilde{\mu}(\kappa) - N\tilde{\mu}(\kappa) - (M - N)\mu(\kappa) \right] g(\kappa), \quad (5.31)$$

$$\frac{d}{d\kappa} \mu(\kappa) = -\frac{1}{\pi} \left[\mu(\kappa) - N\tilde{\mu}(\kappa) - (M - N)\mu(\kappa) \right] g(\kappa). \quad (5.32)$$

Розв'язок р-ня (5.28) є таким:

$$g(\kappa) = \frac{g_0}{1 + \frac{1}{\pi} (2 - M) g_0 \kappa}. \quad (5.33)$$

Р-ня (5.28)–(5.29) отримані в однопетлевому наближенні. Двопетлеве наближення вивчалось у роботі [434], де показано, що воно дає лише логарифмічні поправки наступного порядку до однопетлевого результату. Таким чином, оскільки ми цікавимось основною асимптотикою, продовжимо працювати в однопетлевому наближенні. Підставляючи розв'язок (5.33) у рівняння (5.31)–(5.32) у границі $M \rightarrow 0$,

можна легко знайти ¹:

$$\mu(\xi) = \left[\tau + \frac{1}{2}(\epsilon N) \ln \left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \kappa \right) \right] \Delta(\kappa), \quad (5.34)$$

$$\tilde{\mu}(\kappa) = \mu(\kappa) + \epsilon \Delta(\kappa), \quad (5.35)$$

$$\Delta(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \kappa}}. \quad (5.36)$$

Критичні властивості моделі (згідно з (5.33), $g(\kappa \rightarrow \infty) \sim 1/\kappa \rightarrow 0$) можна дослідити точно методами РГ [435, 436] (див. також [224]). Згідно стандартної процедури розрахунків РГ, сингулярні внески термодинамічних величин поблизу критичної точки отримуються з використанням тільки невзаємодіючої частини перенормованого гамільтоніану (перші два члени гамільтоніану (5.26)), у якому маса μ_a , $a = 1, \dots, M$, стає масштабно-залежним параметром, р-ня (5.30) і (5.34)–(5.36). Іншими словами, у процедурі РГ внески, які з’являються у взаємодіючих членах гамільтоніану (5.25), ефективно “абсорбуються” у масовий вклад. У цьому випадку, подібно до чистої системи (див. р-ня (5.10)–(5.11)), отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0, N; \tau, \epsilon) &= - \lim_{M \rightarrow 0} \ln \left[\mathcal{Z}(M, N; \tau, \epsilon) \right] = \\ &= -L^2 \lim_{M \rightarrow 0} \int_{|p| < 1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left[\prod_{a=1}^M \det \left(i\hat{p} + \mu_a(p) \hat{\sigma}_0 \right)^{1/2} \right] = \\ &= -L^2 \lim_{M \rightarrow 0} \int_{|p| < 1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left[\det \left(i\hat{p} + \tilde{\mu}(p) \hat{\sigma}_0 \right)^{\frac{N}{2}} \det \left(i\hat{p} + \mu(p) \hat{\sigma}_0 \right)^{\frac{M-N}{2}} \right] = \\ &= -L^2 \int_{|p| < 1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left[\det \left(i\hat{p} + \tilde{\mu}(p) \hat{\sigma}_0 \right)^{N/2} \det \left(i\hat{p} + \mu(p) \hat{\sigma}_0 \right)^{-N/2} \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

¹ Можна легко перевірити що в обох випадках: (i) розв’язуючи ці рівняння для даного скінченного значення M і потім приймаючи $M = 0$, або (ii) підставляючи $M = 0$ у праву сторону р-нь (5.31)–(5.32) і потім розв’язуючи їх, ми отримаємо однаковий результат.

де (пор. р-ня (5.2)–(5.3))

$$\hat{p} = \hat{\sigma}_1 p_x + \hat{\sigma}_2 p_y. \quad (5.38)$$

Тут маси $\mu(p)$ і $\tilde{\mu}(p)$ приймаються масштабно-залежними згідно з р-нями (5.34)–(5.36) з $\kappa = \ln(1/p)$. Прості розрахунки дають (пор. р-ня (5.11)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0, N; \tau, \epsilon) = & -L^2 \int_{|p|<1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{2} N \ln(p^2 + \tilde{\mu}^2(p)) - \frac{1}{2} N \ln(p^2 + \mu^2(p)) \right] = \\ & -\frac{1}{4\pi} L^2 N \int_0^1 dp p \ln \left[\frac{p^2 + (\mu(p) + \epsilon \Delta(p))^2}{p^2 + \mu^2(p)} \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Підставляючи сюди розв'язки (5.34)–(5.36), ми отримуємо у провідному порядку за $\epsilon \rightarrow 0$ (детальніше див. у додатку B.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0, N; \tau, \epsilon) \simeq & -\frac{1}{4\pi} L^2 N \int_0^1 dp p \ln \left[1 + \epsilon \frac{2\mu(p)\Delta(p)}{p^2 + \mu^2(p)} \right] \simeq \\ & -\frac{1}{2\pi} L^2 (\epsilon N) \int_0^1 dp p \frac{\tau + \frac{1}{2}(\epsilon N) \ln[1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)]}{[p^2 + \mu^2(p)] [1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)]} \simeq \\ & -\frac{1}{2\pi} L^2 (\epsilon N) \int_{|\tau|}^1 \frac{dp}{p} \frac{\tau + \frac{1}{2}(\epsilon N) \ln[1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)]}{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)} = \\ & E(\tau)(\epsilon N) - \frac{1}{2} E_*^2(\tau)(\epsilon N)^2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

де

$$E(\tau) = -\frac{1}{4g_0} L^2 \tau \ln \left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/|\tau|) \right), \quad (5.41)$$

$$E_*(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}g_0} L \ln \left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/|\tau|) \right). \quad (5.42)$$

Як було наголошено, вираз для вільної енергії $\mathcal{F}(0, N; \tau, \epsilon)$, отриманий у (5.40), не містить вкладів високих порядків за степенями ϵN , якими нехтують. З іншого боку цей результат не точний і обидві величини $E(\tau)$ і $E_*(\tau)$ містять логарифмічні

поправки вищих порядків форми $\ln \ln(1/\tau)$, якими знехтували у границі $\tau \ll 1$, яку ми тут розглядаємо (див. розрахунки, подані у додатку B.1, а також ремарку під р-ням (5.33)). Тому реплічну статистичну суму з правого боку р-ня (5.22) для перетворення Лапласа ми отримуємо згідно з означенням (5.25):

$$\tilde{\mathcal{Z}}(s, \tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp\{-\mathcal{F}(0, s/\epsilon; \tau, \epsilon)\} = \exp\left\{-E(\tau)s + \frac{1}{2}E_*^2(\tau)s^2\right\}. \quad (5.43)$$

Підставляючи це в обернене перетворення Лапласа (5.23), ми отримуємо:

$$P_\tau(E) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \exp\left\{-E(\tau)s + \frac{1}{2}E_*^2(\tau)s^2 + sE\right\}, \quad (5.44)$$

або

$$P_\tau(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}E_*(\tau)} \exp\left\{-\frac{(E - E(\tau))^2}{2E_*^2(\tau)}\right\}. \quad (5.45)$$

Тому флуктуації критичної внутрішньої енергії слабко невпорядкованої двовимірної моделі Ізінга від різних реалізацій безладу описуються гаусовим розподілом, який характеризується середнім значенням $E(\tau)$, поданим у рівнянні (5.41), і типовими відхиленнями $E_*(\tau)$, як подано у (5.42). Давайτε перевіримо поведінку $P_\tau(E)$ при $L \rightarrow \infty$ і для $\tau \rightarrow 0$. Якщо у цій границі розподіл (5.45) спрямовується до δ -функції, то E є самоусереднюваною величиною, а в іншому випадку не самоусереднюваною. Для фіксованого значення τ рівняння (5.41), (5.42) і (5.45) показують, що функція розподілу густини енергії $e \equiv E/L^2$ у термодинамічній границі перетворюється у δ -функцію: $P(e) = \delta(e - e_0(\tau))$ з $e_0(\tau) = -(\tau/4g_0) \ln\left(1 + \frac{2}{\pi}g_0 \ln(1/|\tau|)\right)$. Іншими словами, у цьому випадку густина енергії є самоусереднюваною. З іншого боку для скінченного L границя $\tau \rightarrow 0$ не може бути виконаною безпосередньо у формулах (5.41), (5.42) і (5.45), оскільки у цьому випадку кореляційна довжина ($\xi \sim 1/\tau$) перевищує розмір системи, що не має фізичного змісту. Тут процедура РГ мусить зупинятись на масштабах порядку розміру системи L (забезпечується тим, що ми берем границю $\tau \ll L$ у початковому гамільтоніані). Таким чином, знову отримуємо результат, поданий рівняннями (5.41), (5.42) і (5.45), але параметр τ тоді потрібно замінити на $1/L$, що робить вирази температурно незалежними, як і має бути.

Поблизу критичної точки, де з'являється критична поведінка, спричинена безладом, тобто при $\tau \ll \exp(-\pi/2g_0)$, знаходимо:

$$E(\tau) \simeq -\frac{1}{4g_0}L^2 \tau \ln \ln(1/|\tau|), \quad (5.46)$$

$$E_*(\tau) \simeq \frac{1}{2\sqrt{2g_0}}L \ln \ln(1/|\tau|). \quad (5.47)$$

При великому, але скінченному значенні розміру системи L , ми очікуємо, що псевдо-критична температура поводить як $\tau_c \sim L^{-\nu} = 1/L$, і тому

$$E_c(L) \equiv E(\tau = 1/L) \sim -\frac{1}{g_0}L \ln \ln(L), \quad (5.48)$$

$$E_c^*(L) \equiv E_*(\tau = 1/L) \sim \frac{1}{\sqrt{g_0}}L \ln \ln(L). \quad (5.49)$$

Порівнюючи (5.46), (5.48), (5.49) і (5.45), можна зробити висновок, що при достатньо великому розмірі системи $L \gg \exp(\pi/2g_0)$, критичну внутрішню енергію E можна записати як суму її середнього значення і флуктуаційної частини:

$$E \sim -\frac{1}{g_0}L \ln \ln(L) + \frac{1}{\sqrt{g_0}}L \ln \ln(L) \cdot f, \quad (5.50)$$

де випадкова величина f не масштабується з L , $f \sim 1$, і описується стандартним нормальним розподілом:

$$P_c(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}f^2\right). \quad (5.51)$$

Р-ня (5.50)–(5.51) демонструють, що при критичності внутрішня енергія двовимірного ізінгівського феромагнетика є не самоусередненою, оскільки типові значення флуктуацій від зразка до зразка, $E_c^*(L) \sim g_0^{-1/2}L \ln \ln(L)$, масштабується з розміром системи таким же чином, як і його середнє значення, $E_c(L) \sim g_0^{-1}L \ln \ln(L)$. Зазначимо, що підхід РГ, який ми використовуємо у нашому аналізі, описує лише сингулярну частину термодинамічних функцій, і тому не можна сказати нічого про поведінку несингулярної фонової частини. Таким чином, сингулярна частина внутрішньої енергії визначається розподілом (5.45).

5.1.4. Теплоємність

Тепер ми звернемось до дослідження поведінки теплоємності. Для цього, повторимо ті ж кроки, які зроблені у попередніх підрозділах 5.1.1 і 5.1.2 для другої похідної вільної енергії:

$$C[\tau; \delta\tau] = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} F[\tau; \delta\tau]. \quad (5.52)$$

У термінах формалізму реплік? замість рівнянь (5.17)–(5.21): отримуємо

$$C[\tau; \delta\tau] = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} (F[\tau + \epsilon; \delta\tau] + F[\tau - \epsilon; \delta\tau] - 2F[\tau; \delta\tau]), \quad (5.53)$$

так що

$$\exp\{\epsilon^2 C[\tau; \delta\tau]\} = Z[\tau + \epsilon; \delta\tau] Z[\tau - \epsilon; \delta\tau] Z^{-2}[\tau; \delta\tau] \quad (5.54)$$

і

$$\int dC \mathcal{P}_\tau(C) \exp(\epsilon^2 N C) = \lim_{M \rightarrow 0} \overline{Z^N[\tau + \epsilon; \delta\tau] Z^N[\tau - \epsilon; \delta\tau] Z^{M-2N}[\tau; \delta\tau]} \equiv \lim_{M \rightarrow 0} \mathcal{Z}_c(M, N; \tau, \epsilon), \quad (5.55)$$

де $\mathcal{P}_\tau(C)$ – функція розподілу імовірності теплоємності. Відповідно, замість рівнянь (5.22)–(5.23), маємо:

$$\int dC \mathcal{P}_\tau(C) \exp(s C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow 0} \mathcal{Z}_c(M, s/\epsilon^2; \tau, \epsilon) \equiv \tilde{\mathcal{Z}}_c(s, \tau), \quad (5.56)$$

з $s = \epsilon^2 N$ у цьому випадку і

$$\mathcal{P}_\tau(C) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \tilde{\mathcal{Z}}_c(s, \tau) \exp(-s C), \quad (5.57)$$

де

$$\mathcal{Z}_c(M, N; \tau, \epsilon) = \int \mathcal{D}\Psi \exp\left\{-\mathcal{H}_{M,N}^{(c)}[\Psi; \tau, \epsilon]\right\} \equiv \exp\{-\mathcal{F}_c(M, N; \tau, \epsilon)\}, \quad (5.58)$$

і реплічний гамільтоніан $\mathcal{H}_{M,N}^{(c)}[\Psi; \tau, \epsilon]$ визначається правою частиною р-ня (5.26) з

$$\mu_a = \begin{cases} (\tau + \epsilon) & \text{for } a = 1, \dots, N, \\ (\tau - \epsilon) & \text{for } a = N + 1, \dots, 2N, \\ \tau & \text{for } a = 2N + 1, \dots, M. \end{cases} \quad (5.59)$$

Перенормування константи зв'язку g і маси μ_a цього гамільтоніану подано у рівняннях (5.28), (5.29), де

$$\mu_a = \begin{cases} \mu_1(\kappa) & \text{for } a = 1, \dots, N, \\ \mu_2(\kappa) & \text{for } a = N + 1, \dots, 2N, \\ \mu(\kappa) & \text{for } a = 2N + 1, \dots, M, \end{cases} \quad (5.60)$$

з початковими умовами $\mu_1(0) = (\tau + \epsilon)$, $\mu_2(0) = (\tau - \epsilon)$ і $\mu(0) = \tau$. Можна легко побачити, що у границі $M \rightarrow 0$, сума

$$\lim_{M \rightarrow 0} \left(\sum_{a=1}^M \mu_a(\kappa) \right) = N \left(\mu_1(\kappa) + \mu_2(\kappa) - 2\mu(\kappa) \right) \equiv 0, \quad (5.61)$$

так що розв'язки рівнянь РГ (5.28)–(5.29) для мас $\mu_1(\kappa)$, $\mu_2(\kappa)$ і $\mu(\kappa)$ виявляються ефективно незв'язані (що відрізняється від ситуації для внутрішньої енергії, див. р-ня (5.34)–(5.36)):

$$\mu_1(\kappa) = \frac{\tau + \epsilon}{\sqrt{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \kappa}}, \quad (5.62)$$

$$\mu_2(\kappa) = \frac{\tau - \epsilon}{\sqrt{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \kappa}}, \quad (5.63)$$

$$\mu(\kappa) = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \kappa}}. \quad (5.64)$$

Відповідно, замість р-ня (5.39), отримуємо

$$\mathcal{F}_c(0, N; \tau, \epsilon) = -L^2 \int_{|p| < 1} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{2} N \ln(p^2 + \mu_1^2(p)) + \frac{1}{2} N \ln(p^2 + \mu_2^2(p)) - N \ln(p^2 + \mu^2(p)) \right] = \quad (5.65)$$

$$-\frac{1}{4\pi} L^2 N \int_0^1 dp p \ln \left[\frac{(p^2 + \mu_1^2(p))(p^2 + \mu_2^2(p))}{(p^2 + \mu^2(p))^2} \right]. \quad (5.66)$$

Підставляючи сюди розв'язки (5.62)–(5.64), отримуємо у провідному порядку за $\epsilon \rightarrow 0$ (пор. р-ня (5.39)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(0, N; \tau, \epsilon) &\simeq -\frac{1}{\pi} L^2 \epsilon^2 N \int_0^1 \frac{dp p}{(p^2 + \mu^2(p)) \left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)\right)} \simeq \\ &-\frac{1}{\pi} L^2 \epsilon^2 N \int_{|\tau|}^1 \frac{dp}{p} \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)\right)} = \\ &-\epsilon^2 N C(\tau), \end{aligned} \quad (5.67)$$

де

$$C(\tau) = \frac{1}{2g_0} L^2 \ln \left(1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/|\tau|)\right). \quad (5.68)$$

Підставляючи це в обернене претворення Лапласа (5.57), отримуємо:

$$\mathcal{P}_\tau(C) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \exp\{C(\tau) s - C s\} = \delta(C - C(\tau)). \quad (5.69)$$

Цей результат показує, що на відміну від сингулярної частини внутрішньої енергії теплоємність поблизу критичної точки є самоусереднюваною величиною. Зокрема, при великому, але скінченному розмірі системи $L \gg L_* \sim \exp(2/\pi g_0)$ у критичній точці при $\tau_c \sim 1/L$, згідно р-ня (5.68) критична теплоємність $C(L)$ масштабується з розміром системи як

$$C(L) \sim \frac{1}{2g_0} L^2 \ln \ln(L). \quad (5.70)$$

Зауважте, що розподіл (5.69) описує тільки сингулярну частину теплоємності, подібно до розподілів (5.45) та (5.51), які описують сингулярну частину внутрішньої енергії. Власне кажучи, сингулярна частина “реплічної вільної енергії”, представлена у рівнянні (5.67), є лінійною за реплічним параметром $s = \epsilon^2 N$. Формально, обернене перетворення Лапласа перетворює цей результат у δ -функцію (5.69), що може бути оманливим, оскільки теплоємність системи містить також регулярну частину, що не є сингулярною у границі $\tau \rightarrow 0$. Як ми вже згадували,

ця остання частина є поза контролем у представленому підході РГ, однак вона також є випадковою величиною. Згідно центральної граничної теореми ця регулярна частина є нормально розподілена з середнім значенням, пропорційним до об'єму системи ($\sim L^2$ у представленому випадку) і з дисперсією, пропорційною квадратному кореню об'єму системи ($\sim \sqrt{L^2} = L$ у представленому випадку). Іншими словами, регулярну частину теплоємності можна представити як $C_0 L^2 + C_* L \zeta$, де випадкова змінна ζ розподілена за нормальним законом з нульовим середнім і одиничною дисперсією, а значення C_0 і C_* не змінюються з L при $L \rightarrow \infty$. Відповідно у реплічному представленні це дає два додаткові вклади до реплічної вільної енергії: на додаток до виразу, представленого у рівнянні (5.67), є ще два вклади $C_0 L^2 s + (C_* L)^2 s^2$ (де $s = \epsilon^2 N$). Тому, після оберненого перетворення Лапласа δ -функція (5.69) замінюється Гаусовим розподілом із середнім значенням $C(\tau) + C_0 L^2$, де $C(\tau)$ подане у рівнянні (5.68), і дисперсією $C_* L$. У границі $L \rightarrow \infty$ це дає таку поведінку теплоємності:

$$C(\tau = 1/L) \sim L^2 \ln \ln(L) \gg C_0 L^2 \gg C_* L. \quad (5.71)$$

Відповідно, у цій границі розподіл теплоємності (яка включає регулярну і сингулярну частину) перетворюється у δ -функцію, локалізовану на $C(L) \sim L^2 \ln \ln(L)$, і означає самоусереднення.

5.2. Двовимірна модель Ізінґа зі скорельованим безладом

У цьому підрозділі ми розглядаємо вплив далекосяжно скорельованого безладу на критичні властивості двовимірної моделі Ізінґа, використовуючи представлення моделі за допомогою теорії двовимірних ферміонів Дірака. Це було зроблено для однопетлевого порядку у роботах [437, 438]. Ми продовжуємо ці розрахунки до двопетлевого порядку, а також розраховуємо усереднений квадрат спін-спінової кореляційної функції у найнижчому порядку, використовуючи бозонізацію.

5.2.1. Модель

Тут, ми слідуємо [275] і вводимо дві копії двовимірної системи Ізінга з гамільтоніаном (5.1), які описуються ферміонами Майорани Ψ_1 та Ψ_2 , відповідно. Потім ми їх комбінуємо у формі комплексного ферміону Дірака $\psi = (\Psi_1 + i\Psi_2)/\sqrt{2}$. Відповідний гамільтоніан запишеться:

$$\mathcal{H}_D = \int d^2r \bar{\psi}(\mathbf{r}) \left[\hat{\partial} + \mu(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (5.72)$$

Тут $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 + \delta\mu(\mathbf{r})$ з $\mu_0 \sim \tau$. Зазначте, що $\bar{\psi}$ і ψ є незалежними. Змінюючи змінну $\bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi}\sigma_z$, можна побачити, що дія (5.72) також описує двовимірні ферміони Дірака з безладом типу випадкової маси [439].

Ми приймаємо, що $\delta\mu(\mathbf{r})$ є гаусова випадкова змінна з нульовим середнім і дисперсією, що спадає з відстанню $|\mathbf{r}| = r$ за степеневим законом:

$$\overline{\delta\mu(\mathbf{r})\delta\mu(0)} = g(|\mathbf{r}|) \sim r^{-a}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.73)$$

Надалі ми будемо використовувати регуляризацію за вимірністю. Для цього доведеться розглянути задачу при довільному значенні простору d і замінити матриці Паулі алгеброю Кліффорда, представлену матрицями γ_i , що задовольняють антикомутаційні співвідношення [7]:

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (5.74)$$

Щоб усереднити за безладом, використовуємо реплічний трюк, ввівши N копій оригінальної системи [107]. Отримана реплічна дія запишеться:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -i \sum_{\alpha=1}^N \int d^d r \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) (\hat{\partial} + \mu_0) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \int d^d r d^d r' g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\beta}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Властивості оригінальної системи із замороженим безладом тоді можна отримати, взявши границю $N \rightarrow 0$. Зручно зафіксувати нормування розподілу безладу (5.73)

у Фур'є-просторі. Ми приймаємо потенціал безладу, розподілений за Гаусовим законом з нульовим середнім і корелятором

$$\overline{\delta\mu(\mathbf{k})\delta\mu(\mathbf{k}')} = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') g(|\mathbf{k}|), \quad (5.76)$$

де Фур'є-образ корелятора є таким:

$$g(|\mathbf{k}|) = u_0 + v_0 k^{a-d}. \quad (5.77)$$

Тут u_0 and v_0 – це неперенормовані константи зв'язку. Далекосяжна константа зв'язку v_0 є суттєвою в РГ сенсі (relevant) тільки для $a < d$. Зазначимо, що, якщо нехтувати короткосяжним вкладом u_0 у рівнянні (5.77), він зрештою згенерується потоком РГ. Неперенормований пропагатор дії (5.75) можна записати як

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{k}) \psi_\beta(-\mathbf{k}) \rangle_0 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\gamma_j k_j + i\mu_0}{k^2 + \mu_0^2}. \quad (5.78)$$

5.2.2. Перенормування моделі

Використовуючи неперенормований пропагатор (5.78), можна розрахувати кореляційні функції для гамільтоніану (5.75), розглядаючи як збурення u_0 і v_0 . Інтеграли, що входять у ряди теорії збурень, виявляються розбіжними в ультрафіолетовій границі при $d = 2$. Щоб зробити теорію скінченою, ми використовуємо регуляризацию за вимірністю [336] і обчислюємо всі інтеграли в $d = 2 - \varepsilon$. Слідуючи роботам [103, 438], проводимо подвійний розклад за $\varepsilon = 2 - d$ і $\delta = 2 - a$, так що усі розбіжності перетворюються у полюси за ε і δ , а відношення ε/δ залишається скінченим. У рамках схеми мінімального віднімання ми не включаємо ці скінченні відношення в контрчлени, вибираючи їх так, щоб вони мали тільки полюсну частину. Ми цікавимося випадком $0 < a < 2$, тобто $0 < \delta < 2$, однак, потрібно з обережністю зважати на чисельні оцінки для $\delta > 1$, що розраховуються з використанням результатів, отриманих пертурбативно за δ . Ми визначаємо перенормовані поля ψ , $\bar{\psi}$, масу μ і безрозмірні константи зв'язку u та v таким чином, що усі полюси можна заховати в множники перенормування Z_ψ , Z_μ , Z_u і

Z_v , які роблять скінченними кореляційні функції, обчислені за допомогою перенормованого гамільтоніану

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R = & \sum_{\alpha=1}^N \int_k \bar{\psi}_\alpha(-\mathbf{k}) (Z_\psi \gamma_j k_j - Z_\mu i\mu) \psi_\alpha(\mathbf{k}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \int_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} [\kappa^\varepsilon Z_u u + \kappa^\delta Z_v v |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^{a-d}] \\ & \times \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{k}_1) \psi_\alpha(\mathbf{k}_2) \bar{\psi}_\beta(\mathbf{k}_3) \psi_\beta(-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (5.79)$$

де $\int_k := \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}$, і ми ввели масштаб перенормування κ . Оскільки перенормований гамільтоніан отримується з неперенормованого шляхом перемасштабування полів

$$\psi_0 = Z_\psi^{1/2} \psi, \quad \bar{\psi}_0 = Z_\psi^{1/2} \bar{\psi}, \quad (5.80)$$

неперенормовані та перенормовані параметри пов'язані:

$$\mu_0 = Z_\mu Z_\psi^{-1} \mu, \quad (5.81)$$

$$u_0 = \kappa^\varepsilon Z_u Z_\psi^{-2} u, \quad v_0 = \kappa^\delta Z_v Z_\psi^{-2} v, \quad (5.82)$$

де ми включили $K_d/2$ у перепозначення u і v . $K_d = 2\pi^{d/2}/((2\pi)^d \Gamma(d/2))$ – це поверхня d -вимірної одиничної сфери, поділена на $(2\pi)^d$. Перенормована $\mathcal{N}$ -точкова вершинна функція $\Gamma^{(\mathcal{N})}$ пов'язана з неперенормованою $\overset{\circ}{\Gamma}^{(\mathcal{N})}$ за допомогою

$$\overset{\circ}{\Gamma}^{(\mathcal{N})}(\mathbf{k}_i; \mu_0, u_0, v_0) = Z_\psi^{-\mathcal{N}/2} \Gamma^{(\mathcal{N})}(\mathbf{k}_i; \mu, u, v, \kappa). \quad (5.83)$$

Для обчислення перенормованих констант достатньо перенормувати двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}$ і чотириточкову вершинну функцію $\Gamma^{(4)}$. Ми покладаємо, що вони скінченні при $\mu = \kappa$ і знаходимо перенормовані константи, використовуючи схему мінімального віднімання [337]. З цією метою зручно розбити чотириточкову функцію на короткосяжну (short-range, SR) та далекосяжну (long-range, LR) частини:

$$\Gamma^{(4)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \Gamma_u^{(4)}(\mathbf{k}_i) + \Gamma_v^{(4)}(\mathbf{k}_i) |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^{a-d}. \quad (5.84)$$

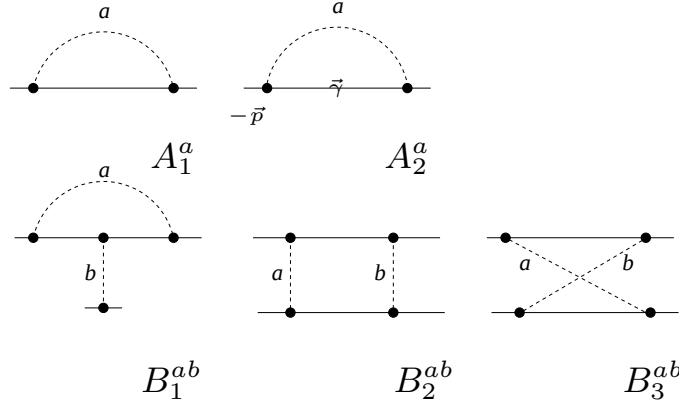


Рис. 5.1. Однопетлеві діаграми, що дають вклад у двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}$ (перший рядок) та чотириточкову вершинну функцію $\Gamma^{(4)}$ (другий рядок) у реплічній границі $N \rightarrow 0$. Суцільна лінія відповідає пропагатору (5.78), а штрихові лінії – вершині (5.77), спричиненій безладом, що розділена на SR частину та LR частину. Індеси a, b набувають значень 0 або 1 залежно від того, чи штрихова лінія означає u -вершину або v -вершину.

Перенормовані константи визначаються з умови, що $\Gamma_u^{(4)}(0; \mu = \kappa)$ та $\Gamma_v^{(4)}(0; \mu = \kappa)$ є скінченними.

Оскільки неперенормована вершинна функція не залежить від масштабу перенормування κ , перенормована вершинна функція задовольняє рівняння РГ:

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta_u(u, v) \frac{\partial}{\partial u} - \beta_v(u, v) \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\mathcal{N}}{2} \eta_\psi(u, v) - \gamma(u, v) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \Gamma^{(\mathcal{N})}(\mathbf{k}_i; \mu, u, v, \kappa) = 0, \quad (5.85)$$

де ми ввели скейлінгові функції:

$$\beta_u(u, v) = - \kappa \frac{\partial u}{\partial \kappa} \Big|_0, \quad \beta_v(u, v) = - \kappa \frac{\partial v}{\partial \kappa} \Big|_0, \quad (5.86)$$

$$\eta_\psi(u, v) = -\beta_u(u, v) \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial u} - \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial v}, \quad (5.87)$$

$$\eta_\mu(u, v) = -\beta_u(u, v) \frac{\partial \ln Z_\mu}{\partial u} - \beta_v(u, v) \frac{\partial \ln Z_\mu}{\partial v}, \quad (5.88)$$

$$\gamma(u, v) = \eta_\mu(u, v) - \eta_\psi(u, v). \quad (5.89)$$

Індекс “0” означає похідні при фіксованих значеннях u_0, v_0 і μ_0 .

Критична поведінка системи контролюється стійкою НТ потоку РГ, яка ви-

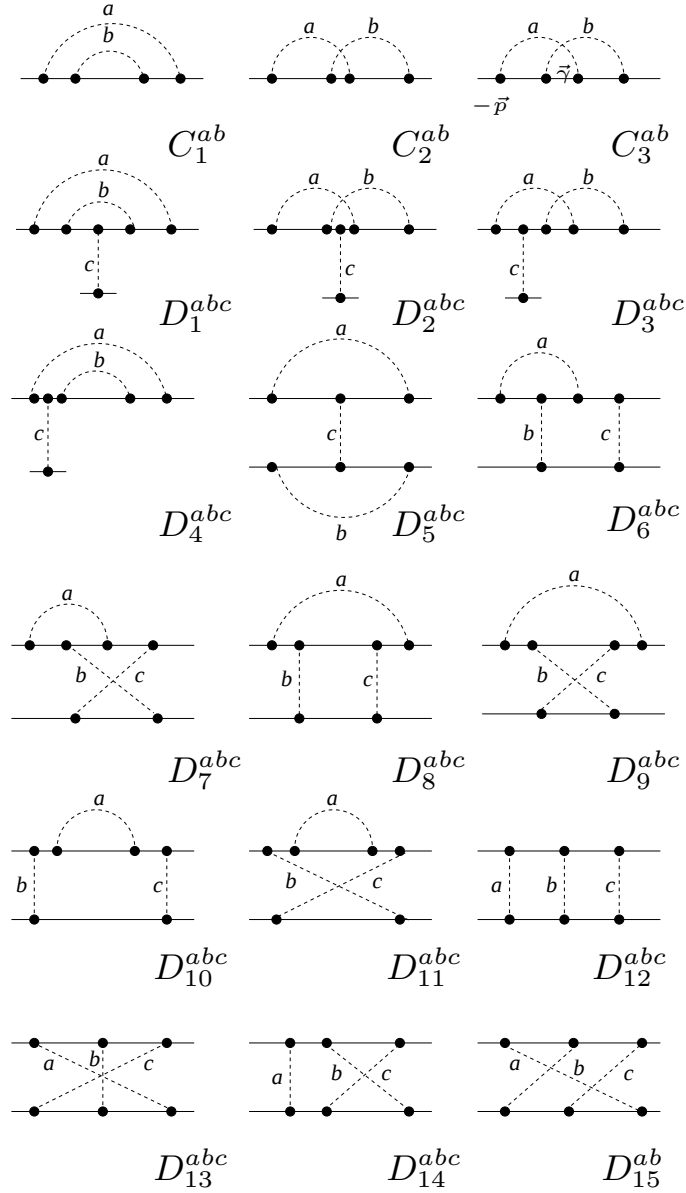


Рис. 5.2. Двопетлові діаграми, що дають вклад у двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}$ (перший рядок) та чотириточкову вершинну функцію $\Gamma^{(4)}$ у реплічній границі $N \rightarrow 0$. Індеси a, b, c набувають значень 0 або 1 залежно від того, чи штрихова лінія означає u -вершину або v -вершину.

значається як одночасний нуль β -функцій (5.86):

$$\beta_u(u^*, v^*) = 0, \quad \beta_v(u^*, v^*) = 0. \quad (5.90)$$

Стійкість НТ можна визначити з власних значень матриці стійкості

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_u(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \beta_u(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta_v(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \beta_v(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (5.91)$$

Якщо НТ є стійкою, то обидва власні значення, розраховані для цієї точки (5.90), мають негативні дійсні частини. Критичний показник кореляційної довжини отримується як

$$\frac{1}{\nu} = 1 + \gamma(u^*, v^*), \quad (5.92)$$

а аномальна скейлінгова вимірність полів ψ і $\bar{\psi}$ як

$$d_\psi = \frac{1}{2}[d - 1 + \eta_\psi(u^*, v^*)]. \quad (5.93)$$

Наприклад, у критичній точці маємо

$$\overline{\langle \bar{\psi}(r)\psi(0) \rangle} \sim r^{-2d_\psi}. \quad (5.94)$$

5.2.3. Нерухомі точки, їхня стійкість і скейлінгова поведінка

Перенормування у двопетловому порядку

Для того, щоб перенормувати теорію (5.79) до двопетлевого порядку нам потрібні діаграми, що дають вклад у дво- та чотириточкові вершинні функції $\Gamma^{(2)}(p)$ і $\Gamma^{(4)}(p_i = 0)$ у реплічній границі $N \rightarrow 0$, показані на рисунках 5.1 і 5.2. В однопетловому наближенні є дві діаграми, що дають вклад у двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}(p)$, кожна з яких розділена на дві частини A_1^a і A_2^a . Перша частина розраховується при нульовому зовнішньому імпульсі, а друга частина – лінійна за зовнішнім імпульсом $\vec{p}$. Те ж саме застосовується до двопетлевих діаграм C_2^{ab} і C_3^{ab} . Діаграми, що дають вклад до чотириточкової функції, розраховуються при

нульових зовнішніх імпульсах і розкладаються за малими параметрами ε і δ , зберігаючи співвідношення $\frac{\varepsilon}{\delta}$ скінченним. У рамках схеми мінімального віднімання нам потрібні тільки полюси за ε і δ для двопетлевих діаграм, тоді як для однопетлевих діаграм потрібно зберігати також вклади, скінченні в границі $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Полюси діаграм, показаних на Рис. 5.1 і Рис. 5.2, обчислюються так, як подано у Додатку B.3 і їхні значення наведені у Таблицях B.1 і B.2, B.3 відповідно. Вершинні функції $\Gamma^{(2)}(p)$, $\Gamma_u^{(4)}(p_i = 0)$ і $\Gamma_v^{(4)}(p_i = 0)$ розраховуються у Додатку B.2. Використовуючи ці функції, знайдемо Z -фактори:

$$\begin{aligned} Z_u &= 1 + \frac{4u}{\varepsilon} + \frac{4v}{\delta} - u^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{16}{\varepsilon^2} \right) + \frac{4v^3}{u(\varepsilon - 3\delta)} \\ &\quad - uv \left(\frac{28}{\delta + \varepsilon} - \frac{32}{\delta\varepsilon} - \frac{8}{\delta} \right) - v^2 \left(\frac{10}{\delta} - \frac{4\varepsilon}{\delta^2} - \frac{16}{\delta^2} \right), \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$Z_v = 1 + \frac{4u}{\varepsilon} + \frac{4v}{\delta} + \frac{16u^2}{\varepsilon^2} - \frac{4v^2}{\delta} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{4}{\delta} \right) - \frac{8uv}{\delta + \varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{4}{\delta} - \frac{4}{\varepsilon} \right), \quad (5.96)$$

$$Z_\mu = 1 + \frac{2u}{\varepsilon} + \frac{2v}{\delta} + \frac{6u^2}{\varepsilon^2} + v^2 \left(\frac{2\varepsilon}{\delta^2} + \frac{6}{\delta^2} - \frac{2}{\delta} \right) + 4uv \left(\frac{3}{\delta\varepsilon} + \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta + \varepsilon} \right), \quad (5.97)$$

$$Z_\psi = 1 + \frac{u^2}{\varepsilon} + \frac{4uv\varepsilon}{\delta(\delta + \varepsilon)} + \frac{v^2(2\varepsilon - \delta)}{\delta^2}. \quad (5.98)$$

Для SR безладу було доведено, що внесок, який приходить від ненульової маси в чисельнику неперенормованого пропагатора (5.78), зникає, тому його можна зігнорувати з самого початку [440]. Ми знайшли, що це також стосується і випадку LR-безладу принаймні до двопетлевого порядку, тобто внески в кутові дужки у Таблицях B.1, B.2 і B.3 в суті дають нуль у рівняннях (5.95)–(5.98). З рівнянь (5.95)–(5.98) з використанням визначень (5.86)–(5.89) отримаємо двопетлеві вирази для β -функцій:

$$\beta_u(u, v) = \varepsilon u - 4u(u+v) + 8u(u+v)^2 + 4v(u+v)^2, \quad (5.99)$$

$$\beta_v(u, v) = \delta v - 4v(u+v) + 4v(u+v)^2, \quad (5.100)$$

і для інших скейлінгових функцій, що дають критичні показники:

$$\eta_\psi(u, v) = -2u^2 + 2v^2 - \frac{4\varepsilon}{\delta}uv - \frac{4\varepsilon}{\delta}v^2, \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned}\eta_\mu(u, v) &= -2u - 2v + 4uv + 4v^2 - \frac{4\varepsilon}{\delta}uv - \frac{4\varepsilon}{\delta}v^2, \\ \gamma(u, v) &= -2(u + v) + 2(u + v)^2.\end{aligned}\tag{5.102}$$

Зазначимо, що відношення $\frac{\varepsilon}{\delta}$ є скінченним в рамках нашої регуляційної схеми. Хоча воно присутнє у скейлінгових функціях η_μ та η_ψ , усі ці відношення “магічно” самознищуються у β - та γ -функціях, таким чином, що коефіцієнти у цих функціях просто цілі константи.

Розклади за малими ε та δ

Тепер ми аналізуємо потоки РГ, використовуючи розклади за малими ε та δ . β -функції мають три нерухомі точки: гаусову НТ, короткосяжно скорельовану НТ, і далекосяжно скорельовану НТ.

(i) *Гаусова НТ*, яка задається

$$u_G^* = v_G^* = 0,\tag{5.103}$$

описує чисту двовимірну модель Ізінґа з показником кореляційної довжини $\nu_p = 1/(1+\gamma(u_G^*, v_G^*)) = 1$. Слідуючи [275], можна оцінити сингулярність вільної енергії. Використовуючи гамільтоніан (5.72), статистичну суму моделі Ізінґа можна виразити як $Z_{\text{Ising}}^2 = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\mathcal{H}_D} \sim \det [\hat{\partial} + \mu_0]$ з $\mu_0 \equiv \tau$. Застосовуючи рівність $\ln \det = \text{Tr} \ln$, знаходимо $F_{\text{Ising}} \sim \tau^2 \ln \tau$, так що $C \sim \ln(\tau^{-1})$ і $\alpha_p = 0$.

(ii) *Короткосяжно скорельована невпорядкована НТ (SR)*, задана

$$u_{SR}^* = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon^2}{8}, \quad v_{SR}^* = 0,\tag{5.104}$$

співпадає з гаусовою НТ при $d = 2$. Це забезпечує, що короткосяжний безлад є гранично (не)суттєвим у сенсі РГ у двох вимірах. Як наслідок, це призводить лише до логарифмічних поправок до скейлінгової поведінки чистої двовимірної моделі. Двопетлеві логарифмічні поправки розраховуються у додатку В.4. Для кореляційної довжини та теплоємності ми знаходимо

$$\xi \sim \tau^{-1} (\ln \tau^{-1})^{1/2} \left[1 + o\left(\frac{\ln \ln \tau^{-1}}{\ln \tau^{-1}}\right) \right],\tag{5.105}$$

$$C_{\text{sing}} \sim \ln \ln \tau^{-1} \left[1 + o\left(\frac{1}{\ln \tau^{-1}}\right) \right]; \quad (5.106)$$

тобто, субдомінантні двопетлеві поправки зникають.

Гаусова НТ стає нестійкою по відношенню до далекосяжно скорельованого безладу для $\delta > 0$. Це відтворює узагальнений критерій Гаріса [103], який стверджує, що критична поведінка чистої системи модифікується далекосяжно скорельованим безладом, якщо $\nu_p < 2/a$. Справді, підставляючи $\nu_p = 1$ в останнє співвідношення, отримуємо $a < 2$, що означає $\delta > 0$.

(iii) Невпорядкована НТ далекосяжно скорельованого безладу (LR) записується

$$u_{LR}^* = \frac{\delta^3}{16(\delta - \varepsilon)}, \quad v_{LR}^* = \frac{\delta}{4} - \frac{\delta^2 \varepsilon}{16(\delta - \varepsilon)}. \quad (5.107)$$

У двох вимірах LR зводиться до

$$u_{LR}^* = \frac{\delta^2}{16} + O(\delta^3), \quad v_{LR}^* = \frac{\delta}{4} + O(\delta^3). \quad (5.108)$$

Ми проведемо аналіз стійкості LR. Два власних значення матриці стійкості (5.91), обчислені для LR (5.108) при $d = 2$, показані на рис. 5.3 як функції δ . Обидва власних значення є комплексно-спряженими з від'ємними дійсними частинами для $0 < \delta < \delta_{\text{max}}$, де LR стійка. Не існує стійких нерухомих точок для $\delta > \delta_{\text{max}}$. Розклад власних значень за малими δ дає

$$\omega_{1,2}^{(LR)} = -\delta + \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3) \pm i\sqrt{\frac{\delta}{2}} \left(\delta + \frac{\delta^2}{4} + O(\delta^3) \right). \quad (5.109)$$

Цілком просто побачити, що значення δ_{max} , яке випливає з розкладу (5.109) - це $\delta_{\text{max}} = 2$, тоді як чисельна діагоналізація матриці стійкості (5.91) дає $\delta_{\text{max}} \approx 1.005$ (для більш детальної інформації див. Рис. 5.3). Цікаво отримати точніше значення δ_{max} , застосувавши відому техніку пересумовування [96] для двох рядів (5.99), (5.100) при фіксованих ε , δ [164, 341, 342]. Проте при $d = 2$ (наприклад, у $\varepsilon = 0$) провідний внесок у першій β -функції (5.99) зникає, і ряд стає занадто коротким, щоб дозволити надійне пересумовування.

Таким чином, поряд з тим, що відповідно до узагальненого критерію Гаріса LR може бути стійкою $\delta > 0$, ми знайшли існування верхньої границі $\delta_{\max}$ для її стійкості. Дійсно, розумні значення δ лежать між 0 і 2, але $\delta = 1$ відповідає випадку лінійних дефектів, випадковим чином орієнтованих у просторі [441]. Можна стверджувати, що ці лінії можуть розбити двовимірну систему на незв'язані домени: це аргумент, який також може бути застосований до моделі Маккоя і Ву [144]. Тому значення $\delta > 1$ треба трактувати з обережністю, оскільки сильні кореляції можуть дестабілізувати LR і різко змінити критичну поведінку. Оскільки ми не можемо визначити будь-якої стійкої та пертурбативної за безладом НТ для $\delta > \delta_{\max}$, то можливі два сценарії: (а) розмивання різкого переходу, що виявляється у втіканні потоку РГ; (б) новий клас універсальності контролюється непертурбативною НТ безмежного безладу. В останньому випадку можна очікувати, що суттєвими стають рідкісні регіони, які спричиняють різницю між типовою та середньою кореляціями: кореляційна функція між двома довільними спінами на великій відстані x , описується широким розподілом [442]. Таким чином, типова кореляційна функція дуже відрізняється від усередненої, над якою домінують рідкісні сильно зв'язані області спінів з атиповими великими кореляціями. В результаті, може бути дві кореляції довжини, типова та усереднена, і тому два критичних показника $\nu_{\text{typ}} \leq \nu_{\text{avr}}$.

Підставляючи НТ (5.108) у р-ня (5.92) і (5.102), ми отримуємо показник кореляційної довжини

$$\frac{1}{\nu} = 1 - \frac{\delta}{2} + O(\delta^3), \quad (5.110)$$

де поправки другого порядку за δ “магічно” самознищуються. Справді, порівнюючи (5.100) і (5.102), можна спостерігати, що принаймні у двопетлевому порядку

$$\beta_v(u, v) = v(\delta + 2\gamma(u, v)). \quad (5.111)$$

Підставляючи сюди будь-яку НТ і враховуючи р-ня (5.92), ми отримуємо:

$$v^*(\delta + 2(\nu^{-1} - 1)) = 0. \quad (5.112)$$

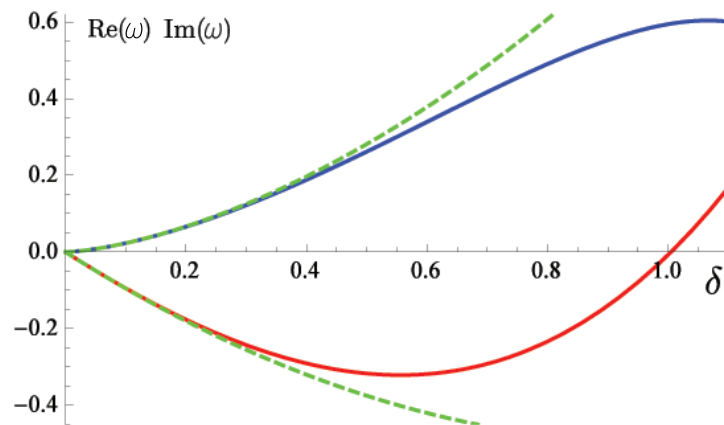


Рис. 5.3. Власні значення матриці стійкості у двох вимірах ($d = 2$) як функція δ . Існує два комплексно-спряжених власних значення: нижня червона суцільна крива представляє дійсну частину, а верхня блакитна крива – уявну. Штрихові лінії – це результати розкладу в ряд (5.109).

Цей результат узгоджується з припущенням робіт [103, 177], що рівність

$$\nu = 2/(2 - \delta) = 2/a \quad (5.113)$$

є точною при LR FP з $v^* \neq 0$.

5.2.4. Спін-спінові кореляції при критичності: бозонізація

Зосередьмо увагу на скейлінговій поведінці двоточної кореляційної функції при критичності. Позначимо кореляційну функцію в заданій реалізації безладу $G(r)$ і введемо набір критичних показників:

$$\overline{G(r)^K} \sim r^{-\eta_K}. \quad (5.114)$$

У відсутності мультифрактальності можна очікувати $\eta_K = K\eta_1$ і $\eta_1 \equiv \eta$ є стандартним показником парної кореляційної функції. Оскільки відповідність між спіновими операторами у моделі Ізінга і ферміонами Майорани є нелокальною, запис кореляційної функції у термінах ферміонів є складним і добре визначеним тільки у двох вимірах. Тому аномальну вимірність, розраховану у роботі [437] зі скейлінгу двоточної ферміонної кореляційної функції, не можна прямо пов'язати з критичним показником η . Тим не менше, використання представлення Дірака

дозволяє вивести компактну формулу для квадрату кореляційної функції [275]:

$$G(r)^2 = \left\langle \exp \left[i\pi \int_0^r dr' \bar{\psi}(r') \psi(r') \right] \right\rangle, \quad (5.115)$$

де усереднення виконується за гамільтоніаном Дірака (5.72). Прямий розрахунок спін-спінової кореляційної функції з ферміонного представлення (5.115) був зроблений лише для чистої системи і включає громіздку алгебру [224]. Простіший спосіб отримати доступ до спін-спінової кореляційної функції полягає у тому, щоб використовувати бозонізацію. Остання переводить двовимірні ферміони Дірака (5.72) у теорію синус-Гордона [7, 275]:

$$\mathcal{H}_{SG} = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi(r))^2 - \frac{\Lambda \mu(r)}{\pi} \cos [\sqrt{4\pi} \varphi(r)] \right\}, \quad (5.116)$$

де Λ – ультрафіолетове обрізання. Двоточкова спінова кореляційна функція стає двоточною кореляційною функцією оператора:

$$\mathcal{O}(r) = \sin \sqrt{\pi} \varphi(r). \quad (5.117)$$

Зазначимо, що ми бозонізуємо ферміони Дірака, тому цей метод дає не двоточкову функцію, а квадрат двоточної функції

$$G(r)^2 = \langle \mathcal{O}(r) \mathcal{O}(0) \rangle_{SG}, \quad (5.118)$$

оскільки ферміони Дірака дають два набори ферміонів Майорани, кожен з яких, описує двовимірну модель Ізінга. Усереднення у (5.118) проводиться за гамільтоніаном (5.116). Після усереднення за безладом з допомогою методу реплік отримуємо:

$$\overline{G(r)^2} = \overline{\langle \mathcal{O}(r) \mathcal{O}(0) \rangle_{SG}}. \quad (5.119)$$

Щоб дістати пертурбативний розклад для кореляційних функцій оператора (5.117), потрібно розрахувати кореляційні функції експонент з полем $\varphi(r)$:

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j \varphi(r_j)} \right\rangle_0 = \int D\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^2r (\nabla \varphi(r))^2 + \sum_{j=1}^N i\beta_j \varphi(r_j) \right]. \quad (5.120)$$

Можна показати [7], що ця кореляційна функція не зникає тільки для $\sum_{j=1}^N \beta_j = 0$ і задається

$$\left\langle \prod_{j=1}^N e^{i\beta_j \varphi(r_j)} \right\rangle_0 = \prod_{j < k} (\Lambda |r_j - r_k|)^{\beta_j \beta_k / (2\pi)}. \quad (5.121)$$

Для чистої двовимірної моделі Ізінга у критичності, тобто при $\mu(r) = 0$, знаходимо:

$$G(r)^2 = \langle \mathcal{O}(r) \mathcal{O}(0) \rangle_0 = \frac{1}{2} \left\langle e^{i\sqrt{\pi}(\varphi(r) - \varphi(0))} \right\rangle = \frac{1}{2} (\Lambda r)^{-1/2}, \quad (5.122)$$

а тому $\eta_{\text{pure}} = 1/4$ для чистої системи. Тепер розрахуємо першу поправку за безладом. Застосовуючи реплічний трюк до гамільтоніану (5.116), отримуємо реплічний гамільтоніан:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \int d^2 r (\nabla \varphi_{\alpha}(r))^2 - \\ & \frac{\Lambda^2}{2\pi^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \int d^2 r d^2 r' g(r - r') \cos [\sqrt{4\pi} \varphi_{\alpha}(r)] \cos [\sqrt{4\pi} \varphi_{\beta}(r')]. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Тут ми виконуємо розрахунки безпосередньо у двох вимірах до однопетлевого порядку, що дозволяє покласти $u_0 = 0$. Обчислимо усереднений квадрат спін-спінової кореляційної функції для однієї репліки $\alpha = 1$ до першого порядку за u_0 і v_0 у Додатку B.5 і отримуємо:

$$\langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle_S = \frac{1}{2} (\Lambda |r|)^{-1/2} \left[1 + \frac{u_0 \ln r \Lambda}{4\pi} + \frac{v_0 |r|^{\delta}}{4\pi \delta} \right]. \quad (5.124)$$

Щоб перенормувати спін-спін кореляційну функцію ми вводимо перенормовану константу

$$\overset{\circ}{\mathcal{O}} = Z_{\mathcal{O}}^{1/2} \mathcal{O}, \quad (5.125)$$

яку можна знайти зі співвідношення

$$\overline{\overset{\circ}{G}(r)^2} = Z_{\mathcal{O}} \overline{G(r)^2}. \quad (5.126)$$

Використовуючи вимірний метод, розвинутий у [443], ми переводимо логарифм у рівнянні (5.124) у полюс як $\ln r\Lambda \rightarrow \frac{|r|^\varepsilon}{\varepsilon}$. Взявши до уваги, що найнижчий порядок $u_0 = 2\mu^\varepsilon v/K_d = 4\pi\mu^\varepsilon u$ і $v_0 = 2\mu^\delta v/K_d = 4\pi\mu^\delta v$, отримуємо:

$$Z_{\mathcal{O}} = 1 + \frac{u}{\varepsilon} + \frac{v}{\delta} + O(u^2, v^2). \quad (5.127)$$

Усі β -функції і координати НТ можна взяти з результатів? отриманих для ферміонів Дірака (р-ня (5.99), (5.100) і (5.108)). Отримана скейлінгова функція запишеться

$$\eta_2 = \frac{1}{2} - \beta_u \frac{\partial \ln Z_{\mathcal{O}}}{\partial u} - \beta_v \frac{\partial \ln Z_{\mathcal{O}}}{\partial v} \quad (5.128)$$

і до однопетлевого порядку вона задається

$$\eta_2 = \frac{1}{2} - u - v + O(u^2, v^2). \quad (5.129)$$

Використовуючи, що в однопетловому порядку $u^* = 0$ та $v^* = \delta/4$ (див. р-ня (5.108)), отримуємо критичний показник

$$\eta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}, \quad (5.130)$$

який описує алгебраїчне загасання квадрату спін-спінової кореляційної функції, усередненої за безладом:

$$\overline{G(r)^2} = r^{-\eta_2}. \quad (5.131)$$

Оскільки $\overline{G^2} \geq \overline{G}^2$ і $\eta < \eta_{\text{pure}}$ показник η повинен задовільняти нерівність

$$\frac{\eta_2}{2} \approx \frac{1}{4} - \frac{\delta}{8} \leq \eta \leq \frac{1}{4}. \quad (5.132)$$

Вихід поза однопетлеве наближення є нетривіальним завданням, і відкладемо його на майбутнє.

5.2.5. Дискусія

Ми не знайшли стійкої НТ для $\delta > \delta_{max}$. Тут отримується розв'язок втікаючого типу (run-away), який може бути ознакою або розмитого фазового переходу,

або критичної поведінки, що описується НТ підходу безмежного безладу (infinity randomness) з різними критичними показниками. В останньому випадку можна очікувати різницю між типовими та усередненими показниками кореляційної довжини. Остання, мабуть, пов'язана з рідкісними областями з сильними кореляціями, так що можна очікувати $\nu_{\text{avr}} > \nu_{\text{typ}}$. Для того, щоб вивчити непертурбативні ефекти для $\delta > \delta_{\text{max}}$, можна спробувати дозволити порушення реплічної симетрії, слідуючи роботам [444–448].

Можна порівняти отриману картину з відомими чисельними результатами. У роботі [180] знайдено, що $\eta = 0.2588(14)$ і $\nu = 2.005(5)$ для $a = 1$ ($\delta = 1$). Показник η задовільняє нерівність (5.132), у той час як показник ν є дуже близьким $\nu = 2/a$. У роботі [449] знайдено, що $\eta = 0.204(14)$ і $\nu = 7.14$ для $a = 2/3$ ($\delta = 4/3$). Так виглядає, що показник η також задовільняє нерівність, але показник ν є набагато більшим, ніж передбачено для пертурбативної LR. Це приписувалось порушенню гіперскейлінгу у фазі Гріфітса через великі флуктуації безладу. У світлі нашої роботи це не дивує. Справді, втікання потоку РГ на безмежність (run-away) при $\delta > \delta_{\text{max}}$ означає, що або система слідує у напрямку НТ нескінченного безладу, недосяжної у рамках нашого підходу, яка контролює цей перехід, або перехід є розмитим. Чисельні симуляції роботи [449] підтримують перший сценарій, але це все ще залишається відкритим питанням.

Інша причина таких розбіжностей може бути пов'язана з особливостями просторового розподілу безладу у моделі, проаналізованій у [449]. Там спінові конфігурації моделі Ашкіна-Телера у критичній точці використовувались для побудови скорельованого розподілу випадкових зв'язків. У свою чергу, це спричиняє великі самоподібні кластери сильних/слабких зв'язків. Хоча, за конструкцією, кореляції безладу у [449] визначалися спаданням за степеневим законом (5.73), формально можна сказати, що ця модель відрізняється від аналізованої в нашій роботі, оскільки розподіл безладу сильно не гаусовий. Зауважте, що усі вищезгадані значення показника ν задовольняють нерівності для показника кореляційної довжини неупорядкованих систем $\nu \geq 2/d$ [450]. Це вказує на відсутність різниці між внутрішньою кореляційною довжиною та скінченними кореляційними дов-

жинами у цій задачі.

5.3. Критична поведінка моделі Ашкіна-Телера з N_i -кольорами та скорельованим безладом

Тут ми вивчаємо ефекти далекосяжно скорельованого безладу з степеневим спаданням кореляцій на фазовий перехід у моделі Ашкіна-Телера з N_i кольорами, описаній у оглядовому розділі (підрозділ 1.2.5).

5.3.1. Ферміонне представлення моделі

У безпосередній близькості від критичної точки властивості звичайної моделі Ашкіна-Телера і пов'язаної з нею моделі Бакстера (1.28), на великих масштабах можна описати, використовуючи два Майоранівські (реальні) ферміонні поля Ψ_1 і Ψ_2 з гамільтоніаном [286]:

$$\mathcal{H} = \int d^2r \left\{ \frac{1}{2} \bar{\Psi}_1 [\hat{\partial} + \mu(\mathbf{r})] \Psi_1 + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_2 [\hat{\partial} + \mu(\mathbf{r})] \Psi_2 - \frac{1}{4} \lambda_0 (\bar{\Psi}_1 \Psi_1) (\bar{\Psi}_2 \Psi_2) \right\}. \quad (5.133)$$

Тут ми викоористовуємо ті ж самі позначення, що і в попередньому підрозділі. А константа зв'язку при чотириферміонній взаємодії: $\lambda_0 \sim J_4$. Як і у попередньому підрозділі, цю модель можна еквівалентно виразити у термінах одного (комплексного) ферміонного поля Дірака з $\psi = (\Psi_1 + i\Psi_2)/\sqrt{2}$ та $\bar{\psi} = (\bar{\Psi}_1 - i\bar{\Psi}_2)/\sqrt{2}$. Відповідний гамільтоніан записується [446]:

$$\mathcal{H} = \int d^2r \left\{ \bar{\psi} [\hat{\partial} + \mu(\mathbf{r})] \psi - \frac{1}{2} \lambda_0 (\bar{\psi} \psi) (\bar{\psi} \psi) \right\}. \quad (5.134)$$

Узагальнення дії (5.134) на модель Ашкіна-Телера з N_i кольорами та *парним* N_i є прямим [434]:

$$\mathcal{H} = \int d^2r \left\{ \sum_{i=1}^{N_i/2} \bar{\psi}_i [\hat{\partial} + \mu(\mathbf{r})] \psi_i - \frac{1}{2} \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{N_i/2} (\bar{\psi}_i \psi_i) (\bar{\psi}_j \psi_j) \right\}, \quad (5.135)$$

де ми ввели $N/2$ “запахів” ферміонів Дірака замість N “кольорів” ферміонів Майорани.

При наявності безладу типу випадкових вузлів, який повністю скорельований між різними кольорами Ізінга (тобто різними ферміонними запахами), маса може бути записана як $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 + \delta\mu(\mathbf{r})$, де $\delta\mu(\mathbf{r})$ – локальна сила безладу. Як і у попередньому випадку, ми приймаємо, що сила безладу розподілена за випадковим гаусовим законом з середнім $\overline{\delta\mu(\mathbf{r})} = 0$ і дисперсією, заданою (5.73). Як і в попередньому підрозділі, будемо використовувати вимірну регуляризацию, тому узагальнимо проблему до довільного d , замінюючи матриці Паулі алгеброю Кліффорда представленою матрицями γ_i , $i = 1, \dots, d$, що задовільняють відповідні антикомутаційні співвідношення. Щоб усереднити вільну енергію (5.135) за різними конфігураціями безладу, ми застосовуємо реплічний трюк [107]. Вводячи N реплік системи (5.135) і усереднюючи за безладом, приходимо до реплічного ефективного гамільтоніана

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_{\alpha=1}^N \int d^d r \left[\sum_{i=1}^{N_i/2} \bar{\psi}_i^\alpha (\hat{\partial} + \mu_0) \psi_i^\alpha - \frac{1}{2} \lambda_0 \sum_{i,j=1}^{N_i/2} (\bar{\psi}_i^\alpha \psi_i^\alpha) (\bar{\psi}_j^\alpha \psi_j^\alpha) \right] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^N \int d^d r \int d^d r' \sum_{i,j=1}^{N_i/2} g(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) [\bar{\psi}_i^\alpha(\mathbf{r}) \psi_i^\alpha(\mathbf{r})] [\bar{\psi}_j^\beta(\mathbf{r}') \psi_j^\beta(\mathbf{r}')]. \quad (5.136)$$

Властивості оригінальної системи з замороженим безладом можна отримати, беручи границю $N \rightarrow 0$. Як і в попередньому підрозділі, зручно зафіксувати нормування корелятора безладу (5.73) у просторі Фур’є таким чином:

$$\overline{\delta\mu(\mathbf{k})\delta\mu(\mathbf{k}')} = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \bar{g}(k), \quad (5.137)$$

де $\bar{g}(k)$ задається (5.77).

5.3.2. Опис підходу РГ

Як і у попередньому підрозділі, ми вивчаємо властивості (5.136) на великих масштабах у рамках стандартного підходу теоретико-польової РГ [7]. Застосовуючи його, можна розрахувати кореляційні функції для дії (5.136) пертурбативно за

λ_0 , u_0 і v_0 . Щоб обійти розбіжність інтегралів, що входять до рядів теорії збурень, використовуємо вимірну регуляризацию [336, 337] і вводимо множники перенормування такі ж, як і в попередньому підрозділі, але у нас ще додається множник перенормування Z_λ для константи зв'язку λ_0 .

$$\lambda_0 = \kappa^\varepsilon Z_\lambda Z_\psi^{-2} \lambda. \quad (5.138)$$

Для розрахунку констант перенормування достатньо перенормувати двоточкову вершинну функцію $\Gamma^{(2)}$ і чотириточкову вершинну функцію $\Gamma^{(4)}$. Ми покладаємо, що вони скінченні при $\mu=\kappa$ і знаходимо константи перенормування, використовуючи схему мінімального віднімання [336, 337]. З цією метою зручно розділити чотириточкову функцію на чисту частину Γ_λ , частину короткосяжного безладу Γ_u і частину далекосяжного безладу Γ_v :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\mu}^{(4)ijkl}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \left\{ \Gamma_\lambda^{(4)}(\mathbf{k}_i) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\mu} + \left[\Gamma_u^{(4)}(k_i) + \Gamma_v^{(4)}(\mathbf{k}_i) |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^{a-d} \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} \right\} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (5.139)$$

Константи перенормування визначаються з умови, що функції $\Gamma_\lambda^{(4)}(0; \mu = \kappa)$, $\Gamma_u^{(4)}(0; \mu = \kappa)$ і $\Gamma_v^{(4)}(0; \mu = \kappa)$ є скінченними.

Оскільки неперенормована вершинна функція не залежить від масштабу перенормування κ , її перенормований відповідник задовільняє рівняння РГ:

$$\left[\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta_\lambda(\lambda, u, v) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta_u(\lambda, u, v) \frac{\partial}{\partial u} - \beta_v(\lambda, u, v) \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\mathcal{N}}{2} \eta_\psi(\lambda, u, v) + \gamma(\lambda, u, v) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \Gamma^{(\mathcal{N})}(k_i; \mu, \lambda, u, v, \kappa) = 0, \quad (5.140)$$

де ми ввели функції РГ подібним чином, як у попередньому підрозділі. Критична поведінка відповідає існуванню стійкої НТ β -функцій, що знаходиться з трьох рівнянь:

$$\beta_\lambda(\lambda^*, u^*, v^*) = 0, \quad \beta_u(\lambda^*, u^*, v^*) = 0, \quad \beta_v(\lambda^*, u^*, v^*) = 0. \quad (5.141)$$

Стійкість даної НТ можна визначити з власних значень матриці стійкості. Показник кореляційної довжини ν задається як

$$\frac{1}{\nu} = 1 + \gamma(\lambda^*, u^*, v^*). \quad (5.142)$$

Показник теплоємності заданий співвідношенням гіперскейлінгу, який у двох вимірах записується як

$$\alpha = 2(1 - \nu). \quad (5.143)$$

5.3.3. Однопетлеві потоки РГ і критична поведінка

Застосовуючи процедуру перенормування, описану вище, отримаємо β -функції:

$$\beta_\lambda(\lambda, u, v) = \varepsilon\lambda + 2(N_i - 2)\lambda^2 - 4\lambda(u + v), \quad (5.144)$$

$$\beta_u(\lambda, u, v) = \varepsilon u + 4(N_i - 1)u\lambda - 4u(u + v), \quad (5.145)$$

$$\beta_v(\lambda, u, v) = \delta v + 4(N_i - 1)v\lambda - 4v(u + v), \quad (5.146)$$

і γ -функцію:

$$\gamma(\lambda, u, v) = 2(N_i - 1)\lambda - 2(u + v), \quad (5.147)$$

до однопетлевого порядку у реплічній границі $N \rightarrow 0$. Ми знаходимо, що рівняння на потоки, що відповідають β -функціям (5.144)–(5.146) для $N_i > 2$ і $\varepsilon > 0$ мають п'ять різних нерухомих точок: Гаусову (**G**), чисту (**P**), короткосяжного безладу **SR**, далекосяжного безладу **LR** і змішану **M**. Координати нерухомих точок та власних значень ω_i , $i = 1, 2, 3$, матриці стійкості, оцінені у відповідній НТ, підсумовано в таблиці 5.1. Зверніть увагу, що у двох вимірах, наприклад, для $d = 2$ ($\varepsilon = 0$), перші три нерухомих точки зливаються і збігаються з НТ **G**, який описує критичну поведінку N_i незв'язаних чистих моделей Ізінга до логарифмічних поправок. Давайте проаналізуємо потоки РГ для обох моделей Бакстера ($N_i = 2$) і Ашкіна-Телера з $N_i > 2$ у трьох режимах:

Табл. 5.1. Координати нерухомих точок $\{\lambda^*, u^*, v^*\}$ і відповідно власні значення матриці стійкості ω_i , розраховані для β -функцій (5.144)–(5.146) при $N_i > 2$.

FP	λ^*	u^*	v^*	ω_1	ω_2	ω_3
G	0	0	0	δ	ε	ε
P	$-\frac{\varepsilon}{2(N_i-2)}$	0	0	$\frac{N_i(\delta-2\varepsilon)-2(\delta-\varepsilon)}{N_i-2}$	$-\frac{N_i\varepsilon}{N_i-2}$	$-\varepsilon$
SR	0	$\frac{\varepsilon}{4}$	0	0	$\delta - \varepsilon$	$-\varepsilon$
LR	0	0	$\frac{\delta}{4}$	$-\delta$	$-\delta + \varepsilon$	$-\delta + \varepsilon$
M	$\frac{\varepsilon-\delta}{2N_i}$	0	$\frac{2\varepsilon(N_i-1)-\delta(N_i-2)}{4N_i}$	$-\delta + \varepsilon$	$-\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{-4\delta^2(N_i-2)+4\delta(3N_i-4)\varepsilon+(8-7N_i)\varepsilon^2}{4N_i}}$	

(i) **Чиста система** ($u_0 = v_0 = 0$). Для $N_i=2$ β_λ -функція (5.144) занулюється при $d = 2$, так що модель має лінію нерухомих точок, параметризовану за λ . Це не дивно, оскільки модель у цій границі збігається з $O(2)$ моделлю Гроса-Неве або масивною моделлю Тірінга. β -функція останньої моделі дорівнює нулю, що також приводить до не універсальних критичних показників [451]. Це узгоджується з картиною “слабкої універсальності”, отриманої у точному розв’язку моделі Бакстера [280]. Дійсно, згідно з р-ми (5.142) і (5.143), кореляційна довжина і особлива сингулярна частина теплоємності поведуть себе як

$$(N_i = 2) : \quad \xi = \tau^{-1/(1+2\lambda_0)}, \quad C_{sing} \sim \tau^{-4\lambda_0}, \quad (5.148)$$

де λ_0 - початкове значення безрозмірної константи зв’язку λ . Розкладаючи показник (1.29) за малим J_4 , знайдемо співвідношення між параметрами неперервної та ґраткової моделей: $\lambda_0 \approx 2J_4/(\pi T_c)$.

Для $N_i > 2$ потік РГ, що задається функцією β_λ (5.144), залежить від знаку початкового значення λ_0 : для $\lambda_0 \leq 0$ він йде до нуля. Розв’язуючи рівняння на потоки (для деталей див. Додаток B.6), знаходимо $\lambda(l) \approx -1/[2(N_i - 2)l]$ для $l \gg 1$ і приходимо до такої поведінки (див. також [290]):

$$(N_i > 2, \lambda_0 < 0) : \quad \xi \sim \tau^{-1} (\ln \tau^{-1})^{(N_i-1)/(N_i-2)}, \quad C_{sing} \sim (\ln \tau^{-1})^{-N_i/(N_i-2)}. \quad (5.149)$$

Для $\lambda_0 > 0$, λ -потік є run-away розв’язком, тобто константа зв’язку λ виходить з області, у якій справедливі розрахунки теорії збурень. Як результат, неперервний

(в рамках наближення середнього поля) фазовий перехід визначається флуктуаціями до [292, 293]:

$$(N_i > 2, \lambda_0 > 0) : \quad \text{фазовий перехід першого роду.} \quad (5.150)$$

Наведені вище результати відрізняються від тих, що стосуються чистої двовимірної моделі Ізінґа: $\xi \sim \tau^{-1}$ і $C_{sing} \sim \ln \tau^{-1}$.

(ii) **Короткосяжно скорельований безлад** ($v_0 = 0$). У цьому випадку ми знаходимо, що тільки гаусова НТ (**G**) є стійкою (маргінально) при $d = 2$. Для $N_i \geq 2$ і $\lambda_0 > 0$, ми виводимо (для деталей див. Додаток B.6) результати робіт [291–293]:

$$(N_i \geq 2, \lambda_0 > 0) : \quad \xi \sim \tau^{-1} (\ln \tau^{-1})^{1/2}, \quad C_{sing} \sim \ln \ln \tau^{-1}, \quad (5.151)$$

що співпадають з результатами для двовимірної моделі Ізінґа з короткосяжним безладом. Для $N_i = 2$ і $\lambda_0 < 0$, знаходимо (див. також [286]):

$$(N_i = 2, \lambda_0 < 0) : \quad \xi \sim \tau^{-1/(1+2\lambda^*)}, \quad C_{sing} \sim \tau^{4|\lambda^*|}, \quad (5.152)$$

де $\lambda^* = -|\lambda_0|e^{-u_0/|\lambda_0|}$. Для $N_i > 2$ і $\lambda_0 < 0$ скейлінгова поведінка є такою ж, як у рівняннях (5.149).

(iii) **Далекосяжно скорельований безлад** ($u_0 \neq 0, v_0 \neq 0$). Типові потоки РГ для двовимірних моделей Бакстера ($N_i = 2$) і Ашкіна-Телера з N_i -кольорами (при $N_i = 4$) показано для $\delta = \pm 1$ на Рис. 5.4 і Рис. 5.5, відповідно. Для $\delta < 0$ далекосяжний безлад є несуттєвий, у той час як короткосяжний безлад є тільки гранично несуттєвим. Тому можна знехтувати внеском з далекосяжного безладу, і скейлінгова поведінка задається рівнянням (5.151) для ($N_i \geq 2, \lambda_0 > 0$), рівнянням (5.152) для ($N_i = 2, \lambda_0 < 0$) і рівнянням (5.149) для ($N_i > 2, \lambda_0 < 0$). Зазначте, що навіть, якщо короткосяжна частина безладу не присутня у чистому кореляторі, вона згенерується поправками вищих петлевих наближень. Для $\delta > 0$ критична поведінка обох моделей визначається НТ **LR**: моделі демонструють скейлінгову поведінку двовимірної моделі Ізінґа з далекосяжно скорельованим безладом. Наприклад, підставляючи НТ **LR** у р-ня (5.142),

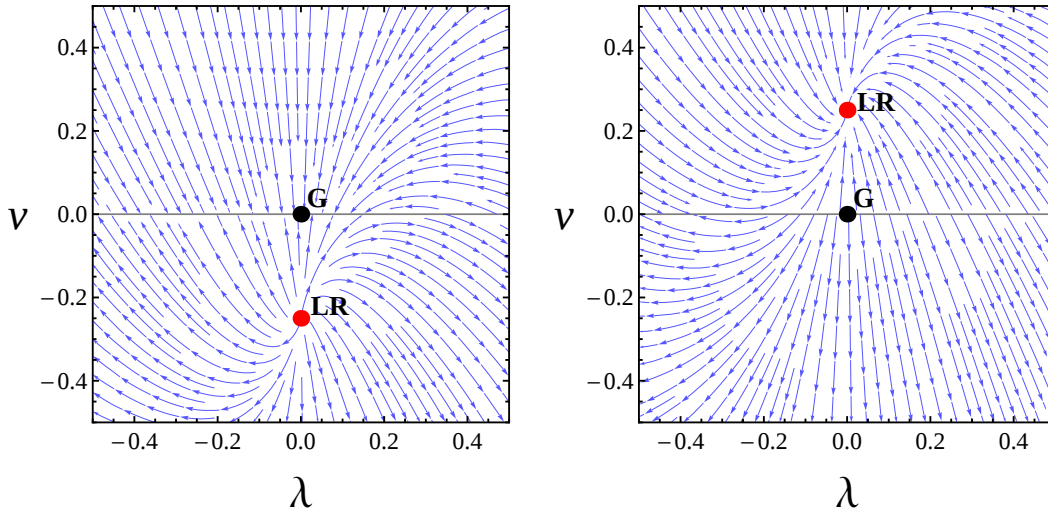


Рис. 5.4. Потоки РГ для двовимірної моделі Бакстера ($\varepsilon = 0$) з далекосяжно скорельованим безладом у площині λ, v ($u = 0$). Лівий малюнок: $\delta = -1$ ($a = 3$). Чорна точка – це гранично стійка НТ **G** ($\lambda = u = v = 0$). Червона точка позначає НТ **LR** ($\lambda = u = 0, v = -\frac{1}{4}$), яка є нефізичною, оскільки $v < 0$. Правий малюнок: $\delta = +1$ ($a = 1$). Чорна точка – це НТ **G** ($\lambda = u = v = 0$), яка є нестійкою. Червона точка позначає НТ **LR** ($\lambda = u = 0, v = \frac{1}{4}$), яка є стійкою і фізичною.

отримаємо показник кореляційної довжини до однієї петлі:

$$\frac{1}{\nu} = 1 - \frac{\delta}{2}. \quad (5.153)$$

Цей результат вже був отриманий для двовимірної моделі Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом у попередньому підрозділі і підтверджує гіпотезу, що точний показник кореляційної довжини є таким: $\nu = 2/a$. Відповідний показник теплоємності становить $\alpha_{LR} = 2 - a$.

Ми коротко обговоримо справедливість узагальненого критерію Гаріса для двовимірної моделі Бакстера з далекосяжно скорельованим безладом. Відповідно до узагальненого критерію Гаріса, далекосяжно скорельований безлад є актуальним за умови, що показник кореляційної довжини чистої системи задовольняє нерівність $a < 2/\nu_p$, тобто $\delta > -4\lambda_0$. Хоча узагальнений критерій Гаріса правильно передбачає суттєвість далекосяжно скорельованого безладу для $\delta > 0$, як ми виявили вище, критична поведінка насправді модифікується при будь-якому $\delta < 0$. В останньому випадку НТ **LR** нестійка, і асимптотична критична поведінка

описується рівняннями (5.151) і (5.152), що відповідає двовимірній моделі Бакстера з короткосяжним безладом, а не критичній поведінці чистої двовимірної моделі Бакстера. Таким чином, для двовимірної моделі Бакстера узагальнений критерій Гаріса порушується скорельованим безладом, таким же чином, як для цієї моделі звичайний критерій Гаріса порушується нескорельованим безладом [286].

5.4. Висновки

У цьому розділі ми проаналізували вплив безладу на статичну критичну поведінку двовимірних систем, розглянувши три окремі задачі. Особливе значення серед двовимірних систем має модель Ізінґа, для якої заморожений нескорельований безлад є маргінальним в сенсі РГ. Для цього випадку отримано явний вираз для функції розподілу імовірності флуктуацій внутрішньої енергії, спричинених

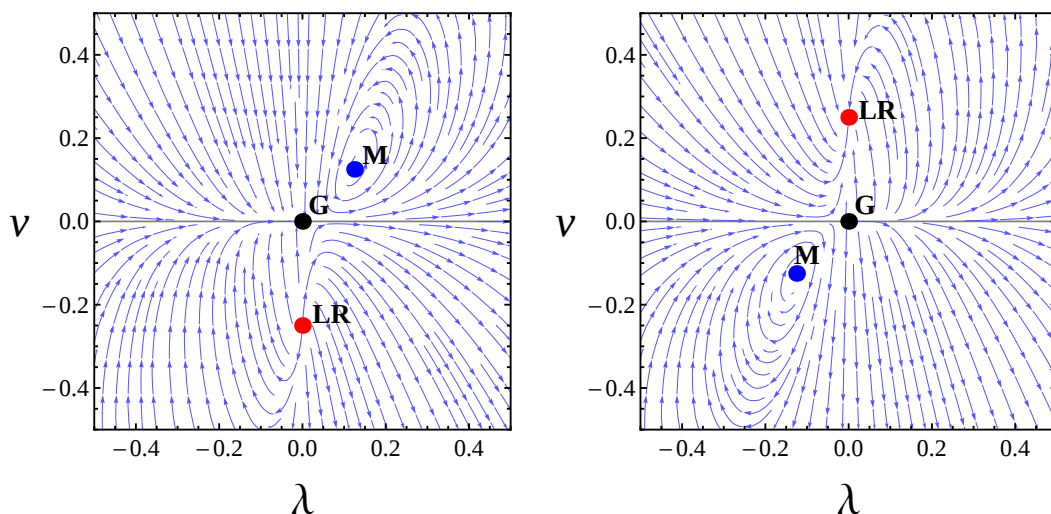


Рис. 5.5. Потоки РГ для двовимірної моделі Ашкіна-Телера з 4 кольорами ($\varepsilon = 0$, $N_i = 4$) з далекосяжно скорельованим безладом у площині λ, v ($u = 0$). Лівий малюнок: $\delta = -1$ ($a = 3$). Чорна точка – це гранично стійка НТ **G** ($\lambda = u = v = 0$). Синя точка позначає НТ **M** з комплексними власними значеннями, яка є нестійким циклом. Червона точка позначає НТ **LR** ($\lambda = u = 0, v = -\frac{1}{4}$) яка є нефізичною ($v < 0$). Правий малюнок: $\delta = +1$ ($a = 1$). Чорна точка показує НТ **G** ($\lambda = u = v = 0$), яка є нестійкою. Синя точка позначає НТ **M** з уявними власними значеннями, яка є нефізичним стійким циклом ($v < 0$). Червона точка позначає НТ **LR** ($\lambda = u = 0, v = \frac{1}{4}$), яка є стійкою і фізичною.

безладом. Отриманий результат, рівняння (5.50), (5.51), показує, що внутрішня енергія цієї системи не самоусереднюється. Замість цього типове значення флуктуацій від зразку до зразку змінюється таким же чином, як і середнє, пропорційно до $\sim L \ln \ln(L)$. З іншого боку, було показано, що теплоємність демонструє самоусереднення з функцією розподілу, що збігається до δ -функції у границі системи нескінченного розміру. На противагу до вільної енергії системи, яка обговорювалась раніше [431], величини, які обговорювались тут, можна прямо спостерігати у чисельних симуляціях.

Ми дослідили двовимірну модель Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом, використовуючи представлення моделі у теорії двовимірних ферміонів Дірака у присутності далекосяжно скорельованого безладу типу випадкової маси. Використовуючи вимірну регуляризацию у подвійному розкладі за $\varepsilon = 2 - d$ і $\delta = 2 - a$, перенормували відповідну теорію поля до двопетлевого порядку. У двох вимірах ($\varepsilon = 0$) ми знайшли дві нерухомі точки: гаусову $\{u^* = 0, v^* = 0\}$ і LR $\{u^* = O(\delta^2), v^* = O(\delta)\}$. Гаусова НТ описує двовимірну модель Ізінга з короткосяжним безладом. Короткосяжний безлад є гранично (не)суттєвий у двох вимірах і приводить до логарифмічної поправки до скейлінгу. Короткосяжна НТ є стійкою для $\delta < 0$. Ми показали, що НТ LR є стійкою для $0 < \delta < \delta_{max}$ з $\delta_{max} \approx 1.005$ до двопетлевого порядку. Вона характеризується критичним показником $\nu = 2/a + O(\delta^3)$ згідно з передбаченням $\nu = 2/a$. Використовуючи відображення до моделі синус-Гордона, ми також вивчали поведінку усередненого квадрата спін-спінової кореляційної функції при НТ LR, і знайшли, що він алгебраїчно спадає з відстанню як $\overline{G^2(r)} \sim r^{-\eta_2}$. У найнижчому порядку за безладом отримуємо $\eta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4} + O(\delta^2)$, що дає обмеження для звичайного показника η , який описує алгебраїчне спадання усередненої кореляційної функції: $\frac{1}{2}\eta_2 \leq \eta \leq \frac{1}{4}$.

Ми також вивчили вплив далекосяжно скорельованого безладу на двовимірні модель Бакстера та модель Ашкіна-Телера з N_i -кольорами. Чиста двовимірна модель Бакстера демонструє “слабку універсальну” критичну поведінку з критичними показниками, залежними від мікроскопічних параметрів, а в чистій моделі Ашкіна-Телера з N_i -кольорами флуктуації переводять систему від фазового пе-

реходу другого роду до фазового переходу першого роду. Також використовуючи відображення цієї моделі на модель двовимірних взаємодіючих ферміонів Дірака і використовуючи ті ж самі підходи, що і для моделі Ізінґа, ми отримали рівняння для потоків РГ в однопетлевому наближенні. Їх аналіз при $d = 2$ показує, що (i) при $a > 2$ ($\delta < 0$) критична поведінка контролюється гаусовою НТ, що дає критичні показники чистої двовимірної моделі Ізінґа (до логарифмічних поправок); (ii) для $a < 2$ ($\delta > 0$), єдиною стійкою НТ є НТ LR ($\lambda^* = 0$, $u^* = 0$, $v^* = \delta/4$). Вона описує згладження далекосяжно скорельованим безладом слабкої універсальності у моделі Бакстера та фазового переходу першого роду у моделі Ашкіна-Телера N_i -кольорами. Це приводить до виникнення нової критичної поведінки, яка належить до того самого класу універсальності, як і двовимірна модель Ізінґа з далекосяжно скорельованим безладом.

РОЗДІЛ 6

ГРАНИЧНІ ВИМІРНОСТІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНОГО АНТИФЕРОМАГНЕТИКА У ЗОВНІШНЬОМУ ПОЛІ

Цей розділ присвячений аналізу мультикритичної поведінки анізотропного феромагнетика у зовнішньому магнітному полі, паралельному осі анізотропії, що описується за допомогою моделі з двома зв'язаними параметрами порядку і симетрією $O(1) \oplus O(2)$. Це часткова реалізація більш загальної моделі з симетрією, $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$, що описує мультикритичні явища у різних фізичних контекстах. Для цієї моделі за допомогою теоретико-польового підходу РГ розраховано чисельні оцінки граничних вимірностей параметра порядку, що визначають умови стійкості різних типів мультикритичної поведінки. На основі отриманих результатів зроблено висновок про тип мультикритичної поведінки, який має реалізуватись для розглядуваної системи. Основні результати цього розділу викладені у роботах [33, 45, 53, 65].

6.1. Модель $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ і її РГ опис

6.1.1. Модель

Модель з $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ симетрією можна отримати з добре відомої $O(n)$ -симетричної моделі [452], розщеплюючи її n -компонентний параметр порядку $\vec{\phi}_0$ на два: $\vec{\phi}_{\perp 0}$ і $\vec{\phi}_{\parallel 0}$, що діють в ортогональних підпросторах з вимірностями $n_{\parallel}$ та $n_{\perp}$ відповідно ($n_{\parallel} + n_{\perp} = n$):

$$\vec{\phi}_0 = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_{\perp 0} \\ \vec{\phi}_{\parallel 0} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Тоді, розділяючи компоненти поля у функціоналі Гінзбурга-Ландау-Вільсона для $O(n)$ моделі, можна представити ефективний гамільтоніан $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Bi} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \mu_{0,\perp}^2 \vec{\phi}_{\perp 0} \cdot \vec{\phi}_{\perp 0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{\perp}} \nabla_i \vec{\phi}_{\perp 0} \cdot \nabla_i \vec{\phi}_{\perp 0} + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \mu_{0,\parallel}^2 \vec{\phi}_{\parallel 0} \cdot \vec{\phi}_{\parallel 0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{\parallel}} \nabla_i \vec{\phi}_{\parallel 0} \cdot \nabla_i \vec{\phi}_{\parallel 0} + \right. \\ \left. \frac{u_{0,\perp}}{4!} (\vec{\phi}_{\perp 0} \cdot \vec{\phi}_{\perp 0})^2 + \frac{u_{0,\parallel}}{4!} (\vec{\phi}_{\parallel 0} \cdot \vec{\phi}_{\parallel 0})^2 + \frac{2u_{0,\times}}{4!} (\vec{\phi}_{\perp 0} \cdot \vec{\phi}_{\perp 0}) (\vec{\phi}_{\parallel 0} \cdot \vec{\phi}_{\parallel 0}) \right\}, \quad (6.2) \end{aligned}$$

де три константи зв'язку $u_{0,\parallel}$, $u_{0,\perp}$ і $u_{0,\times}$ були введені замість однієї $O(n)$ моделі, і $\mu_{0,\perp}^2$ та $\mu_{0,\parallel}^2$ відповідають температурній відстані до критичної точки $\vec{\phi}_{\perp 0}$ і $\vec{\phi}_{\parallel 0}$, відповідно, замість одного параметру як в $O(n)$ моделі. Покладаючи $\mu_{0,\perp}^2 = \mu_{0,\parallel}^2 = \mu_0^2$, а також $u_{0,\parallel} = u_{0,\perp} = u_{0,\times} = u_0$, можна прийти назад до $O(n)$ моделі з полем параметра порядку (6.1).

Уперше аналіз у рамках наближення середнього поля для моделі з двома зв'язаними параметрами порядку був проведений у контексті надтвердої фази [298] (див. також [299]). Він показав, що характер мультикритичної точки на фазовій діаграмі залежить від знаку величини $u_{0,\perp} u_{0,\parallel} - u_{0,\times}^2$. У випадку додатнього знаку реалізується тетракритична точка, описуючи появу проміжної фази, у той час як при від'ємному знаку співіснування одночасно двох впорядкованих фаз є нестійким і бікритична точка присутня на фазовій діаграмі. Для того, щоб проаналізувати поведінку системи поблизу мультикритичних точок, потрібно врахувати флуктуації. Це досягається застосуванням підходу теоретико-польової РГ [7–9], у якій поведінка системи на великих масштабах пов'язана зі стійкою точкою перетворень РГ. Перетворення констант зв'язку $\{u_0\} = \{u_{0,\perp}, u_{0,\parallel}, u_{0,\times}\}$ у (6.2) при перенормуванні описуються β -функціями.

6.1.2. РГ опис для мультикритичних явищ

β -функції для $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі відомі в однопетлевому наближенні [297]. Наближення наступного порядку для них знайдено у масивній схемі [306], а також у схемі мінімального віднімання [307]. У схемі мінімального віднімання вони розраховані також і в п'ятипетлевому наближенні [308], однак явні вирази представлені тільки для випадку $O(3) \oplus O(2)$ [453]. Ми тут працюємо з виразами β -функцій, отриманими у двопетлевому наближенні [307] у схемі мінімального віднімання РГ [336, 337]:

$$\beta_{u_{\perp}} = -\varepsilon u_{\perp} + \frac{(n_{\perp} + 8)}{6} u_{\perp}^2 + \frac{n_{\parallel}}{6} u_{\times}^2 - \frac{(3n_{\perp} + 14)}{12} u_{\perp}^3 - \frac{5n_{\parallel}}{36} u_{\perp} u_{\times}^2 - \frac{n_{\parallel}}{9} u_{\times}^3, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_{u_{\times}} = & -\varepsilon u_{\times} + \frac{(n_{\perp} + 2)}{6} u_{\perp} u_{\times} + \frac{(n_{\parallel} + 2)}{6} u_{\times} u_{\parallel} + \frac{2}{3} u_{\times}^2 - \frac{(n_{\perp} + n_{\parallel} + 16)}{72} u_{\times}^3 \\ & - \frac{(n_{\perp} + 2)}{6} u_{\times}^2 u_{\perp} - \frac{(n_{\parallel} + 2)}{6} u_{\times}^2 u_{\parallel} - \frac{5(n_{\perp} + 2)}{72} u_{\perp}^2 u_{\times} - \frac{5(n_{\parallel} + 2)}{72} u_{\times} u_{\parallel}^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\beta_{u_{\parallel}} = -\varepsilon u_{\parallel} + \frac{(n_{\parallel} + 8)}{6} u_{\parallel}^2 + \frac{n_{\perp}}{6} u_{\times}^2 - \frac{(3n_{\parallel} + 14)}{12} u_{\parallel}^3 - \frac{5n_{\perp}}{36} u_{\parallel} u_{\times}^2 - \frac{n_{\perp}}{9} u_{\times}^3. \quad (6.5)$$

Нерухомі точки $\{u^*\}$ перетворень РГ отримуються як розв'язки системи рівнянь

$$\beta_{u_i}(\{u^*\}) = 0. \quad (6.6)$$

з $i = \perp, \parallel, \times$. З цілого набору нерухомих точок тільки стійка відповідає критичній точці системи. Стійка НТ має додатні власні значення $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (або їх дійсні частини) матриці стійкості $\partial\beta_i/\partial u_j$.

Усі стійкі нерухомі точки для $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ відомі вже у однопетлевому наближенні [297]. При достатньо низьких вимірностях параметрів порядку, що задовільняють нерівність

$$n_{\perp} + n_{\parallel} < 4, \quad (6.7)$$

є стійкою тільки ізотропна гайзенбергівська НТ $\mathcal{H}$ симетрії $O(n_{\perp} + n_{\parallel})$ з $\{u_{\perp}^* = u_{\times}^* = u_{\parallel}^*\}$. Коли $n_{\perp}$ (або $n_{\parallel}$) зростає, порушуючи (6.7), і

$$n_{\perp} n_{\parallel} + 2(n_{\perp} + n_{\parallel}) < 32, \quad (6.8)$$

НТ $\mathcal{H}$ обмінюється стійкістю з біконічною НТ $\mathcal{B}$ $\{u_{\perp}^* \neq u_{\times}^* \neq u_{\parallel}^*\}$. У той час як для значень $n_{\perp}$ і $n_{\parallel}$, що вище умови (6.8), НТ $\mathcal{B}$ втрачає свою стійкість, у той час як незв'язна НТ $\mathcal{D}$ $\{u_{\perp}^* \neq 0, u_{\times}^* = 0, u_{\parallel}^* \neq 0\}$ стає стійкою. Згідно цих однопетлевих результатів мультикритична поведінка $O(1) \oplus O(2)$ моделі визначається НТ $\mathcal{H}$ (пов'язаною з бікритичністю) для вимірності простору $d < 4$. Однак у високих порядках стійкість НТ залежить не тільки від $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$, але також і від d . Дослідження, що використовували двопетлеві функції РГ з пересумовуванням, проведеним при фіксованому $d = 3$, показують, що умови стійкості НТ (6.7) і (6.8) зміщуються до менших значень компонент параметра порядку [306, 307]. Зокрема, у випадку $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 2$ НТ $\mathcal{B}$ (пов'язана з тетракритичністю) виявляється стійкою у двопетлевому наближенні [307]. Пересумовування високих порядків [308] теорії збурень не змінює цього результату.

Розширення моделі $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ для вивчення впливу безладу [454, 455], фрустрацій [456], калібрувальних полів [457], а також для опису динамічних властивостей [458–460], демонструють важливість вимірностей параметра порядку для класів універсальності цих моделей.

6.2. Граничні поверхні для стійкості у рамках двопетлевого наближення

Як було відзначено вище, стійкість НТ $\mathcal{D}$, НТ $\mathcal{B}$, НТ $\mathcal{H}$ залежить від трьох параметрів $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$ і d . Тому границя між областями цих параметрів, для яких одна або інша НТ стійка, є поверхнею у параметричному просторі $n_{\parallel} - n_{\perp} - d$: $f(n_{\parallel}, n_{\perp}, d) = 0$. Ми називатимемо їх граничними поверхнями. Альтернативно можна дивитись за граничними вимірностями $n_{\perp}$ (або $n_{\parallel}$), які будуть функціями двох змінних $n_{\perp}^c(n_{\parallel}, d)$ (або $n_{\parallel}^c(n_{\perp}, d)$).

На практиці використовуються два альтернативні способи для аналізу функцій РГ і для отримання універсальних величин. Це згадані ε -розклад і підхід при фіксованій вимірності простору. У наступних двох підрозділах ми використаємо обидва підходи, щоб отримати граничні вимірності $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі у рамках

двопетлевого наближення РГ.

6.2.1. Граничні поверхні з ε -розкладу

Почнемо аналіз умов реалізації різних сценаріїв мультикритичної поведінки з визначення границі між областями стійкості незв'язної НТ $\mathcal{D}$ і біконічної НТ $\mathcal{B}$. Як відзначено у [307], два показники стійкості НТ $\mathcal{D}$ відповідають показнику стійкості $O(n)$ моделі $\omega^{\mathcal{H}(n)}$: $\omega_1^{\mathcal{D}} = \omega^{\mathcal{H}(n_{\parallel})}$, $\omega_3^{\mathcal{D}} = \omega^{\mathcal{H}(n_{\perp})}$, у той час як ще один визначається як

$$\omega_2^{\mathcal{D}} = \partial\beta_{u_{\times}}/u_{\times}|_{\mathcal{D}}. \quad (6.9)$$

Оскільки значення $\omega^{\mathcal{H}(n)}$ завжди додатне, тільки $\omega_2^{\mathcal{D}}$ керує стійкістю НТ $\mathcal{D}$, змінюючи знак у залежності від $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$, d . Таким чином, з умови занулення (6.2.1) ми можемо знайти границю між областями стійкості нерухомих точок $\mathcal{D}$ та $\mathcal{B}$ як поверхню у просторі $n_{\perp} - n_{\parallel} - \varepsilon$ з двопетлевих β -функцій (6.3)-(6.5). Після підстановки їх у (6.2.1) можна зібрати члени тільки до порядку ε^2 . Покладаючи отриманий результат рівним нулеві, отримаємо рівняння для граничних поверхонь:

$$\varepsilon \left(\frac{(13n_{\parallel}+44)(n_{\parallel}+2)}{2(n_{\parallel}+8)^3} + \frac{(n_{\perp}+2)(13n_{\perp}+44)}{2(n_{\perp}+8)^3} \right) + \left(\frac{n_{\parallel}-4}{2(n_{\parallel}+8)} + \frac{n_{\perp}-4}{2(n_{\perp}+8)} \right) = 0. \quad (6.10)$$

Замість знаходження з останнього виразу вимірності $n_{\parallel}$ (або альтернативно $n_{\perp}$) у формі ε -розкладів з коефіцієнтами як функціями від іншої вимірності, розв'язуємо р-ня (6.10) чисельно, шукаючи значення $\{n_{\parallel}, n_{\perp}, d\}$, що задовільняють його. Представляючи отриманий результати точками у просторі $n_{\perp} - n_{\parallel} - \varepsilon$, отримуємо поверхню, зображену на Рис. 6.1а справа.

Граничну поверхню між областями стійкості НТ $\mathcal{B}$ і НТ $\mathcal{H}$ можна отримати з умови, що НТ $\mathcal{H}$ змінює свою стійкість. Оскільки матриця стійкості $\partial\beta_{u_i}/\partial u_j$, розрахована у НТ $\mathcal{H}$, в однопелевому наближенні має такі власні значення:

$$\omega_1 = \frac{4 - (n_{\parallel} + n_{\perp})}{8 + (n_{\parallel} + n_{\perp})}\varepsilon, \quad \omega_2 = \frac{8}{8 + (n_{\parallel} + n_{\perp})}\varepsilon, \quad \omega_3 = \varepsilon, \quad (6.11)$$

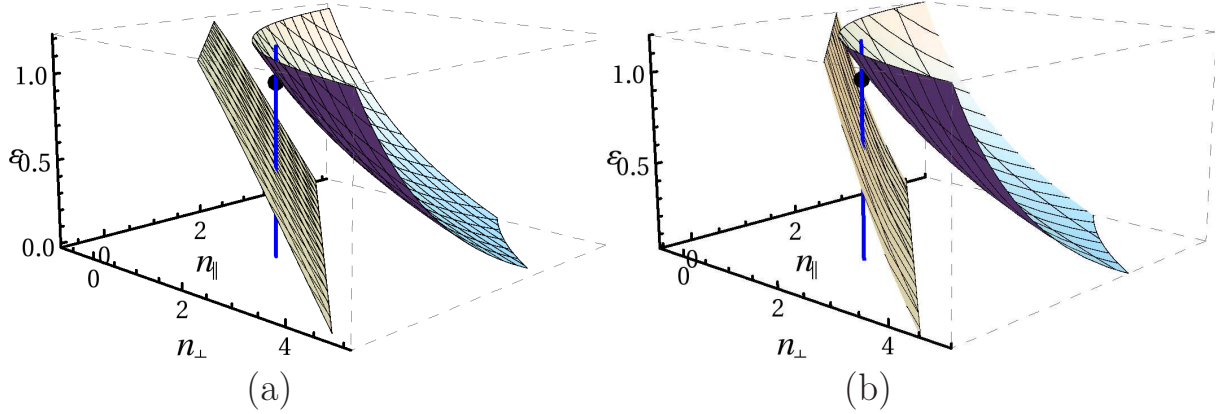


Рис. 6.1. Граничні поверхні між різними класами універсальності $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі, отримані з застосуванням ε -розкладу (а) і процедури пересумовування при фіксованому d (б) до двопетлевих функцій РГ. Ліва поверхня представляє границю між областю стійкості НТ $\mathcal{H}$ (зліва від поверхні) і областю стійкості $\mathcal{B}$ (справа від поверхні), у той же час права поверхня є границею між областями стійкості НТ $\mathcal{B}$ (зліва від поверхні) і НТ $\mathcal{D}$ (справа від поверхні). Вертикальна лінія показує положення системи з $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 2$.

тільки перший показник стійкості може змінити знак зі зміною $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$, а тому він керує стійкістю НТ $\mathcal{H}$. Як і у попередньому випадку, розраховуючи це власне значення до порядку ε^2 , ми отримуємо рівняння поверхні:

$$\frac{(-5(n_{\perp} + n_{\parallel} + 8)^2 + 66(n_{\perp} + n_{\parallel} + 8) - 360)\varepsilon}{(n_{\perp} + n_{\parallel} + 8)^3} + \left(\frac{12}{n_{\perp} + n_{\parallel} + 8} - 1\right) = 0. \quad (6.12)$$

Розв'язки цього рівняння як точки $\{n_{\parallel}, n_{\perp}, d\}$ формують поверхню, яка для $0 \leq \varepsilon \leq 1.2$ і для $n_{\parallel}, n_{\perp}$, що змінюються від -0.7 до 5, представлена на Рис. 6.1а (ліва поверхня).

Обмежуючі граничні лінії у площині $\varepsilon = 0$ ($d = 4$), еквівалентні випадку, коли однопетлеві нерівності (6.7), (6.8) трансформуються у рівності, з яких отримують:

$$n_{\parallel}^{\mathcal{D}}(n_{\perp}) = \frac{2(16 - n_{\perp})}{n_{\perp} + 2}, \quad n_{\parallel}^{\mathcal{H}}(n_{\perp}) = -n_{\perp} + 4. \quad (6.13)$$

Вертикальна лінія на Рис. 6.1а представляє систему з $n_{\parallel} = 2$, $n_{\perp} = 1$, показуючи, яка НТ визначає мультикритичну поведінку системи зі зміною ε . Ми

цікавимось цим випадком, оскільки він описує анізотропні антиферромагнетики у вимірності простору $d = 3$. Докладніший аналіз у цьому випадку проводимо з допомогою пересумовування у наступному підрозділі.

6.2.2. Граничні поверхні з пересумованих β -функцій

Можна отримати граничні поверхні в інший спосіб, розрахувавши їх з β -функцій (6.3)-(6.5), зафіксувавши певне значення для d . Оскільки розклади РГ мають розбіжну природу [7–9], потрібна техніка пересумовування для того, щоб дістати збіжні результати [96]. Наші двопетлеві β -функції (6.3)-(6.5) $\beta = \beta_{u_i}$ мають форму поліномів за перенормованими константами зв'язку:

$$\beta(\{u\}) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} c_{ijk} u_{\perp}^i u_{\parallel}^j u_{\times}^k. \quad (6.14)$$

Ми спочатку представимо (6.14) у формі резольвентного ряду [354] за допоміжною змінною t :

$$F(\{u\}, t) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} c_{ijk} u_{\perp}^i u_{\parallel}^j u_{\times}^k t^{i+j+k-1} = \sum_{0 \leq \alpha \leq 2} a_{\alpha}(\{u\}, \{c\}) t^{\alpha}, \quad (6.15)$$

де коефіцієнти розкладу a_{α} у (6.15) неявно залежать від констант зв'язку і коефіцієнтів c_{ijk} (6.14). Очевидно, $F(\{u\}, 1) = \beta(\{u\})$. Ми пересумовуємо функцію (6.15) як функцію однієї змінної, використовуючи техніку Паде-Бореля [392] :

$$F^B(t) = \sum_{0 \leq \alpha \leq 2} a_{\alpha} / \alpha! t^{\alpha}. \quad (6.16)$$

Аналітичне продовження функції (6.16) досягається представленням її у формі Паде-апроксиманти [344]. У нашому випадку ми використовуємо діагональну Паде-апроксиманту $[1/1]$:

$$F^B(t) \simeq [1/1](t). \quad (6.17)$$

В кінці пересумована функція отримується через обернене перетворення Бореля:

$$F^{\text{res}} = \int_0^{\infty} [1/1](t) e^{-t}. \quad (6.18)$$

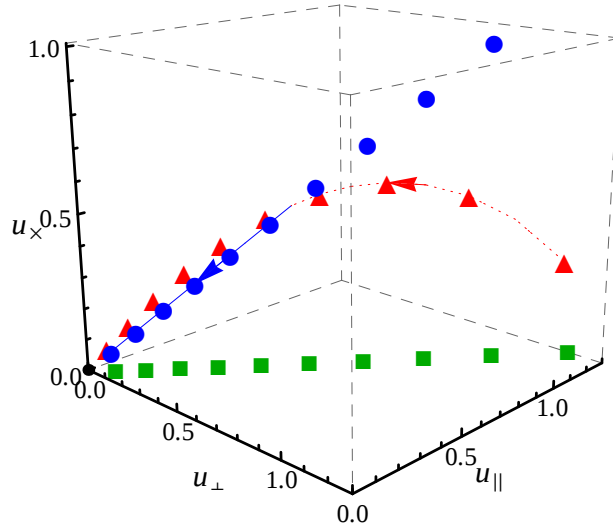


Рис. 6.2. Розташування НТ $\mathcal{B}$ (червоні трикутники), НТ $\mathcal{H}$ (сині круги) та НТ $\mathcal{D}$ (зелені квадрати) для $n_{\perp} = 2$, $n_{\parallel} = 1$ зі зміною ε від 1 (крайні праві позначки) до 0 з кроком 0.1. Результати отримані з використанням пересумовування. Суцільна лінія показує шлях стійкої точки. Тонка червона частина лінії показує, що НТ $\mathcal{B}$ стійка, у той час як товста синя частина показує, що НТ $\mathcal{H}$ стійка. Чорний круг показує гаусову НТ.

Застосовуючи цю процедуру до двопетлевих β -функцій (6.3)-(6.5) при фіксованому d і шукаючи їхні розв'язки на НТ з $u_{\times}^* = 0$ і $\omega_2^{\mathcal{D}} = 0$ разом з умовою (6.10), знайдемо граничну поверхню, що розділяє області стійкості НТ $\mathcal{D}$ від області стійкості НТ $\mathcal{B}$. Вона є правою поверхнею на Рис. 6.1b. Шукаючи розв'язки на НТ $u_{\perp}^* = u_{\times}^* = u_{\parallel}^*$, при яких детермінант матриці стійкості занулюється, ми отримуємо граничну поверхню між областями стійкості НТ $\mathcal{D}$ і $\mathcal{B}$. Це ліва поверхня на Рис. 6.1b. Технічно важко отримати дані на підставі пересумованих функцій при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тому ми представляємо граничні поверхні для $0.002 \leq \varepsilon \leq 1.2$, і $n_{\parallel}$, $n_{\perp}$ у області значень від -0.56 до 5. Зазначимо, що у цьому випадку ми дістаємо тривимірний варіант Рис.1 з роботи [307]. Граничні лінії у площині $\varepsilon \rightarrow 0$, описані (6.13), дають нам однопетлеві (тонкі) граничні лінії Рис.1 з роботи [307], у той час як уявні перетини поверхні з площиною $\varepsilon = 1$ можуть дати двопетлеві (товсті) граничні лінії з Рис.1 роботи [460].

Як і у попередньому випадку, на Рис. 6.1b представляємо лінію, що показує області стійкості нерухомих точок для $O(1) \oplus O(2)$ моделі. Для цієї моделі НТ $\mathcal{B}$ є стійкою при $d = 3$. Перевіримо тепер як картина нерухомих точок зміню-

Табл. 6.1. Координати НТ $\mathcal{B}$, НТ $\mathcal{H}$, НТ $\mathcal{D}$ при $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 2$ у залежності від ε .

ε	$u_{\perp}^{\mathcal{B},*}$	$u_{\parallel}^{\mathcal{B},*}$	$u_{\times}^{\mathcal{B},*}$	$u^{\mathcal{H},*}$	$u_{\perp}^{\mathcal{D},*}$	$u_{\parallel}^{\mathcal{D},*}$
1.	1.1277	1.2874	0.30129	1.0016	1.1415	1.3146
0.9	0.91122	1.0039	0.52730	0.84338	0.95694	1.0971
0.8	0.73133	0.77393	0.57994	0.70263	0.79393	0.90630
0.7	0.58335	0.59338	0.55179	0.57712	0.64956	0.73855
0.6	0.45959	0.45020	0.48627	0.46500	0.52143	0.59064
0.5	0.35426	0.33480	0.40484	0.36470	0.40753	0.45998
0.4	0.26340	0.240517	0.31831	0.27489	0.30614	0.34438
0.3	0.18428	0.16274	0.23229	0.19442	0.21583	0.24200
0.2	0.11492	0.098224	0.14969	0.12232	0.13536	0.15131
0.1	0.053862	0.044568	0.072014	0.057750	0.063714	0.071004

ється із зростанням d . Змінюючи просторову вимірність d від 3 до 4 з кроком 0.1, спостерігаємо зміщення НТ $\mathcal{B}$, НТ $\mathcal{H}$, НТ $\mathcal{D}$ у напрямку до гаусової НТ. Ці треки показані на Рис. 6.2 червоними трикутниками, синіми кругами і зеленими квадратами, що показують зміну положення НТ $\mathcal{B}$, НТ $\mathcal{H}$ і НТ $\mathcal{D}$ у $u_{\perp} - u_{\parallel} - u_{\times}$ просторі зі зміною d від 3 до 4. Чисельні значення координат цих нерухомих точок подані у таблиці 6.1. НТ $\mathcal{B}$ зберігає свою стійкість до перетину слідів НТ $\mathcal{B}$ і НТ $\mathcal{H}$, який відбувається при певному граничному значенні суми $(n_{\perp} + n_{\parallel})$, яка залежить від d , тут вона обмінюється стійкістю з НТ $\mathcal{H}$. Тому тільки НТ $\mathcal{H}$ є стійкою, починаючи з точки перетину і до гаусової НТ. Це означає, що у високих вимірностях простору фазова діаграма для випадку $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 2$ завжди має бікритичну точку замість тетракритичної.

На Рис. 6.3 ми позначаємо різниці $u_{\perp}$ -координат трьох пар нерухомих точок: $\mathcal{B} - \mathcal{H}$ (червоний колір), $\mathcal{B} - \mathcal{D}$ (синій колір), $\mathcal{B} - \mathcal{H}$ (зелений колір). Суцільні лінії отримані з пересумовування функцій РГ, у той час як штрихові лінії отримані з ε -розкладів координат нерухомих точок. Як було вже зазначено, технічно важко витягти дані з пересумованих функцій при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однак, як можна бачити з Рис. 6.3, починаючи з деякого значення ε , координати нерухомих точок, отриманих з ε -розкладу, співпадають з отриманими з допомогою пересумовування. Подібні залежності спостерігаються також для $u_{\parallel}$ і $u_{\times}$ координат.

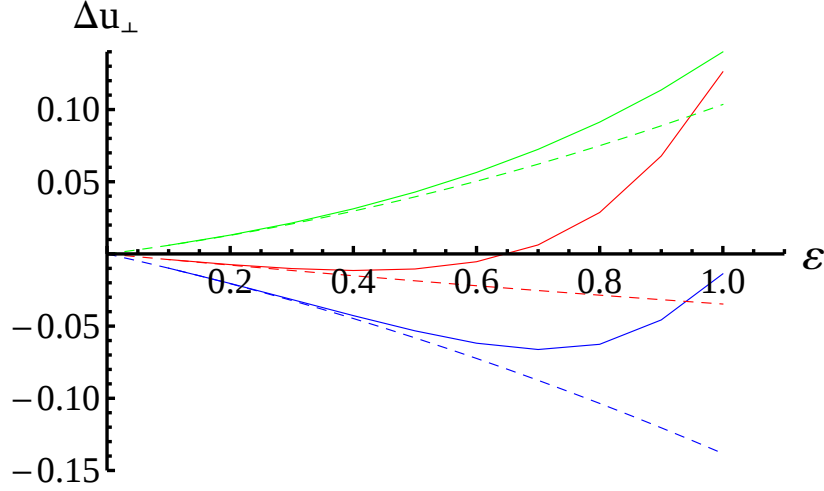


Рис. 6.3. Різниці $u_{\perp}$ -координат НТ $\mathcal{B}$ і НТ $\mathcal{H}$ (червоні лінії), НТ $\mathcal{B}$ і НТ $\mathcal{D}$ (сині лінії), НТ $\mathcal{D}$ і НТ $\mathcal{H}$ (зелені лінії). Суцільні лінії отримуються з пересумовуванням, у той час як штрихові лінії – з допомогою ε -розкладу. Можна бачити, що результати обидвох способів практично співпадають для значень ε нижче $\varepsilon \sim 0.3$.

6.3. Результати високих порядків теорії збурень для граничних вимірностей

Зазначимо, що граничні вимірності $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі можна визначити на підставі результатів РГ у високих порядках теорії збурень для простіших $O(n)$ і кубічної моделі. Зокрема, точні скейлінгові аргументи [84] зв'язують стійкість НТ $\mathcal{D}$ з критичними показниками $O(n_{\perp})$ і $O(n_{\parallel})$ моделей:

$$\omega_2^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(n_{\perp})}{\nu(n_{\perp})} + \frac{\alpha(n_{\parallel})}{\nu(n_{\parallel})} \right) = d - \frac{1}{\nu(n_{\perp})} - \frac{1}{\nu(n_{\parallel})}, \quad (6.19)$$

де $\alpha(n)$ і $\nu(n)$ – це критичні показники теплоємності і кореляційної довжини $O(n)$ моделі.

Для $O(n_{\parallel} + n_{\perp})$ симетричної НТ $\mathcal{H}$ показано, що вона чутлива до збурень типу $\mathcal{P}_{4,4} = \phi_{\perp}^2 \phi_{\parallel}^2 - \frac{\phi^2(n_{\perp} \phi_{\parallel}^2 + n_{\parallel} \phi_{\perp}^2)}{n+4} + \frac{n_{\perp} n_{\parallel} (\phi^2)^2}{(n+2)(n+4)}$ [308]. Отриманий п'ятипетлевий ε -розклад для вимірності РГ цього збурення співпадає з відповідною вимірністю подібного збурення $O(n)$ -симетричної НТ кубічної моделі [308]. Це означає, що стійкість $\mathcal{H}$ визначається граничною вимірністю n_c кубічної моделі. Оскільки у НТ $\mathcal{H}$ перетворення РГ залежить тільки від $n = n_{\perp} + n_{\parallel}$, отримана гранична вимірність може бути представлена у формі $n_{\perp}^{\mathcal{H}}(n_{\parallel}, \varepsilon) = n_c(\varepsilon) - n_{\parallel}$.

Далі ми представимо аналіз граничних вимірностей $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$, $n_{\perp}^{\mathcal{H}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$ на основі відомих п'ятипетлевих рядів схеми мінімального віднімання для функцій РГ $O(n)$ [355, 412] і кубічної моделей [74], а для випадку $d = 3$ на основі рядів на один порядок вищих для цих моделей [77, 461], отриманих у масивній схемі [338].

6.3.1. Пертурбативні ε -розклади п'ятипетлевого порядку для граничних вимірностей

Почнемо з пошуку $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$. Підставляючи п'ятипетлеві ε -розклади $O(n)$ теорії [355, 412] у (6.19) і покладаючи отриманий вираз 0, ми дістаємо рівняння для граничних поверхонь. Утримуючи $n_{\parallel}$ як параметер, можемо отримати ε -розклад для $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$ у такій формі:

$$\begin{aligned}
& n_{\perp}(n_{\parallel}, \varepsilon) \cdot (n_{\parallel} + 2) = 2(16 - n_{\parallel}) - 48\varepsilon + \\
& 8 \left[3\zeta(3) \left(n_{\parallel}^2 + 34n_{\parallel} + 100 \right) + \left(n_{\parallel}^2 + 58n_{\parallel} + 148 \right) \right] R_{n_{\parallel}}^2 \varepsilon^2 + \\
& \left\{ \left(11n_{\parallel}^4 - 920n_{\parallel}^3 - 528n_{\parallel}^2 + 21376n_{\parallel} + 51584 \right) \frac{1}{3} \right. \\
& \left. - 4 \left(106592 + 64480n_{\parallel} + 13548n_{\parallel}^2 + 1258n_{\parallel}^3 + 17n_{\parallel}^4 \right) \frac{\zeta(3)}{3} + \right. \\
& \left. \left[18 \left(100 + 34n_{\parallel} + n_{\parallel}^2 \right) \zeta(4) - 40 \left(550 + 163n_{\parallel} + 7n_{\parallel}^2 \right) \frac{\zeta(5)}{3} \right] R_{n_{\parallel}}^{-2} \right\} R_{n_{\parallel}}^4 \varepsilon^3 + \\
& \left[\left(3n_{\parallel}^6 + 170n_{\parallel}^5 - 43120n_{\parallel}^4 - 442864n_{\parallel}^3 - 2069072n_{\parallel}^2 - 4512896n_{\parallel} - 3457280 \right) \frac{1}{6} - \right. \\
& 50 \left(550 + 163n_{\parallel} + 7n_{\parallel}^2 \right) \zeta(6) R_{n_{\parallel}}^{-4} / 3 + \left(1816192 + 5011904n_{\parallel} + 3131936n_{\parallel}^2 + \right. \\
& \left. \left. 623376n_{\parallel}^3 + 41740n_{\parallel}^4 + 1486n_{\parallel}^5 - n_{\parallel}^6 \right) \frac{\zeta(3)}{3} - \right. \\
& 4 \left(151424 + 131552n_{\parallel} + 15728n_{\parallel}^2 - 1250n_{\parallel}^3 - 17n_{\parallel}^4 - 5n_{\parallel}^5 \right) \frac{\zeta^2(3) R_{n_{\parallel}}^{-1}}{3} - \\
& \left(106592 + 64480n_{\parallel} + 13548n_{\parallel}^2 + 1258n_{\parallel}^3 + 17n_{\parallel}^4 \right) \zeta(4) R_{n_{\parallel}}^{-2} + \\
& \left. \left(4822640 + 2331088n_{\parallel} + 416334n_{\parallel}^2 + 51745n_{\parallel}^3 + 1103n_{\parallel}^4 \right) \frac{\zeta(5) R_{n_{\parallel}}^{-2}}{9} + \right.
\end{aligned}$$

$$49 \left(66320 + 31792n_{\parallel} + 5826n_{\parallel}^2 + 535n_{\parallel}^3 + 17n_{\parallel}^4 \right) \frac{\zeta(7)R_{n_{\parallel}}^{-2}}{2} \Big] R_{n_{\parallel}}^6 \varepsilon^4, \quad (6.20)$$

де $R_{n_{\parallel}} = (n_{\parallel} + 8)^{-1}$. Для конкретних фізичних значень $n_{\parallel}$ вирази для $n_{\perp}$ спрощуються:

$$n_{\perp}(1, \varepsilon) = 10. - 16.\varepsilon + 22.84224\varepsilon^2 - 44.06758\varepsilon^3 + 113.6428\varepsilon^4; \quad (6.21)$$

$$n_{\perp}(2, \varepsilon) = 7. - 12.\varepsilon + 17.76523\varepsilon^2 - 34.18402\varepsilon^3 + 84.07657\varepsilon^4; \quad (6.22)$$

$$n_{\perp}(3, \varepsilon) = 5.2 - 9.6\varepsilon + 14.43837\varepsilon^2 - 28.00490\varepsilon^3 + 67.23923\varepsilon^4. \quad (6.23)$$

Отримані ε -розклади не мають хороших властивостей збіжності. Це можна побачити через зростання коефіцієнтів у (6.21)-(6.23) з ростом порядку за ε , а також з Паде-таблиці [344] для $n_{\perp}(1, 1)$:

$$n_{\perp}(1, 1) = \begin{pmatrix} 10.00000 & 3.84615 & 3.47732 & 2.457596 & 9.66370 \\ -6.00000 & 3.40924 & 3.97282 & 3.11276 & o \\ 16.84224 & 1.7981 & 2.88456 & o & o \\ -27.22534 & 4.5288 & o & o & o \\ 86.4175 & o & o & o & o \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

де числа у колонці K і рядку M представляють результати, отримані на основі Паде-апроксиманти $[K/M]$. Основна діагональ і найближчі до неї паралелі вважаються такими, що мають найкращу збіжність у Паде-таблиці [344]. Однак виявляється, що значення Паде апроксиманти $[2/2]$ основної діагоналі відрізняється від значень Паде-апроксимант $[1/2]$ і $[2/1]$ з найближчих діагоналей приблизно на одиницю, що робить оцінку $n_{\perp}(1, 1)$ неможливою.

Щоб отримати оцінку $n_{\perp}(1, \varepsilon)$, застосуємо пересумовування Паде-Бореля, описане у підрозділі 6.2.2. Отримуємо резольвентний ряд, роблячи підстановку $\varepsilon \rightarrow \varepsilon s$. Для отриманого виразу будемо образ Бореля, тоді апроксимуємо його Паде апроксимантою $[3/1]$. Проводячи інтегрування в оберненому перетворенні Бореля, приходимо до результату поданого на Рис. 6.4 суцільною лінією. Подібним чином ми можемо отримати $n_{\perp}^{\mathcal{H}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$, використовуючи відомий п'ятипетлевий ε -

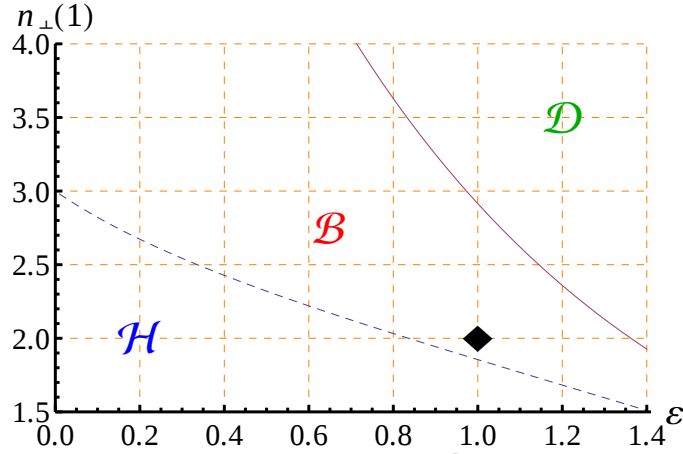


Рис. 6.4. Залежність граничних вимірностей $n_{\perp}^D(1)$ (суцільна лінія) і $n_{\perp}^H(1)$ (штрихова лінія) від ε . Результати отримані на основі п'ятипетлевого розкладу для $O(n)$ і кубічних моделей, використовуючи перетворення Бореля з апроксимантою Паде $[3/1]$ (див. текст). Ромб позначає положення тривимірної $O(1) \oplus O(2)$ системи.

розклад для граничної вимірності кубічної моделі [74]:

$$n_{c=4} - 2\varepsilon + \left(-\frac{5}{12} + \frac{5\zeta(3)}{2}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{15\zeta(4)}{8} - \frac{25\zeta(5)}{3} + \frac{5\zeta(3)}{8} - \frac{1}{72}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{15\zeta(4)}{32} - \frac{125\zeta(6)}{12} + \frac{11515\zeta(7)}{384} - \frac{3155\zeta(5)}{1728} - \frac{229\zeta(3)^2}{144} + \frac{93\zeta(3)}{128} - \frac{1}{384}\right)\varepsilon^4. \quad (6.25)$$

Залежність $n_{\perp}^H(1, \varepsilon) = n_c(\varepsilon) - 1$ від ε отримується пересумовуванням Паде-Бореля з апроксимантою Паде $[3/1]$, результат зображено на Рис. 6.4 штриховою лінією.

Як можна побачити з Рис. 6.4, координати $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі з $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 2$ при $d = 3$ розташовані дуже близько до кривої, що представляє граничну вимірність $n_{\perp}^H(1, \varepsilon)$. У сенсі РГ, це означає дуже повільний підхід до асимптотичного режиму. Тому в експериментах з $O(1) \oplus O(2)$ системами цілком можливо буде спостерігатись ефективна критична поведінка, близька до $O(3)$ моделі [307].

Оцінки у трьох вимірах ми можемо отримати на основі функцій РГ, які для масивної схеми відомі у вищому порядку теорії збурень. Це зроблено у наступному підрозділі.

6.3.2. Випадок $d = 3$

У випадку $d = 3$ ми можемо аналізувати $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(n_{\parallel})$, використовуючи псевдо- ε розклади (детальніше див. [340]). Вводячи псевдо- ε параметер τ у шестипетлеві функції РГ масивної схеми при фіксованому $d = 3$ [461] для $O(n)$ моделі, можна отримати критичні показники у формі псевдо- ε розкладів і тоді підставити їх у рівняння (6.19). З умови рівності (6.19) нулю знаходимо псевдо- ε розклад для $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(n_{\parallel})$. Отриманий вираз для $n_{\perp}$ і $n_{\parallel}$ є складнішим, ніж (6.20), щоб його повністю тут привести. Подамо результати, отримані при певних фіксованих $n_{\parallel}$:

$$n_{\perp}(1) = 10 - 10.6667\tau + 5.1307\tau^2 - 2.3075\tau^3 + 1.6953\tau^4 - 1.9828\tau^5; \quad (6.26)$$

$$n_{\perp}(2) = 7 - 8\tau + 3.9947\tau^2 - 1.7643\tau^3 + 1.14039\tau^4 - 1.2082\tau^5; \quad (6.27)$$

$$n_{\perp}(3) = 5.2 - 6.4\tau + 3.2482\tau^2 - 1.4625\tau^3 + 0.8483\tau^4 - 0.8431\tau^5. \quad (6.28)$$

Псевдо- ε розклади мають кращі властивості збіжності, як відомо з інших досліджень [29, 73, 82]. Це можна побачити з коефіцієнтів рядів (6.26)-(6.28), а також з порівняння Паде-таблиці (6.24) з наступною:

$$n_{\perp}(1) = \begin{pmatrix} 10. & 4.83871 & 3.71557 & 3.28816 & 3.15412 & 3.03911 \\ -0.66667 & 2.79767 & 2.86825 & 3.08054 & 2.06446 & o \\ 4.46402 & 2.87235 & 2.77425 & 2.98540 & o & o \\ 2.15650 & 3.13379 & 3.00730 & o & o & o \\ 3.85176 & 2.93787 & o & o & o & o \\ 1.86895 & o & o & o & o & o \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Значення Паде-апроксимант $[2/2]$ і $[2/3]$ однозначно вказує, що $n_{\perp}(1) < 2$.

Однак не можна виключати можливість полюсів у знаменнику апроксимант Паде, які роблять результати недостовірними. Як приклад ми представимо тут Паде-таблицю для $n_{\perp}(3)$:

$$n_{\perp}(3) = \begin{pmatrix} 5.2 & 2.33103 & 1.66618 & 1.39450 & 1.26698 & 1.18233 \\ -1.2 & 0.95463 & 1.03190 & 1.10415 & 0.95279 & o \\ 2.04817 & 1.03973 & -0.44741 & 1.06229 & o & o \\ 0.58569 & 1.12258 & 1.07045 & o & o & o \\ 1.43401 & 1.01115 & o & o & o & o \\ 0.59087 & o & o & o & o & o \end{pmatrix},$$

де число меншим шрифтом позначає результати для апроксиманти $[2/2]$ з полюсом $\tau = 0.944$.

Оцінку для $n_{\perp}^{\mathcal{D}}(1)$ знаходимо за допомогою процедури Паде-Бореля з апроксимантою Паде $[4/1]$, отримуючи значення 2.9813.

Значення $n_{\perp}^{\mathcal{H}}(1)$ дістаємо з відомої оцінки, отриманої на основі шестипетлевого псевдо ε -розкладу $n_c = 2.862$ [29], віднімаючи одиницю, що приводить до результату $n_{\perp}^{\mathcal{H}}(1) = 1.862$.

6.4. Висновки

У цьому розділі ми вивчили умови, при яких для $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі реалізуються різні типи мультикритичної поведінки. Ці типи пов'язані з трьома нерухомими точками $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$, стійкість яких визначається зв'язком між вимірностями параметрів порядку і просторовою вимірністю. Використовуючи ε -розклад для двопетлевих β -функцій, отриманих у схемі мінімального віднімання, ми отримали граничні поверхні, що розділяють області у параметричному просторі $n_{\parallel} - n_{\perp} - \varepsilon$, де різні нерухомі точки є стійкими. Подібні граничні поверхні ми також дістали, застосовуючи процедуру пересумовування до тих самих β -функцій. Аналіз отриманих даних для випадку $O(1) \oplus O(2)$ підтверджує результат попередніх досліджень, що нерухомі точки, які асоціюються з тетракритичною поведінкою, є стійкими у випадку $d = 3$. У вищих просторових вимірностях стійкою є, однак, $O(n_{\parallel} + n_{\perp})$ симетрична НТ, яка асоціюється з бікритичною поведінкою.

Аналіз був продовжений у наближеннях з вищою кількістю петель теоретико-польової РГ. На цьому етапі використовувались скейлінгові аргументи, що пов'язують стійкість нерухомих точок $O(n_{\parallel}) \oplus O(n_{\perp})$ моделі з універсальними величинами простіших $O(n)$ та кубічної моделей. Експлуатуючи п'ятипетлеві вирази для $O(n)$ моделі, ми дістали ε -розклад для граничної вимірності $n^{\mathcal{D}}(n_{\parallel}, \varepsilon)$, що розділяє області стійкості для НТ $\mathcal{D}$ і НТ $\mathcal{B}$. Застосовуючи до цього результату процедуру пересумовування, отримали залежність $n^{\mathcal{D}}(1, \varepsilon)$ від ε . Використовую-

чи п'ятипетлеві вирази для кубічної моделі, ми дістали подібний результат для $n^{\mathcal{H}}(1, \varepsilon)$, що розділяє області стійкості для НТ $\mathcal{H}$ і НТ $\mathcal{B}$. Згідно з отриманими результатами тривимірна система $O(1) \oplus O(2)$ у параметричному просторі розташована дуже близько до лінії $n^{\mathcal{H}}(1, \varepsilon)$, що означає дуже повільний підхід до асимптотичного режиму. Тому в експериментах ефективна критична поведінка може спостерігатись з неасимптотичними критичними показниками $O(3)$ системи. На закінчення ми доповнили наші результати тривимірними оцінками $n^{\mathcal{D}}(1)$ і $n^{\mathcal{H}}(1)$, отриманими на основі псевдо- ε розкладів, які були виведені у рамках шестипетлевого наближення РГ.

РОЗДІЛ 7

ФАЗОВИЙ ПЕРЕХІД У МАГНЕТИКАХ З НЕКОЛІНЕАРНИМ ВПОРЯДКУВАННЯМ

Цей розділ присвячений встановленню роду ФП у магнетиках з неколінеарним впорядкуванням. Зокрема, неколінеарне впорядкування реалізується у гелімагнетиках та шаруватих фрустрованих магнетиках на трикутній ґратці. Вони описуються в теорії поля моделлю з матричним параметром порядку та симетрією $O(n) \times O(m)$ з фізичною реалізацією для $m = 2$ та $n = 2$ і $n = 3$. У першому підрозділі проведено аналіз критичних показників, які отримані в підході пертурбативної теоретико-польової РГ з застосуванням процедури пересумовування до рядів теорії збурень на залежність від параметрів пересумовування. На основі порівняння з подібними результатами для моделей з добре встановленою картиною критичної поведінки зроблено висновок про рід ФП для тривимірних фрустрованих систем. Подібний аналіз і порівняння зроблені й для двовимірних систем у другому підрозділі. Висновок про рід ФП підтверджено оцінкою граничної вимірності $n_c(d)$, розрахованої у рамках НПРГ у третьому підрозділі. Основні результати цього розділу викладені у роботах [43, 44, 48, 64].

7.1. Теоретико-польова $O(n) \times O(2)$ модель та підхід при фіксованій вимірності простору

Переважає більшість робіт у теоретико-польовому дослідженні критичних явищ спрямована на отримання детального опису поведінки в околі неперервного фазового переходу. При чому саме існування фазового переходу є добре встановленим фактом. У цьому розділі ми розглянемо систему, для якої навіть існування

фазового переходу другого роду не є встановленим і теоретико-польова РГ використовується для вивчення цього питання. Нас цікавитиме існування неперервного фазового переходу для моделі фрустрованого магнетика з тензорним параметром порядку і симетрією $O(n) \times O(2)$. Зокрема, при $n = 2$ та $n = 3$ ця модель описує шаруваті антиферромагнетики на трикутній ґратці (див. підрозділ 1.3.2 у оглядовому розділі). Як описано у згаданому підрозділі, результати попередніх досліджень не дозволяють зробити однозначний висновок про рід фазового переходу.

Як вже неодноразово наголошувалось, якщо модель, досліджувана методами РГ, має стійку НТ, яка є досяжною з параметрів вихідного мікроскопічного Гамільтоніану, то ФП, якому відповідає ця НТ, є другого роду. Проте, як показано нижче, може виявитись, що іноді виявлена НТ не має фізичного сенсу і є лише математичним артефактом. У такому випадку робити будь-який висновок на основі такої НТ безглуздо. Ми називаємо такі точки хибними (spurious) нерухомими точками.

Теоретико-польовий ефективний гамільтоніан для спінових фрустрованих систем (Рис. 1.3) отримується, як і для звичайних $O(n)$ систем, за допомогою перетворення Стратановича-Габбарда [24]. Однак тут є суттєва різниця: у $O(n)$ системах розклад гаусової частини у Фур'є-просторі відбувається навколо мінімуму в центрі зони Брілюена при $\mathbf{k} = 0$. Особливістю фрустрованих систем є те, що для них в центрі зони Брілюена є максимум і два незалежні мінімуми на кінцях зони. Тому у цьому випадку відбувається розбиття зони Брілюена на дві підзони, які описуються векторами $\vec{\phi}_1(\mathbf{k})$ та $\vec{\phi}_2(\mathbf{k})$, та перегрупування цих підзон, так що у новій зоні мінімум вже у центрі зони. В результаті у дійсному просторі ефективний гамільтоніан записується [24, 321, 322, 462] таким чином:

$$\mathcal{H} = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2} \left[(\partial \vec{\phi}_{1,0})^2 + (\partial \vec{\phi}_{2,0})^2 + \mu_0^2 (\vec{\phi}_{1,0}^2 + \vec{\phi}_{2,0}^2) \right] + \right. \\ \left. \frac{u_0}{4!} [\vec{\phi}_{1,0}^2 + \vec{\phi}_{2,0}^2]^2 + \frac{v_0}{12!} [(\vec{\phi}_{1,0} \cdot \vec{\phi}_{2,0})^2 - \vec{\phi}_{1,0}^2 \vec{\phi}_{2,0}^2] \right\} \quad (7.1)$$

з двома n -компонентними полями: $\vec{\phi}_{1,0}$, $\vec{\phi}_{2,0}$.

Для ХУ ($n = 2$) і гайзенберґівських ($n = 3$) фрустрованих магнетиків, стій-

ка НТ була знайдена у рамках теоретико-польового пертурбативного підходу при фіксованій вимірності простору d [139, 319, 325, 326], що за звичай інтерпретується як існування ФП другого роду. Однак це не підтверджується ні пертурбативними ε - [24, 80, 327] та псевдо- ε розкладами [82, 327], ні підходом непертурбативної РГ [309, 331, 332, 334]. Аргументи роботи [319], де була знайдена така НТ, недавно піддавались сумніву у рамках схеми мінімального віднімання [335, 463]. Тут ми продовжимо аналіз нетривіальних нерухомих точок, які з'являються у фрустрованій моделі, способом, започаткованим у роботах [335, 463]. Працюючи у масивній схемі, ми розглядаємо цю проблему у загальному контексті нерухомих точок, знайдених у підходах при фіксованому d в задачах теорії типу ϕ^4 . Ми використаємо метод пересумовування, застосований у [325], і вивчимо характеристики хибної НТ $O(n)$ моделі, таким чином показуючи характеристики таких точок. Продовжимо цей аналіз для моделі з двома константами зв'язку з встановленою критичною поведінкою, якою є кубічна модель. Це дозволить класифікувати нерухомі точки, отримані у цих моделях, та порівняти їх з результатами дослідження фрустрованої моделі.

Аналіз пертурбативних β -функцій може виконуватися двома взаємодоповнюючими способами. Тут нас більше цікавить підходом при фіксованому d . У цьому підході апіорно не можна відкинути жоден дійсний розв'язок рівняння на НТ (див. у вступі р-ня (1.64)) на відміну від розкладів у ε і псевдо- ε , де, за визначенням, єдиною фізичною НТ є така, для якої $u^* \sim \varepsilon$ або τ . Як результат, число нерухомих точок у підході при фіксованому d , а також їх стійкість міняється з порядком петлевого наближення: при даному порядку може існувати декілька дійсних та стійких нерухомих точок або ні однієї, замість єдиної. Цей артефакт підходу при фіксованому d є відомим і був вперше спостережений для масивної схеми при $d = 3$ [338]. Спосіб вирішення також є відомим: пертурбативна β -функція повинна бути пересумована (див., наприклад, [343] та [6–9]). Передбачається, що пересумовування не тільки відновить НТ Вільсона-Фішера, коли вона втрачається, але й усуне хибні. Можливість процедури пересумовування зазвичай не піддається сумніву. Однак, як ми показуємо, на прикладі моделей $O(n)$, а по-

тім для більш загальних моделей, хибні нерухомі точки можуть існувати навіть після пересумовування. Тому потрібні деякі додаткові критерії для того, щоб їх усунути. Ми описуємо ці критерії нижче.

У схемі мінімального віднімання метод при фіксованому d застосовувався у роботах [341, 342], де ε зафіксовують при 1, і у рамках масивної схеми розрахунки були виконані у $d = 2$ і $d = 3$ в роботах [338, 391, 392]. Зазначимо тут, що підхід при фіксованому d не обов'язково означає, що просторова вимірність d ціла: у схемі мінімального віднімання можна виконувати розрахунки для фіксованого нецілого числа ε , а також у масивному перенормуванні можна отримати петлеві інтеграли для нецілих d [383, 385].

7.1.1. Процедура пересумовування

Як неодноразово зазначалось, ряди терії збурень для РГ функцій, отримані у моделях теорії поля, зокрема, і для $O(n)$ моделі, відомі своєю розбіжністю [7, 343]. Вони є асимптотичними рядами, які, у випадку масивної схеми з нульовим імпульсом, є сумовні за Борелем [464]. На відміну від попередніх розділів, тут ми будемо застосовувати процедуру, яка ґрунтується на використанні конформного відображення. Тому далі опишемо цю процедуру.

Для ряду вигляду (1.70) запишемо суму Бореля-Леруа, яка задається:

$$B(u) = \sum_l \frac{a_l}{\Gamma[l + b + 1]} u^l, \quad (7.2)$$

де b є параметром, значення якого буде прояснене пізніше.

Результуючі ряди тепер будуть збіжними у комплексній площині, усередині кола з радіусом $1/a$, де $u = -1/a$ є сингулярністю $B(u)$, найближчою до початку координат. Тоді, використовуючи це означення, а також, що $\Gamma[l + b + 1] = \int_0^\infty s^{l+b} e^{-s} ds$, можна записати:

$$f(u) = \sum_l \frac{a_l}{\Gamma[l + b + 1]} u^l \int_0^\infty ds e^{-s} s^{l+b}. \quad (7.3)$$

Переставляючи сумування й інтегрування, можна тепер *означити* перетворення Бореля f як:

$$f_B(u) = \int_0^{\infty} ds e^{-s} s^b B(us) . \quad (7.4)$$

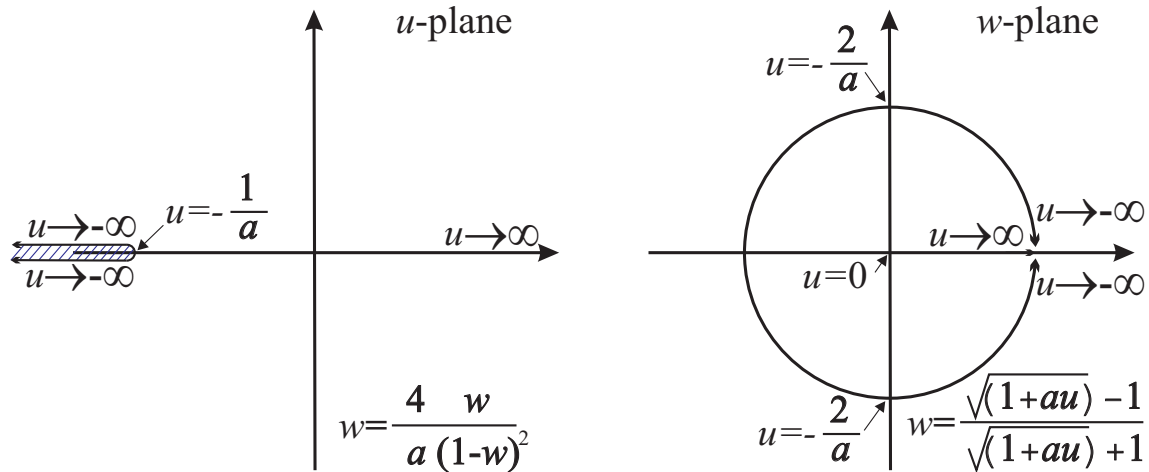


Рис. 7.1. Метод конформного відображення площини з розрізом на диск. Для опису див. текст.

Для того, щоб взяти інтеграл (7.4) на дійсній додатній півосі, потрібно знайти аналітичне продовження $B(u)$. Можна використати декілька методів. Одним з них є використання апроксимант Паде [96, 344, 392]. Однак, як правило, ефективнішим методом вважається використання конформного відображення [340, 465], оскільки воно використовує властивості збіжності борелевської суми. Припустивши, що всі сингулярності $B(u)$ лежать на від'ємній дійсній осі, і те, що сума Бореля-Леруа аналітична у всій комплексній площині, крім розрізу від $1/a$ до $-\infty$, можна зробити заміну змінної:

$$w(u) = \frac{\sqrt{1+au} - 1}{\sqrt{1+au} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad u(w) = \frac{4}{a} \frac{w}{(1-w)^2}, \quad (7.5)$$

як показано на Рис. 7.1. Ця заміна переводить розріз у комплексній площині від $u = -1/a$ до $u = -\infty$ у границю круга одиничного радіусу в w -площині. Тепер сингулярності $B(u)$, що лежали на негативній осі, лежать на колі $|w| = 1$. Отриманий вираз $B(u(w))$ має збіжний розклад Тейлора у межах одиничного кола

$|w| < 1$ і його можна переписати:

$$B(u(\omega)) = \sum_l d_l(a, b) [w(u)]^l, \quad (7.6)$$

де коефіцієнти $d_l(a, b)$ розраховані так, що розклад правої частини (7.6) за степенями u співпадає з (1.70). Можна отримати через (7.6) аналітичне продовження $B(u)$ у цілу розрізану площину u так, що пересумований вираз ряду f можна записати:

$$f_R(u) = \sum_l d_l(a, b) \int_0^\infty ds e^{-s} s^b [w(us)]^l. \quad (7.7)$$

На практиці цікаво узагальнити (7.7), вводячи такий вираз [466]:

$$f_R(u) = \sum_l d_l(\alpha, a, b) \int_0^\infty ds e^{-s} s^b \frac{[w(us)]^l}{[1 - w(us)]^\alpha}, \quad (7.8)$$

значення якого буде пояснене нижче.

Якщо ряд відомий у всіх порядках теорії збурень, вираз (7.8) буде незалежним від параметрів a , b і α . Однак, якщо відоме тільки скінченне число членів ряду, $f_R(u)$ набуває залежності від цих параметрів. В принципі, параметри a і b фіксуються поведінкою ряду у високих порядках:

$$a_{l \rightarrow \infty} \sim (-a_{l_0})^l l! l^{b_{l_0}}, \quad (7.9)$$

яка приводить до $a = a_{l_0}$ і $b \gtrsim b_{l_0} + 3/2$ [340], де a_{l_0} і b_{l_0} позначають значення у високих порядках a і b . Значення α визначається асимптотикою початкового ряду для сильного зв'язку:

$$f(u \rightarrow \infty) \sim u^{\alpha_0/2}, \quad (7.10)$$

яка може бути накладена при будь-якому порядку розкладу вибором $\alpha = \alpha_0$. Припускається, що вищезазначений вибір a , b і α покращує збіжність процедури пересумовування, оскільки він закодує точні результати.

Однак ми хочемо наголосити, що часто тільки a є відомим, а інші параметри α і b потрібно розглядати як вільні параметри (як, наприклад, у [319]) або

варіаційні (як, наприклад, у [335, 467], де α визначається з оптимізування явної збіжності рядів). У будь-якому випадку вибір значення a , α і b пізніше потрібно верифікувати.

Процедуру, описану вище, можна узагальнити на випадок декількох змінних. Наприклад, коли f є функцією двох змінних u і v , у процедурі пересумовування функцію f можна розглядати як функцію u та частки $z = v/u$ [75, 319, 325, 468, 469] :

$$f(u, z) = \sum_l a_l(z) u^l. \quad (7.11)$$

Тоді, зафіксувавши певне значення для z і проводячи пересумовування за u згідно кроків (7.2)–(7.8), отримуємо:

$$f_R(u, z) = \sum_l d_l(\alpha, a(z), b; z) \int_0^\infty ds e^{-s} s^b \frac{[w(ut; z)]^l}{[1 - w(ut; z)]^\alpha} \quad (7.12)$$

з:

$$w(u; z) = \frac{\sqrt{1 + a(z)} u - 1}{\sqrt{1 + a(z)} u + 1}, \quad (7.13)$$

де, як і вище, коефіцієнти $d_l(\alpha, a(z), b, z)$ у (7.12) розраховуються таким чином, щоб розклад правої частини (7.12) за степенями u співпадав з розкладом (7.11).

7.1.2. Принципи збіжності

Залежність критичних показників від параметрів a, b та α є показником (не) збіжності пертурбативних рядів. Дійсно, в принципі, будь-яка збіжна фізична величина Q повинна бути незалежною від цих параметрів. Однак, на практиці, при заданому порядку наближення L (числі петель) усі фізичні величини від них (штучно) залежатимуть: $Q \rightarrow Q^{(L)}(a, b, \alpha)$. Навіть, якщо для a можна вибрати значення, отримане з поведінки у великих порядках теорії збурень, усі фізичні величини залишаються залежними від b і α у скінченних порядках. Ми вважаємо, що оптимальний результат для Q у порядку L відповідає значенням $(b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)})$,

для яких Q найслабше залежить від b і α , тобто, для яких вона стаціонарна:

$$Q_{\text{opt}}^{(L)} = Q^{(L)}(b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)}) \quad \text{з} \quad \left. \frac{\partial Q^{(L)}(b, \alpha)}{\partial b} \right|_{b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)}} = \left. \frac{\partial Q^{(L)}(b, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)}} = 0, \quad (7.14)$$

де, звичайно, $b_{\text{opt}}^{(L)}$ і $\alpha_{\text{opt}}^{(L)}$ є функціями порядку L .

Перевірка цієї процедури, відома як *принцип мінімальної чутливості* (principle of minimal sensitivity – PMS), вимагає існування унікальної пари значень $(b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)})$, для якої $Q^{(L)}$ стаціонарна. В загальному це не спостерігається: часто зустрічаються декілька стаціонарних точок. Другий принцип дозволяє нам “оптимізувати” результати навіть у тому випадку, коли існує декілька “оптимальних” значень b і α у заданому порядку L : це так званий *принцип найшвидшої явної збіжності* (principle of fastest apparent convergence – PFAC). Ідея, що лежить в основі цього принципу, полягає у тому, що коли чисельне значення $Q^{(L)}$ майже збігається (тобто L є достатньо великим для досягнення заданої точності), наступний порядок наближення повинен давати лише невеликі зміни цього значення: $Q^{(L+1)} \simeq Q^{(L)}$. Таким чином, бажані значення b та α повинні бути такими, для яких різниця між двома послідовними порядками $Q^{(L+1)}(b^{(L+1)}, \alpha^{(L+1)}) - Q^{(L)}(b^{(L)}, \alpha^{(L)})$ мінімальна. На практиці ці два принципи повинні використовуватися разом для узгодженості та, якщо є декілька розв’язків рівняння (7.14), для L і/або $L + 1$ слід вибрати пари $(b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)})$ і $(b_{\text{opt}}^{(L+1)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L+1)})$, для яких стаціонарні значення $Q^{(L)}(b_{\text{opt}}^{(L)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L)})$ і $Q^{(L+1)}(b_{\text{opt}}^{(L+1)}, \alpha_{\text{opt}}^{(L+1)})$ найближчі, тобто для яких є найшвидша очевидна збіжність. Ці принципи були розроблені в роботах [335, 340, 467].

7.2. Дослідження нерухомих точок для моделей теорії поля у трьох вимірах

7.2.1. $O(n)$ симетрична модель у трьох вимірах

Враховуючи вищеописану процедуру пересумовування, покажемо, що вона не завжди усуває нефізичні нерухомі точки навіть у найпростішій моделі ϕ^4

у $d = 3$. Розгляньмо β_u -функцію, отриману в рамках масивної схеми у чотири-, п'яти- та шестипетлевому наближенні [461]. Як було помічено в [338], непересумована функція β_u не має нетривіального кореня у парних порядках теорії збурень. Застосовуючи процедуру пересумовування, описану рівняннями (7.2)–(7.8), знаходимо НТ Вільсона-Фішера $\mathbf{P}$, близько до початку координат (див. Рис. 7.2). Існує велика кількість досліджень НТ $\mathbf{P}$, і її властивості є добре відомі (див., наприклад, [6–11] та посилання у них). Проте ми також знаходимо для більших u , крім $\mathbf{P}$, нову НТ (у парних порядках наближення за кількістю петель) для деяких значень α і b , позначену $\mathbf{S}$ на Рис. 7.2. Хоча ця НТ нестійка, вона змінює структуру потоку РГ, і, якщо її трактувати всерйоз, вона відповідатиме трикритичній НТ. Однак для розглядуваної моделі структура нерухомих точок є добре встановлена [6–9], і ця додаткова НТ повинна розглядатися як артефакт підходу при фіксованому d .

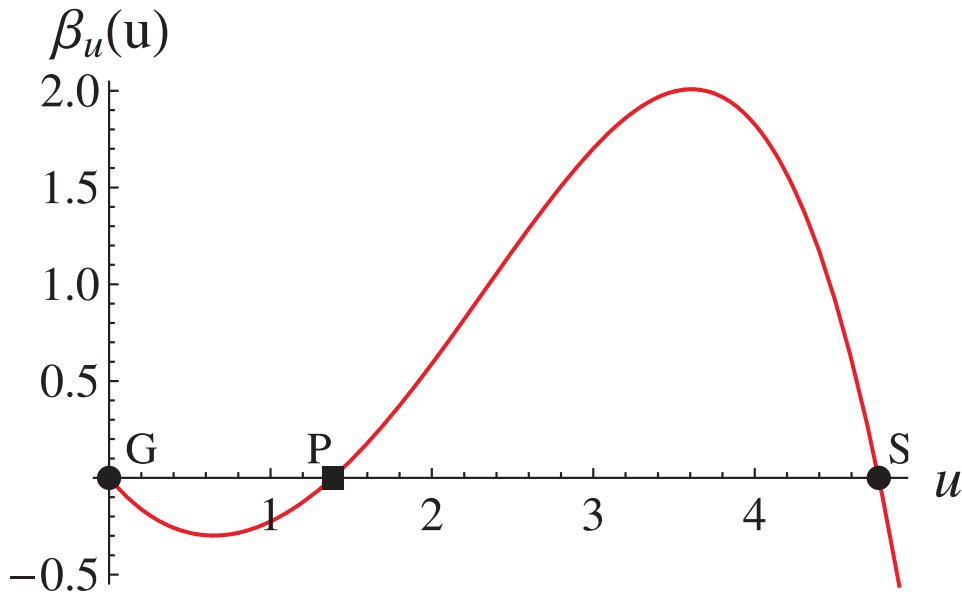


Рис. 7.2. Пересумована функція $\beta_u(u)$ для $O(4)$ моделі при $\alpha = 6$ і $b = 4$. Круги позначають нестійкі НТ $\mathbf{G}$ і НТ $\mathbf{S}$, у той час як квадрат відповідає стійкій НТ $\mathbf{P}$.

Порівняємо властивості стійкості критичних показників, розрахованих для $\mathbf{P}$ і $\mathbf{S}$. Тут розглянемо показник стікості ω , який є першою поправкою до скейлінгу. Ми обчислюємо його в $\mathbf{P}$ і $\mathbf{S}$ з пересумованої β_u -функції і досліджуємо його стійкість по відношенню до наближення кількості петель L і по відношенню

до зміни параметрів пересумовування b і α . Зауважте, що, хоча асимптотика у високих порядках цього ряду відома і дає значення параметру a [416, 417], цей параметр можна вважати вільним, а також вивчати стійкість всіх результатів по відношенню до його зміни. Ми вибрали зафіксувати a і змінювати b і α , щоб задовольнити PMS і PFAC, в кінці перевірити стійкість наших результатів щодо малих змін a .

НТ Вільсона-Фішера

Спочатку розглянемо ω для НТ Вільсона-Фішера **P**. Для моделей $O(n)$ аналітично розраховане значення a , як відомо, становить $a = 0.14777422 \times 9/(n+8)$ [340], і ми використовуємо його у нашому аналізі.

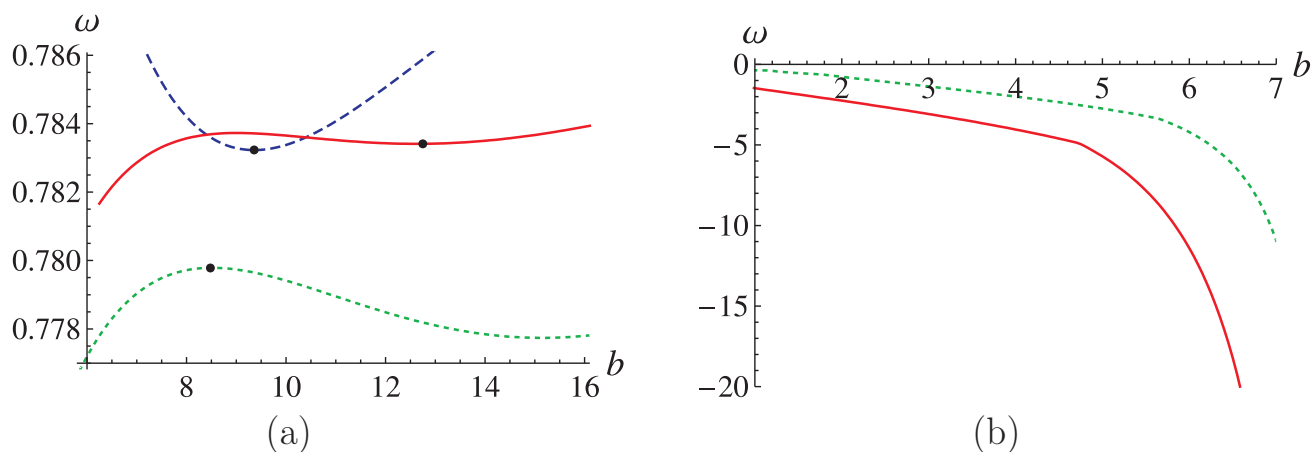


Рис. 7.3. Показник ω тривимірної $O(4)$ моделі як функція параметру пересумовування b розрахована в (a) НТ **P** і (b) НТ **S**. Результати для НТ **P** представлені для чотири- (зелена пунктирна крива), п'яти- (синя штрихова крива), шестипетлевих (суцільна червона крива) порядків. Точки для кожного петлевого порядку відповідають стаціонарному значенню $\omega = \omega(\alpha, b)$ для обох α і b напрямків одночасно ($L = 4$: $\alpha = 3.2$, $b = 8.5$, $L = 5$: $\alpha = 5.2$, $b = 9.5$, $L = 6$: $\alpha = 5$, $b = 13$), при цих значеннях спостерігається найшвидша явна збіжність між двома послідовними петлевими порядками. Результати для НТ **S** представлені у шести- і чотирипетлевому наближенні з $\alpha = 6$. Не знайдено стаціонарних точок. Показник ω від'ємний, оскільки **S** нестійка.

Результати наших розрахунків подані на малюнку 7.3 (a), де показано показник ω для $n = 4$ ($a = 0.110831$) як функцію параметра b для значень α , для яких стаціонарність знайдена як для b , так і для α . Значення, отримані для чотири-

п'яти- і шестипетлевого наближення, дуже близькі. Індикатором якості збіжності є різниця між п'ятим і шостим порядками: $\omega(L = 6) - \omega(L = 5) \simeq 2 \cdot 10^{-4}$. Наша шестипетлева оцінка – $\omega \simeq 0.783$. Цей результат співставний з іншими результатами для $O(n)$ моделі [10], отриманими для $n = 4$: $\omega = 0.774 \pm 0.020$ (фіксоване $d = 3$, шість/сім петель); $\omega = 0.795 \pm 0.030$ (ε -розклад, п'ять петель), що є перевіркою надійності як схеми пересумовування, так і критеріїв збіжності, що використовуються тут. Зверніть увагу, що цей випадок також ілюструє ситуацію, коли (у шестипетлевому порядку) виникають декілька стаціонарних точок, і де РFАС дозволяє вибрати один розв'язок, див. Рис. 7.3 (а).

Примітно, що те саме дослідження, проведене для інших критичних показників, інших значень n і навіть з іншими пертурбативними рядами (отриманими у схемі мінімального віднімання), завжди приводить до якісно подібних результатів зі значеннями виявлених показників, які дуже близькі до найбільш відомих значень, отриманих з симуляцій МК. Це доводить, що наведена методологія дійсно ефективна.

Нарешті, зауважте, що той самий аргумент також можна застосувати до визначення оптимального значення, a_{opt} , з застосуванням PMS до параметра a : якщо пересумований ряд є збіжним, ми очікуємо, що a_{opt} майже збігається з величиною, визначеною з аналізу великих порядків, p -ня (7.9), $a_{\text{opt}} \simeq a_{\text{lo}}$. Різниця між цими величинами може служити мірою збіжності ряду. Ми показуємо на Рис. 7.4 на прикладі моделі $O(4)$ в $d = 3$, що, як і очікувалося, значення a_{opt} дуже близьке до a_{lo} і різниця між $\omega(a_{\text{opt}})$ та $\omega(a_{\text{lo}})$ надзвичайно мала.

Хибна НТ

Тепер проаналізуємо ω для НТ **S**. Як і очікувалося, показники, розраховані у цій НТ, дуже чутливі до змін параметрів пересумовування. Зокрема, результати, розраховані для **S**, дуже нестійкі щодо зміни параметрів α і b . У цьому випадку не знайдено стаціонарних точок як для b , так і для α . Щоб показати залежність ω від b у різних петлях ми вибрали дане типове значення α , див. Рис. 7.3 (b). Спостерігається монотонне зменшення ω при збільшенні b . При фіксованих зна-

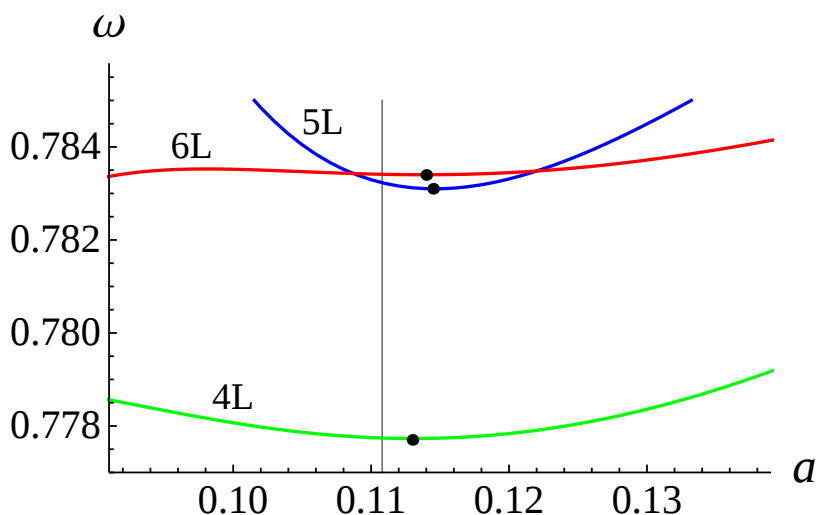


Рис. 7.4. Показник ω тривимірної $O(4)$ моделі як функція параметру пересумовування a у чотирьох (4L), п'яти (5L) і шести (6L) петлях. Вертикальна лінія відповідає $a = a_{lo} \simeq 0.1108$. Значення, вибрані для α і b є такими, що ω є стаціонарним по відношенню до α і b , коли $a = a_{lo}$ (див. Рис. 7.3 (a)). Зазначте, що $\omega(a_{opt}) \simeq \omega(a_{lo})$.

ченнях α і b , крім того, знаходимо, що $|\omega|$ зростає з порядком петель. Монотонною є поведінка критичних показників ω та η зі зміною a (див. Рис. 7.5) .

Спостережені особливості поведінки за нашими критеріями достатні для того, щоб відкинути цю точку. Зверніть увагу, що тут існування хибної НТ залежить від парності L .

На прикладі тривимірної $O(4)$ моделі на Рис. 7.5 показано, що поряд зі звичайною стійкою НТ Вільсона-Фішера існує хибна (нестійка) НТ. Як і очікувалося, показники, розраховані у цій НТ, дуже чутливі до змін параметрів пересумовування a (така сама поведінка спостерігається, коли враховується зміна b).

Можливі труднощі з цією процедурою полягають у тому, що для складніших моделей з декількома константами зв'язку, процедура пересумовування ймовірно менш ефективна, ніж для моделей $O(n)$. У цьому випадку нестійкість, яку демонструє хибна НТ, може бути значно слабшою, ніж для моделей $O(n)$. Тому далі розглянемо кубічну модель, яка має дві константи зв'язку і критична поведінка якої теж добре досліджена.

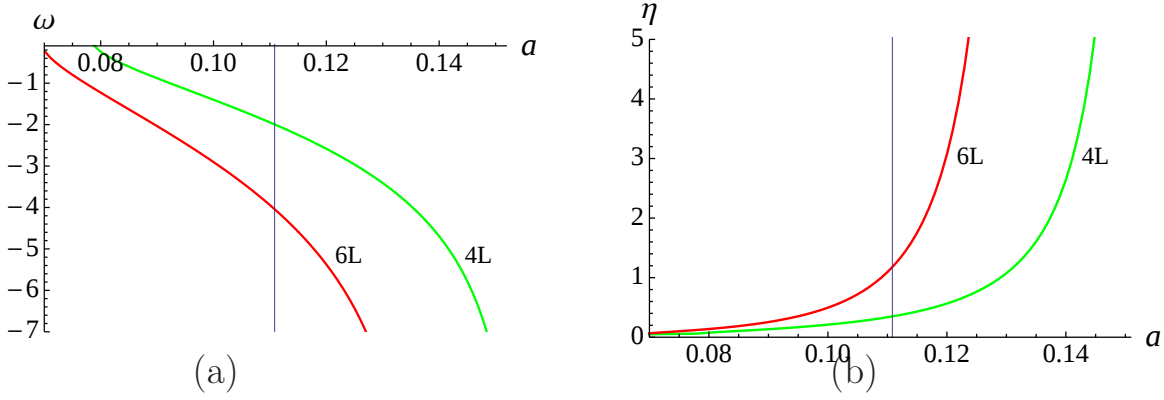


Рис. 7.5. Показники ω (a) і η (b) як функції a при хибній НТ $O(4)$ моделі у $d = 3$ у чотирьох (4L) і шести (6L) петлях. Вертикальна лінія відповідає $a = a_{10} \simeq 0.1108$. Розглядувані значення для α і b дорівнюють 6 і 4, відповідно. Інші значення дають подібні результати. Показник ω є від'ємним, оскільки хибна НТ є нестійкою.

7.2.2. Кубічна анізотропія

Попередній підрозділ був присвячений вивченню моделі ϕ^4 з однією константою зв'язку. Тепер розглянемо складнішу модель з двома константами зв'язку, а саме ту, яка описує кубічну анізотропію. Ефективний гамільтоніан для цієї моделі записується [470]:

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial\phi_0)^2 + \mu_0^2 \phi_0^2] + \frac{u_0}{4!} [\phi_0^2]^2 + \frac{v_0}{4!} \sum_{i=1}^n \phi_0^{i^4} \right\}. \quad (7.15)$$

Гамільтоніан (7.15) використовується для вивчення критичної поведінки численних магнітних та сегнетоелектричних систем з відповідною симетрією параметра порядку (див., наприклад, [77]). Знайдені β -функції у шестипетлевому порядку в масивній схемі [75]. Структура їх нерухомих точок відома [84, 470]. Обидві НТ **G** ($u^*=v^*=0$) і ізінгівська НТ ($u^*=0, v^*\neq 0$) нестійкі для усіх значень n . Дві інші точки: $O(n)$ -симетрична НТ **P** ($u^*\neq 0, v^*=0$) і змішана НТ **M** ($u^*\neq 0, v^*\neq 0$), обмінюються своєю стійкістю при критичному значенні n_c : для $n < n_c$ НТ **P** стійка, а **M** нестійка, а для $n > n_c$ навпаки. Критичне значення n_c виявляється меншим 3: знайдені значення $n_c = 2.89 \pm 0.04$ у [75] і $n_c = 2.862 \pm 0.005$ в [77].

Далі проводимо аналіз стійкості для випадків $n = 2$, $n = 3$, аналогічний зробленому для $O(n)$ випадку. Для шестипетлевих масивних функцій, отриманих

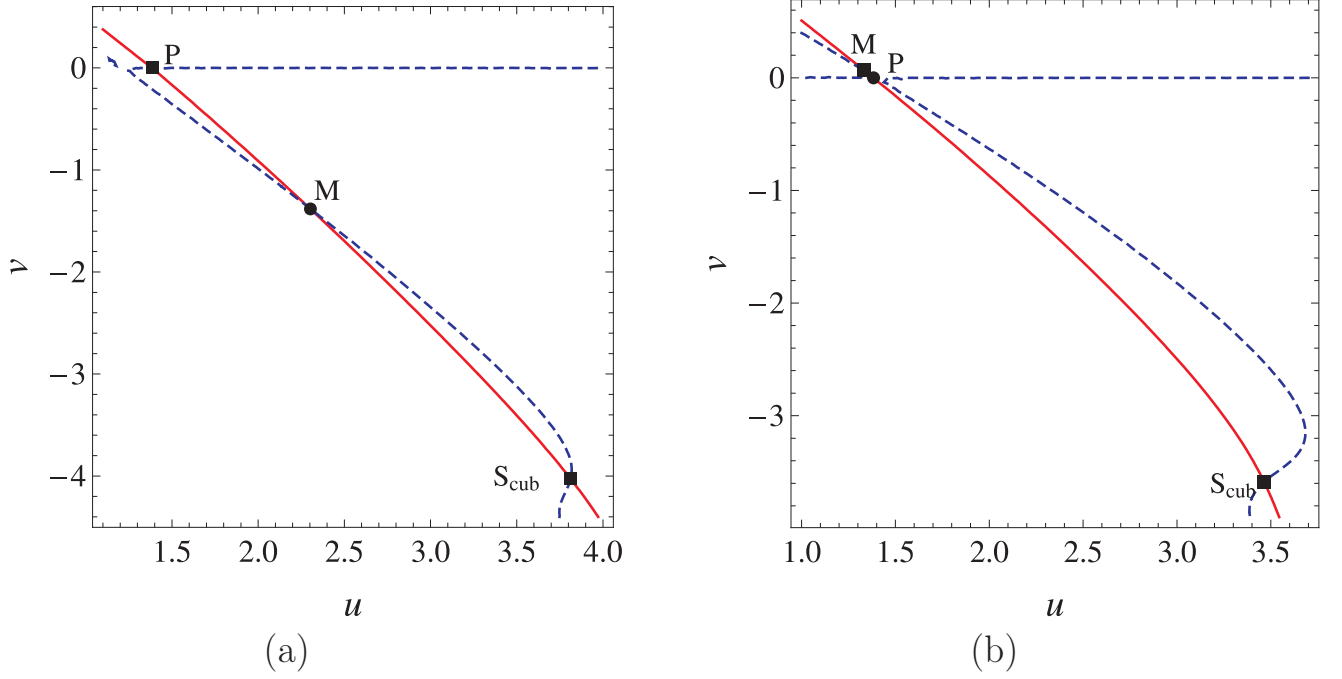


Рис. 7.6. Лінії нулів β_u (суцільні криві) і β_v (штрихові криві) для кубічної моделі з (а) $n = 2$ та $\alpha = 9$, $b = 9$ і (б) $n = 3$ та $\alpha = 8$, $b = 10$. Перетин суцільних і штрихових ліній відповідає різним точкам: НТ Вільсона-Фішера **P**, кубічний НТ **M** і хибний НТ **S_{cub}**. Круги відповідають нестійким нерухомим точкам, тоді як квадрати позначають стійкі нерухомі точки.

при $d = 3$ [75], застосовуємо процедуру пересумовування, узагальнену на випадок двох змінних (7.11)–(7.13). Тепер координати нерухомих точок визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_u(u, v) = 0, \\ \beta_v(u, v) = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Тут β_u та β_v означають пересумовані β -функції моделі, заданої (7.15). Будучи функціями двох змінних, u і v , β_u та β_v описують поверхні в просторі (u, v, β) . Нерухомі точки відповідають точкам спільних перетинів цих двох поверхонь (u, v) -площиною. Як орієнтир ми малюємо лінії нулів пересумованих β_u і β_v функцій. Нерухомі точки, якщо вони існують, відповідають перетину цих ліній. Щоб отримати такі криві, потрібно використовувати певні значення параметрів пересумовування a , b , α . Як було показано в [139], параметр a для кубічної моделі (7.15) залежить від співвідношення $z = v/u$ і становить: $a = 0.14777422 \times (9/(2n+8) + z)$ при $z > 0$ і $a = 0.14777422 \times (9/(2n+8) + z/n)$ для $-\frac{2n}{(n+1)} \times \frac{9}{(n+8)} < z < 0$. Пере-

сумовані β -функції з цими значеннями a подані на Рис. 7.6 для $n = 2$ і $n = 3$.

З Рис. 7.6 видно, що, крім звичайних нерухомих точок $\mathbf{P}$ і $\mathbf{M}$, існує інша стійка НТ, яка не має аналогу в ε -розкладі для обох значень n , позначена нами як $\mathbf{S}_{\text{cub}}$. Наявність цієї НТ, якщо розглядати її всерйоз, буде мати важливі фізичні наслідки, оскільки вона б відповідала би ФП другого роду з новим класом універсальності. Однак ніколи такого переходу не спостерігали. Навпаки, знайдено ФП першого роду для усіх значень n , більших за n_c і з $v_0 < 0$ у рамках пертурбативного [75, 387] або непертурбативного [471] теоретико-польового аналізу, а також у чисельному моделюванні [472] пов'язаних систем (чотиристанова антиферромагнітна модель Поттса). Нижче розглянемо залежність фізичних величин для НТ $\mathbf{M}$ і хибної НТ $\mathbf{S}_{\text{cub}}$ по відношенню до зміни параметрів пересумовування. Тоді ми порівняємо отримані результати з результатами для $O(n)$.

Змішана кубічна НТ

Оскільки кубічна модель включає дві константи зв'язку u і v , стійкість її нерухомих точок визначається двома показниками, ω_1 і ω_2 . У стійкій НТ як ω_1 , так і ω_2 мають позитивні дійсні частини. Обчислюючи ці показники для $\mathbf{M}$ (змінюючи α і b в різних L), спостерігаємо подібну картину, яка отримана для ω , обчисленого для $\mathbf{P}$ в $O(n)$ моделі, що інтуїтивно й очікувалось. На Рис. 7.7 ми показуємо лише поведінку більшого показника ω_1 як функцію параметра пересумовування. Видно існування стаціонарних точок за α та b . Значення, розраховані у різних петлевих порядках у цих точках, дуже близькі один до одного. Наприклад, $\omega(L = 6) - \omega(L = 5) \approx 0.001$ для $n = 3$. Наші шестипетлеві результати $\omega_1 = 0.781$, $\omega_2 = 0.011$ для $n = 3$ узгоджуються з іншими шестипетлевими оцінками $\omega_1 = 0.781 \pm 0.004$, $\omega_2 = 0.010 \pm 0.004$ [75] і $\omega_1 = 0.777 \pm 0.009$, $\omega_2 = 0.015 \pm 0.002$ [77].

Хибна кубічна НТ

Тепер ми вивчаємо НТ $\mathbf{S}_{\text{cub}}$. По-перше, зауважимо, що $\mathbf{S}_{\text{cub}}$ для $n = 2$ і $n = 3$ є стійким фокусом, тобто ω_1 та ω_2 є комплексно спряженими і $\text{Re}(\omega_1) =$

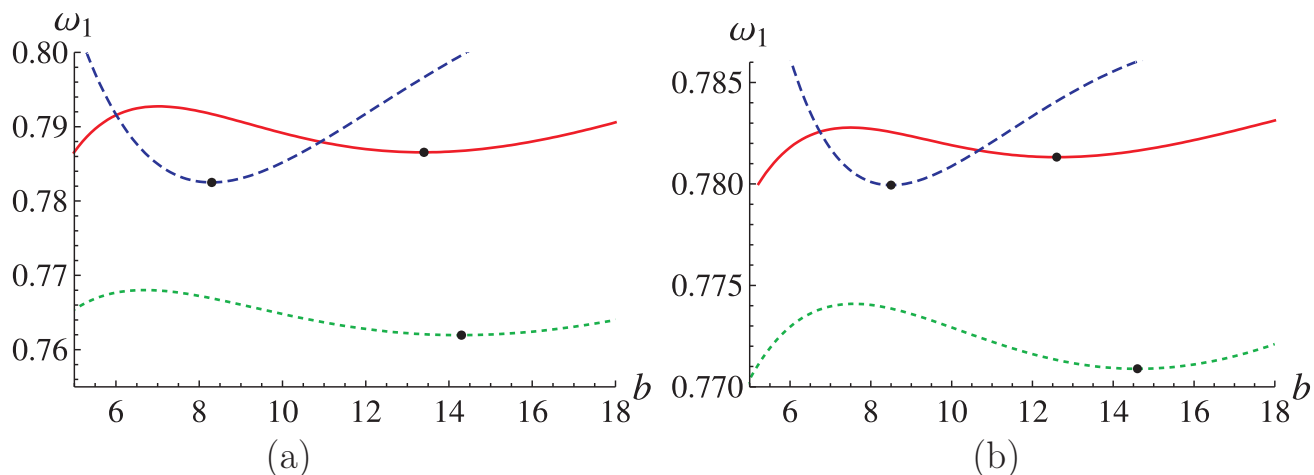


Рис. 7.7. Показник ω_1 у змішаній НТ $\mathbf{M}$ для $n = 2$ (а) і $n = 3$ (б) як функція b у чотири (зелені штрихові криві), п'яти (сині штрихові криві) і шести (суцільні червоні криві) петлях. Крпки для кожного петлевого порядку відповідають стаціонарному значенню $\omega = \omega(\alpha, b)$ в обох α і b напрямках одночасно. Для $n = 2$: $\alpha = 3.4, b = 14.3$ ($L = 4$), $\alpha = 5.7, b = 8.3$ ($L = 5$), $\alpha = 5.8, b = 13.4$ ($L = 6$). Для $n = 3$: $\alpha = 3.3, b = 14.6$ ($L = 4$), $\alpha = 5.3, b = 8.5$ ($L = 5$), $\alpha = 5.2, b = 12.6$ ($L = 6$). Для цих значень найшвидша явна збіжність спостерігається між двома послідовними петлевими порядками.

$\text{Re}(\omega_2) > 0$. Наші результати показані на Рис. 7.8. Дійсна частина ω_i не прямує до стаціонарних значень як функція параметрів пересумовування (див. Рис. 7.8), та її поведінка аналогічна тому, що було отримано для ω для $\mathbf{S}$ в моделі $O(n)$. Більше того, різниця значень, отриманих в послідовних петлевих порядках, завжди більша 0.3, тобто в 300 разів більше, ніж для $\text{FP } \mathbf{M}$. Таким чином, зрозуміло, що $\mathbf{S}_{\text{cub}}$ -є хибною НТ, як і $\mathbf{S}$ для $O(n)$ моделі.

7.2.3. Фрустровані тривимірні моделі

Перейдемо тепер безпосередньо до аналізу поведінки нерухомих точок, отриманих при аналізі пересумовуваних β -функцій фрустрованої моделі. Спочатку нагадаємо картину нерухомих точок, отриману в першому порядку ε -розкладу [24, 321, 322, 462]. Нерухомі точки мають дві координати u та v . Для n більших, ніж критичне значення $n_c(d)$, існують чотири нерухомих точки: крім звичайної гаусової НТ ($u^* = v^* = 0$) і НТ $O(2n)$ ($u^* \neq 0, v^* = 0$), знаходять також пару

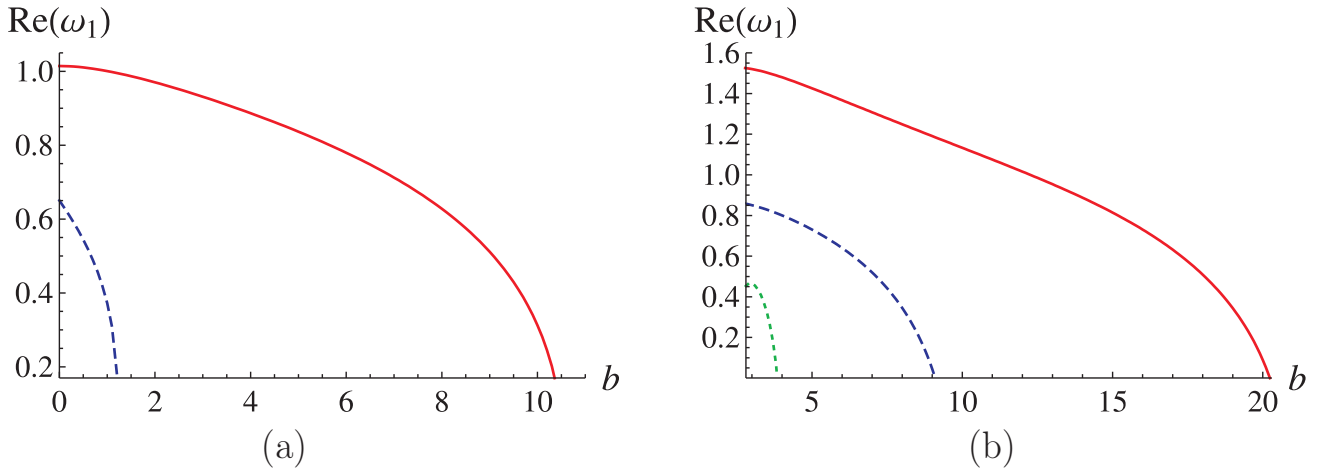


Рис. 7.8. Дійсна частина показника ω_1 у фрустрованій НТ $n = 2$ при $\alpha = 5$ (а) та $n = 3$ при $\alpha = 6$ (б) як функція b у чотирьох (штрихова зелена лінія), п'яти (штрихова синя лінія) та шести (суцільна червона лінія) петлях.

кіральної та антикіральної точок з координатами $u^* > 0$ і $v^* > 0$. Кіральна НТ $\mathbf{C}^+$ є стійкою, тоді як інша, антикіральна НТ $\mathbf{C}^-$, є нестійкою. Тому вище $n_c(d)$, передбачається ФП другого роду для систем, неперонормовані константи зв'язку яких лежать в області притягання $\mathbf{C}^+$. Коли n зменшується при фіксованому d , $\mathbf{C}^+$ та $\mathbf{C}^-$ зближуються і врешті стикаються та зникають при $n = n_c(d)$. Нижче $n_c(d)$ немає ніяких стійких точок, а тому тут очікується ФП першого роду. Значення $n_c(d)$ для $d = 3$ було предметом інтенсивних досліджень. Зокрема, його оцінили в рамках ε -розкладу [80, 81], псевдо ε -розкладу [82] та підходу непертурбативної РГ [309]. Знайдена в рамках псевдо ε -розкладу шестипетлева оцінка $n_c = 6.23 \pm 0.21$ [82] добре узгоджується зі значенням $n_c = 6.4 \pm 0.4$ [327], отриманим з пересумованих шестипетлевих β -функцій, розрахованих при $d = 3$. Згідно з цим значенням n_c , у фізичних системах з $n = 2$ або $n = 3$ не може відбуватись ФП другого роду. Однак для цих значень n у підході з фіксованим $d = 3$ була знайдена стійка НТ [325]. Оскільки ця НТ не отримується у рамках ε -розкладу, природньо остерігатись, чи вона не є артефактом підходу з фіксованим d , як це є у випадку з нерухомими точками $\mathbf{S}$ і $\mathbf{S}_{\text{cub}}$ у $O(n)$ та кубічній моделях, відповідно. Тому нижче ми розглянемо β -функції фрустрованої моделі, знайдені у $d = 3$ у шести петлях [325]. Як буде видно з нашого аналізу стійкі точки, знайдені для фрустрованих систем з $n = 2, 3$, є хибними [335, 463].

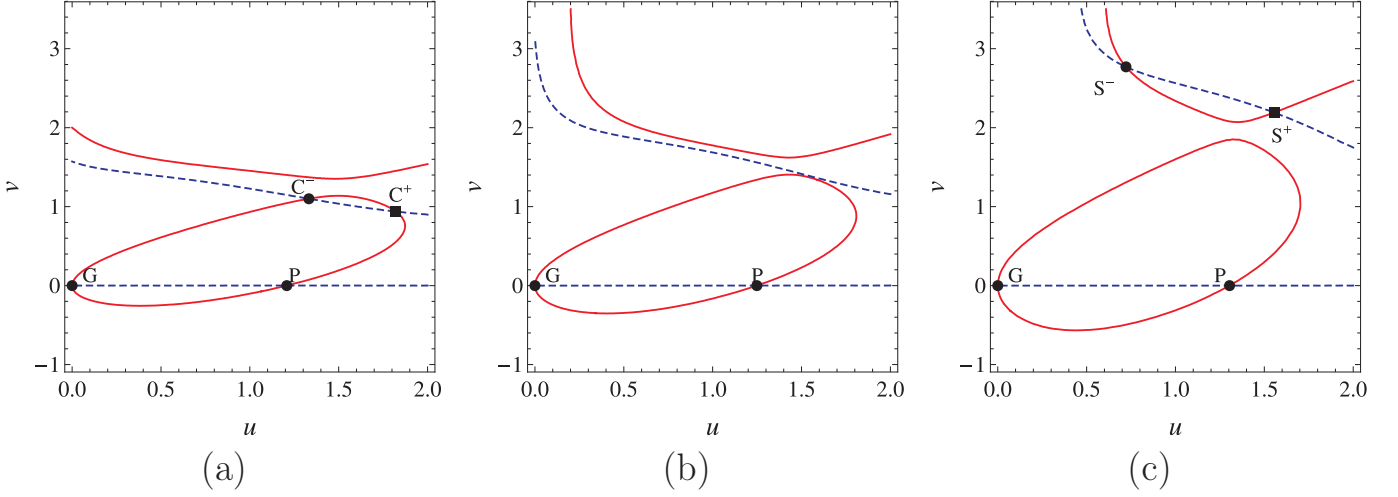


Рис. 7.9. Лінії нулів β_u (суцільні криві) і β_v (штрихові криві) для $n = 8$ (а), $n = 6$ (б) і $n = 4$ (с). Результати отримані для $\alpha = 5$ та $b = 15$. Перетини суцільних та штрихових ліній відповідають різним точкам: гаусовій НТ (**G**), НТ Вільсона-Фішера (**P**), кіральній НТ (**C⁺**), антикіральній НТ (**C⁻**) і хибним (**S⁺**, **S⁻**).

Спочатку дослідимо загальну ситуацію зі зміною n . Параметр a для фрустрованої моделі має значення, залежні від n [139]: $a = 0.14777422 \times 9/(2n + 8)$ для $4\frac{9}{(2n+8)} > z > 0$ і $a = 0.14777422 \times (9/(2n + 8) - z/2)$ для $z < 0$, $z > 4\frac{9}{(2n+8)}$. Використовуючи це значення у розрахунку, ми показуємо, що типова поведінка (тобто поведінка, спостережувана для більшості α , b) ліній нулів пересумованих β -функцій з фіксованим $d = 3$ на Рис. 7.9 для різних n , від великих значень n , $n > n_c$ (Рис. 7.9 (а)), до малих, $n < n_c$ (Рис. 7.9 (с)). Як можна побачити з рисунку, лінії нулів β_u формують дві гілки, верхню та нижню. Відзначте, що нижня гілка формує замкнутий контур. Цей контур відповідає нулям функції β_u , які вже існують у першому порядку за ε . Для $n \geq 7$ крива нулів β_v перетинає замкнутий контур, генеруючи кірально-антикіральну пару нерухомих точок, **C⁺** і **C⁻** (див. Рис. 7.9 (а)). Коли значення n знаходяться між 7 і 6, ця пара зникає відповідно до сценарію, отриманого в ε -розкладі з оцінкою $n_c \approx 6.23$ [82]. Тоді, до $n \approx 5$ немає перетину між кривими нулів β_u та β_v в області $u > 0$ і $v > 0$, і тому в даній області немає нерухомих точок (див. Рис. 7.9 (б)). Але при $n < 5$ ми спостерігаємо, що крива нулів β_v перетинає верхню гілку нулів β_u , утворюючи дві нерухомі точки, стійку **S⁺** і нестійку **S⁻** (див. Рис. 7.9 (с)). Схожа ситуація вже спостерігалася у

[327], що призвело до висновку щодо існування ще одного критичного значення n . З вище наведеного аналізу видно, що розв'язки $\mathbf{C}^+$, $\mathbf{C}^-$, з одного боку, та $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{S}^-$ з іншого, відповідають перетинам різних гілок кривої β_u . У першому випадку $(\mathbf{C}^+, \mathbf{C}^-)$ – це перетин з нижньою гілкою, тоді як у другому випадку $(\mathbf{S}^+, \mathbf{S}^-)$ – з верхньою. Нижче ми покажемо схожість у поведінці розв'язків $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{S}^-$ з тими, які були отримані в попередніх підрозділах 7.2.1 та 7.2.2 для хибних нерухомих точок. У наступних підрозділах ми відокремлюємо аналіз стійких нерухомих точок для випадків, що мають значення “великі n ” та “малі n ”. Це два різних режими, коли n більше, ніж n_c (Рис. 7.9 (а)) або менше n_c (Рис. 7.9 (с)), відповідно.

Випадок великих n

Подібно до кубічної моделі, описаної вище, ми тут представляємо результати аналізу показників стійкості при $d = 3$. Почнемо з даних, отриманих для стійкості НТ $\mathbf{C}^+$ при $n > n_c$. У цьому випадку беремо $n = 8$, тому $a = 0.0554$, і аналізуємо, як показник ω змінюється з α та b . Ми виявили, що RMS задовольняється у чотири-, п'яти- і шестипетлевих порядках: для відповідних значень параметрів b і α два показника ω_1 і ω_2 слабко залежать від цих параметрів і є добре збіжними. Це зрозуміло з Рис. 7.10, де ми показуємо b -залежність ω_1 і ω_2 . Більше того, різниця між значеннями в п'яти й шести петлях, наприклад, для ω_2 невелика: $\omega_2(L = 6) - \omega_2(L = 5) \simeq 0.012$. Зауважте, що наші значення ω_1 і ω_2 в цьому випадку повністю порівнювані зі значеннями, отриманими в [327].

Ми також вивчили a -залежність цих величин і знаходимо, що “оптимальне” значення a близьке до їхніх значень у високих порядках ($a_{\text{opt}} \simeq a_{10} = 0.0554$), як це відбувається і в $O(n)$ моделі, див. Рис. 7.11.

Ці результати свідчать про те, що властивості збіжності показників фрустрованої моделі у стійкій НТ при “великих n ” подібні до властивостей, отриманих для характеристик $O(n)$ і кубічної моделей у їхніх фізичних нерухомих точках, але, ймовірно, для фрустрованої моделі вони менш точні, оскільки пересумовування є менш ефективним через наявність складної симетрії.

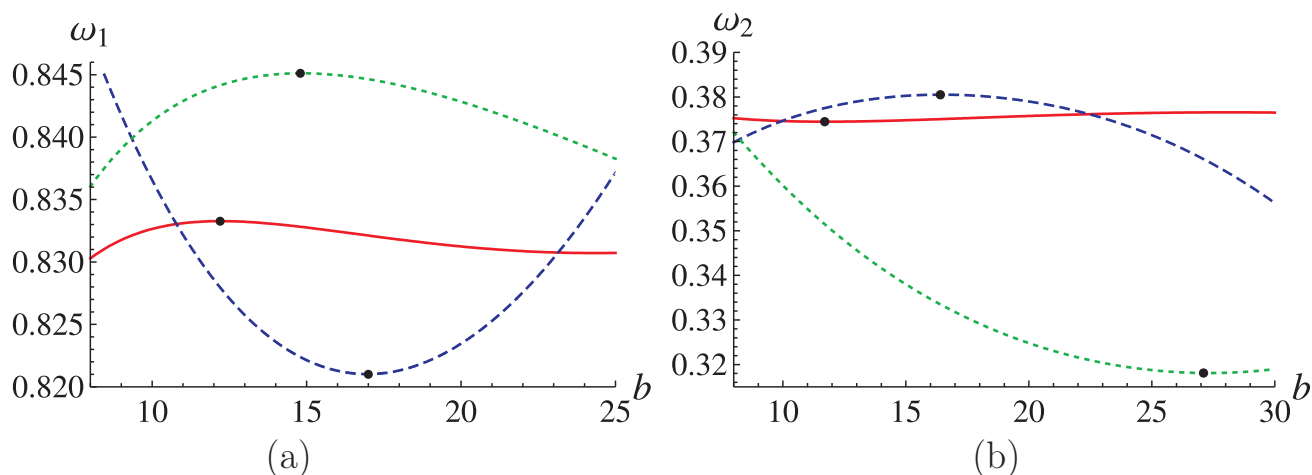


Рис. 7.10. Показники ω_1 (а) та ω_2 (б) у НТ фрустрованої моделі для $n = 8$ як функції b у чотирьох (штрихова зелена лінія), п'яти (штрихова синя лінія) та шести (суцільна червона лінія) петлях. Точки на кожній лінії відповідають стаціонарному значенню $\omega = \omega(\alpha, b)$ в обох напрямках за α та b одночасно. Для ω_1 : $\alpha = 5.1, b = 14.8$ ($L = 4$), $\alpha = 7.8, b = 17$ ($L = 5$), $\alpha = 7, b = 12.2$ ($L = 6$). Для ω_2 : $\alpha = 6.5, b = 27.1$ ($L = 4$), $\alpha = 7.9, b = 16.4$ ($L = 5$), $\alpha = 7.5, b = 11.7$ ($L = 6$).

Випадок малих n

Тепер перейдемо до вивчення особливостей стійкої НТ $\mathbf{S}^+$ в області $u > 0$, $v > 0$ для фізичних випадків $n = 2, 3$. Результати, отримані при розрахунку ω для цієї НТ зі зміною b і α , наведені на Рис. 7.12.

Як було зазначено у [325], показники стійкості набувають (у більшості випадків) комплексних значень ω з додатніми дійсними частинами для $\mathbf{S}^+$, вказуючи на топологію стійкого фокуса. Ми, знову ж таки, вибираємо для a значення, отримане з аналізу великих порядків [325]: $a = 0.1108$ для $n = 2$ і $a = 0.05$ для $n = 3$. Для цих значень a і для $L = 4, 5$ і 6 знаходимо, що $\text{Re}(\omega_1)$ (або, що еквівалентно, $\text{Re}(\omega_2)$) як функція α і b ніде, навіть приблизно, не є стаціонарною, див. Рис. 7.12. Більше того, при фіксованих α і b розрив між значеннями $\text{Re}(\omega_1)$ у двох послідовних порядках петель, $\text{Re}(\omega_1)(L+1) - \text{Re}(\omega_1)(L)$, завжди великий, порядку 0.5 для $n = 2$ і 0,2 для $n = 3$, див. Рис. 7.12. Таким чином, для цих значень n не задовольняються ні PMS, ні PFAC.

Отримана на Рис. 7.12 залежність від b для ω_1 демонструє подібність з результатами для НТ $\mathbf{S}$ моделі $O(n)$ (порівняйте з Рис. 7.3 (b)), а також з $\mathbf{S}_{\text{cub}}$

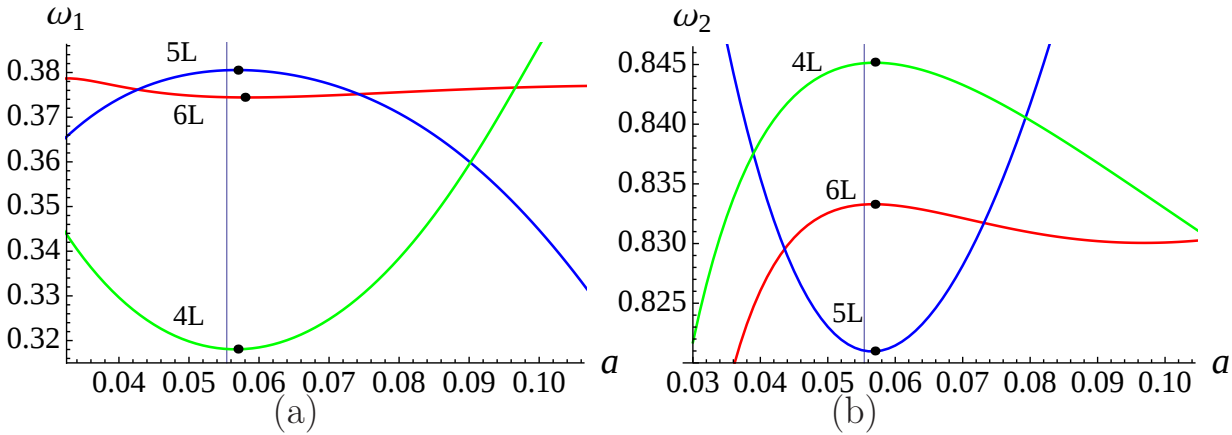


Рис. 7.11. Показники ω_1 (a) і ω_2 (b) тривимірної фрустрованої моделі для $n = 8$ як функції параметрів a у чотири- (4L), п'яти- (5L) і шестипетлевих (6L) порядках. Вертикальні лінії відповідають значенню у високих порядках $a_{10} = 0.0554$. Значення, вибрані для α і b , є такими, що показники набувають стаціонарних значень при $a = a_{10}$.

кубічної моделі (порівняйте з Рис. 7.8). З Рис. 7.12 очевидні погані збіжні властивості для хибних нерухомих точок. Також значення ω у FP S^+ зменшується при збільшенні b так само, як це спостерігалось для нерухомих точок S і S_{cub} .

Ми також дослідили стійкість наших результатів в залежності від зміни a для характеристичних значень α і b , див. Рис. 7.13. І знову не знайшли стаціонарності.

Таким чином, ми спостерігаємо ситуацію, аналогічну тій, що ми бачили у раніше вивчених моделях. Подібно до фізичних нерухомих точок цих моделей, для нерухомих точок S^+ при $n > n_c$, спостерігаємо добру збіжну поведінку, яка виявляється через слабку зміну показників і малу різницю між результатами різних петель. Тоді як для FP S^+ при $n < n_c$ ми не спостерігаємо областей стаціонарності критичних показників. Значення показників стійкості значно відрізняються в різних порядках. Оскільки такі властивості характерні для HT S і HT S_{cub} , це підтверджує нефізичний характер HT S^+ .

З цих результатів ясно видно, що критичні показники виведені з пересумованих рядів, отриманих у масивній схемі у $d = 3$, показують як відсутність збіжності, так і стійкості для значень $n = 2$ і 3. Таким чином, дуже вірогідно, що

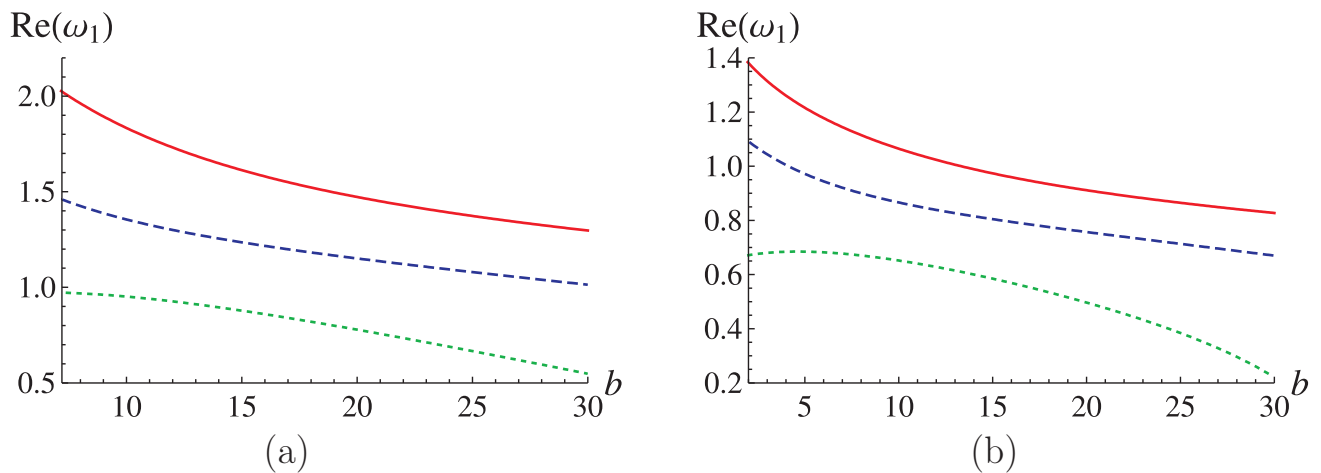


Рис. 7.12. Дійсна частина показника ω_1 для НТ $\mathbf{S}^+$ для $n = 2$ (а) та $n = 3$ (б) як функція b для $\alpha = 6$ у чотирьох (штрихова зелена лінія), п'яти (штрихова синя лінія) та шести (суцільна червона лінія) петлях.

існування нерухомих точок для цих значень n є артефактом або схеми при фіксованій вимірності простору, або методу пересумовування. У будь-якому випадку ми підтверджуємо, що немає підстав ставити під сумнів результати, отримані у рамках ε -розкладу або непертурбативної РГ, і тому переходи, знайдені у $d = 3$ та $n = 2$, $n = 3$, є першого роду.

7.3. Аналіз нерухомих точок моделей у двох вимірах

Розглянемо також фрустровані моделі у двох вимірах, оскільки тут велику роль відіграють топологічні збудження. У випадку гайзенберґівських спінів при $d = 2$, перша група гомотопії $SO(3)$ є нетривіальною і очікується деконфайнмент топологічних збуджень [473], що може привести до виникнення переходів типу Костерліца-Таулеса-Березінського [190–192] або, принаймні, до перехідної (кросоверної) поведінки. Численні експериментальні [474–478] і чисельні [473, 479–486] дослідження дійсно показали нетривіальну поведінку, що відбувається при скінченних температурах для системи з двокопонентними спінами. У цьому випадку співіснують і ступені свободи Ізінґа, топологічні збудження і спінові хвилі. Цікавим є питання про характер ФП, що відбувається у цій системі при зміні температур: чи відбуватимуться два окремі переходи (типу Ізінґа і перехід Костерліца-

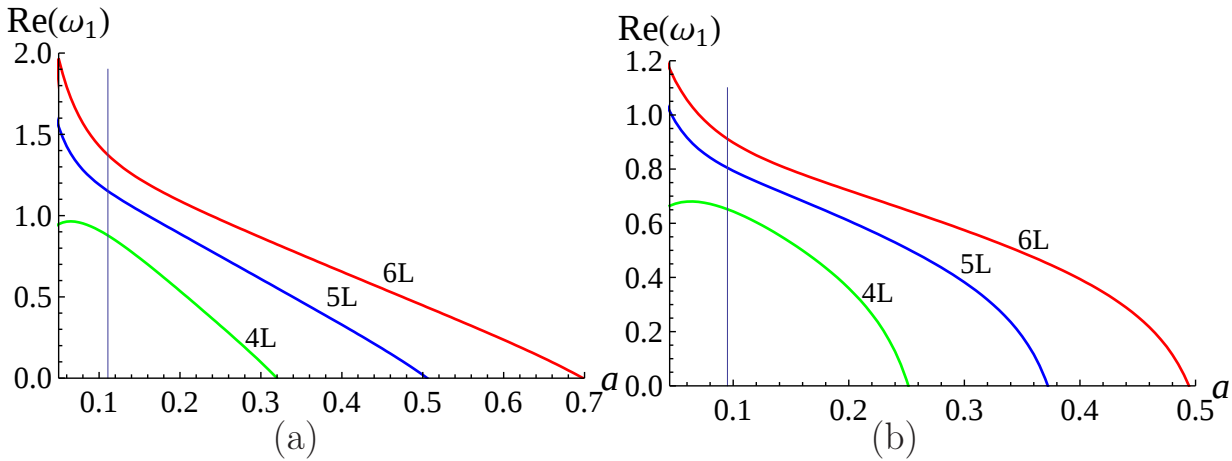


Рис. 7.13. Дійсна частина показника ω_1 тривимірної фрустрованої моделі: (а) для $n = 2$ і (б) для $n = 3$ як функція a . Вертикальні лінії відповідають $a_{l0} = 0.1108$ для $n = 2$ і $a_{l0} = 0.095$ для $n = 3$. Взято $\alpha = 6$ і $b = 25, 20$ і 15 у шести- (6L), п'яти- (5L) і чотирипетлевих (4L) наближеннях для $n = 2$ і $b = 20, 15$ і 10 у шести, п'яти і чотирьох петлях для $n = 3$. Інші значення для параметрів α і b дають подібні результати.

Таулеса-Березінського) чи один (див. роботу [487]).

У рамках підходів при фіксованій вимірності для $d = 2$ для таких систем також знайдено НТ з нетривіальними критичними показниками для випадків $n = 2$ та $n = 3$ [326, 468, 469, 488]. Цей факт привів до гіпотези про поведінку Костерліца-Таулеса-Березінського, викликаної $\mathbb{Z}_2$ топологічними дефектами для гайзенбергівських спінів [468, 469]. І вона потребує перевірки.

Але, як і для тривимірних моделей, спочатку розглянемо модель $O(n)$, для якої відома критична поведінка у двох вимірах.

7.3.1. $O(n)$ моделі у двох вимірах: аномальна явна збіжність

Аналогічний аналіз пертурбативних результатів, як для моделі ϕ^4 у трьох вимірах, можна провести для усіх n у двох вимірах. На Рис. 7.14 подано показник ω двовимірної моделі $O(4)$, отриманий у трьох, чотирьох та п'яти петлях у масивній схемі з нульовим імпульсом, та аномальна вимірність η у чотирьох і п'яти петлях (результати трьох петель не приводять до чіткої стаціонарної поведінки). При отриманні цих результатів використовувався конформний метод пересумову-

вання Бореля.

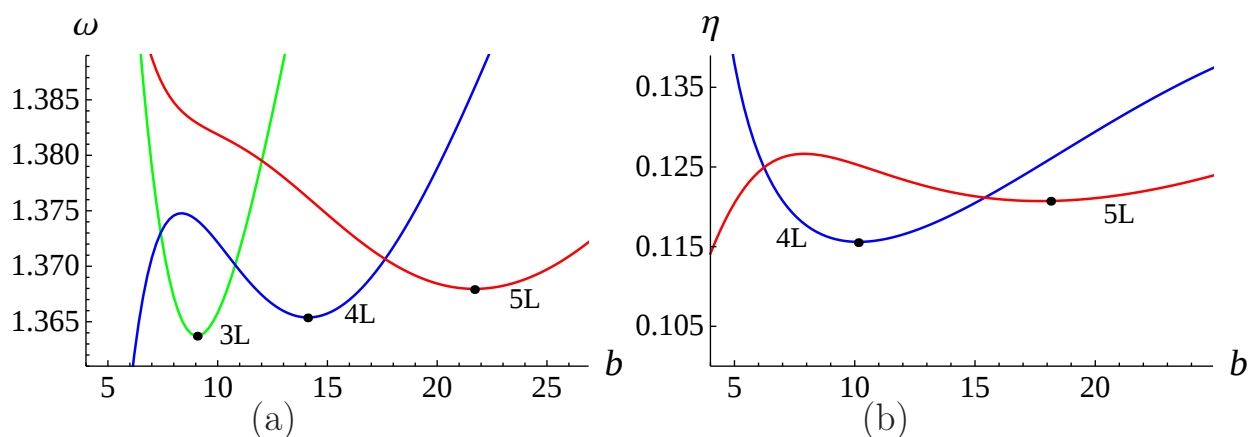


Рис. 7.14. Показники ω (a) і η (b) двовимірної $O(4)$ моделі як функції параметра пересумовування b у три- (3L), чотири- (4L) і п'ятипетлевому (5L) порядку (результат для η у трьох петлях не показаний, оскільки немає явної стаціонарності для η у цьому випадку). Параметр a фіксувався при значенні, отриманому з поведінки при високих порядках: $a = a_{\text{lo}} \simeq 0.1789$. Для ω значення є такими: $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (3.1, 9)$ у трьох петлях, $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (3.1, 14)$ у чотирьох петлях і $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (3.1, 21.5)$ у п'яти петлях. Для η значення є такими: $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.4, 10)$ у чотирьох петлях і $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.6, 18)$ і у п'яти петлях. Точка на кожній кривій відповідає стаціонарним значенням $\omega = \omega(\alpha, b)$ і $\eta = \eta(\alpha, b)$ для обох напрямків.

Для цієї моделі, завдяки теоремі Мерміна-Вагнера [489], кореляційна довжина нескінченна лише при нульовій температурі і критичні показники точно відомі: $\eta = 0$ і $\omega = 2$ [490, 491]. Ми можемо побачити на Рис. 7.14, що, хоча значення, отримані для цих показників, добре сходяться, вони помилкові, оскільки, використовуючи обидва PMS та PFAC знаходимо: $\eta \simeq 0.12$ і $\omega \simeq 1.37$. Важливо підкреслити, що $n = 4$ не є унікальним випадком: для всіх двовимірних $O(n)$ -моделей з $n \geq 1$ критичні показники дуже правдоподібно збігаються у п'ятипетлевому порядку, але до помилкових значень. Наприклад, в моделі Ізінга у п'ятипетлевому наближенні було знайдено $\eta = 0.146$ [492], в іншому дослідженні $\eta = 0.145(14)$ [493], тоді як точний результат є таким: $\eta = 0.25$.

Ми також вивчили a -залежність критичних показників. Ми знову знайшли, що $a_{\text{opt}} \simeq a_{\text{lo}} = 0.1789$, див. Рис. 7.15. Це означає, що a -залежність не є гарним показником аномальної явної збіжності у даному випадку.

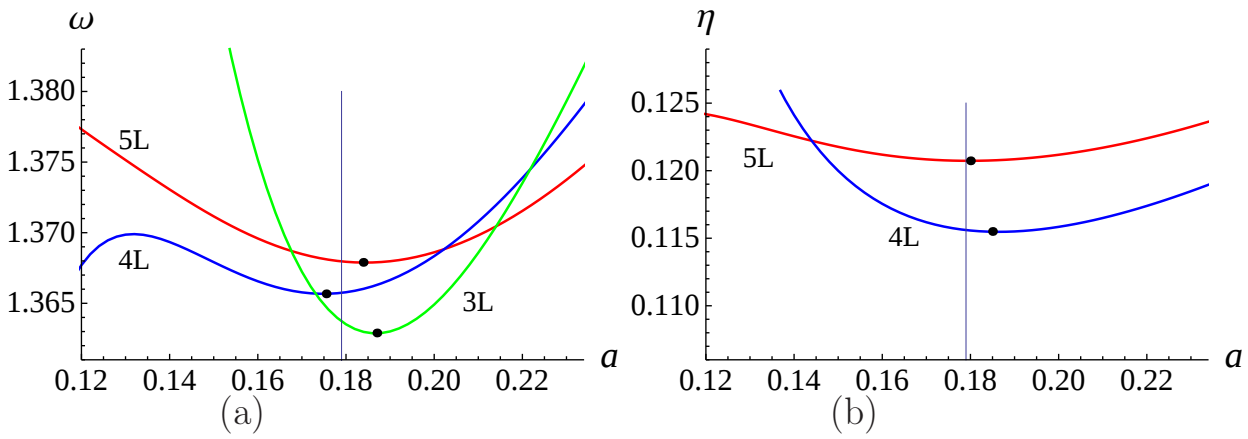


Рис. 7.15. Показники ω (a) і η (b) двовимірної $O(4)$ моделі як функції пересумованих параметрів a , у трьох (3L), чотирьох (4L) і п'яти (5L) петлях (результат для η у трьох петлях не показаний, оскільки немає явної стаціонарності у цьому випадку). Вертикальна лінія відповідає $a_{10} \simeq 0.1789$. Значення, вибрані для α і b , є такими, що показники перебувають при стаціонарних значеннях, коли $a = a_{10}$ (див. Рис. 7.14). Зазначимо, що стаціонарні значення $\omega(a)$ і $\eta(a)$, позначені точками, дуже близькі до значень при $a = a_{10}$.

Аналіз основних причин цієї аномальної збіжності був виконаний у Ізінгівському випадку у [494] (див. також [495, 496]). Поясненням є те, що, дуже ймовірно, у β -функції існують члени, такі як $1 - (1 - u/u^*)^e$ зі значенням НТ u^* і невеликим числом e (можливо, $1/7$ у випадку Ізінга) [11, 494]. У пертурбативному розкладі, виконаному поблизу $u = 0$, такі члени призводять до малих вкладів до β -функцій, що, як виглядає, знаходиться під контролем. Однак вони відіграють важливу роль в околі u^* ; вони навіть не аналітичні у цій точці, оскільки їх похідні за u сингулярні при u^* . Таким чином, реконструювання таких членів з пертурбативного розкладу є складним, і, як наслідок, пертурбативні результати, хоча вони і виглядають збіжними, дають неправильні оцінки. Тому, ми приходимо до висновку, що PMS та PFAC є необхідними умовами для збіжності, але недостатніми.

У вимірності $d = 2$ існування нетривіального кореня u^* функції β , який є стійким відносно параметрів пересумовування b та α та з хорошими властивостями збіжності, див. Рис. 7.16, не є достатнім для того, щоб знати, чи є перехід тривіальним (відбувається при нульовій температурі) чи ні, оскільки u не прив'язано

прямо до температури. В принципі, достатньо зробити висновок про тривіальність (для $n \geq 3$) або нетривіальність (для $n = 1$ або $n = 2$) критичних показників. Проте, як наголошено раніше, наявність сильних неаналітичностей у двовимірних β -функціях моделі Ізінга та $O(n)$ моделі забороняє нам це робити, оскільки вони повністю псувають визначення критичних показників.

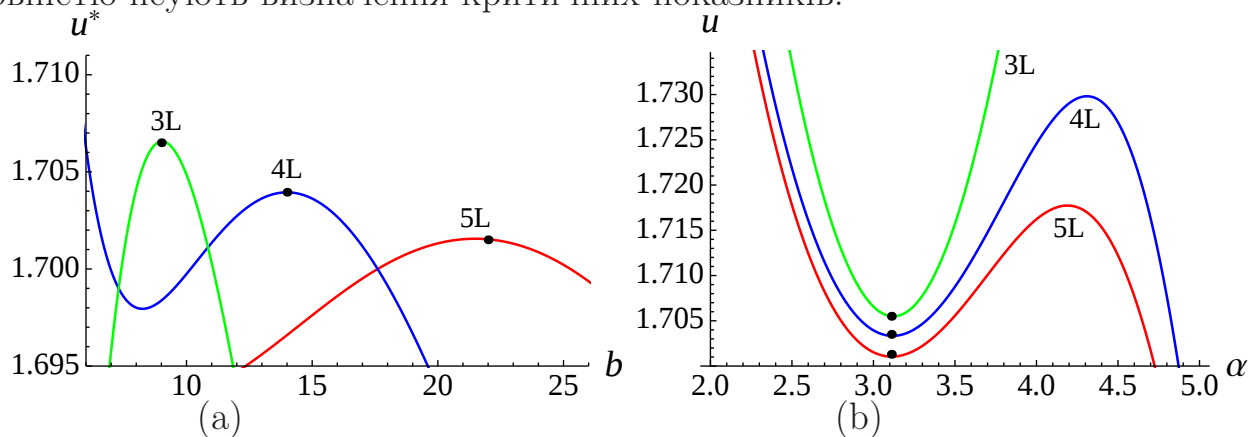


Рис. 7.16. НТ u^* моделі $O(4)$ у $d = 2$: (а) як функція b при зафіксованому $\alpha = 3.1$, (б) як функція α при зафіксованому $b = b_{\text{opt}} = 9, 14, 22$ у трьох (3L), чотирьох (4L) і п'яти (5L) петлях відповідно. Для параметру a вибирається значенням $a_{10} = 0.1789$.

7.3.2. Фрустровані двовимірні моделі

У $d = 2$ і для значень $n \geq 4$ топологічні дефекти відсутні. Як наслідок, не може бути будь-якої іншої НТ, крім тієї, що відповідає нульовій температурі. Таким чином, для цих значень n і через теорему Мерміна-Вагнера, кореляційна довжина розбігається лише при нульовій температурі з показником ν , який є нескінченний (кореляційна довжина експоненційно розбігається). Крім того, аномальна вимірність η завжди зникає у НТ для нульової температури, що можна перевірити низькотемпературними розкладами, проведеними у рамках нелінійної сигма-моделі [497–499]. Таким чином, як і у випадку двовимірної $O(n)$ моделі, будь-яке ненульове значення η для $n \geq 4$ повинно розглядатися як артефакт і як сигнал аномальної очевидної збіжності для теорії збурень. Ми починаємо наш аналіз для випадку $n = 8$, а потім вивчаємо фізично значимі випадки: $n = 2, 3$.

Випадок $n = 8$ у $d = 2$

Для $n = 8$ згідно попереднього обговорення ми мали б знайти лише тривіальні результати для критичних показників: $\eta = 0$ і $\omega_1 = \omega_2 = 2$. Ми розрахували η і ω_1 (найбільше власне значення) як функції параметрів пересумовування α і b , беручи за a значення, обчислене з поведінки у високих порядках: $a_{10} \simeq 0.0895$. Знаходимо стаціонарний розв'язок для цих двох показників, див. Рис. 7.17. Однак, як і у моделях $O(n)$, знаходимо, що отримане таким чином значення η : $\eta \simeq 0.13$ є нефізичним, оскільки воно повинно дорівнювати нулю. Отримане $\omega_1 \simeq 1.79$ далеке від очікуваного фізичного значення $\omega_1 = 2$.

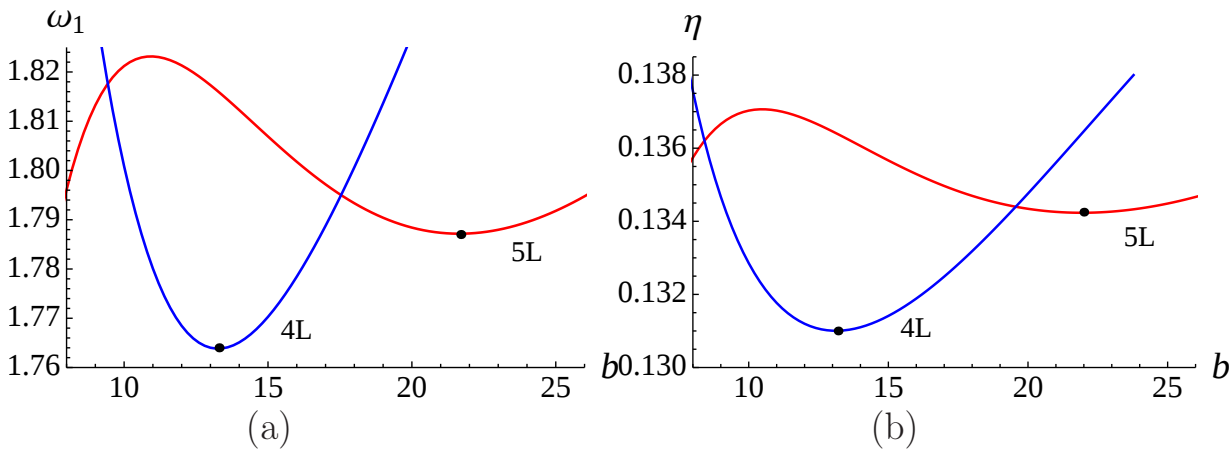


Рис. 7.17. Показники ω_1 (a) і η (b) у двовимірній фрустрованій моделі для $n = 8$ випадку як функція b у чотири- (4L) і п'ятипетлевих (5L) порядках. Крапки на кожній кривій відповідають стаціонарному значенню $\omega = \omega(\alpha, b)$ в обох α і b напрямках. Для стаціонарних значень ω_1 параметри є такими: $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.7, 13.3)$ у чотирьох петлях і $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.7, 21.7)$ у п'яти петлях. Для η вони є такими: $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.55, 13.2)$ у чотирьох петлях і $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.55, 22)$ у п'яти петлях.

Ми також вивчили a -залежність цих показників. Тут знову знайдено хороші властивості збіжності з екстремумом навколо значення a_{10} , див. Рис. 7.18.

Таким чином, з'ясовується, що у фрустрованій моделі, ймовірно, як і в $O(n)$ моделі при $d = 2$, присутні неаналітичні члени у β -функціях, що псують збіжність пересумованого пертурбативного розкладу критичних показників. Ми можемо стверджувати, що це кардинально впливає на релевантність пертурбативного ϕ^4 підходу для вивчення двовимірних фрустрованих систем.

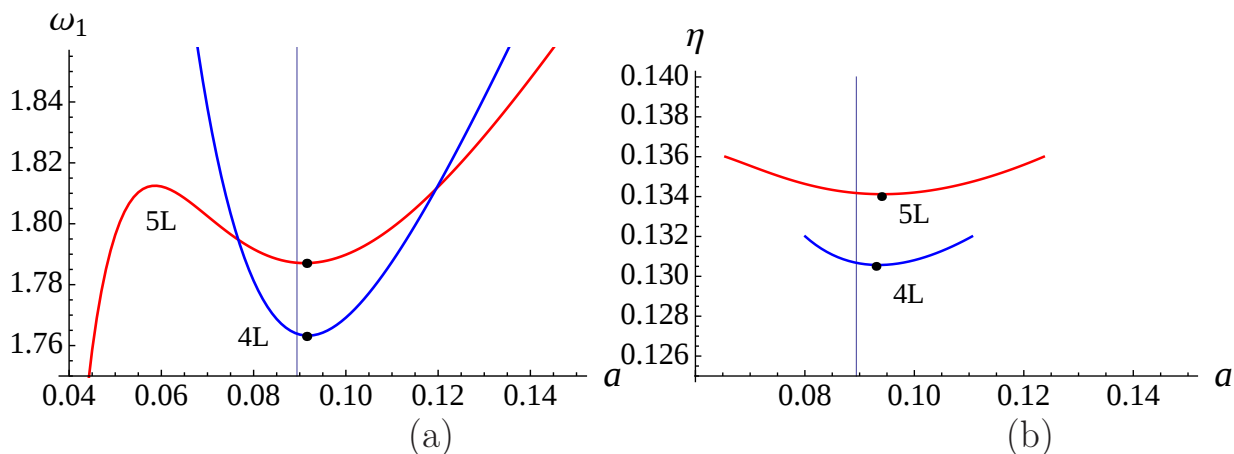


Рис. 7.18. Показники ω_1 (a) і η (b) у двовимірній фрустрованій моделі для $n = 8$ як функція a у чотирьох (4L) і п'яти (5L) петлях. Вертикальні лінії відповідають $a = a_{\text{opt}} = 0.0895$. Значення α і b є такими, що показники є у стаціонарних значеннях, коли $a = a_{\text{lo}}$ (див. Рис.7.17).

Випадки $n = 2$ і $n = 3$ у $d = 2$

Тепер проведемо такий самий аналіз, як і вищеописаний, для фізичних значень n , тобто для $n = 2$ і 3 . Спочатку відмітимо, що для цих значень n НТ починає існувати тільки вище трипетлевого порядку. Ми зафіксуємо a при його значенні у високих порядках: $a \simeq 0.1790$ для $n = 2$ і $a \simeq 0.1534$ при $n = 3$.

Спочатку обговоримо випадок $n = 2$. Ми виявили, що показник поправки до скейлінгу ω_1 (а отже і ω_2) є комплексним для великого діапазону параметрів α і b , що означає, що НТ є фокусом. На Рис.7.19 показано, що немає значень α і b , де ω_1 стаціонарне по відношенню до обох параметрів. Більше того, при фіксованих α та b різниця між результатами чотири- та п'ятипетлевого наближення є великою. Це явний сигнал незбіжності ω_1 . У [488] запропоновано середнє значення для цього критичного показника: $\omega_1 = 2.05(35) \pm i0.80(55)$ у п'яти петлях. Згідно з нашими принципами стійкості та збіжності це значення насправді не має сенсу.

Ситуація є дещо іншою для показника η . У чотирьох петлях η ніде не є стаціонарним в напрямку α , як це видно на Рис. 7.20а, тоді як існує майже стаціонарне значення $\eta \simeq 0.275$ у п'яти петлях у напрямках α та b для $\alpha \simeq 4.2$ і $b \simeq 11$. Див. Рис. 7.20b (що є порівнюваним зі значенням, вказаним у [488], де $\eta = 0.28(8)$). Ми провели аналіз стійкості наших результатів при η , коли a змі-

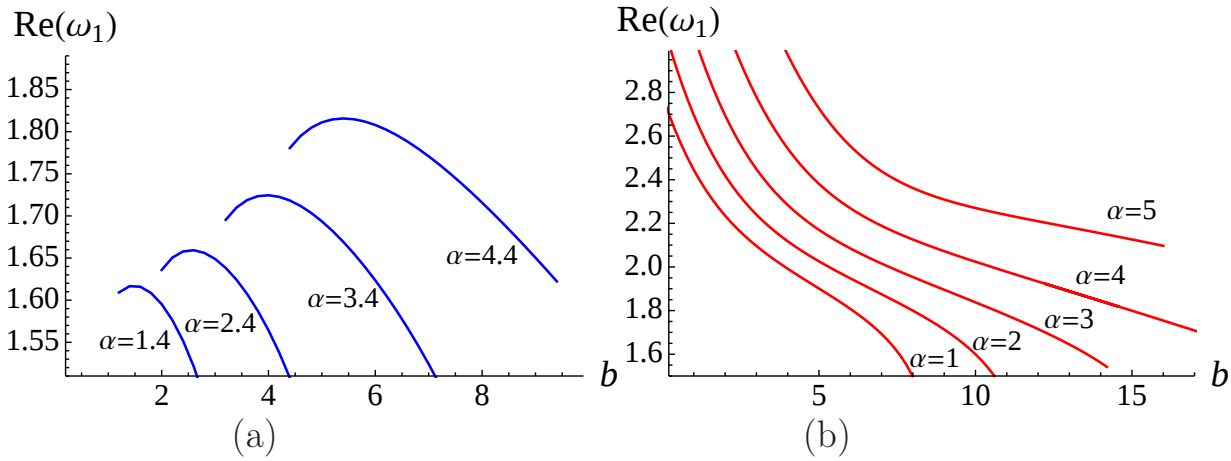


Рис. 7.19. Дійсна частина показника ω_1 двовимірної фрустрованої моделі для $n = 2$ як функція b для різних значень α (а) у чотирьох петлях для $\alpha = 1.4, 2.4, 3.4, 4.4$ (б) у п'яти петлях для $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$. Ми вибрали $a \simeq 0.1790$.

нуються навколо a_{10} при фіксованих α та b . Ми виявили, що дійсно п'ятипетлеві результати не дуже змінюються з a та оптимальне значення a близьке до a_{10} .

Зроблено висновок, що результати для $n = 2$ випадку показують відсутність збіжності зі зростанням порядку наближення і погану стійкість щодо зміни α та b . Зверніть увагу, що знайдене значення $\eta \simeq 0.275$ є відносно близьким до точного значення, очікуваного для переходу Ізінга ($\eta = 0.25$). Проте у той же час воно далеке від п'ятипетлевого значення $\eta = 0.146$ [492], отриманого безпосередньо з теорії поля ϕ^4 .

Розглянемо випадок $n = 3$, поданий на Рис. 7.21. НТ знову є фокусом. Різниця з випадком $n = 2$ полягає у тому, що існує стаціонарна точка для $\text{Re}(\omega_1)$ у п'яти петлях для $\alpha \simeq 5.95$ і $b = 10.25$, але не у чотиріпетлевому порядку, див. на рис. 7.21а, де немає стаціонарності по відношенню до α . У цій стаціонарній точці маємо $\text{Re}(\omega_1) \simeq 1.78$ (це порівнювано з результатом, знайденим в [488]: $\text{Re}(\omega_1) = 1.55(25)$, що у будь-якому випадку показує велику похибку). Ми знайшли нерухомі точки для η у чотирі- та п'ятипетлевих порядках, див. Рис. 7.21б. У п'яти петлях значення η у стаціонарній точці становить $\eta = 0.23$ (це добре співпадає зі значенням $\eta = 0.23(5)$ з [488]). Збіжність виглядає кращою у цьому випадку $n = 3$, ніж у випадку $n = 2$, оскільки тепер як ω_1 , так і η показують

стаціонарні значення.

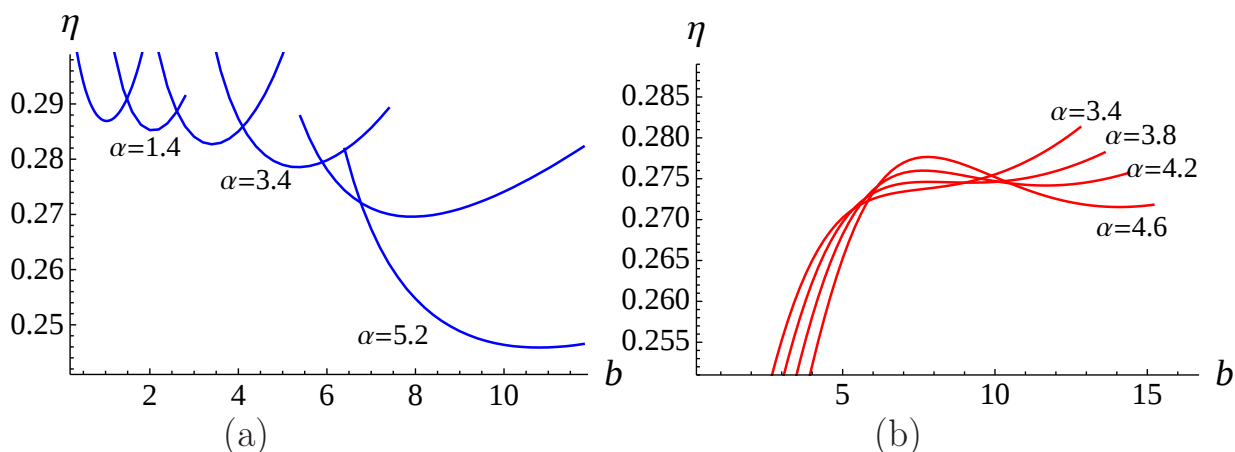


Рис. 7.20. Показник η двовимірної фрустрованої моделі для $n = 2$ як функція b для різних значень α : (a) у чотирьох петлях для $\alpha = 0.3, 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.2$; (b) у п'яти петлях для $\alpha = 3.4, 3.8, 4.2, 4.4, 4.6$. Ми вибрали $a \simeq 0.1790$.

З обговорення вище можна було б зробити висновок, що у випадку $n = 3$ значення $\eta = 0.23$, хоча і з великою похибкою ($\delta\eta = 0.05$ відповідно до [488]), є достатньо значним, забезпечуючи ненульове значення η , як зазначено у роботі [488]. У цьому випадку перехід буде нетривіальним, тобто він буде відбуватися при скінченній температурі. Ми зараз стверджуємо, що результати, отримані з п'ятипетлевого наближення, недостатньо точні, щоб підтвердити цей висновок. Причиною є те, що похибка для η фактично недооцінена. Щоб побачити це, ми обчислили $\eta(n)$ (згідно з нашими двома принципами) для всіх значень n від 2 до 8, див. Рис. 7.22. Як уже було підкреслено, не можуть існувати нетривіальні нерухомі точки і, таким чином, ненульові аномальні вимірності η для будь-якого значення $n \geq 4$. Як видно з Рис. 7.22, цьому суперечать пертурбативні результати, отримані у п'яти петлях. Це означає, що похибка $\delta\eta$ для η у п'яти петлях є порядку самого η , тобто в $n = 4$ випадку порядку 0.20. Враховуючи, що $\eta(n)$ монотонно зменшується, похибка зростає, коли n зменшується. У випадку $n = 3$, похибка, таким чином, щонайменше дорівнює 0.20, і оскільки $\eta(n = 3)$ виявляється рівним 0.23, неможливо зробити висновок, що η у цьому випадку не занулюється. Випадок з $n = 2$ є особливим, хоча наші міркування щодо наявності великої по-

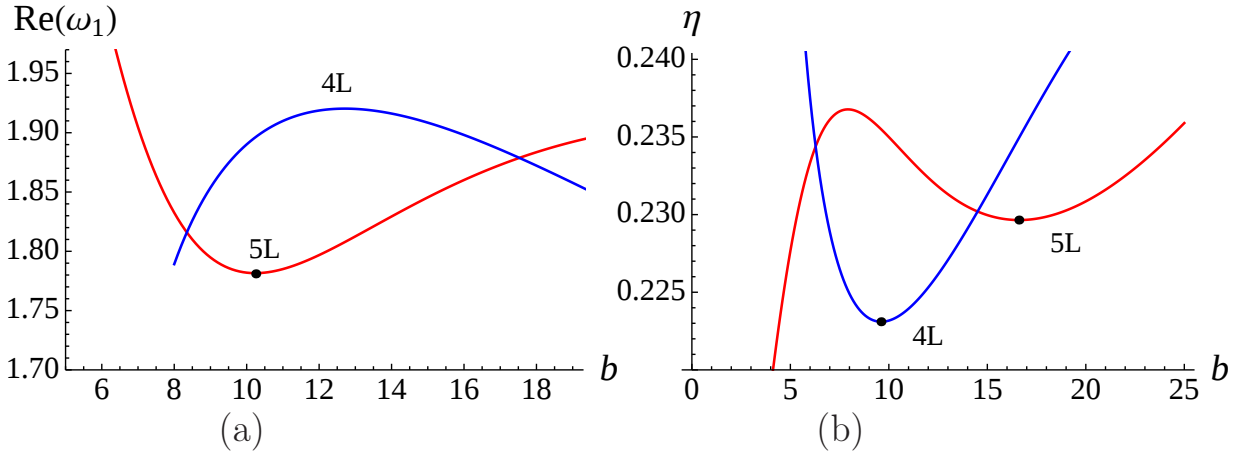


Рис. 7.21. Дійсна частина показника ω_1 і показник η двовимірної фрустрованої моделі для $n = 3$ як функція b у чотирьох (4L) і п'яти (5L) петлях. (а) Для ω_1 є стаціонарна точка тільки у п'яти петлях для $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (5.95, 10.1)$. (б) Для η є стаціонарні точки у чотирьох петлях $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.28, 9.6)$ і п'яти петлях для $(\alpha_{\text{opt}}, b_{\text{opt}}) = (4.45, 16.6)$. Значення a вибрано рівним значенню у високих порядках $a \simeq 0.1534$.

хибки результату дуже ймовірно поширюються і на нього. Дійсно, для $n = 2$ очікується $\eta = 0.25$, оскільки очікується, що перехід, ймовірно, належить класу універсальності Ізінга. На перший погляд значення, знайдене у п'яти петлях ($\eta = 0.275$), може здатися обнадійливим. Однак згадаємо, що знайдене $\eta = 0.146$ для однокомпонентної моделі ϕ^4 в $d = 2$ [492, 493], що дуже далеко від очікуваного результату. Як видно з результатів $n \geq 4$, ряди для фрустрованих магнетиків не виявляють кращих збіжних властивостей, ніж модель ϕ^4 , і, отже, значення η знайдене для фрустрованої моделі з $n = 2$, варто інтерпретувати як числовий збіг. Цей висновок підкріплений тим фактом, що, як було пояснено раніше, властивості стійкості η у випадку $n = 2$ також є незадовільними, див. Рис. 7.20.

7.4. Розрахунок граничної вимірності для фрустрованих систем методами непертурбативної РГ

У цьому підрозділі ми поглянемо на проблему ФП у фрустрованих магнетиках з допомогою іншого підходу: на відміну від досліджень, проведених у попередніх розділах дисертації, тут ми застосуємо метод НПРГ. Тому далі опишемо цей

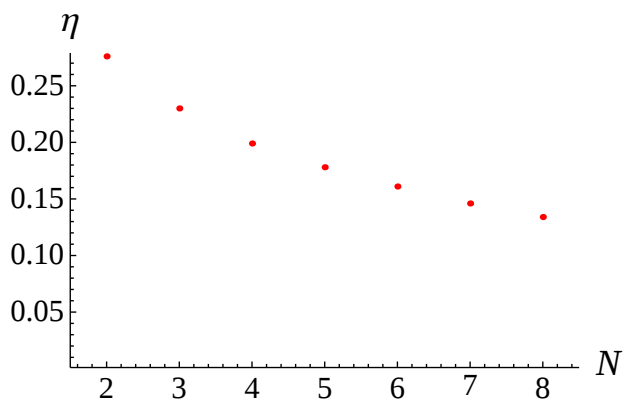


Рис. 7.22. Показник η двовимірної фрустрованої моделі як функція числа спінових компонент n .

метод, а також підкреслимо відмінність від попередніх досліджень фрустрованих магнетиків в рамках НПРГ. Результати нашого аналізу підтверджують усі висновки, досягнуті в рамках попередніх підходів непертурбативної РГ, зокрема, для значення $n_c(d=3)$, яке ми виявили значно більшим за 3. Отже, вони не узгоджуються з результатами, отриманими пертурбативними підходами при фіксованій вимірності простору, а також за допомогою методу конформного будстрапу [500].

7.4.1. Ефективна дія

Центральним об'єктом підходу НПРГ є ефективна дія - або вільна енергія Гіббса – Γ_k [501, 502], що включає в себе статистичні флуктуації на масштабах між типовим мікроскопічним Λ (обернена міжграткова відстань) та біжучим масштабом $k < \Lambda$. У границі $k \rightarrow \Lambda$, флуктуації не розглядаються і $\Gamma_{k=\Lambda}$ можна ідентифікувати як класичну дію (або мікроскопічний гамільтоніан), а коли $k \rightarrow 0$, всі флуктуації враховуються, відповідно ми маємо звичайну вільну енергію Гіббса Γ :

$$\begin{cases} \Gamma_{k=\Lambda} = S \\ \Gamma_{k=0} = \Gamma \end{cases} \quad (7.17)$$

Тому, на довільному скінченному масштабі $k < \Lambda$, Γ_k інтерполуює між дією і вільною енергією Гіббса. Конструювання біжучої ефективної дії відбувається у такий

спосіб: модифікується початкова статистична сума

$$\mathcal{Z}[J] = \int D\zeta \exp \left(- S[\zeta] + \int_q J(q)\zeta(-q) \right), \quad (7.18)$$

де $\int_q = \int d^d q / (2\pi)^d$, шляхом додавання обрізуючого вкладу до класичної дії:

$$\Delta S_k[\zeta] = \frac{1}{2} \int_q R_k(q^2) \zeta(q)\zeta(-q), \quad (7.19)$$

у якому $R_k(q^2)$ – це функція обрізання, яка забезпечує розділення між низько- і високоімпульсними модами. Тоді k -залежна статистична сума запишеться:

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int D\zeta \exp \left(- S[\zeta] - \Delta S_k[\zeta] + \int_q J(q)\zeta(-q) \right). \quad (7.20)$$

Функцію $R_k(q^2)$ зручно вибрати так, щоб вона поведилась як маса при малих імпульсах q , заморожуючи низькоімпульсні флуктуації, а також зникала при великих імпульсах q , зберігаючи високоімпульсні флуктуації непорушеними. Тобто:

$$\begin{cases} R_k(q^2) \sim k^2 & \text{when } q^2 \ll k^2, \\ R_k(q^2) \rightarrow 0 & \text{when } q^2 \gg k^2. \end{cases} \quad (7.21)$$

Ці обмеження на $R_k(q^2)$ також означають, що $R_{k=0}(q^2) \equiv 0$, що узгоджується з фактом, що при $k = 0$ усі флуктуації враховуються і відновлюється вихідна модель: $\mathcal{Z}_{k=0}[J] = \mathcal{Z}[J]$. Нарешті, зазначте, що $R_{k=\Lambda}(q^2)$ дуже велика для усіх імпульсів набагато менших за Λ . Типову функцію обрізання, що задовольняє усім попереднім вимогам, можна вибрати такою:

$$R_k(q^2) = \frac{Z_k q^2}{e^{q^2/k^2} - 1}, \quad (7.22)$$

де Z_k – це перенормування поля. Інша корисна функція обрізання, названа θ -обрізанням, була запропонована Літімом [503]. Вона записується:

$$R_k(q^2) = Z_k (k^2 - q^2) \Theta(k^2 - q^2), \quad (7.23)$$

де Θ – звичайна функція Гевісайда.

Біжуча вільна енергія Гіббса Γ_k тоді визначається як (слабко модифіковане) перетворення Лежандра вільної енергії Гельмгольца $W_k[J] = \log \mathcal{Z}_k[J]$ (див. роботи [309, 504–508]):

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + J\phi - \Delta S_k[\phi], \quad (7.24)$$

де ϕ – поле параметра порядку. Тут масовий вклад, аналогічний (7.19) був доданий до звичайного визначення Γ з наступної причини. Зрозуміло, що оскільки $R_{k=0}(q^2) \equiv 0$, з визначення (7.24) відновлюється звичайна вільна енергія в границі $k \rightarrow 0$: $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$. Границя $k \rightarrow \Lambda$ менш тривіальна, оскільки тут функція обрізання $R_k(q^2)$ дуже велика. Але можна показати [309, 504–508], що обрізуючий вклад $\Delta S_k[\phi]$ у співвідношенні (7.24) скомпенсовується обрізуючим вкладом, що входить до $W_k[J]$, призводячи до $\Gamma_{k=\Lambda}[\phi] \simeq S[\phi]$. Таким чином, відтворюються умови (7.17).

Ефективна дія задовільняє точне рівняння на потоки, рівняння Веттеріха [509–512]:

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q^2) \left(\Gamma_k^{(2)}[q, -q, \phi] + R_k(q^2) \right)^{-1}, \quad (7.25)$$

де $t = \ln k / \Lambda$ і $\dot{R}_k = \partial_t R_k$. У рівнянні (7.25), Tr потрібно розуміти як слід за внутрішніми векторними або тензорними індексами, якщо параметер порядку ϕ відповідає нетривіальному представленню групи, як це і є у випадку неколінеарних магнетиків. Нарешті, $\Gamma_k^{(2)}[q, -q, \phi]$ означає перетворення Фур'є другої функціональної похідної Γ_k за полем параметра порядку:

$$\Gamma_{k,i,j}^{(2)}[x, y, \phi] = \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)}, \quad (7.26)$$

для n -компонентного поля з компонентами ϕ_i . Тому величина $(\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k)^{-1}$, що з'являється у (7.25), представляє точний, тобто залежний від поля, пропагатор.

Загальні властивості рівняння (7.25) докладно обговорювалися у літературі [309, 504–508]. Ми згадаємо лише деякі з них, що безпосередньо стосується нашого завдання. По-перше, р-ня (7.25) є точним, оскільки пропагатор $(\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k)^{-1}$ є точним. Як наслідок, р-ня (7.25) враховує усі пертурбативні та

непертурбативні особливості досліджуваної моделі: спінові хвилі, топологічні збудження, зв'язані стани, тунелювання та ін. По-друге, завдяки властивості функції обрізання R_k (через наявність “масового вкладу” R_k у пропагаторі), р-ня (7.25) є скінченним в інфрачервоній границі для будь-якого $k > 0$. Також, через наявність функції $\dot{R}_k$, що швидко загасає для високих імпульсів тобто $q^2 > k^2$, воно скінченне в ультрафіолетовій границі. Таким чином, р-ня (7.25) дозволяє досліджувати критичність безпосередньо в трьох вимірах, не звертаючись до таких трюків, як, наприклад, ε -розклад. По-третє, р-ня (7.25) має однопетлеву структуру, що означає, що усі інтеграли, які виникають, будуть однократними інтегралами, на відміну від пертурбативних розкладів при високих порядках, які призводять до врахування багатократних інтегралів. Ця властивість дозволяє пряме порівняння з першим порядком *усіх* пертурбативних підходів: розкладів за слабкою константою зв'язку, низькою температурою, великим n у їх відповідних областях застосовності.

Однак, дарма що р-ня (7.25) є точним, потрібно застосовувати наближення, щоб отримати конкретні результати для складних задач з оптимальними зусиллями. Це реалізується шляхом вибору вкорочення для $\Gamma_k([\phi])$. Найпопулярнішими для скалярної теорії поля є нижче описані.

(i) *Розклад за похідними.* Γ_k розкладається за степенями похідних параметра порядку:

$$\Gamma_k[\phi] = \int_x \left\{ U_k(\phi) + \frac{1}{2} Z_k(\phi) (\partial\phi)^2 + \mathcal{O}((\partial\phi)^4) \right\}, \quad (7.27)$$

з яких отримують *функціональні* рівняння РГ для потенційної частини $U_k(\phi)$ і кінетична частина $Z_k(\phi)$ біжучої ефективної дії за допомогою відповідного функціонального диференціювання (7.25). Обґрунтування цього наближення полягає у тому, що коли аномальна вимірність мала, градієнтні члени повинні відігравати лише невелику роль на далеких відстанях і члени з похідними високого порядку мають бути незначними.

(ii) *Комбіновані розклади за похідними і полем.* На початку розкладу за

похідними функції $U_k(\phi)$ та $Z_k(\phi)$ розкладаються за степенями ϕ навколо заданої конфігурації поля. Цей тип наближення перетворює функціональне рівняння (7.25) у множину звичайних зв'язаних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів розкладу. Це наближення спирається на подвійне припущення про те, що аномальна вимірність мала і кореляційні функції для великої кількості полів мають малий вплив на потік РГ для кореляційних функцій малої кількості полів. Тому багаточастинковими кореляційними функціями можна нехтувати, не псуючи домінуючу критичну поведінку.

(iii) *Польовий розклад*. Γ_k розкладається за степенями параметра порядку ϕ . Тоді отримується:

$$\Gamma_k[\phi] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\int \prod_{i=0}^l \phi(x_i) \right) \mathcal{V}_k^{(l)}(x_1, \dots, x_l), \quad (7.28)$$

де $\mathcal{V}_k^{(l)}(x_1, \dots, x_l)$ – вершинні функції цієї теорії. Підставляючи потім цей розклад у (7.25), можна отримати ієрархію рівнянь РГ для вершинних функцій. Потрібно тоді застосовувати наближення для Γ_k , щоб закрити цю ієрархію. Такий підхід спирається на припущення, що вершинами високих порядків за полем можна знехтувати, а повну функціональну залежність від похідних або імпульсів потрібно зберегти.

(iv) *Підхід функцій Гріна*, також називається *підходом Блазо–Мендеса–Галана–Вшебо* (Blazoit–Méndez-Galain–Wschebor (BMW)) [513–515]. Його мета – зберегти повну імпульсну залежність двоточкових функцій та функціональну залежність функцій $U_k(\phi)$ і $Z_k(\phi)$. Він полягає в апроксимації імпульсної залежності три- та чотириточкових функцій у рівнянні на потоки для двоточкових функцій. Тому такий підхід відтворює результати, отримані в рамках розкладу за похідними при малих імпульсах, будучи також непертурбативним при високих імпульсах.

З практичної точки зору головною складністю є вибір такого наближення, що буде містити найважливіші характеристики досліджуваної моделі, а також буде технічно керованим. Для критичних явищ можна зосередитись на моментах q

близьких до 0. Отже, тут оптимальним вибором є розклад за похідними (див. (i) вище). Це відрізняється від ситуацій, де очікуються зв'язані стани або збудження, що демонструють нетривіальну імпульсну структуру, а тому більш-менш важливу імпульсну залежність слід розглядати з використанням (iii) або (iv). В основному порядку розкладу за похідними повністю нехтується вкладом з похідними і функція перенормування поля $Z_k(\phi)$ покладається рівною одиниці, зберігаючи повну функцію $U_k(\phi)$ для потенційної частини. Це так зване наближення локального потенціалу (LPA). Можливе удосконалення цього підходу полягає в тому, щоб замінити $Z_k(\phi)$ нетривіальною константою Z_k , з якої випливає k -залежна аномальна вимірність $\eta_k = -(1/Z_k)\partial_t Z_k$, звичайна аномальна вимірність задається значенням η_k у НТ. Це наближення іноді називається LPA'. Саме такий підхід використовується у цьому підрозділі. Також можна пробувати розглядати кінетичні вклади $Z_k(\phi)$ як функцію. На практиці це було виконано тільки у найпростішому випадку моделі $O(n)$ [516]. Для більш складніших моделей використовується лише наближення (ii). Цей підхід при використанні досить високих порядків польового розкладу, загалом, достатній для отримання високоточних результатів. Наприклад, для моделі Ізінга кращі оцінки критичних показників в $d = 3$ були отримані у комбінованому розкладі за похідними та полями, використовуючи четвертий порядок за в похідними та десятий порядок за полем [517].

Нарешті, підкреслимо, що, хоча точність результатів залежить від порядку вкорочення, жодне з наведених вище наближень не псує непертурбативний характер методу. Дійсно, хоча сама ефективна дія наближена, сама структура р-ня (7.25) зберігається незмінною, оскільки ліва частина не розкладається за степенями одного зі звичайних пертурбативних параметрів: константи зв'язку, температури, або $1/n$. Таким чином, навіть у найнижчому порядку комбінованого розкладу за похідними та полями вже отримуються результати, недоступні пертурбативними методами [309, 504–508].

7.4.2. Ефективна дія для неколінеарних магнетиків

Тут ми подаємо розклад за похідними ефективної дії для неколінеарних магнетиків. Спочатку нагадаємо, що для n -компонентних неколінеарних магнетиків параметр порядку складається з двох n -компонентних дійсних векторів $\vec{\phi}_1$ і $\vec{\phi}_2$, які у моделі STA представляють лінійні комбінації спінів плакетки [309]. Зручно зібрати ці два поля у матрицю $n \times 2$: $\Phi = (\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2)$. У неперервній границі дія для неколінеарних магнетиків відображає симетрію $O(n) \times O(2)$, де $O(n)$ виступає для звичайної обертової симетрії, тоді як $O(2)$ відображає оригінальну C_{3v} -симетрію ґратки [309]. Ліве $O(n)$ і праве $O(2)$ перетворення реалізовані для Φ шляхом:

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow U\Phi, & U \in O(n), \\ \Phi \rightarrow \Phi V, & V \in O(2). \end{cases} \quad (7.29)$$

Як сказано вище, розклад за похідними полягає у розвиненні Γ_k за степенями $\partial\phi$ у скінченному порядку. Ми розглядаємо тут розклад у другому порядку за похідними. Так, дія Γ_k записується [309]:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2] = \int_x \left\{ U_k(\rho, \tau) + \frac{1}{2} Z_k(\rho, \tau) \left((\partial\vec{\phi}_1)^2 + (\partial\vec{\phi}_2)^2 \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} Y_k^{(1)}(\rho, \tau) (\vec{\phi}_1 \cdot \partial\vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_2 \cdot \partial\vec{\phi}_1)^2 + \frac{1}{4} Y_k^{(2)}(\rho, \tau) (\vec{\phi}_1 \cdot \partial\vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2 \cdot \partial\vec{\phi}_2)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{4} Y_k^{(3)}(\rho, \tau) \left((\vec{\phi}_1 \cdot \partial\vec{\phi}_1 - \vec{\phi}_2 \cdot \partial\vec{\phi}_2)^2 + (\vec{\phi}_1 \cdot \partial\vec{\phi}_2 + \vec{\phi}_2 \cdot \partial\vec{\phi}_1)^2 \right) \right\}. \quad (7.30) \end{aligned}$$

У р-ні (7.30) ρ і τ – це два незалежних інваріанта для $O(n) \times O(2)$ симетрії, що виражаються через $\vec{\phi}_1$ так $\vec{\phi}_2$ таким чином:

$$\begin{cases} \rho = \text{Tr}({}^t\Phi \cdot \Phi) = \vec{\phi}_1^2 + \vec{\phi}_2^2, \\ \tau = \frac{1}{2} \text{Tr} \left({}^t\Phi \cdot \Phi - \mathbb{1} \frac{\rho}{2} \right)^2 \\ = \frac{1}{4} (\vec{\phi}_1^2 - \vec{\phi}_2^2)^2 + (\vec{\phi}_1 \cdot \vec{\phi}_2)^2. \end{cases} \quad (7.31)$$

Вклад $U_k(\rho, \tau)$ у (7.30) представляє потенціальну частину ефективної дії, тоді як $Z_k(\rho, \tau)$ і $Y_k^{(i)}(\rho, \tau)$, $i = 1, 2, 3$, є кінетичними частинами. У мінімумі потенці-

алу $U_k(\rho, \tau)$ вектори $\vec{\phi}_1$ і $\vec{\phi}_2$ є ортогональними з однаковою нормою, що відповідає такій конфігурації:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.32)$$

де ϕ – константа. Для спінів на ґратці, конфігурація (7.32) відповідає 120° структурі. Зазначте, що інваріант τ сконструйовано так, що він зникає у цій конфігурації. Основний стан (7.32) інваріантний відносно групи $O(n-2)$ лівих поворотів і діагональної $O(2)$ групи, $O(2)_{\text{diag}}$, що комбінує ліві і праві повороти:

$$\begin{pmatrix} O(2) & 0 \\ 0 & O(n-2) \end{pmatrix} \Phi_0 O(2) = \Phi_0. \quad (7.33)$$

Схема порушення симетрії тоді задається: $O(n) \times O(2) \rightarrow O(n-2) \times O(2)_{\text{diag}}$. Для $n = 3$ відтворюється схема порушення симетрії:

$$G = O(3) \times O(2) \rightarrow H = \mathbb{Z}_2 \times O(2)_{\text{diag}}, \quad (7.34)$$

яка показує, що простір параметра порядку задається $SO(3)$. Для $n = 2$ схема порушення симетрії задається:

$$G = O(2) \times O(2) \rightarrow H = O(2)_{\text{diag}}, \quad (7.35)$$

або просто $SO(2) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{1}$, де пов'язані з групою $\mathbb{Z}_2$ ступені свободи приписуються кіральності.

Тепер ми продовжимо подальші наближення. Як пояснено у роботі [309], тільки функції Z_k і $Y_k^{(1)}$ роблять вклад до фізики голдстонівських мод, і тому є найбільш суттєвими при переході. Тому ми розглядаємо таку спрощену ефективну дію:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \int_x \left\{ U_k(\rho, \tau) + \frac{1}{2} Z_k(\rho, \tau) \left((\partial \vec{\phi}_1)^2 + (\partial \vec{\phi}_2)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} Y_k^{(1)}(\rho, \tau) (\vec{\phi}_1 \cdot \partial \vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_2 \cdot \partial \vec{\phi}_1)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Останнє наближення полягає у нехтуванні залежністю функцій $Z_k(\rho, \tau)$ і $Y_k^{(1)}(\rho, \tau)$ від поля, тобто використовується заміна $Z_k(\rho, \tau) = Z_k$ і $Y_k^{(1)}(\rho, \tau) = \omega_k$. Таке наближення використовувалось у роботах [309, 331–334], у яких функція $U_k(\rho, \tau)$ далі розкладалась за степенями інваріантів ρ і τ . Усі результати теорії збурень відтворюються цим способом, тобто, можна витягти однопетлеві результати, отримані або у $d = 4 - \varepsilon$, або у $d = 2 + \varepsilon$ розкладах. Зазначте, що поблизу $d = 2$, необхідно враховувати “потоківий член”, $(\vec{\phi}_1 \cdot \partial \vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_2 \cdot \partial \vec{\phi}_1)^2$, щоб дістати явище збільшеної симетрії у НТ [497], хоча він несуттєвий поблизу верхньої критичної вимірності $d = 4$. У вимірності $d = 3$, якою ми цікавимось, такий член не дає значного вкладау. Однак будемо його враховувати, щоб уникнути недосконалостей попередніх непертурбативних РГ підходів.

7.4.3. Рівняння РГ

Ми подаємо тут рівняння РГ, які описують неколінеарні магнетики. У цьому випадку для моделі з симетрією $O(n) \times O(2)$ точне рівняння на потоки (7.25) записується:

$$\partial_t \Gamma_k[\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2] = \frac{1}{2} \text{Tr} \int_q \dot{R}_k(q) \left(\Gamma_k^{(2)}[q, -q, \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2] + R_k \right)^{-1}, \quad (7.37)$$

де $\Gamma_k^{(2)}[q, -q, \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2]$ – це перетворення Фур’є другої функціональної похідної Γ_k :

$$\Gamma_{k,(a,i),(b,j)}^{(2)}[x, y, \vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2] = \frac{\delta \Gamma_k[\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2]}{\delta \phi_a^i(x) \delta \phi_b^j(y)}, \quad (7.38)$$

де $a, b = 1, 2$, а $i, j = 1, \dots, n$.

Рівняння на потоки для ефективного потенціалу $U_k(\rho, \tau)$ слідує з означення:

$$U_k(\rho, \tau) = \frac{1}{\Omega} \Gamma_k[\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2] \Big|_{\Phi}, \quad (7.39)$$

де Ω – це об’єм системи і Φ – постійна конфігурація поля. Оскільки U_k є інваріантом симетрії $O(n) \times O(2)$, то можна використати перетворення $O(n) \times O(2)$, щоб максимально спростити конфігурацію Φ , у якій розраховуються потоки РГ

(7.37). Легко побачити, що, використовуючи ці перетворення, можна працювати з будь-якою матрицею Φ у “діагональній” формі:

$$\Phi = U\Phi_D V \text{ з } U \in O(N) \text{ та } V \in O(2), \quad (7.40)$$

з:

$$\Phi_D = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.41)$$

де ϕ_1 і ϕ_2 – константи.

Коефіцієнти Z_k і ω_k визначаються таким чином:

$$Z_k = \frac{(2\pi)^d}{\delta(0)} \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{d}{dp^2} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_k}{\delta\phi_1^1(p)\delta\phi_1^1(-p)} \Big|_{\Phi_I} \right), \quad (7.42)$$

$$\frac{\omega_k}{2} = \frac{(2\pi)^d}{\kappa\delta(0)} \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{d}{dp^2} \left(\frac{\partial^2 \Gamma_k}{\delta\phi_1^2(p)\delta\phi_1^2(-p)} \Big|_{\Phi_I} \right) - \frac{Z_k}{\kappa}, \quad (7.43)$$

де ми обираємо однорідну польову конфігурацію Φ_I пропорційну до одиничної матриці:

$$\Phi_I = \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa} & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

Тут $\sqrt{\kappa}$ є константою, що може відрізнятись від мінімуму ϕ потенціалу (7.32).

Нарешті біжуча аномальна вимірність η_k визначається так: $\eta_k = -\partial_t \log Z_k$.

Рівняння на потоки для потенціалу записується у термінах різних пропагаторів, пов’язаних з масовим спектром моделі (див. Додаток (C.1)):

$$\begin{aligned} \partial_t U_k(\rho, \tau) = & \frac{1}{2} \int_q \dot{R}_k(q^2) \left[\frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{1+}^2} + \frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{1-}^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{2+}^2} + \frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{2-}^2} \right] \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$+(n-2) \left(\frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{3+}^2} + \frac{1}{Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{3-}^2} \right) \Bigg],$$

де (імпульсно залежний) квадрат “маси” задається:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{1\pm}^2 = 2U_k^{(1,0)} + 2\rho U_k^{(2,0)} + \rho U_k^{(0,1)} + 2\rho\tau U_k^{(0,2)} + 8\tau U_k^{(1,1)} \\ \quad \pm \left\{ \tau \left(4U_k^{(0,1)} + 4U_k^{(2,0)} + 4\tau U_k^{(0,2)} + 4\rho U_k^{(1,1)} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + (\rho^2 - 4\tau) \left(2U_k^{(2,0)} - U_k^{(0,1)} - 2\tau U_k^{(0,2)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ m_{2\pm}^2 = 2U_k^{(1,0)} + \rho U_k^{(0,1)} + \frac{\omega_k}{4} \rho q^2 \\ \quad \pm \frac{1}{2} \left\{ \omega_k^2 \tau q^4 + (\rho^2 - 4\tau) \left(-\frac{\omega_k}{2} q^2 + 2U_k^{(0,1)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ m_{3\pm}^2 = 2U_k^{(1,0)} \pm 2\sqrt{\tau} U_k^{(0,1)}; \end{array} \right. \quad (7.46)$$

з $U_k^{(m,n)} = \partial^{m+n} U_k(\rho, \tau) / \partial^m \rho \partial^n \tau$, $\rho = \phi_1^2 + \phi_2^2$ і $\tau = (\phi_1^2 - \phi_2^2)^2$, де ϕ_1 і ϕ_2 параметризують конфігурацію (7.41).

Далі ми цікавимось нерухомими точками рівнянь на потоки. Щоб знайти їх, потрібно працювати з безрозмірними перенормованими величинами, що задаються: $\tilde{\rho} = Z_k k^{2-d} \rho$, $\tilde{\tau} = Z_k^2 k^{2(2-d)} \tau$, $\tilde{U}_k(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = k^{-d} U_k(\rho, \tau)$, $\tilde{\omega}_k = Z_k^{-2} k^{d-2} \omega_k$, $y = q^2/k^2$, $r(y) = R_k(yk^2)/Z_k yk^2$. У термінах цих змінних рівняння на потоки для потенціалу записується:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U}_k &= -d\tilde{U}_k(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) + (d-2 + \eta_k) \left[\tilde{\rho} \tilde{U}_k^{(1,0)}(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) \right. \\ &\quad \left. + 2\tilde{\tau} \tilde{U}_k^{(0,1)}(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) \right] + 2v_d \left[l_0^d(\tilde{m}_{1+}^2) + l_0^d(\tilde{m}_{1-}^2) \right. \\ &\quad \left. + l_0^d(\tilde{m}_{2+}^2) + l_0^d(\tilde{m}_{2-}^2) + (n-2)(l_0^d(\tilde{m}_{3+}^2) + l_0^d(\tilde{m}_{3-}^2)) \right], \end{aligned} \quad (7.47)$$

де $v_d^{-1} = 2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma[d/2]$, $\tilde{m}_i$ – це безрозмірений аналог мас, заданих рівнянням (7.46), і порогові функції $l_m^d(w)$ задаються таким чином:

$$l_m^d(w) = -\frac{m + \delta_{m,0}}{2} \int_0^\infty dy y^{d/2} \frac{\eta_k r(y) + 2y r'(y)}{[y(1 + r(y)) + w]^{m+1}}. \quad (7.48)$$

Рівняння РГ для біжучих аномальної вимірності η_k і константи зв'язку ω_k задаються безрозмірними величинами:

$$\begin{aligned} \eta_k = & \frac{2v_d}{d} \left[d\tilde{\omega}_k l_{1,0}^d (\tilde{m}_3^2, 0, 0) + 64\tilde{\kappa} (\tilde{U}_k^{(0,1)})^2 m_{2,2}^d (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_{1-}^2, 0) + \right. \\ & 128\tilde{\kappa} (\tilde{U}_k^{(2,0)})^2 m_{2,2}^d (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_{1+}^2, 0) + (d-2)\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^2 l_{1,1}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^2 m_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^2 n_{1,2}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^2 n_{2,1}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 2\tilde{\kappa}^2 \tilde{\omega}_k^3 l_{1,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & \left. 2\tilde{\kappa}^2 \tilde{\omega}_k^3 n_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) \right], \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} = & (d-2+2\eta) \tilde{\omega}_k + \frac{2v_d}{d} \left[\frac{d\tilde{\omega}_k}{\tilde{\kappa}} (l_{1,0}^d (\tilde{m}_3^2, 0, 0) - l_{1,0}^d (\tilde{m}_{1+}^2, 0, 0)) + \right. \\ & (d-2)\tilde{\omega}_k^2 l_{1,1}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + (10-d)\tilde{\omega}_k^2 l_{1,1}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - \\ & 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^3 l_{1,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + 6\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^3 l_{1,2}^{d+4} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & 4(N-2)\tilde{\omega}_k^2 l_{2,0}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, 0, 0) + 4\tilde{\omega}_k^2 l_{2,0}^{d+2} (\tilde{m}_{1-}^2, 0, 0) + \\ & 64(\tilde{U}_k^{(0,1)})^2 m_{2,2}^d (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_{1-}^2, 0) + 2\tilde{\omega}_k^2 m_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - \\ & 2\tilde{\omega}_k^2 m_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 2\tilde{\omega}_k^2 n_{1,2}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & 6\tilde{\omega}_k^2 n_{1,2}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + 2\tilde{\omega}_k^2 n_{2,1}^{d+2} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - \\ & 6\tilde{\omega}_k^2 n_{2,1}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + 128(\tilde{U}_k^{(2,0)})^2 \left\{ m_{2,2}^d (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_{1+}^2, 0) - \right. \\ & \left. m_{2,2}^d (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, 0) - \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k n_{2,2}^d (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) \right\} + \\ & 8\tilde{U}_k^{(2,0)} \left\{ d l_{1,1}^d (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 6\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k l_{1,2}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \right. \\ & 4m_{2,2}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 6n_{1,2}^d (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + \\ & 6n_{2,1}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) + 4\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k n_{2,2}^{d+2} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) \left. \right\} + \\ & \left. 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^3 n_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_3^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) - 2\tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k^3 n_{2,2}^{d+4} (\tilde{m}_{1+}^2, \tilde{m}_3^2, \tilde{\kappa}\tilde{\omega}_k) \right], \end{aligned} \quad (7.50)$$

де маси розраховуються у конфігурації Φ_I (7.44), у якій $\tau = 0$, і задаються:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}_{1+}^2 = 2\tilde{U}_k^{(1,0)} + 8\tilde{\kappa}\tilde{U}_k^{(2,0)}, \\ \tilde{m}_{1-}^2 = \tilde{m}_{2+}^2 = 2\tilde{U}_k^{(1,0)} + 4\tilde{\kappa}\tilde{U}_k^{(0,1)}, \\ \tilde{m}_3^2 = \tilde{m}_{3+}^2 = \tilde{m}_{3-}^2 = \tilde{m}_{2-}^2 = 2\tilde{U}_k^{(1,0)}, \end{array} \right. \quad (7.51)$$

де $U_k^{(a,b)}$ означає $U_k^{(a,b)}(\tilde{\rho} = 2\tilde{\kappa}, \tau = 0)$. Порогові функції l_{m_1, m_2}^d , m_{m_1, m_2}^d і n_{m_1, m_2}^d подані у Додатку (C.2).

7.4.4. Напів-розклад за полями

Частина потенціалу, яку *a priori* потрібно представити найбільш точно, – це окіл мінімуму (7.32), оскільки саме він описує термодинаміку системи. Цей мінімум реалізується при скінченному значенні ρ та нульовому значенні τ . Тому очікуємо, що нетривіальна польова залежність реалізується у ρ -напрямку, а не у τ -напрямку. Тому використовуємо “напів-розклад” за полями, ідея якого полягає у зберіганні повної залежності U_k від ρ і розкладі за степенями τ :

$$\tilde{U}_k(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} \tilde{U}_{p,k}(\tilde{\rho}) \tilde{\tau}^p. \quad (7.52)$$

Рівняння на потоки для функцій $\tilde{U}_{p,k}(\tilde{\rho})$ можна легко отримати, диференціюючи р-ня (7.47) за τ . Ми вкоротили розклад при $p_{\max} = 1, 2$ і 3. Для простоти наводимо результат тільки для $\tilde{U}_{0,k}(\tilde{\rho})$:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{U}_{0,k}(\tilde{\rho}) &= -d \tilde{U}_{0,k}(\tilde{\rho}) + (d - 2 + \eta_k) \tilde{\rho} \tilde{U}'_{0,k}(\tilde{\rho}) \\ &\quad + 2v_d [l_{1,0}^d(\tilde{m}_{1+}^2, 0, 0) + 2l_{1,0}^d(\tilde{m}_{1-}^2, 0, 0) \\ &\quad + l_{1,0}^d(0, \tilde{m}_{1-}^2, \tilde{\rho}\tilde{\omega}_k/2) + 2(N - 2) l_{1,0}^d(\tilde{m}_{3+}^2, 0, 0)] \end{aligned} \quad (7.53)$$

з $\tilde{U}'_{0,k}(\tilde{\rho}) = d\tilde{U}_{0,k}(\tilde{\rho})/d\tilde{\rho}$, а квадрати мас задаються:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}_{1+}^2 = 2\tilde{U}'_{0,k}(\tilde{\rho}) + 4\tilde{\rho}\tilde{U}''_{0,k}(\tilde{\rho}) \\ \tilde{m}_{1-}^2 = 2\tilde{U}'_{0,k}(\tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho}\tilde{U}_{1,k}(\tilde{\rho}) \\ \tilde{m}_{3+}^2 = 2\tilde{U}'_{0,k}(\tilde{\rho}) . \end{array} \right. \quad (7.54)$$

Процедура

Для того, щоб проінтегрувати рівняння на потоки РГ для функцій $\tilde{U}_{p,k}(\tilde{\rho})$, нам потрібні початкові умови, тобто їх значення при $k = \Lambda$. Для цього ми вибираємо звичайний потенціал Ландау-Гінзбурга-Вільсона:

$$\tilde{U}_{k=\Lambda}(\rho, \tau) = \tilde{r}_\Lambda \tilde{\rho} + \tilde{g}_{1,\Lambda} \tilde{\rho}^2 + \tilde{g}_{2,\Lambda} \tilde{\tau}, \quad (7.55)$$

що означає $\tilde{U}_{0,k=\Lambda}(\rho) = \tilde{r}_\Lambda \tilde{\rho} + \tilde{g}_{1,\Lambda} \tilde{\rho}^2$, $\tilde{U}_{1,k=\Lambda}(\rho) = \tilde{g}_{2,\Lambda} \tilde{\tau}$ і $\tilde{U}_{p>1,k=\Lambda}(\rho) = 0$. Критичності можна досягнути, міняючи масовий параметр $\tilde{r}_\Lambda$, зберігаючи $\tilde{g}_{1,\Lambda}$ і $\tilde{g}_{2,\Lambda}$ фіксованим. У принципі, це можна повторити у будь-якій вимірності d і для усіх значень n більших, ніж $n_c(d)$. Ми зосереджуємось на тривимірному випадку і, відповідно, на значенні $n_c(d = 3)$. Нагадуємо, що $n_c(d)$ є результатом колапсу двох нерухомих точок, однієї стійкої, кіральної НТ C_+ , та однієї нестійкої, антикіральної НТ C_- , коли n зменшується з $n > n_c(d)$ до $n_c(d)$. Коли C_+ і C_- стають ближчими, швидкість потоку зменшується і зникає при $n = n_c(d)$. Тому, спосіб для визначення $n_c(d)$ полягає в ідентифікації значення n , для якого перша поправка до скейлінгу ω зникає. Щоб розрахувати цю величину, ми параметризуємо потенціал поблизу НТ:

$$\tilde{U}_k(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = \tilde{U}^*(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) + \tilde{F}(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) e^{-t/\nu} + \tilde{G}(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) e^{\omega t}, \quad (7.56)$$

де ν – це звичайний критичний показник кореляційної довжини, ω – показник поправки до скейлінгу.

Наближення LPA

Для того, щоб оцінити вплив вкладів від похідних з η_k і ω_k на $n_c(d=3)$, проводимо два розрахунки: один, у якому ці дві константи зв'язку покладаються 0 (LPA), і ще один, де ми враховуємо їх у найпростіший спосіб (LPA'). Для потенціалу використовуємо у розкладі (7.52) функції $\tilde{U}_{p,k}(\tilde{\rho})$ до $p_{\max} = 3$. Це дозволяє аналізувати збіжність за степенями τ . В кінці маємо *оптимізувати* наші результати. Справді, як добре відомо, скінченні вкорочення ефективної дії у польовій залежності і/або залежності від похідних спричиняють залишкову залежність фізичних величин від регуляторної функції R_k . За визначенням, оптимальним регулятором є такий, що залежність фізичної величини від цього регулятора є мінімальною: це є RMS, описаний в підрозділі 7.1. Застосований до $O(n)$ моделей, цей принцип справді приводить до кращого визначення критичних показників у $d=3$ у тому сенсі, що результати, отримані таким чином, є найближчими до значень, отриманих у дослідженні МК [517, 518]. Щоб оптимізувати наші результати, використовуємо експоненційне обрізання (7.22), яке розширюємо на цілу сім'ю функцій обрізання, параметризованих дійсним числом α :

$$R_k^\alpha(q^2) = \alpha \frac{Z_k q^2}{e^{q^2/k^2} - 1} . \quad (7.57)$$

Ми змінювали α для того, щоб досягнути точки найменшої чутливості, тобто точки, де фізичні величини, тут переважно $n_c(d)$ (тепер ми її позначаємо $n_c(d, \alpha)$), є максимально нечутливими до α . Це, очевидно, відповідає екстремуму $n_c(d, \alpha)$ як функції α .

Випадок $n=6$

Перед тим, як обговорювати значення $n_c(d)$ у рамках розкладу за похідними, корисно розглянути значення n , де існує НТ C_+ , тобто $n > n_c(d=3)$. Ми вибираємо $n=6$, оскільки явний ФП другого роду був знайдений у цьому випадку в симуляціях МК [519]. Це дозволяє перевірити збіжність наших розрахунків. Ми знайшли стійку НТ для $n=6$, результати для якої узгоджуються

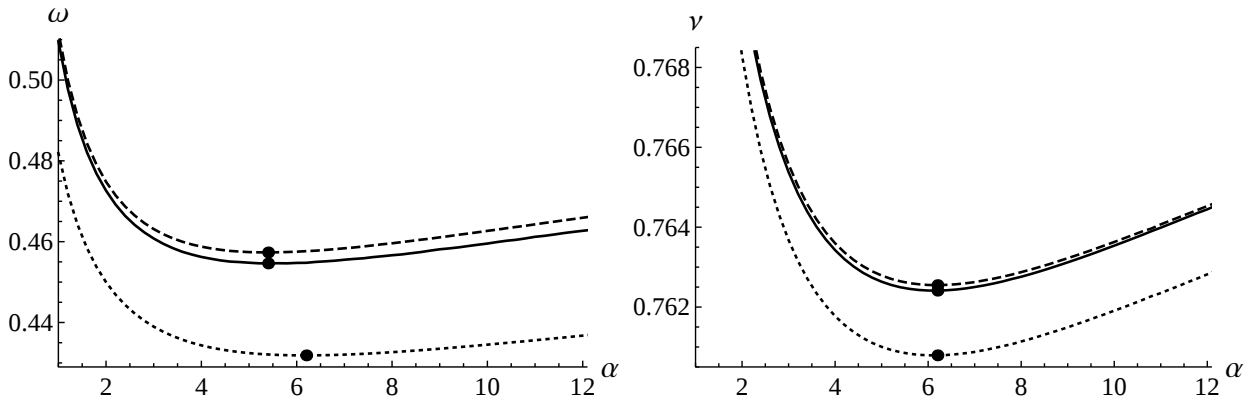


Рис. 7.23. Випадок $n = 6$, $d = 3$: критичні показники ω (справа) і ν (зліва) як функції параметра регулювання α (див. (7.57)), розраховані з $p_{\max} = 1$ (пунктирна крива), 2 (штрихова крива) і 3 (суцільна крива). Чорні точки позначають позиції мінімуму на кривих.

з результатами, отриманими чисельно [519]. Рис. 7.23 показує критичний показник поправки до скейлінгу ω і критичний показник кореляційної довжини ν як функцію параметру регулювання α з $p_{\max} = 1, 2$ і 3. Спочатку знаходиться для кожного $p_{\max}$, свій екстремум для кожної кривої $\omega(d = 3, \alpha)$ і $\nu(d = 3, \alpha)$, змінюючи α . Явно спостерігається дуже добра збіжність з $p_{\max}$. Це означає, що RMS можна безпечно застосовувати і знайти оптимальні значення критичних показників. Ми знаходимо для $p_{\max} = 3$: $\omega_{\text{opt.}} = \omega(d = 3, \alpha = 5.4) = 0.455(5)$, $\nu_{\text{opt.}} = \nu(d = 3, \alpha = 6.2) = 0.7625(5)$, де межі похибки розраховуються з різниці між двома послідовними порядками польового розкладу. Значення ν можна порівняти зі значенням з МК розрахунків $\nu = 0.700(11)$ [519]. Зауважимо, що наше значення ν є вищим від значення, отриманого в чисельному експерименті. Це є наслідком нехтування вкладів від похідних (див. нижче).

Гранична вимірність $n_c(d=3)$

Тоді ми розраховуємо $n_c(d, \alpha)$ для $d = 3.8, 3.5, 3.0$ і 2.8 у рамках LPA і для $p_{\max} = 1, 2, 3$. У всіх випадках знаходимо максимум $n_c(d, \alpha)$ при зміні α , див. Рис. 7.24. Більше того, знаходимо, що $n_c(d, \alpha)$ у своєму максимумі є збіжним зі зростанням $p_{\max}$. Однак виявляється, що швидкість збіжності кардинально спадає з вимірністю d , див. Рис. 7.24. Збіжність є дуже доброю для $3 < d < 4$ і стає

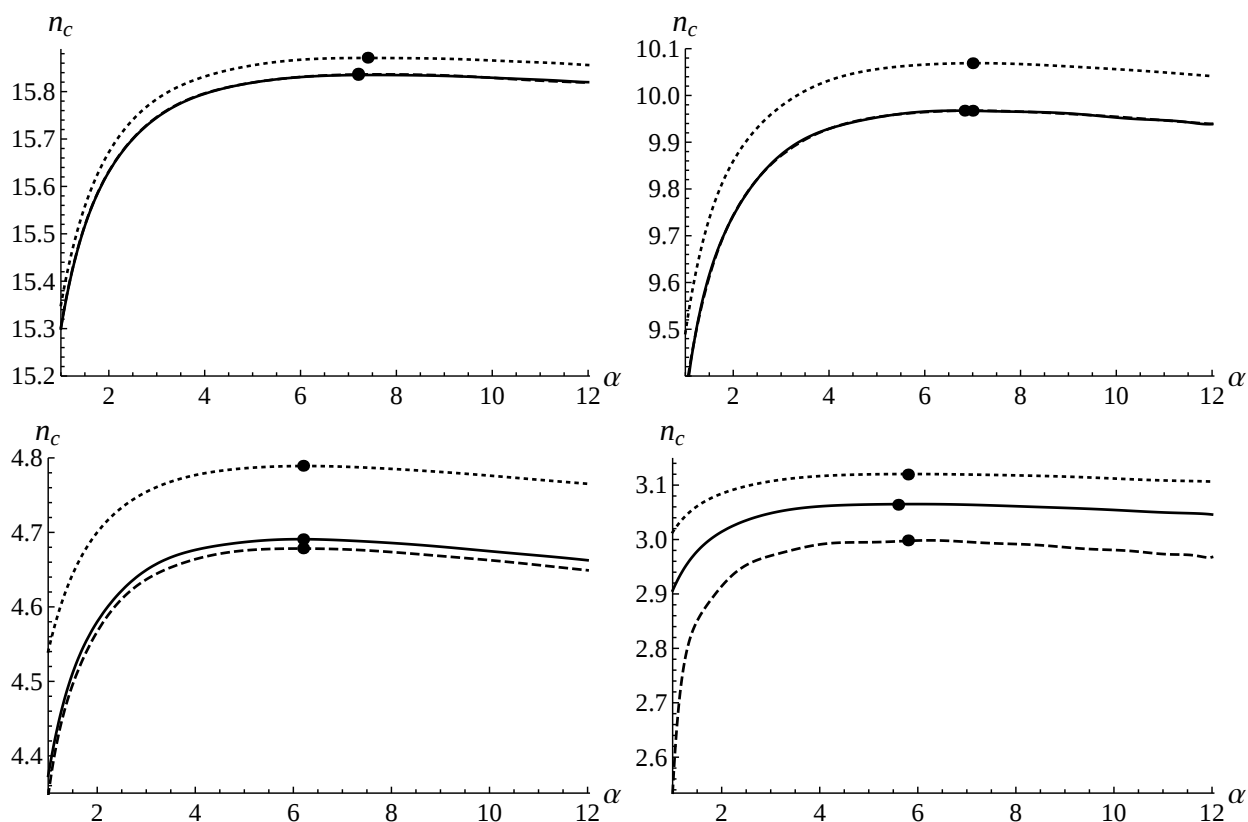


Рис. 7.24. Значення $n_c(d, \alpha)$ отримані у рамках LPA з $p_{\max} = 1$ (пунктирна крива), $p_{\max} = 2$ (штрихова крива) і $p_{\max} = 3$ суцільна крива) для: $d = 3.8$ (зверху зліва), $d = 3.5$ (зверху справа), $d = 3$ (знизу зліва) і $d = 2.8$ (знизу справа). Для $d = 3.8$ і $d = 3.5$ дві криві, отримані з $p_{\max} = 2$ і $p_{\max} = 3$, накладаються у цьому масштабі. Чорні точки позначають позиції мінімумів на кривих.

поганою поблизу $d = 2.8$. Це є межею застосовності розкладу за полями, використаного тут. Ще однією проблемою у низьких вимірностях є те, що там для вимірностей d менших, ніж $d = 3$, існує лінія, $\tilde{n}(d)$ розташована вище лінії $n_c(d)$, де критичний показник ω занулюється; це знову артефакт розкладу за полями. З цих причин ми зосереджуємось на вимірностях між $d = 2.8$ і $d = 4$. У фізично важливому випадку $d = 3$ знаходимо, що оптимальне значення $n_c(d = 3, \alpha)$ задається $n_{c,\text{opt.}} = n_c(d = 3, \alpha = 6.2) = 4.68(2)$. Це значення є майже ідентичне до $n_c(d = 3) = 4.7$, що було знайдене, використовуючи LPA для рівняння Польчинського без будь-яких польових розкладів [328–330]. Це показує, що наш результат для $n_c(d = 3)$ є збіжним у рамках використаних розкладів за полями.

LPA'

Тепер розглянемо вклади від основних членів з похідними, тобто вплив аномальної вимірності η_k і константи зв'язку ω_k у $n_c(d)$. Відповідні рівняння на потоки подані рівняннями (7.49) і (7.50). Потоки цих нових констант зв'язку включають новий ступінь свободи, яким є вибір польової конфігурації Φ_I , у якій вони розраховуються (див. (7.42), (7.43) і (7.44)). Для того, щоб застосувати PMS, ми змінюємо Φ_I і дивимось за екстремумом розрахованих величин, тобто критичних показників для $n = 7$, $n = 6$ і для граничної вимірності $n_c(d)$.

Випадок $n=7$

Спочатку звернемось до випадку $n = 7$, що відповідає найменшому цілому значенні n , для якого знайдена стійка НТ як у рамках НПРГ, так і у пертурбативних підходах з ε - або псевдо- ε розкладами. Ми знайшли НТ для усіх p_{max} . Криві для критичних показників ω , η і ν як функції α , розраховані з $p_{\text{max}} = 3$ у $d = 3$, подані на Рис. (7.25) і Рис. (7.26). Різні криві відповідають різним значенням Φ_I або, еквівалентно, різним значенням $\rho_{\text{fix}} \equiv 2\kappa$, від 0.4 до 1.2. Хоча ми проводили розрахунки для усіх ρ_{fix} між 0.4 і 1.2 з кроком 0.1, представляємо тільки основні криві для того, щоб не перевантажувати зображення. Результати для ω показують, що стаціонарна крива отримується для $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.9$ (суцільна кри-

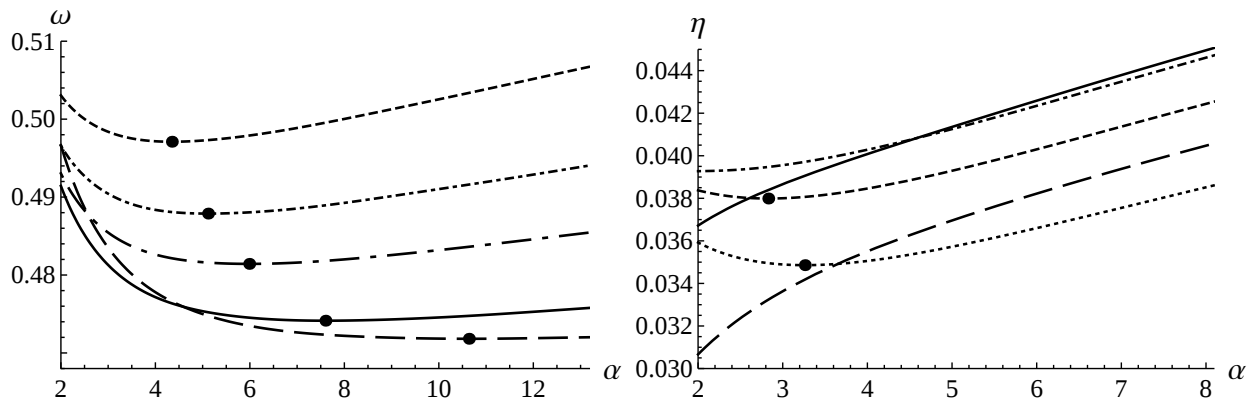


Рис. 7.25. Критичні показники ω (зліва) і η (справа) як функції параметру α для $n = 7$, $d = 3$, $p_{\max} = 3$. Різні стилі кривих відповідають різним значенням ρ_{fix} : пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.4$, штрихова крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.5$, штрих-пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.6$, довга штрих-пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.7$, суцільна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.9$ і довга пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 1.2$. Чорні точки позначають позиції мінімумів відповідних кривих.

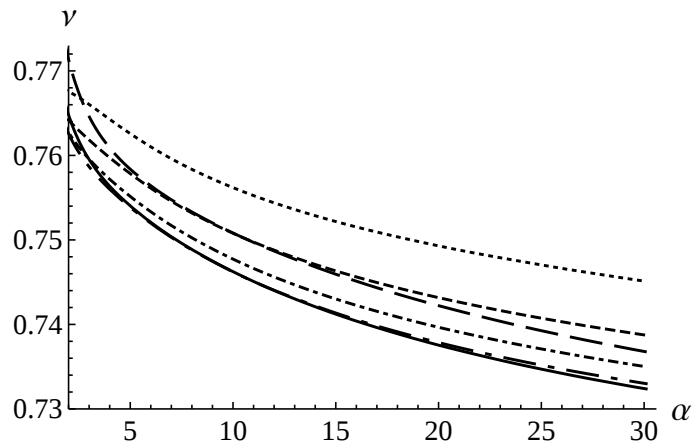


Рис. 7.26. Критичний показник ν як функція параметра α для $n = 7$, $d = 3$, $p_{\max} = 3$. Пунктирна крива відповідає $\rho_{\text{fix}} = 0.4$, штрихова крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.5$, штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.6$, довга штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.7$, суцільна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.9$ і довга пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 1.2$. Не спостерігається екстремуму на кривих.

ва на Рис. (7.25)). Для відповідної кривої, мінімум досягається для $\alpha \simeq 7.5$, що дає оптимальне значення $\omega_{\text{opt.}} = \omega(d = 3, \alpha = 7.5) \simeq 0.475$. Для η стаціонарна крива отримується для $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.6$ (штрихпунктирна крива на Рис. (7.25)). У цьому випадку не спостерігається ніякої стаціонарності за α . Враховуючи результати, отримані для $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.4$ і $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.5$ (відповідно пунктирна і штрихова криві на Рис. (7.25)), для яких ми дістаємо явні мінімуми, можемо розглядати, що у випадку $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.6$ існує квазімінімум при $\alpha = 2$. Це дає майже оптимальне значення $\eta_{\text{opt.}} = \eta(d = 3, \alpha = 2) = 0.039$. Визначення ν є більш проблематичним, див. Рис. (7.26). Справді, у той час як є стаціонарна крива при зміні ρ_{fix} для $\rho_{\text{fix}} = 0.7$ (довга штрихпунктирна крива на Рис. (7.26)), не спостерігається екстремуму при зміні α . Однак, оскільки крива $\nu(d = 3, \alpha)$ дуже слабо змінюється з α , для великих значень α можна отримати оцінку $\nu(d = 3, \alpha)$ в області $[0.730-0.740]$. Ми даємо остаточні значення критичних показників з оцінками меж похибок: $\omega = 0.475(2)$, $\eta = 0.039(2)$ і $\nu = 0.735(5)$. Ці значення можна порівняти з тими, що отримуються пертурбативно. Підхід з ε -розкладом, виконаний в п'яти петлях у рамках схеми мінімального віднімання [387], дає $\omega = 0.33(10)$, $\gamma = 1.39(6)$ і $\nu = 0.71(4)$, що приводить через скейлінгові відношення до $\eta = 0.042(4)$. Розрахунки у цьому ж наближенні і такій же схемі, але без використання ε -розкладу [30], приводять до значень $\omega = 0.5(2)$, $\eta = 0.047(15)$ і $\nu = 0.68(4)$. У рамках шестипетлевого наближення масивної схеми із застосуванням пересумовування з конформним відображенням отримують такі значення [327]: $\omega = 0.23(5)$, $\eta = 0.042(2)$ і $\nu = 0.68(2)$. Межі похибок отримані у пертурбативних і непертурбативних підходах показують, що у випадку $n = 7$ не спостерігається сильного розходження між різними підходами.

Випадок $n=6$

Для $n = 6$ ми знову знаходимо НТ для усіх p_{max} . Криві для критичних показників ω , η і ν як функції α , розраховані з $p_{\text{max}} = 3$ у $d = 3$, подані на Рис. (7.27) і Рис. (7.28). Для ω стаціонарна крива отримується для $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.9$ (суцільна крива на Рис. (7.27)) з мінімумом при $\alpha \simeq 10.5$. Це дає оптимальне зна-

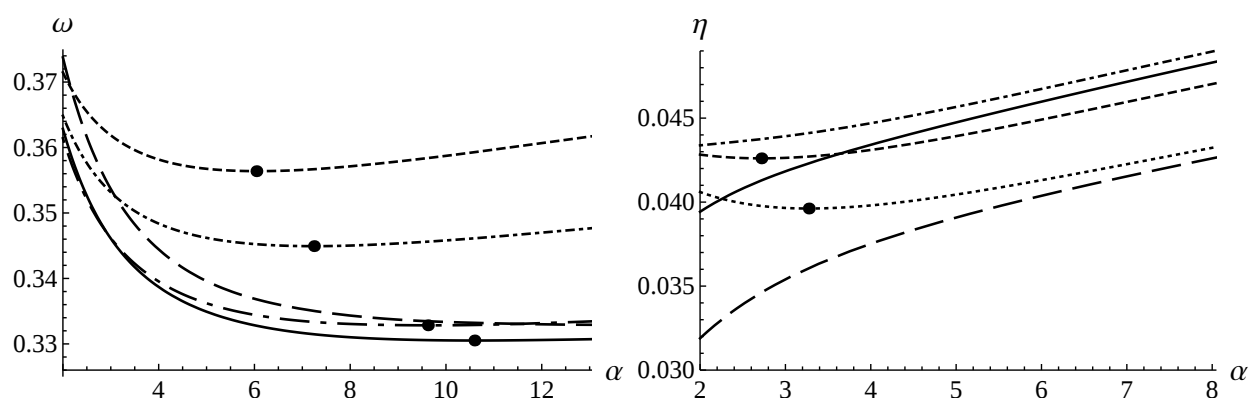


Рис. 7.27. Критичні показники ω (зліва) і η (справа) як функції параметру α для $n = 6$, $d = 3$, $p_{\max} = 3$. Криві різних стилів відповідають різним значенням ρ_{fix} : пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.4$, штрихова крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.5$, штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.6$, довга штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.8$, суцільна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.9$ і довга пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 1.2$. Чорні точки показують позицію мінімуму відповідних кривих.

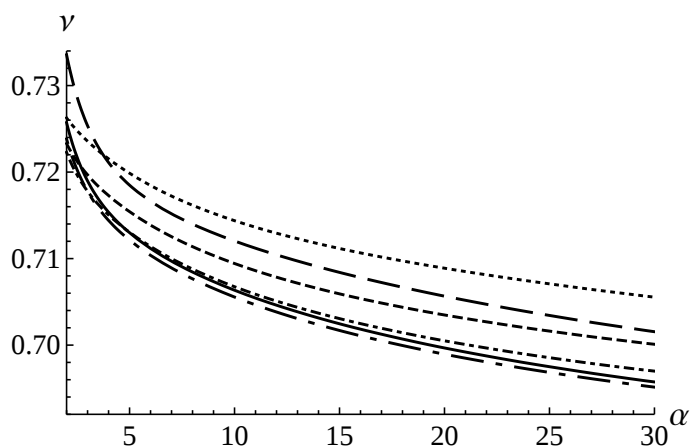


Рис. 7.28. Критичний показник ν як функція параметру α для $n = 6$, $d = 3$, $p_{\max} = 3$. Пунктирна крива відповідає $\rho_{\text{fix}} = 0.4$, штрихова крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.5$, штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.6$, довга штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.8$, суцільна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.9$ і довга пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 1.2$. Не спостерігається екстремуму на кривих.

чення $\omega_{\text{opt.}} = \omega(d=3, \alpha=10.5) \simeq 0.330$. Для η стаціонарна крива отримується для $\rho_{\text{fix}} \simeq 0.6$ (штрихпунктирна крива на Рис. (7.27)). У цьому випадку знову немає стаціонарності за α . Тим не менше, для близьких значень ρ_{fix} (порядку 0.4–0.5, що відповідають пунктирній і штриховій кривим на Рис. (7.27)) отримується явний мінімум. Продовжуючи його, отримуємо майже оптимальне значення η , що лежить між 0.040 і 0.045. Так як і у випадку $n=7$, ми зустрічаємо ту саму проблему для ν (див. Рис. (7.28)): у той час як є стаціонарна крива при зміні ρ_{fix} (при $\rho_{\text{fix}} = 0.8$, довга штрихпунктирна крива на Рис. (7.28)), не спостерігається екстремуму при зміні α . Як і у випадку $n=7$, можна вважати зміну $\nu(d=3, \alpha)$ як плавну з α для великих значень α , і оцінка $\nu(d=3, \alpha)$ може задаватись областю $[0.69 - 0.70]$. Ми даємо остаточні значення критичних показників з оціною меж похибок: $\omega = 0.330(5)$, $\eta = 0.042(2)$ і $\nu = 0.695(5)$. Критичний показник ν можна порівняти з результатами МК $\nu = 0.700(11)$ [519], що показує збіжність наших розрахунків. Можна порівняти ці результати з тими, що отримані у п'ятипетловому наближенні у рамках схеми мінімального віднімання без використання ϵ -розкладу [30], для якого НТ знаходиться для усіх значень n . У випадку $n=6$ ці розрахунки приводять до $\eta = 0.052(14)$ і $\nu = 0.66(4)$. Ці значення є порівнювані з даним НПРГ і результатами МК. Однак, це досягається за рахунок великих меж похибок, що дуже подібно є наслідком поганої збіжності розрахунків у підході з фіксованою вимірністю простору, яка зокрема описана в попередніх підрозділах цього розділу.

Гранична вимірність $n_c(d=3)$

Давайте тепер розглянемо граничну вимірність $n_c(d=3)$, розраховану з $p_{\text{max}} = 3$ у рамках LPA'. Ми знаходимо оптимальне значення $n_c(d=3, \alpha)$ для $\rho_{\text{fix}} \in [0.8, 0.9]$ (див. суцільну і довгу штрихпунктирну криві на Рис. (7.29)). Однак, не спостерігається справжнього екстремуму $n_c(d=3)$ у напрямку за α для цих значень ρ_{fix} , хоча $n_c(d=3)$ є майже нечутливе до α для $\alpha \sim 15$, див. Рис. (7.29). Це дає найкраще можливе значення $n_c(d=3)$: $n_{c,\text{opt}}(d=3, \alpha=15) = 5.24(2)$. Порівняння зі значенням, отриманим використовуючи розклад за полями [309,

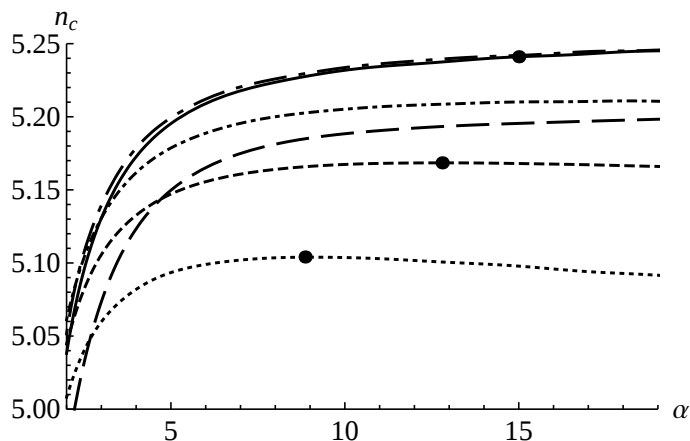


Рис. 7.29. Гранична вимірність $n_c(d=3, \alpha)$ для $p_{\max} = 3$. Пунктирна крива відповідає $\rho_{\text{fix}} = 0.4$, штрихова крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.5$, штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.6$, довга штрихпунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.8$, суцільна крива – $\rho_{\text{fix}} = 0.9$ і довга пунктирна крива – $\rho_{\text{fix}} = 1.2$. Чорні крапки позначають позиції мінімумів кривих.

[331–334], $n_c(d=3) = 5.1$, показує, що ефекти високих порядків розкладів за полем, знехтувані у попередніх підходах, не є досить помітними. Більше того, порівнюючи зі значенням $n_c(d=3) = 4.7$, отриманим у рамках LPA, видно, що вклади з похідними також відіграють важливу роль. Наше значення $n_c(d=3)$ можна порівняти з тими, що отримуються пертурбативно через ε - або псевдо- ε розклади. У рамках ε -розкладу у п'ятипетловому наближенні знайдено $n_c(d=3) = 6.1(6)$ [387], і псевдо- ε розклад у шестипетловому наближенні приводить до $n_c(d=3) = 6.22(12)$ [387] і $n_c(d=3) = 6.23(21)$ [82]. Кількісне узгодження не є хорошим. Можна чекати, що вклади вищих порядків за похідними у НПРГ підході виправлять ситуацію. Однак, з якісної точки зору усі ці результати узгоджуються у тому, що нетривіальна НТ відсутня для $n=2$ і $n=3$.

7.4.5. Крива $n_c(d)$

Нарешті ми розрахуємо $n_c(d)$ для значень d від $d=2.8$ до $d=4$. Відповідна суцільна крива показана на Рис. (7.30) разом з штриховою, отриманою у рамках пертурбативного п'ятипетлового ε -розкладу [327], і штрихпунктурною, отриманою у рамках пертурбативної шестипетлової схеми без ε -розкладу [30]. Якісне

узгодження між НПРГ і результатами ε -розкладу є беззаперечним, хоча кількісно залишаються деякі відносно значні зазори між значеннями $n_c(d)$, отриманими у різних підходах для деяких вимірностей між $d = 3$ і $d = 4$. З іншого боку, сингулярний характер результату, отриманого без ε -розкладу ($n_c(d)$ показує S-подібну форму), є також очевидний.

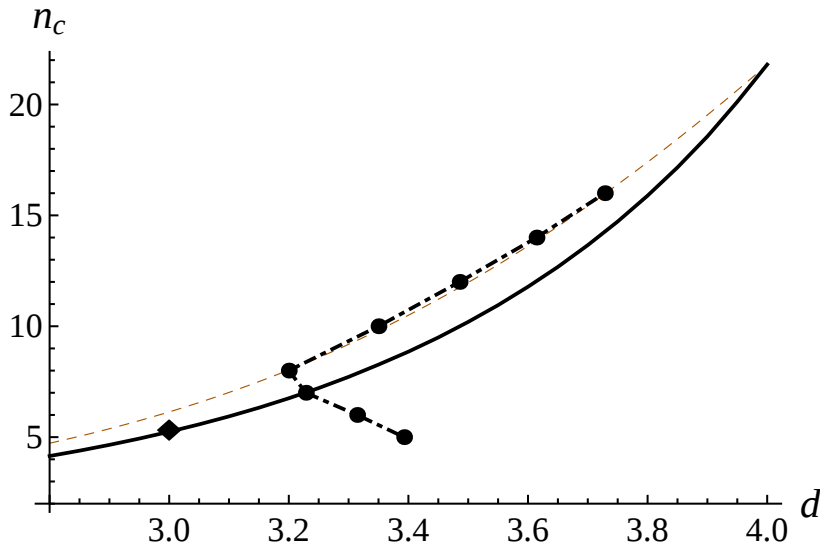


Рис. 7.30. Криві $n_c(d)$. Суцільна крива: LPA' з чотирма функціями. Ромб: значення $n_c(d = 3)$ отримане LPA' з повним потенціалом. Суцільна крива: пертурбативна п'ятипетлева схема мінімального віднімання з ε -розкладом [327]. Штрихпунктирна крива з чорними крапками: пертурбативна шестипетлева схема мінімального віднімання без ε -розкладу [30].

Підхід повного потенціалу

Тут ми порівнюємо отриманий результат з тим, що отриманий з врахуванням повної польової залежності ефективного потенціалу. В останньому випадку застосовувалось θ -обрізання (7.23), яке дозволяє отримати аналітичні вирази для рівнянь РГ і провести інтегрування у рівняннях на потоки. Однак, через значні розрахункові вимоги цього підходу розглядався тільки випадок $d = 3$. Для простоти, використовувалось $\omega_k = 0$, що справедливо, оскільки ця константа зв'язку грає мінімальну роль поблизу $d = 3$. У випадку $n = 7$ отримано такі критичні показники : $\eta = 0.0438$ і $\nu = 0.760$. Ці значення є порівнювані з напів-розкладом

за полями ($\eta = 0.039(2)$ і $\nu = 0.735(5)$). У випадку $n = 6$ знайдені величини $\eta = 0.0487$ і $\nu = 0.716$ можна порівняти з $\eta = 0.042(2)$ і $\nu = 0.695(5)$ з напів-розкладу за полями. Критичний показник ν також порівнюваний з результатами МК ($\nu = 0.700(11)$). Для $n_c(d = 3)$ підхід повного потенціалу приводить до значення $n_c(d = 3) = 4.8$ з використанням LPA. Порівняння зі значенням $n_c(d = 3) = 4.7$, отриманим для LPA у напів-розкладі за полями, показує, що наш напів-розклад майже збіжний, як сказано у підрозділі 7.4.4. Беручи до уваги вклади з похідними при найнижчому порядку (LPA'), знаходимо: $n_c(d = 3) = 5.4$, див. Рис. (7.30). Порівняння зі значенням $n_c(d = 3) = 5.24(2)$, отриманим у рамках LPA' напів-розкладу за полями, також підтверджує збіжність напів-розкладу. Можна очікувати, що члени вищих порядків за похідними внесуть вклад, однак зовсім не виглядає, що вони значно змінять загальну форму кривої $n_c(d)$, отриманої тут.

7.5. Висновки

Ми дослідили критичні показники, отримані на основі пертурбативних рядів у підході при фіксованій вимірності простору для моделі фрустрованого магнетика при $d = 3$ у шестипетлевому порядку на залежність від параметрів використаних процедур пересумовування. Для фрустрованих магнетиків для $n = 2$ і $n = 3$ наші результати в $d = 3$ показують велику чутливість показників до параметрів пересумовування α і b та погану збіжність з числом петель. Порівняння з подібними залежностями від параметрів пересумовування для критичних характеристик, $O(n)$ та кубічної моделей в $d = 3$, для яких відомі однозначні та точні результати, забезпечує сильну підтримку хибного характеру нерухомих точок для тривимірних фрустрованих магнетиків з для $n = 2$ і $n = 3$. Без надання остаточної відповіді на питання про характер ФП, який відбувається у фрустрованих магнетиках в $d = 3$, наші результати надають аргументи для заперечення ФП другого роду. Оскільки інші дослідження (ϵ -розклад, непертурбативна РГ), передбачають поведінку першого роду (див. [309]), ми, звичайно, приходимо до

висновку, що тривимірні фрустровані магнетики повинні завжди проявляти поведінку першого роду при ФП.

Подібне дослідження ми провели також і для двовимірних фрустрованих магнетиків, проаналізувавши критичні характеристики, отримані на основі п'ятипетлевих рядів масивної схеми з використанням підходу при фіксованій вимірності простору у $d = 2$. Для такої вимірності простору ситуація більш неоднозначна. Критичні показники задовольняють принципи збіжності у деяких випадках (у певних порядках і для деяких показників), що мало б свідчити про існування ФП при скінченній температурі для гайзенбернговських спінів, спричиненого деконфайнментом топологічних збуджень. Проте ретельне порівняння між $O(n)$ та фрустрованою моделями показало, що наявність неаналітичностей псує визначення критичних показників і не дозволяє зробити однозначний висновок.

Оскільки для прояснення ситуації не достатньо врахування вищих порядків пертурбативного розкладу, ми використали підхід НПРГ для розрахунку критичної вимірності n_c , що розділяє значення n , для яких очікується ФП другого роду, від тих, для яких очікується ФП першого роду. Розраховано значення n_c як функцію просторової вимірності, $n_c(d)$, для значень d від $d = 2.8$ до $d = 4$ у рамках напів-розкладу за полями, де залежність від одного з інваріантів симетрії моделі, розглядається без наближень, тобто функціонально, а виконується розклад за іншим інваріантом. Оцінка для $d = 3$, явно підтверджує значення граничної вимірності, що є значно вищим, ніж 3, $n_c(d = 3) = 5.24(2)$, виключаючи появу ФП другого роду у фізичних випадках $n = 2$ і $n = 3$. Наш результат підтверджує ϵ - і псевдо- ϵ розклади, а також попередні НПРГ підходи, основані на рівняннях Польчинського і Веттеріха. Це суперечить результатам пертурбативного підходу з фіксованою вимірністю простору, а також недавнього підходу конформного будстрапу. Таким чином, показано, що висновок про ФП другого роду, отриманий у рамках підходу з фіксованою вимірністю простору, є сумнівним. Що стосується підходу конформного будстрапу [500], то, по-перше, критично важливо зрозуміти статус зроблених припущень цього підходу, зокрема, існування масштабної інваріантності, щоб уникнути наперед заданих результатів, по-друге, цей метод мав

би давати існування антикіральної НТ $\mathbf{C}^-$ і “динаміку” НТ $\mathbf{C}^+$ та НТ $\mathbf{C}^-$, яка при їхньому злитті зі зменшенням n генерує криву $n_c(d)$.

ВИСНОВКИ

Основні висновки та результати проведених досліджень можна сформулювати у вигляді наступних тверджень.

1. Вперше досліджено ефективну критичну поведінку для систем з протяжними домішками. Продемонстровано немонотонну поведінку ефективних динамічних критичних показників до асимптотичного режиму. Отримано аналітичні оцінки для асимптотичних значень динамічних критичних показників і показано, що присутність протяжних домішок збільшує критичне сповільнення порівняно з чистими системами та системами з нескорельованим безладом. Вперше в рамках чисельних досліджень отримано оцінки для показника анізотропії, чим підтверджено теоретично передбачену картину анізотропного скейлінгу.
2. Для магнетиків з випадковою анізотропією продемонстровано важливість розподілу осі локальної анізотропії. Встановлено, що фазовий перехід другого роду у феромагнітне впорядкування може відбуватись тільки для анізотропного розподілу. Вперше досліджено ефективну динамічну критичну поведінку для цих систем і показано, що підхід до асимптотичного режиму відбувається з області високих значень ефективного динамічного критичного показника.
3. Досліджено ефективну динамічну критичну поведінку для магнетиків зі структурним безладом в рамках моделі С. Продемонстровано, що зв'язок незбережного параметра порядку зі збереженою величиною має значний вплив на ефективні критичні властивості цих магнетиків. Отримано немонотонний підхід ефективних динамічних критичних показників до асимптотичного режиму, що дозволяє інтерпретувати отримані в експериментальних дослідже-

ннях значення як ефективні.

4. Вперше отримано явні вирази для функцій розподілу імовірності внутрішньої енергії та теплоємності для двовимірної моделі Ізінга зі скінченними розмірами з нескорельованими домішками у критичній області. Вони показують, що внутрішня енергія є несамоусереднюваною величиною, у той час як теплоємність, навпаки, самоусереднюваною.
5. Здійснено аналіз впливу скорельованого структурного безладу на критичні властивості двовимірної моделі Ізінга та двовимірної моделі Ашкіна-Телера з N_i “кольорами”. Встановлено, що в обох моделях спостерігається нова критична поведінка з критичним показником кореляційної довжини, що залежить від степеня загасання кореляцій безладу.
6. Проаналізовано області стійкості різних типів мультикритичної поведінки в системах з двома зв’язаними параметрами порядку та симетрією $O(n) \oplus O(m)$ в залежності від вимірності простору та вимірностей параметрів порядку. Підтверджено, що мультикритична поведінка анізотропних гайзенбергівських антиферомагнетиків у зовнішньому полі, прикладеному вздовж осі анізотропії, є тетракритичною. Встановлено, що високоімовірною є реалізація ефективної бікритичної поведінки.
7. Продемонстровано, що підхід при фіксованій вимірності простору, який використовується при аналізі пертурбативних результатів ренорм-групи для критичної поведінки, не усуває всіх нефізичних розв’язків, які є хибними. Встановлено особливості залежності цих хибних розв’язків від внутрішніх параметрів використаних процедур.
8. Для магнетиків з неколінеарним впорядкуванням показано, що теоретичні передбачення фазового переходу другого роду для фізичних випадків $n = 2$ та $n = 3$ насправді описуються хибними розв’язками, таким чином підтверджуючи фазовий перехід першого роду для таких систем. Цей результат підкріплено аналітичною оцінкою граничного значення вимірності параметра порядку $n_c = 5.24 \pm 0.02$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Domb C.* The critical point. London : Taylor & Francis, 1996.
2. *Chaikin P., Lubensky T.* Principles of condensed matter physics. Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
3. *Widom B.* Equation of state in the neighborhood of the critical point // *J. Chem. Phys.*. 1965. Vol. 43, no. 11. P. 3898–3905.
4. *Kadanoff L. P.* Scaling laws for Ising models near T_c // *Physics*. 1966. Vol. 2, no. 6. P. 263–272.
5. *Patashinskii A. Z., Pokrovskii V. L.* Behavior of ordered systems near the transition point // *Sov. Phys. JETP*. 1966. Vol. 23, no. 2. P. 292–297.
6. *Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Field theoretical approach to critical phenomena // Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. by C. Domb, M. S. Green. London : Academic Press, 1976. Vol. 6. P. 127.
7. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford : Clarendon Press, 1996. 517 p.
8. *Amit D.* Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena. Singapore : World Scientific, 1984. 394 p.
9. *Kleinert H., Schulte-Frohlinde V.* Critical Properties of ϕ^4 -Theories. Singapore : World Scientific, 2001. 489 p.
10. *Guida R., Zinn-Justin J.* Critical exponents of the N -vector model // *J. Phys. A*. 1998. Vol. 31, no. 40. P. 8103–8121.
11. *Pelissetto A., Vicari E.* Critical phenomena and renormalization-group theory // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 368, no. 6. P. 549–727.
12. Line tensions, correlation lengths, and critical exponents in lipid membranes near critical points / A. R. Honerkamp-Smith, P. Cicuta, M. D. Collins et al. //

- Biophys. J.* 2008. Vol. 95, no. 1. P. 236 – 246.
13. *Honerkamp-Smith A. R., Veatch S. L., Keller S. L.* An introduction to critical points for biophysicists; observations of compositional heterogeneity in lipid membranes // *BBA - Biomembranes*. 2009. Vol. 1788, no. 1. P. 53 – 63.
 14. *de Gennes P.* Scaling Concepts in Polymer Physics. Ithaca : Cornell University Press, 1979. 324 p.
 15. Dispersion in second sound and anomalous heat conduction at the lambda point of liquid helium / R. A. Ferrell, N. Menyh rd, H. Schmidt et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 18. P. 891–894.
 16. Fluctuations and lambda phase transition in liquid helium / R. A. Ferrell, N. Menyh rd, H. Schmidt et al. // *Annals of Physics*. 1968. Vol. 47, no. 3. P. 565 – 613.
 17. *Halperin B. I., Hohenberg P. C.* Generalization of scaling laws to dynamical properties of a system near its critical point // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 19. P. 700–703.
 18. *Halperin B. I., Hohenberg P. C.* Scaling laws for dynamic critical phenomena // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 177. P. 952–971.
 19. *T uber U.* Critical Dynamics. A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior. Cambridge : Cambridge University Press, 2014.
 20. *Folk R., Moser G.* Critical dynamics: a field-theoretical approach // *J. Phys. A*. 2006. Vol. 39, no. 24. P. R207.
 21. *Calabrese P., Gambassi A.* Ageing properties of critical systems // *J. Phys. A*. 2005. Vol. 38, no. 18. P. R133–R193.
 22. *Фольк Р., Головач Ю., Яворский Т.* Критические показатели трехмерной слабо разбавленной замороженной модели Изинга // *УФН*. 2003. Т. 173, no. 2. P. 175–200.
 23. *Cochrane R., Harris R., Zuckermann M.* The role of structure in the magnetic properties of amorphous alloys // *Phys. Rep.* 1978. Vol. 48, no. 1. P. 1 – 63.
 24. *Kawamura H.* Renormalization-group analysis of chiral transitions // *Phys. Rev. B*. 1988. Vol. 38, no. 7. P. 4916–4928.

25. *Yukhnovskii I. R.* Phase transitions of the second order. Collective variables method. Singapore : World Scientific, 1987.
26. Bond dilution in the 3D Ising model: a Monte Carlo study / P. E. Berche, C. Chatelain, B. Berche, W. Janke // *Eur. Phys. J. B.* 2004. Vol. 38, no. 3. P. 463–474.
27. Effective critical behaviour of diluted Heisenberg-like magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, D. Ivaneiko // *J. Magn. Magn. Mater.* 2003. Vol. 256, no. 1. P. 243 – 251.
28. Quenched disorder and the critical behavior of a partially frustrated system / A. Perumal, V. Srinivas, V. V. Rao, R. A. Dunlap // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. P. 137202(1–4).
29. *Folk R., Holovatch Yu., Yavors'kii T.* Effective and asymptotic critical exponents of a weakly diluted quenched Ising model: Three-dimensional approach versus $\sqrt{\varepsilon}$ expansion // *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 61, no. 22. P. 15114–15129.
30. Crossover behavior in three-dimensional dilute spin systems / P. Calabrese, P. Parruccini, A. Pelissetto, E. Vicari // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, no. 3. P. 036120.
31. *Binder K., Heermann D.* Monte Carlo Simulation in Statistical Physics: An Introduction, 6th Edition. Springer International Publishing, 2019.
32. *Delamotte B.* An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group // Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems / Ed. by Achim Schwenk, Janos Polonyi. Berlin, Heidelberg : Springer P. 49–132.
33. *Dudka M., Holovatch Yu., Yavors'kii T.* Universality classes of the three-dimensional mn -vector model // *J. Phys. A.* 2004. Vol. 37, no. 45. P. 10727.
34. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Critical properties of random anisotropy magnets // *J. Magn. Magn. Mater.* 2005. Vol. 294, no. 3. P. 305 – 329.
35. Critical dynamics and effective exponents of magnets with extended impurities / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B.* 2005. Vol. 72, no. 6. P. 064417(1–11).

36. Critical dynamics of diluted relaxational models coupled to a conserved density / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, no. 3. P. 036107(1–4).
37. Critical slowing down in random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* 2005. Vol. 8, no. 4. P. 737–748.
38. Enhancement of the critical slowing down influenced by extended defects / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *J. Mol. Liq.* 2006. Vol. 127, no. 1-3. P. 60–61.
39. Model C critical dynamics of disordered magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A*. 2006. Vol. 39, no. 25. P. 7943.
40. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A*. 2007. Vol. 40, no. 29. P. 8247.
41. Дудка М. Критична динаміка неупорядкованих магнетиків: теоретико-польовий підхід // *Фіз. Збірник НТШ*. 2008. Т. 7. С. 210–223.
42. Dudka M., Folk R., Moser G. Dynamic scaling functions and amplitude ratios of stochastic models with energy conservation above T_c // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 3. P. 031124(1–15).
43. Relevance of the fixed dimension perturbative approach to frustrated magnets in two and three dimensions / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82, no. 10. P. 104432(1–12).
44. Analysis of the 3d massive renormalization group perturbative expansions: a delicate case / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Condens. Matter Phys.* 2010. Vol. 13, no. 4. P. 43703(1–16).
45. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* 2012. Vol. 15, no. 4. P. 43001(1–10).
46. Dudka M. Two-loop Feynman integrals for ϕ^4 theory with long-range correlated disorder // *J. Math. Phys.* 2015. Vol. 56, no. 1. P. 013302.
47. Monte Carlo study of anisotropic scaling generated by disorder / O. Vasilyev,

- B. Berche, M. Dudka, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, no. 4. P. 042118(1–9).
48. Functional renormalization group approach to noncollinear magnets / B. Delamotte, M. Dudka, D. Mouhanna, S. Yabunaka // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 6. P. 064405(1–14).
49. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Phase diagram of Model C in the parametric space of order parameter and space dimensions // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 9. P. 094301(1–8).
50. Critical behavior of the two-dimensional Ising model with long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, V. Blavatska, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 22. P. 224422(1–13).
51. Self-averaging in the random two-dimensional Ising ferromagnet / Vik. Dotsenko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 032118(1–8).
52. *Dudka M., Fedorenko A. A.* Emergent universal critical behavior of the 2D N -color Ashkin-Teller model in the presence of correlated disorder // *Condens. Matter Phys.* 2017. Vol. 20, no. 1. P. 13603(1–11).
53. Статистична фізика складних систем у світі та у Львові / Ю. Головач, М. Дудка, В. Блавацька, В. Пальчиков, М. Красницька, О. Мриглод // *Журн. Фіз. Досл.* 2018. Т. 22, no. 2. С. 2801(1–21).
54. Possibility of a continuous phase transition in random-anisotropy magnets with a generic random-axis distribution / D. Shapoval, M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B*. 2020. Vol. 101. P. 064402.
55. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 30, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Cortona, Italy, 3–6 April 2005. P. 19.
56. Critical dynamics of disordered model C / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // 69 Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Abstracts. Berlin, Germany, 4–9 März 2005. P. DY 34.117.
57. Influence of extended defects on the critical dynamics of a non-conserved or-

- der parameter / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // PLM MP 2005, Physics of liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. Kyiv, Ukraine, 27–31.05.2005. P. 76, 3–4.O.
58. On the critical dynamics of random anisotropy systems / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. P. 16.
 59. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. P. 31.
 60. Critical dynamics of magnets with random anisotropy / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // AKF-Frühjahrstagung-2006 in conjunction with 21 General Conference of the EPS Condensed Matter Division, Abstracts. Dresden, Germany, 27–31 March 2006. P. 209, DY 44.4.
 61. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 31, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Primošten, Croatia, 23–26 April 2006. P. 73.
 62. *Folk R., Dudka M., Moser G.* Dynamic scaling functions and amplitude ratio for model C dynamics // MECO 33, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Puchberg/ Wels, Austria, 14–16 April 2008. P. P8.
 63. *Dudka M., Folk R., Moser G.* Correlation functions and amplitude ratio for relaxational dynamics with energy conservation. model C // Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 23–25 June 2009. P. 128.
 64. On the application of the perturbative renormalization group approach at fixed space dimension for study of critical behaviour / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // PLMMP-2010, Physics of Liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. Kyiv, Ukraine, 21–23 May 2010. P. 144.
 65. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 4-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 3–6 July 2012. P. 102.

66. Influence of different types of structural disorder on the critical properties of magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 6-th International Conference “Physics of Disordered Systems”, Lviv, Ukraine, 14–16 October 2013. P. 41.
67. Critical behavior of two-dimensional models with Ising spins in the presence of long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch, V. Blavatska // 43-th International Conference “Middle European Cooperation in Statistical Physics” (MECO43), Kraków, Poland, 1–4 May 2018. P. 50.
68. Self-averaging in the two-dimensional random-bond Ising model / Vik. Dotsenko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications. Lviv, Ukraine, 3–6 June 2019. P. 61.
69. *Kouvel J. S., Fisher M. E.* Detailed magnetic behavior of nickel near its curie point // *Phys. Rev.* 1964. D Vol. 136. P. A1626–A1632.
70. *Holovatch Y.* Introduction to renormalization // *Condens. Matter Phys.* 2006. Vol. 9, no. 2. P. 237–262.
71. *Wilson K. G., Fisher M. E.* Critical exponents in 3.99 dimensions // *Phys. Rev. Lett.* 1972. Vol. 28, no. 4. P. 240–243.
72. *Bervillier C.* Estimate of a universal critical-amplitude ratio from its ε expansion up to ε^2 // *Phys. Rev. B.* 1986. Vol. 34, no. 11. P. 8141–8143.
73. *Dudka M., Holovatch Y., Yavors’kii T.* A marginal dimension of a weakly diluted quenched m -vector model // *J. Phys. Stud.* 2001. Vol. 5, no. 3. P. 233–239.
74. *Kleinert H., Schulte-Frohlinde V.* Exact five-loop renormalization group functions of θ^4 -theory with $O(N)$ -symmetric and cubic interactions. critical exponents up to ϵ^5 // *Phys. Lett. B.* 1995. Vol. 342, no. 1. P. 284 – 296.
75. *Carmona M. J., Pelissetto A., Vicari E.* N -component Ginzburg-Landau hamiltonian with cubic anisotropy: A six-loop study // *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 61, no. 22. P. 15136–15151.
76. *Shalaev B. N., Antonenko S. A., Sokolov A. I.* Five-loop ϵ for random Ising model and marginal spin dimensionality for cubic systems // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 230, no. 1. P. 105 – 110.

77. Folk R., Holovatch Yu., Yavors'kii T. Pseudo- ε expansion of six-loop renormalization-group functions of an anisotropic cubic model // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, no. 18. P. 12195–12200.
78. Varnashev K. B. Stability of a cubic fixed point in three dimensions: Critical exponents for generic n // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61, no. 21. P. 14660–14674.
79. Dudka M., Holovatch Yu., Yavors'kii T. Stability of the mixed fixed point of the mn -vector model // *Acta Phys. Slovaca*. 2002. Vol. 52, no. 4. P. 323–328.
80. Antonenko S. A., Sokolov A., Varnashev K. Chiral transitions in three-dimensional magnets and higher order ϵ expansion // *Phys. Lett. A*. 1995. Vol. 208, no. 1. P. 161 – 164.
81. Calabrese P., Parruccini P. Five-loop ϵ expansion for $O(N) \times O(M)$ spin models // *Nucl. Phys. B*. 2004. Vol. 679, no. 3. P. 568 – 596.
82. Holovatch Yu., Ivaneyko D., Delamotte B. On the criticality of frustrated spin systems with noncollinear order // *J. Phys. A*. 2004. Vol. 37, no. 11. P. 3569.
83. Grinstein G., Luther A. Application of the renormalization group to phase transitions in disordered systems // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13. P. 1329–1343.
84. Aharony A. Universal critical behaviour // Phase transitions and Critical phenomena / Ed. by C. Domb, M. S. Green. London : Academic Press, 1976. Vol. 6.
85. Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamic critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 1977. Vol. 49, no. 3. P. 435–479.
86. Антонов Н. В., Васильев А. Н. Критическая динамика как теория поля // *ТМФ*. 1984. Vol. 60, no. 1. P. 59–71.
87. Prudnikov V. V., Ivanov A. V., Fedorenko A. A. Critical dynamics of spin systems in the four-loop approximation // *JETP Lett.* 1997. Vol. 66, no. 12. P. 835–840.
88. Folk R., Moser G. Critical dynamics of model C resolved // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91, no. 3. P. 030601.
89. Dynamic universality class of model c from the functional renormalization group / D. Mesterházy, J. H. Stockemer, L. F. Palhares, J. Berges // *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 88, no. 17. P. 174301.

90. *Murata K. K.* Dynamics of a coupled-mode system: Explicit analysis at order ϵ^2 // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13, no. 5. P. 2028–2043.
91. *Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.-k.* Renormalization-group methods for critical dynamics: II. detailed analysis of the relaxational models // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13. P. 4119–4131.
92. *Akkineni V. K., Täuber U. C.* Nonequilibrium critical dynamics of the relaxational models c and d // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 69. P. 036113.
93. *Sasvári L., Schwabl F., Szvépfalusi P.* Hydrodynamics of an n-component phonon system // *Physica A*. 1975. Vol. 81, no. 1. P. 108 – 128.
94. *Brout R.* Statistical mechanical theory of a random ferromagnetic system // *Phys. Rev.* 1959. Vol. 115, no. 4. P. 824–835.
95. *Fisher M. E.* Renormalization of critical exponents by hidden variables // *Phys. Rev.* 1968. D Vol. 176. P. 257–272.
96. Weak quenched disorder and criticality: resummation of asymptotic(?) series / Yu. Holovatch, V. Blavats'ka, M. Dudka et al. // *Int. J. Mod. Phys. B*. 2002. Vol. 16, no. 27. P. 4027–4079.
97. *Binder K., Young A. P.* Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions // *Rev. Mod. Phys.* 1986. Vol. 58, no. 4. P. 801–976.
98. *Dotsenko V. S.* Critical phenomena and quenched disorder // *Phys. Usp.* 1995. Vol. 38, no. 5. P. 457–496.
99. *Belanger D., Young A.* The random field Ising model // *J. Magn. Magn. Mater.* 1991. Vol. 100, no. 1. P. 272 – 291.
100. *Luck J. M.* A classification of critical phenomena on quasi-crystals and other aperiodic structures // *Europhys. Lett.* 1993. Vol. 24, no. 5. P. 359.
101. *Janke W., Weigel M.* Harris-Luck criterion for random lattices // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 14. P. 144208.
102. *Boyanovsky D., Cardy J. L.* Critical behavior of m -component magnets with correlated impurities // *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 26, no. 1. P. 154–170.
103. *Weinrib A., Halperin B. I.* Critical phenomena in systems with long-range-correlated quenched disorder // *Phys. Rev. B*. 1983. Vol. 27, no. 1. P. 413–427.

104. Imry Y., Ma S.-k. Random-field instability of the ordered state of continuous symmetry // *Phys. Rev. Lett.* 1975. Vol. 35, no. 21. P. 1399–1401.
105. Pelcovits R. A., Pytte E., Rudnick J. Spin-glass and ferromagnetic behavior induced by random uniaxial anisotropy // *Phys. Rev. Lett.* 1978. Vol. 40. P. 476–479.
106. Ma S.-k., Rudnick J. Time-dependent Ginzburg-Landau model of the spin-glass phase // *Phys. Rev. Lett.* 1978. Vol. 40, no. 9. P. 589–593.
107. Emery V. J. Critical properties of many-component systems // *Phys. Rev. B.* 1975. Vol. 11, no. 1. P. 239–247.
108. Belanger D. P. Experimental characterization of the Ising model in disordered antiferromagnets // *Braz. J. Phys.* 2000. Vol. 30. P. 682 – 692.
109. Yamamoto H., Onodera H., K. Hosoyama et al. Magnetic inhomogeneity in amorphous Fe-Zr alloys // *J. Magn. Magn. Mater.* 1983. Vol. 31. P. 1579 – 1580.
110. Winschuh K., Rosenberg M. Critical behavior of amorphous $(\text{Fe}_{1-x}\text{M}_x)_{90}\text{Zr}_{10}$ alloys with $\text{M}=\text{Co}, \text{Ni}$, and $0 < x < 0.04$ // *J. Appl. Phys.* 1987. Vol. 61, no. 8. P. 4401–4403.
111. Nicolaides G. K., Hadjipanayis G. C., Rao K. V. Scaling analysis of amorphous $\text{Fe}_{90-x}\text{Mn}_x\text{Zr}_{10}$ alloys near the paramagnetic-to-ferromagnetic transition // *Phys. Rev. B.* 1993. Vol. 48, no. 17. P. 12759–12762.
112. Babu P. D., Kaul S. N. Scaling behaviour of magnetization for temperatures in the vicinity of, and far from, the ferromagnetic - paramagnetic phase transition in amorphous $\text{Fe}_{90-x}\text{Co}_x\text{Zr}_{10}$ and $\text{Fe}_{90+y}\text{Zr}_{10-y}$ alloys // *J. Phys.: Condens. Matter.* 1997. Vol. 9, no. 34. P. 7189.
113. Perumal A., Srinivas V., K.S. Kim et al. Correction to scaling critical exponents and amplitudes for amorphous Fe-Mn-Zn alloys // *J. Magn. Magn. Mater.* 2001. Vol. 233, no. 3. P. 280 – 289.
114. Fähnle M., Herzer G., H. Kronmüller et al. The magnetic phase transition in amorphous ferromagnets and in spin glasses // *J. Magn. Magn. Mater.* 1983. Vol. 38, no. 3. P. 240 – 252.
115. Kaul S. N. Asymptotic and leading “correction-to-scaling” susceptibility critical

- exponents and amplitudes for ferromagnets with quenched disorder // *Phys. Rev. B*. 1988. Vol. 38, no. 13. P. 9178–9186.
116. *Kaul S. N., Mohan C. V.* Magnetic behavior of an amorphous ferromagnet for temperatures close to, and above, the curie point: Structural relaxation effects // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, no. 9. P. 6157–6168.
 117. Magnetic phase transition in amorphous and crystalline ferromagnets / W.-U. Kellner, T. Albrecht, M. Fähnle, H. Kronmüller // *J. Magn. Magn. Mater.* 1986. Vol. 62, no. 2. P. 169–174.
 118. *Boxberg O., Westerholt K.* Critical exponents at the ferromagnetic phase transition of $\text{Fe}_{100-x}\text{Pt}_x$ single crystals // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, no. 13. P. 9331–9338.
 119. *Westerholt K., Sobotta G.* Critical exponents of the ferromagnetic solid solution system $\text{Eu}_x\text{Sr}_{1-x}\text{S}_{0.50}\text{Se}_{0.50}$ // *J. Phys. F*. 1983. Vol. 13, no. 11. P. 2371.
 120. *Westerholt K., Bach H., Römer R.* Critical exponents of diluted Heisenberg ferromagnets // *J. Magn. Magn. Mater.* 1984. Vol. 45, no. 2. P. 252 – 266.
 121. *Westerholt K.* Magnetic phase transitions in site- and bond-disordered Eu-chalcogenides // *Physica B+C*. 1985. Vol. 130, no. 1. P. 533 – 537.
 122. *Westerholt K.* Ferromagnetic phase transitions in the magnetically heterogeneous solid solution system $\text{Eu}_x\text{La}_{1-x}\text{S}$ // *J. Magn. Magn. Mater.* 1987. Vol. 66, no. 2. P. 253 – 262.
 123. *Harris A. B.* Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models // *J. Phys. C*. 1974. Vol. 7, no. 9. P. 1671–1692.
 124. *Imry Y., Wortis M.* Influence of quenched impurities on first-order phase transitions // *Phys. Rev. B*. 1979. no. 19. P. 3580–3585.
 125. *Hui K., Berker A. N.* Random-field mechanism in random-bond multicritical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, no. 21. P. 2507–2510.
 126. *Aizenman M., Wehr J.* Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, no. 21. P. 2503–2506.
 127. *Harris A. B., Lubensky T. C.* Renormalization-group approach to the critical behavior of random-spin models // *Phys. Rev. Lett.* 1974. Vol. 33. P. 1540–1543.

128. *Khmel'nitskii D. E.* Second-order phase transition in inhomogeneous bodies // *Sov. Phys. JETP*. 1975. Vol. 41, no. 5. P. 981–984.
129. *Lubensky T. C.* Critical properties of random-spin models from the ϵ expansion // *Phys. Rev. B*. 1975. Vol. 11, no. 9. P. 3573–3580.
130. *Landau D. P.* Critical behavior of the simple cubic ising model with quenched site impurities // *Phys. Rev. B*. 1980. Vol. 22, no. 5. P. 2450–2455.
131. Critical exponents of the three-dimensional diluted Ising model / H. G. Balles-teros, L. A. Fernández, V. Martín-Mayor et al. // *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 58. P. 2740–2747.
132. Softening of first-order transition in three-dimensions by quenched disorder / C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, P. E. Berche // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64, no. 3. P. 036120.
133. *Grinstein G., Ma S.-k., Mazenko G. F.* Dynamics of spins interacting with quenched random impurities // *Phys. Rev. B*. 1977. Vol. 15, no. 1. P. 258–272.
134. *Prudnikov V. V., Vakilov A. N.* Critical dynamics of dilute magnetic materials // *Sov. Phys. JETP*. 1992. Vol. 74. P. 990–994.
135. *Oerding K., Janssen H. K.* Nonequilibrium critical relaxation in dilute Ising systems // *J. Phys. A*. 1995. Vol. 28, no. 15. P. 4271.
136. *Janssen H. K., Oerding K., E. S.* On the crossover to universal criticality in dilute Ising systems // *J. Phys. A*. 1995. Vol. 28, no. 21. P. 6073.
137. *Parisi G., Ricci-Tersenghi F., Ruiz-Lorenzo J. J.* Universality in the off-equilibrium critical dynamics of the three-dimensional diluted Ising model // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60, no. 5. P. 5198–5201.
138. *Rosov N., Hohenemser C., Eibschütz M.* Dynamic critical behavior of the random-exchange Ising system $\text{Fe}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}\text{F}_2$ determined via Mössbauer spectroscopy // *Phys. Rev. B*. 1992. Vol. 46, no. 6. P. 3452–3457.
139. *Pelissetto A., Rossi P., Vicari E.* Chiral exponents in frustrated spin models with noncollinear order // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 65, no. 2. P. 020403.
140. *Krey U.* On the critical dynamics of a disordered system // *Phys. Lett. A*. 1976.

- Vol. 57, no. 3. P. 215 – 216.
141. *Krey U.* On the critical dynamics of disordered spin systems // *Z. Phys. B*. 1977. Vol. 27, no. 4. P. 325–329.
 142. *Lawrie I. D., Prudnikov V. V.* Static and dynamic properties of systems with extended defects: two-loop approximation // *J. Phys. C*. 1984. Vol. 17, no. 10. P. 1655.
 143. *Balieu R., Kleman M., Poirier J.* Physics of Defects. Amsterdam : North Holland, 1981.
 144. *McCoy B. M., Wu T. T.* Theory of a two-dimensional Ising model with random impurities. i. thermodynamics // *Phys. Rev.* 1968. Vol. 176, no. 2. P. 631–643.
 145. *Dorogovtsev S. N.* Phase transition in a system with extended defects // *Sov. Phys. Solid State*. 1980. Vol. 22. P. 188–192.
 146. *Dorogovtsev S. N.* Critical properties of systems with extended defects: Anisotropy of critical exponents // *Sov. Phys. Solid State*. 1980. Vol. 22. P. 2141–2144.
 147. On the critical dynamics of extended-impurity systems in cubic anisotropic crystals / Y. Yamazaki, Y. Fukuda, A. Holz, M. Ochiai // *Physica A*. 1986. Vol. 136, no. 2. P. 303 – 315.
 148. Crossover behavior of systems associated with extended-defect N -component systems in cubic anisotropic crystals / Y. Yamazaki, A. Holz, M. Ochiai, Y. Fukuda // *Physica A*. 1988. Vol. 150, no. 3. P. 576 – 591.
 149. *Gefen Y., Mandelbrot B. B., Aharony A.* Critical phenomena on fractal lattices // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45, no. 11. P. 855–858.
 150. *Wu Y.-k., Hu B.* Phase transitions on complex Sierpiński carpets // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 35, no. 3. P. 1404–1411.
 151. *Holovatch Yu.* **Critical behaviour in non-integer dimension** // From Quantum Mechanics to Technology: Proceedings of the XXXIInd Winter School of Theoretical Physics, Held in Karpacz, Poland 19–29 February 1996 / Ed. by Z. Petru, J. Przystawa, K. Rapcewicz. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1996. P. 269–281.

152. *Boyanovsky D., Cardy J. L.* Erratum: Critical behavior of m -component magnets with correlated impurities // *Phys. Rev. B*. 1983. Vol. 27, no. 11. P. 6971–6971.
153. *Prudnikov V.* On the critical dynamics of disordered spin systems with extended defects // *J. Phys. C*. 1983. Vol. 16, no. 19. P. 3685.
154. Static and dynamic critical behavior of extended-defect N -component systems in cubic anisotropic crystals / Y. Yamazaki, A. Holz, M. Ochiai, Y. Fukuda // *Phys. Rev. B*. 1986. Vol. 33. P. 3460–3473.
155. Fluctuation-induced first-order phase transition of extended-defect N -component systems in cubic anisotropic crystals / Y. Yamazaki, M. Ochiai, A. Holz, Y. Fukuda // *Phys. Rev. B*. 1986. Vol. 33, no. 5. P. 3474–3482.
156. *Blavats'ka V., von Ferber C., Holovatch Y.* On the critical behaviour of three-dimensional magnetic systems with extended impurities // *Acta Phys. Slovaca*. 2002. Vol. 52, no. 4. P. 317–322.
157. *Blavats'ka V., von Ferber C., Holovatch Y.* Critical behavior of magnetic systems with extended impurities in general dimensions // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67, no. 9. P. 094404(1–11).
158. *Fedorenko A. A.* Nonequilibrium critical relaxation in the presence of extended defects // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 13. P. 134301(1–9).
159. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A. A.* Critical behavior of 3D systems with long-range-correlated quenched disorder // *J. Phys. A*. 1999. Vol. 32, no. 36. P. L399–L405.
160. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A. A.* Static and dynamic critical properties of 3D systems with long-range correlated quenched defects // *J. Phys. A*. 1999. Vol. 32, no. 49. P. 8587–8600.
161. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A.* Field-theory approach to critical behavior of systems with long-range-correlated defects // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, no. 13. P. 8777–8789.
162. *Korutcheva E. R., Uzunov D. I.* On the long-range random critical behaviour // *Phys. Status Solidi (b)*. 1984. Vol. 126, no. 1. P. K19–K22.
163. *Korutcheva E., de la Rubia F. J.* Dynamical properties of the Landau-Ginzburg

- model with long-range correlated quenched impurities // *Phys. Rev. B.* 1998. Vol. 58, no. 9. P. 5153–5156.
164. *Blavats'ka V., von Ferber C., Holovatch Y.* Polymers in long-range-correlated disorder // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, no. 4. P. 041102(1–10).
 165. *Ballesteros H. G., Parisi G.* Site-diluted three dimensional Ising model with long-range correlated disorder // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 60. P. 12912–12918.
 166. Monte Carlo studies of critical behaviour of systems with long-range correlated disorder / V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, S. V. Dorofeev, V.Yu. Kolesnikov // *Condens. Matter. Phys.* 2005. Vol. 8, no. 1. P. 213–224.
 167. *Lee J. C., Gibbs R. L.* Phase transitions in systems with correlated disorder // *Phys. Rev. B.* 1992. Vol. 45, no. 5. P. 2217–2223.
 168. *De Cesare L., Mercaldo M. T.* Spin-glass effects on critical behavior in systems with extended quenched disorder // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 59, no. 2. P. 855–860.
 169. *De Cesare L., Mercaldo M. T.* Replicon modes and fixed-point marginal stability for systems with extended impurities // *Phys. Rev. B.* 1999. Vol. 60, no. 5. P. 2976–2978.
 170. *De Cesare L.* Critical properties of systems with anisotropic long-range correlated quenched disorder // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, no. 17. P. 11742–11748.
 171. *De Cesare L.* Critical properties of systems with transverse long-range correlated disorder // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 186, no. 1. P. 179 – 182.
 172. *De Cesare L., Mercaldo M. T.* Critical phenomena in systems with anisotropic quenched disorder // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 264, no. 2. P. 214 – 217.
 173. *Korzhenevskii A. L., Herrmanns K., Schirmacher W.* Second-order phase transition in crystals with long-range correlated quenched defects // *Phys. Rev. B.* 1996. Vol. 53, no. 22. P. 14834–14842.
 174. The McCoy-Wu model in the mean-field approximation / B. Berche, P. E. Berche, F. Iglói, G. Paláyi // *J. Phys. A.* 1998. Vol. 31, no. 23. P. 5193.
 175. *Vojta T.* Smearing of the phase transition in Ising systems with planar defects // *J. Phys. A.* 2003. Vol. 36, no. 43. P. 10921.

176. *Sknepnek R., Vojta T.* Smeared phase transition in a three-dimensional Ising model with planar defects: Monte Carlo simulations // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 17. P. 174410.
177. *Honkonen J., Nalimov M. Y.* Crossover between field theories with short-range and long-range exchange or correlations // *J. Phys. A*. 1989. Vol. 22, no. 6. P. 751.
178. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., B. Zheng et al.* Short-time critical dynamics of the three-dimensional systems with long-range correlated disorder // *Progr. Theor. Phys.*. 2007. Vol. 117, no. 6. P. 973–991.
179. On the universality class of the 3d Ising model with long-range-correlated disorder / D. Ivaneyko, B. Berche, Yu. Holovatch, J. Ilnytskyi // *Physica A*. 2008. Vol. 387, no. 18. P. 4497 – 4512.
180. *Bagaméry F. A., Turban L., Iglói F.* Two-dimensional ising model with self-dual biaxially correlated disorder // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 72, no. 9. P. 094202.
181. *Hertz J.* Disordered systems // *Phys. Scripta*. 1985. Vol. T10. P. 1–43.
182. Critical and slow dynamics in a bulk metallic glass exhibiting strong random magnetic anisotropy / Q. Luo, D. Q. Zhao, M. X. Pan, W. H. Wang // *Appl. Phys. Lett* . 2008. Vol. 92, no. 1. P. 011923.
183. *Luo Q., Wang W.* Rare earth based bulk metallic glasses // *J. Non-Cryst. Solids*. 2009. Vol. 355, no. 13. P. 759 – 775.
184. Magnetic ordering and slow dynamics in a Ho-based bulk metallic glass with moderate random magnetic anisotropy / Q. Luo, B. Schwarz, N. Mattern, J. Eckert // *J. Appl. Phys.*. 2011. Vol. 109, no. 11. P. 113904.
185. *Harris R., Plischke M., Zuckermann M. J.* New model for amorphous magnetism // *Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 31, no. 3. P. 160–162.
186. *Sellmyer D. J., O'Shea M. J.* Random anisotropy and phase transitions in magnetic glasses // Recent Progress in Random Magnets / Ed. by D. H. Ryan. World Scientific, 1992.
187. *Goldschmidt Y. Y.* Phase transitions in magnets with random uniaxial anisotropy a theoretical review // Recent Progress in Random Magnets / Ed. by D. H. Ryan.

World Scientific, 1992.

188. *Coey J. M. D.* Amorphous magnetic order // *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49, no. 3. P. 1646–1652. <https://doi.org/10.1063/1.324880>.
189. *Chudnovsky E. M.* Random anisotropy in amorphous alloys // The Magnetism of Amorphous Metals and Alloys / Ed. by J. A. Fernandez-Baca, W.-Y. Ching. World Scientific, 1995. P. 143–174.
190. *Berezinskii V. L.* Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. I. Classical systems. // *Sov. Phys. JETP*. 1971. Vol. 32. P. 493–500.
191. *Berezinskii V. L.* Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems possessing a continuous symmetry group. II. Quantum systems. // *Sov. Phys. JETP*. 1971. Vol. 34. P. 615–994.
192. *Kosterlitz J. M., Thouless D. J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C*. 1973. Vol. 6, no. 7. P. 1181.
193. *Fedorenko A. A., Kühnel F.* Long-range correlated random field and random anisotropy $O(n)$ models: A functional renormalization group study // *Phys. Rev. B*. 2007. Vol. 75, no. 17. P. 174206.
194. *Fedorenko A. A.* Random-field and random-anisotropy $O(n)$ spin systems with a free surface // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 86. P. 021131.
195. *Callen E., Liu Y. J., Cullen J. R.* Initial magnetization, remanence, and coercivity of the random anisotropy amorphous ferromagnet // *Phys. Rev. B*. 1977. Vol. 16. P. 263–270.
196. *Patterson J. D., Gruzalski G. R., Sellmyer D. J.* Effect of random anisotropy on magnetic properties of amorphous systems // *Phys. Rev. B*. 1978. Vol. 18. P. 1377–1390.
197. *Harris R., Zolner D.* The random anisotropy model for amorphous metallic alloys: generalized molecular field calculations // *J. Phys. F*. 1977. Vol. 7, no. 2. P. 337–350.
198. *Derrida B., Vannimenus J.* The random anisotropy axis model in the infinite-range limit // *J. Phys. C*. 1980. Vol. 13, no. 17. P. 3261–3269.

199. *Sourlas N.* Critical dimension and $1/d$ expansion for the random anisotropy axis model // *J. Physique Lett.* 1981. Vol. 42, no. 11. P. 233–236.
200. *Continentino M. A., Coutinho S.* The planar random anisotropy model: a mean-field renormalization group approach // *J. Magn. Magn. Mater.* 1993. Vol. 125, no. 1. P. 49 – 56.
201. *Fischer K. H.* Susceptibility and correlation functions in amorphous magnets // *Phys. Rev. B.* 1987. Vol. 36. P. 6963–6970.
202. *Alben R., Becker J. J., Chi M. C.* Random anisotropy in amorphous ferromagnets // *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49, no. 3. P. 1653–1658. <https://doi.org/10.1063/1.324881>.
203. *Aharony A.* Critical behavior of amorphous magnets // *Phys. Rev. B.* 1975. Vol. 12, no. 3. P. 1038–1048.
204. *Chen J.-H., Lubensky T. C.* Mean field and ε -expansion study of spin glasses // *Phys. Rev. B.* 1977. Vol. 16. P. 2106–2114.
205. *Pelcovits R., Pytte E., Rudnick J.* Spin-glass and ferromagnetic behavior induced by random uniaxial anisotropy. // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48. P. 1297–1297.
206. *Pelcovits R. A.* Low-temperature renormalization-group study of the random-axis model // *Phys. Rev. B.* 1979. Vol. 19. P. 465–473.
207. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Phase transition in the random anisotropy model // *Fluctuating Paths and Fields* / Ed. by W. Janke, H.-J. Pelster, A. Schmidt, M. Bachmann. Singapore : World Scientific, 2001. P. 457–467.
208. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* On the critical behaviour of random anisotropy magnets: cubic anisotropy // *Condens. Matter Phys.* 2001. Vol. 4, no. 3. P. 459–472.
209. *Calabrese P., Pelissetto A., Vicari E.* Spin models with random anisotropy and reflection symmetry // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 036104.
210. *Shender E. F.* High-temperature expansion for amorphous magnets with random anisotropy axes // *J. Phys. C.* 1980. Vol. 13, no. 13. P. L339–L342.
211. *Fisch R., Harris A. B.* Long range order in random anisotropy magnets // *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67, no. 9. P. 5778–5780. <https://doi.org/10.1063/1.345961>.

212. *Fisch R., Harris A. B.* High-temperature series for random-anisotropy magnets // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 41. P. 11305–11313.
213. *Harris A. B., Caflisch R. G., Banavar J. R.* Random-anisotropy-axis magnet with infinite anisotropy // *Phys. Rev. B*. 1987. Vol. 35. P. 4929–4934.
214. *Goldschmidt Y. Y.* Magnets with random uniaxial anisotropy: Thermodynamic properties in the large- n limit // *Nucl. Phys. B*. 1983. Vol. 225, no. 1. P. 123 – 144.
215. *Khurana A., Jagannathan A., Kosterlitz J.* A random anisotropy model: $1/n$ expansion for gaussian fluctuations in the spin-glass phase and the replica-symmetry breaking instability // *Nucl. Phys. B*. 1984. Vol. 240, no. 1. P. 1 – 18.
216. *Goldschmidt Y. Y.* $\frac{1}{N}$ expansion in the random anisotropy model: A solution with replica-symmetry breaking // *Phys. Rev. B*. 1984. Vol. 30. P. 1632–1635.
217. *Jagannathan A., Schaub B., Kosterlitz J.* Dynamics of the random anisotropy model in the large- n limit // *Nucl. Phys. B*. 1986. Vol. 265, no. 2. P. 324 – 338.
218. *Boyanovsky D.* Magnets with random uniaxial anisotropy: Large- n effective potential and infrared properties // *Nucl. Phys. B*. 1983. Vol. 225, no. 4. P. 523 – 537.
219. *Fisher D. S.* Pathologies of the infinite- n limit of random anisotropy: spin glass transition or local crossover? // *Physica A*. 1991. Vol. 177, no. 1. P. 84 – 92.
220. The large- n limit in statistical mechanics and the spectral theory of disordered systems / A. M. Khorunzhy, B. A. Khorunzhenko, L. A. Pastur, M. V. Shcherbina // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / Ed. by C. Domb, J. Lebowitz. London : Academic Press, 1992. Vol. 15.
221. *Aharony A., Pytte E.* Infinite susceptibility phase in random uniaxial anisotropy magnets // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P. 1583–1586.
222. *Aharony A., Pytte E.* Low-temperature scaling for systems with random fields and anisotropies // *Phys. Rev. B*. 1983. Vol. 27. P. 5872–5874.
223. *Villain J., Fernandez J. F.* Harmonic system in a random field. // *Z. Phys. B*. 1984. Vol. 54. P. 139–150.
224. *Dotsenko V. S., Feigelman M. V.* 3d planar magnet with random anisotropy //

- J. Phys. C*. 1983. Vol. 16, no. 22. P. L803–L808.
225. *Feldman D. E.* Quasi-long-range order in the random anisotropy Heisenberg model // *JETP Lett.* 1999. Vol. 70, no. 7. P. 135–140.
226. *Feldman D. E.* Quasi-long-range order in the random anisotropy Heisenberg model: Functional renormalization group in $4 - \epsilon$ dimensions // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61. P. 382–390.
227. *Feldman D. E.* Quasi-long range order in glass states of impure liquid crystals, magnets and supeconductors // *Int. J. Mod. Phys. B*. 2001. Vol. 15, no. 22. P. 2945–2976. <https://doi.org/10.1142/S0217979201006641>.
228. *Fisher D. S.* Random fields, random anisotropies, nonlinear σ models, and dimensional reduction // *Phys. Rev. B*. 1985. Vol. 31. P. 7233–7251.
229. *Tissier M., Tarjus G.* Two-loop functional renormalization group of the random field and random anisotropy $O(n)$ models // *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 74, no. 21. P. 214419.
230. *Le Doussal P., Wiese K. J.* Random-field spin models beyond 1 loop: a mechanism for decreasing the lower critical dimension // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. P. 197202.
231. *Sakamoto Y., Mukaida H., Itoi C.* Effect of second-rank random anisotropy on critical phenomena of a random-field $O(n)$ spin model in the large n limit // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 72. P. 144405.
232. *Sakamoto Y., Mukaida H., Itoi C.* Stability of fixed points in the $(4 + \epsilon)$ -dimensional random field $O(n)$ spin model for sufficiently large n // *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 74. P. 064402.
233. *Sakamoto Y., Mukaida H., Itoi C.* Random field $O(n)$ spin model near four dimensions // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2007. Vol. 19, no. 14. P. 145219.
234. *Ideura K.* $1/n$ Expansion of the Random Easy Axis Model // *Progr. Theor. Phys.* 2008. 01. Vol. 119, no. 1. P. 9–27.
235. *Ideura K.* $1/n$ Expansion of the Random Easy Axis Model. II: Correlation Functions and Diagrams // *Progr. of Theor. Phys.* 2009. 05. Vol. 121, no. 5. P. 897–914.

236. *Mukamel D., Grinstein G.* Critical behavior of random systems // *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 25. P. 381–388.
237. *Korzhenevskii A. L., Luzhkov A. A.* Phase transitions in crystals with low-symmetry point defects // *Sov. Phys. JETP*. 1988. Vol. 67, no. 6. P. 1227–1234.
238. *Dudka M., Folk R., Holovatch Y.* On the critical behaviour of random anisotropy magnets // *Condens. Matter Phys.* 2001. Vol. 4, no. 1. P. 77–84.
239. *Dubs V. V., Prudnikov V. V., Prudnikov P. V.* Renormalization group description of the effect of structural defects on phase transitions in complex spin systems with random anisotropy effects and structural defects // *Theoret. and Math. Phys.* 2017. Vol. 190. P. 359–365.
240. *Fischer K. H., Zippelius A.* Mean-field theory of the random-axis model with infinite anisotropy // *J. Phys. C*. 1985. d Vol. 18, no. 36. P. L1139–L1144.
241. *Fischer K. H., Zippelius A.* Critical Lines in Systems with Random Anisotropy Axes // *Progr. Theor. Phys. Suppl.*. 1986. 02. Vol. 87. P. 165–175.
242. *Dominguez D. R. C., Theumann W. K.* Mean-field theory of the Ising random-anisotropy-axis model in the large-component limit // *Phys. Rev. B*. 1993. Vol. 48. P. 6234–6241.
243. *Chi M. C., Alben R.* Hysteresis curves and magnetization processes in a model for an amorphous magnet with random uniaxial anisotropy // *J. Appl. Phys.*. 1977. Vol. 48, no. 7. P. 2987–2991.
244. *Harris R., Sung S. H.* Metastable states in the random anisotropy model for amorphous ferromagnets // *J. Phys. F*. 1978. d Vol. 8, no. 12. P. L299–L305.
245. *Chi M. C., Egami T.* The spin correlation in a ferromagnet with random anisotropy // *J. Appl. Phys.*. 1979. Vol. 50, no. B3. P. 1651–1653.
246. *Harris R.* Metastable states in the random anisotropy model for amorphous ferromagnets: the absence of ferromagnetism // *J. Phys. F*. 1980. Vol. 10, no. 11. P. 2545–2550.
247. *Jayaprakash C., Kirkpatrick S.* Random anisotropy models in the ising limit // *Phys. Rev. B*. 1980. Vol. 21. P. 4072–4083.
248. *Chakrabarti A.* Spin-glass transition in three-dimensional random-anisotropy-axis

- model // *Phys. Rev. B*. 1987. Vol. 36. P. 5747–5749.
249. *Fisch R.* Magnetic correlations in random-anisotropy-axis models // *Phys. Rev. B*. 1989. Vol. 39. P. 873–876.
 250. *Parisen Toldin F., Pelissetto A., Vicari E.* Critical behaviour of the random-anisotropy model in the strong-anisotropy limit // *J. Stat. Mech.*. 2006. no. 06. P. P06002–P06002.
 251. *Fisch R.* Infinite susceptibility phase in planar random-anisotropy magnets // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66. P. 2041–2044.
 252. *Fisch R.* Low-temperature behavior of random-anisotropy magnets // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 42. P. 540–544.
 253. *Reed P.* The three-dimensional XY model in p-fold random anisotropy // *J. Phys. A*. 1991. Vol. 24, no. 3. P. L117–L122.
 254. *Rößler U. K.* Single-cluster-update Monte Carlo method for the random anisotropy model // *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 59. P. 13577–13580.
 255. *Itakura M.* Frozen quasi-long-range order in the random anisotropy Heisenberg magnet // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 68. P. 100405.
 256. *Fisch R.* Finite-size scaling critical behavior of randomly pinned spin-density waves // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79. P. 214429.
 257. *Fisch R.* Cubic models with random anisotropy // *Phys. Rev. B*. 1993. D Vol. 48. P. 15764–15771.
 258. *Fisch R.* Quasi-long-range order in random-anisotropy Heisenberg models // *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 58. P. 5684–5691.
 259. *Fisch R.* Critical behavior of randomly pinned spin-density waves // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51. P. 11507–11514.
 260. *Nguyen H. M., Hsiao P.* Magnetic phase transition for three-dimensional Heisenberg weak random anisotropy model: Monte carlo study // *J. Appl. Phys.* 2009. Vol. 105, no. 7. P. 07E125. <https://doi.org/10.1063/1.3068621>.
 261. *Krey U.* Excitations and critical phenomena of amorphous magnetic systems // *J. Magn. Magn. Mater.* 1978. Vol. 7, no. 1. P. 150 – 159.
 262. *De Dominicis C.* Dynamics as a substitute for replicas in systems with quenched

- random impurities // *Phys. Rev. B*. 1978. Vol. 18. P. 4913–4919.
263. *Khurana A.* Spin dynamics and sound propagation near the spin-glass transition // *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 25, no. 1. P. 452–473.
264. *Ciuchi S., de Pasquale F.* Nonlinear relaxation and ergodicity breakdown in random anisotropy spin glasses // *Nucl. Phys. B*. 1988. Vol. 300. P. 31 – 60.
265. *Dominguez D. R. C., Theumann W. K.* Dynamics of Ising random-bond models: neural network and random-anisotropy-axis model // *J. Phys. A*. 1995. Vol. 28, no. 1. P. 63–76.
266. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene / K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov et al. // *Nature*. 2005. Vol. 438. P. 197–200.
267. *Lyuksyutov I., Naumovets A. G., Pokrovsky V. L.* Two-Dimensional Crystals. London : Academic Press, 1992.
268. *Dunlavy M. J.* Static and Dynamic Critical Phenomena in Ultrathin Films of Iron on W(110), Ph.D. thesis. Hamilton : McMaster University, 2003.
269. *Bernard D.* (perturbed) conformal field theory applied to 2d disordered systems: An introduction // *preprint cond-mat*. 1995. Vol. arXiv:hep-th/9509137. 41 p.
270. *Onsager L.* Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition // *Phys. Rev.* 1944. Vol. 65, no. 3-4. P. 117–149.
271. *Fischer T., Vink R. L. C.* Domain formation in membranes with quenched protein obstacles: Lateral heterogeneity and the connection to universality classes // *J. Chem. Phys.* 2011. Vol. 134, no. 5. P. 055106.
272. *Schultz T. D., Mattis D. C., Lieb E. H.* Two-dimensional Ising model as a soluble problem of many fermions // *Rev. Mod. Phys.* 1964. Vol. 36, no. 3. P. 856–871.
273. *Dotsenko V. S., Dotsenko V. S.* Phase transition in the 2D Ising model with impurity bonds // *Sov. Phys. JETP lett.* 1981. Vol. 33. P. 37–40.
274. *Dotsenko V. S., Dotsenko V. S.* Two-point correlation function of the 2D Ising model with impurity lattice bonds // *J. Phys. C*. 1982. Vol. 15, no. 17. P. L557.
275. *Shankar R.* Exact critical behavior of a random bond two-dimensional Ising model // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58, no. 23. P. 2466–2469.
276. *Ludwig A. W. W.* Infinite hierarchies of exponents in a diluted ferromagnet and

- their interpretation // *Nucl. Phys. B*. 1990. Vol. 330, no. 2. P. 639 – 680.
277. Universal dependence on disorder of two-dimensional randomly diluted and random-bond $\pm J$ Ising models / M. Hasenbusch, F. P. Toldin, A. Pelissetto, E. Vicari // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 1. P. 011110.
278. Kenna R., Ruiz-Lorenzo J. J. Scaling analysis of the site-diluted Ising model in two dimensions // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 3. P. 031134.
279. Gordillo-Guerrero A., Kenna R., Ruiz Lorenzo J. J. The quenched-disordered Ising model in two and four dimensions // *AIP Conference Proceedings*. 2009. Vol. 1198, no. 1. P. 42–54.
280. Baxter R. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. New York : Academic Press, 1982.
281. Ashkin J., Teller E. Statistics of two-dimensional lattices with four components // *Phys. Rev.* 1943. Vol. 64, no. 5-6. P. 178–184.
282. Wegner F. J. Duality relation between the Ashkin-Teller and the eight-vertex model // *J. Phys. C*. 1972. Vol. 5, no. 11. P. L131.
283. Suzuki M. New universality of critical exponents // *Progr. of Theor. Phys.* 1974. Vol. 51, no. 6. P. 1992–1993.
284. Krčmár R., Šamaj L. Critical properties of the eight-vertex model in a field // *Europhys. Lett.* 2016. Vol. 115, no. 5. P. 56001.
285. Grest G. S., Widom M. N -color Ashkin-Teller model // *Phys. Rev. B*. 1981. Vol. 24, no. 11. P. 6508–6515.
286. Dotsenko V. S., Dotsenko V. S. Critical behaviour of the Baxter model with impurity lattice bonds // *J. Phys. A*. 1984. Vol. 17, no. 5. P. L301.
287. Matthews-Morgan D., Landau D. P., Swendsen R. H. New universal behavior for the impure Baxter model // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53, no. 7. P. 679–682.
288. Wiseman S., Domany E. Critical behavior of the random-bond Ashkin-Teller model: A Monte Carlo study // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, no. 4. P. 3074–3086.
289. Wiseman S., Domany E. Finite-size scaling and lack of self-averaging in critical disordered systems // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, no. 1. P. 22–25.

290. *Shalaev B.* Critical behavior of the two-dimensional Ising model with random bonds // *Phys. Rep.* 1994. Vol. 237, no. 3. P. 129 – 188.
291. *Murthy G. N.* Critical behavior of the N -component Ashkin-Teller model with bond impurities // *Phys. Rev. B.* 1987. Vol. 36, no. 13. P. 7166–7168.
292. *Cardy J.* Effect of random impurities on fluctuation-driven first-order transitions // *J. Phys. A.* 1996. Vol. 29, no. 9. P. 1897.
293. *Cardy J.* Quenched randomness at first-order transitions // *Physica A.* 1999. Vol. 263, no. 1. P. 215 – 221.
294. Bond disorder induced criticality of the three-color Ashkin-Teller model / A. Belafard, H. G. Katzgraber, M. Troyer, S. Chakravarty // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109, no. 15. P. 155701.
295. Emerging criticality in the disordered three-color Ashkin-Teller model / Q. Zhu, X. Wan, R. Narayanan et al. // *Phys. Rev. B.* 2015. Vol. 91, no. 22. P. 224201.
296. *Shapira Y.* Experimental studies of bicritical points in 3D antiferromagnets // Multicritical Phenomena, NATO ASI Series B / Ed. by R. Pynn, A. Skjeltrop. New York and London : Plenum Press, 1983.
297. *Kosterlitz J. M., Nelson D. R., Fisher M. E.* Bicritical and tetracritical points in anisotropic antiferromagnetic systems // *Phys. Rev. B.* 1976. Vol. 13, no. 1. P. 412–432.
298. *Liu K.-S., Fisher M. E.* Quantum lattice gas and the existence of a supersolid // *J. Low Temp. Phys.* 1973. Vol. 10, no. 5. P. 655–683.
299. *Lyuksyutov I., Pokrovskii V., Khmelnitski D.* Intersection of lines of second-order transitions // *Sov. Phys. JETP.* 1975. Vol. 42, no. 5. P. 923–926.
300. *Aharony A.* Old and new results on multicritical points // *J. Stat. Phys.* 2003. Vol. 110, no. 3. P. 659–669.
301. *Matsuda H., Tsuneto T.* Off-diagonal long-range order in solids // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* 1970. Vol. 46. P. 411–436.
302. *Kim E., Chan M. H. W.* Probable observation of a supersolid helium phase // *Nature.* 2003. Vol. 427. P. 225–227.
303. *Zhang Y., Demler E., Sachdev S.* Competing orders in a magnetic field: Spin and

- charge order in the cuprate superconductors // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 66, no. 9. P. 094501.
304. *Sannino F., Tuominen K.* Tetracritical behavior in strongly interacting theories // *Phys. Rev. D*. 2004. Vol. 70, no. 3. P. 034019.
305. *Murakami S., Nagaosa N.* Colossal magnetoresistance in manganites as a multicritical phenomenon // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, no. 19. P. 197201.
306. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A. A.* Field-theoretic description of the multicritical behavior of systems with two order parameters // *JETP Lett.* 1998. Vol. 68, no. 12. P. 950–956.
307. *Folk R., Holovatch Y., Moser G.* Field theory of bicritical and tetracritical points. I. Statics // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 041124.
308. *Calabrese P., Pelissetto A., Vicari E.* Multicritical phenomena in $O(n_1) \oplus O(n_2)$ -symmetric theories // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67, no. 5. P. 054505.
309. *Delamotte B., Mouhanna D., Tissier M.* Nonperturbative renormalization-group approach to frustrated magnets // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 13. P. 134413.
310. *Diep H. T.* Magnetic transitions in helimagnets // *Phys. Rev. B*. 1989. Vol. 39, no. 1. P. 397–404.
311. *Loison D., Schotte K.* First and second order transition in frustrated XY systems // *Eur. Phys. J. B*. 1998. Vol. 5. P. 735–743.
312. *Loison D., Schotte K. D.* First and second order transition of frustrated Heisenberg spin systems // *Eur. Phys. J. B*. 2000. Vol. 14, no. 1. P. 125–137.
313. *Itakura M.* Monte carlo renormalization group study of the Heisenberg and the XY antiferromagnet on the stacked triangular lattice and the chiral φ^4 model // *J. Phys. Soc. Jpn.*. 2003. Vol. 72, no. 1. P. 74–82.
314. Critical properties of a continuous family of XY noncollinear magnets / A. Peles, B. W. Southern, B. Delamotte et al. // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 69, no. 22. P. 220408.
315. Short-time dynamics of a family of XY noncollinear magnets / S. Bekhechi, B. W. Southern, A. Peles, D. Mouhanna // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74, no. 1.

P. 016109.

316. First order phase transition in the frustrated triangular antiferromagnet CsNiCl_3 / G. Quirion, X. Han, M. L. Plumer, M. Poirier // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97, no. 7. P. 077202.
317. *Zelli M., Boese K., Southern B. W.* Short-time dynamics study of Heisenberg noncollinear magnets // *Phys. Rev. B.* 2007. Vol. 76, no. 22. P. 224407.
318. *Ngo V. T., Diep H. T.* Phase transition in Heisenberg stacked triangular antiferromagnets: End of a controversy // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78, no. 3. P. 031119.
319. Critical behavior of $\text{O}(2) \otimes \text{O}(n)$ symmetric models / P. Calabrese, P. arruccini, A. Pelissetto, P. Vicari // *Phys. Rev. B.* 2004. Vol. 70, no. 17. P. 174439.
320. *Jones D. R. T., Love A., Moore M. A.* Phase transitions in superfluid ^3He // *J. Phys. C.* 1976. Vol. 9, no. 5. P. 743.
321. *Bailin D., Love A., Moore M. A.* Phase transitions not controlled by stable fixed points // *J. Phys. C.* 1977. Vol. 10, no. 8. P. 1159.
322. *Garel T., Pfeuty P.* Commensurability effects on the critical behaviour of systems with helical ordering // *J. Phys. C.* 1976. Vol. 9, no. 10. P. L245.
323. *Barak Z., Walker M. B.* First-order phase transitions in Tb, Dy, and Ho // *Phys. Rev. B.* 1982. Vol. 25, no. 3. P. 1969–1972.
324. *Antonenko S. A., Sokolov A. I.* Phase transitions in anisotropic superconducting and magnetic systems with vector order parameters: Three-loop renormalization-group analysis // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 49, no. 22. P. 15901–15912.
325. *Pelissetto A., Rossi P., Vicari E.* Critical behavior of frustrated spin models with noncollinear order // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 63, no. 14. P. 140414.
326. *Calabrese P., Parruccini P., Sokolov A. I.* Chiral phase transitions: Focus driven critical behavior in systems with planar and vector ordering // *Phys. Rev. B.* 2002. Vol. 66, no. 18. P. 180403.
327. *Calabrese P., Parruccini P., Sokolov A. I.* Critical thermodynamics of a three-dimensional chiral model for $n > 3$ // *Phys. Rev. B.* 2003. Vol. 68, no. 9. P. 094415.

328. Zumbach G. Almost second order phase transitions // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, no. 15. P. 2421–2424.
329. Zumbach G. The renormalization group in the local potential approximation and its applications to the $O(n)$ model // *Nucl. Phys. B*. 1994. Vol. 413, no. 3. P. 754 – 770.
330. Zumbach G. The local potential approximation of the renormalization group and its applications // *Phys. Lett. A*. 1994. Vol. 190, no. 3. P. 225 – 230.
331. Tissier M., Delamotte B., Mouhanna D. Frustrated Heisenberg magnets: A non-perturbative approach // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, no. 22. P. 5208–5211.
332. Tissier M., Mouhanna D., Delamotte B. Nonperturbative approach of the principal chiral model between two and four dimensions // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61, no. 22. P. 15327–15330.
333. Tissier M., Delamotte B., Mouhanna D. An exact renormalization group approach to frustrated magnets // *Int. J. Mod. Phys. A*. 2001. Vol. 16, no. 11. P. 2131–2136.
334. Tissier M., Delamotte B., Mouhanna D. XY frustrated systems: Continuous exponents in discontinuous // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67, no. 13. P. 134422.
335. Fixed points in frustrated magnets revisited / B. Delamotte, Yu. Holovatch, D. Ivaneyko et al. // *J. Stat. Mech.*. 2008. Vol. 2008, no. 03. P. P03014.
336. 't Hooft G., Veltman M. Regularization and renormalization of gauge fields // *Nucl. Phys. B*. 1972. Vol. 44, no. 1. P. 189 – 213.
337. 't Hooft G. Dimensional regularization and the renormalization group // *Nucl. Phys. B*. 1973. Vol. 61, no. Supplement C. P. 455 – 468.
338. Parisi G. Field-theoretic approach to second-order phase transitions in two- and three-dimensional systems // *J. Stat. Phys.*. 1980. Vol. 23, no. 1. P. 49–82.
339. Bausch R., Janssen H. K., Wagner H. Renormalized field theory of critical dynamics // *Z. Phys. B*. 1976. Vol. 24, no. 1. P. 113–127.
340. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Critical exponents from field theory // *Phys. Rev. B*. 1980. Vol. 21, no. 9. P. 3976–3998.
341. Schloms R., Dohm V. Renormalization-group functions and nonuniversal critical

- behaviour // *Europhys. Lett.*. 1987. Vol. 3, no. 4. P. 413.
342. *Schloms R., Dohm V.* Minimal renormalization without ε -expansion: Critical behavior in three dimensions // *Nucl. Phys. B*. 1989. Vol. 328, no. 3. P. 639 – 663.
343. *Hardy G.* Divergent Series. Oxford : Oxford University Press, 1948. 413 p.
344. *Baker G. A. J., Graves-Morris P.* Padé Approximants. MA : Addison-Wesley, 1981.
345. *Chisholm J.* Rational approximants defined from double power series // *Math. Comp.* 1973. Vol. 27. P. 841–848.
346. *Wansleben S., Landau D. P.* Monte Carlo investigation of critical dynamics in the three-dimensional Ising model // *Phys. Rev. B*. 1991. Vol. 43, no. 7. P. 6006–6014.
347. *Ito N.* Non-equilibrium critical relaxation of the three-dimensional Ising model // *Physica A*. 1993. Vol. 192, no. 4. P. 604 – 616.
348. *Kikuchi M., Ito N.* Statistical dependence time and its application to dynamical critical exponent // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1993. Vol. 62, no. 9. P. 3052–3061.
349. *Grassberger P.* Damage spreading and critical exponents for 'model A' Ising dynamics // *Physica A*. 1995. Vol. 214, no. 4. P. 547 – 559.
350. Nonequilibrium relaxation of fluctuations of physical quantities / N. Ito, K. Hukushima, K. Ogawa, Y. Ozeki // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2000. Vol. 69, no. 7. P. 1931–1934.
351. *Belanger D. P., Farago B., V. Jaccarino et al.* Random exchange Ising model dynamics : $\text{Fe}_{0.46}\text{Zn}_{0.54}\text{F}_2$ // *J. Phys. Colloques*. 1988. Vol. 49, no. C8. P. C8–1229–C8–1230.
352. *Heuer H.-O.* Dynamic scaling of disordered Ising systems // *J. Phys. A*. 1993. Vol. 26, no. 6. P. L341.
353. *Fendler B., Sknepnek R., Vojta T.* Dynamics at a smeared phase transition // *J. Phys. A*. 2005. Vol. 38, no. 11. P. 2349.
354. *Watson P. J. S.* Two-variable rational approximants: a new method // *J. Phys. A*. 1974. Vol. 7, no. 18. P. L167.

355. Five-loop renormalization group functions of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 -theory and ϵ -expansions of critical exponents up to ϵ^5 / H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde et al. // *Phys. Lett. B*. 1991. Vol. 272, no. 1. P. 39 – 44.
356. *Fisher M. E.* Theory of critical point singularities // Critical Phenomena, Proc. Enrico Fermi Int. School of Physics / Ed. by M. S. Green. New York : Academic, 1971. Vol. 51. P. 1–99.
357. *Fisher M. E., Barber M. N.* Scaling theory for finite-size effects in the critical region // *Phys. Rev. Lett.* 1972. Vol. 28, no. 23. P. 1516–1519.
358. *Barber M. N.* Finite-size scaling // Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. by C. Domb, J. Lebowitz. New York : Academic Press, 1983. Vol. 8.
359. *Privman V.* Finite-size scaling theory // Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems. Singapore : World Scientific, 2014. P. 1–98.
360. *Privman V., Fisher M. E.* Universal critical amplitudes in finite-size scaling // *Phys. Rev. B*. 1984. Vol. 30, no. 1. P. 322–327.
361. *Binder K.* Finite size scaling analysis of Ising model block distribution functions // *Z. Phys. B*. 1981. Vol. 43, no. 2. P. 119–140.
362. *Kaneda K., Okabe Y., Kikuchi M.* Shape effects of finite-size scaling functions for anisotropic three-dimensional Ising models // *J. Phys. A*. 1999. Vol. 32, no. 42. P. 7263.
363. *Diehl H. W., Shpot M.* Critical behavior at m -axial Lifshitz points: Field-theory analysis and ϵ -expansion results // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 62, no. 18. P. 12338–12349.
364. *Wang J.-S.* Anisotropic finite-size scaling analysis of a two-dimensional driven diffusive system // *J. Stat. Phys.*. 1996. Vol. 82, no. 5. P. 1409–1427.
365. *Leung K.-T., Cardy J. L.* Field theory of critical behavior in a driven diffusive system // *J. Stat. Phys.*. 1986. Vol. 44, no. 3. P. 567–588.
366. *Leung K.-T.* Finite-size scaling at critical points with spatial anisotropies // *Int. J. Mod. Phys. C*. 1992. Vol. 03, no. 02. P. 367–383.
367. *Leung K.-T., Wang J.-S.* Anisotropic finite-size scaling analysis of a three-dimensional driven-diffusive system // *Int. J. Mod. Phys. C*. 1999. Vol. 10,

- no. 05. P. 853–873.
368. *Hucht A.* On the symmetry of universal finite-size scaling functions in anisotropic systems // *J. Phys. A*. 2002. Vol. 35, no. 31. P. L481.
 369. *Hucht A.* Nonequilibrium phase transition in an exactly solvable driven Ising model with friction // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80. P. 061138.
 370. *Angst S., Hucht A., Wolf D. E.* Strongly anisotropic nonequilibrium phase transition in Ising models with friction // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85, no. 5. P. 051120.
 371. Finite-size scaling analysis of the anisotropic critical behavior of the two-dimensional Ising model under shear / D. Winter, P. Virnau, J. Horbach, Binder K. // *Europhys. Lett.* 2010. Vol. 91, no. 6. P. 60002.
 372. *Hucht, A., Angst, S.* Sheared Ising models in three dimensions // *Europhys. Lett.* 2012. Vol. 100, no. 2. P. 20003.
 373. Interface localization-delocalization in a double wedge: A new universality class with strong fluctuations and anisotropic scaling / A. Milchev, M. Müller, K. Binder, D. P. Landau // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, no. 13. P. 136101.
 374. *Binder K., Wang J. S.* Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: Phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations // *J. Stat. Phys.* 1989. Vol. 55, no. 1. P. 87–126.
 375. *Henkel M., Schollwöck U.* Universal finite-size scaling amplitudes in anisotropic scaling // *J. Phys. A*. 2001. Vol. 34, no. 16. P. 3333.
 376. *Cooper F., Freedman B., Preston D.* Solving $\varphi_{1,2}^4$ field theory with Monte Carlo // *Nucl. Phys. B*. 1982. Vol. 210, no. 2. P. 210 – 228.
 377. *Landau D., Binder K.* A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics. London : Cambridge University Press, 2005.
 378. *Riedel E. K., Wegner F. J.* Effective critical and tricritical exponents // *Phys. Rev. B*. 1974. Vol. 9. P. 294–315.
 379. *Frey E., Schwabl F.* Renormalized field theory for the static crossover in uniaxial dipolar ferromagnets // *Phys. Rev. B*. 1990. Vol. 42. P. 8261–8273.
 380. *Nasser I., Folk R.* Static crossover behavior in the neighborhood of a Lifshitz point // *Phys. Rev. B*. 1995. D Vol. 52. P. 15799–15806.

381. *Chatelain C., Berche P., Berche B.* Second-order phase transition induced by deterministic fluctuations in aperiodic eight-state Potts models // *Eur. Phys. J. B*. 1999. Vol. 7, no. 3. P. 439–449.
382. *Nickel B. G., Meiron D., Baker G. J.* Compilation of 2-pt and 4-pt graphs for continuous spin models // *Preprint: Univ. of Guelph Report. - Guelph*. 1977. 111 p.
383. *Holovatch Yu., Shpot M.* Critical exponents of random Ising-like systems in general dimensions // *J. Stat. Phys.* 1992. Vol. 66, no. 3-4. P. 867–883.
384. *Holovatch Yu., Krokhamal's'kii T.* Compilation of two-point and four-point graphs in field theory in noninteger dimensions // *J. Math. Phys.*. 1994. Vol. 35, no. 8. P. 3866–3880.
385. *Holovatch Yu., Yavors'kii T.* Critical exponents of the diluted Ising model between dimensions 2 and 4 // *J. Stat. Phys.* 1998. Vol. 92, no. 5-6. P. 785–808.
386. *Mukamel D., Krinsky S.* Physical realizations of $n \geq 4$ -component vector models. I. Derivation of the Landau-Ginzburg-Wilson hamiltonians // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13. P. 5065–5077.
387. *Calabrese P., Pelissetto A., Vicari E.* Randomly dilute spin models with cubic symmetry // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 67, no. 2. P. 024418.
388. *Stergiou A.* Bootstrapping MN and Tetragonal CFTs in Three Dimensions // *SciPost Phys.* 2019. Vol. 7. P. 10.
389. Six-loop ε -expansion study of three-dimensional n -vector model with cubic anisotropy / L. Ts. Adzhemyan, E. V. Ivanova, M. V. Kompaniets et al. // *Nucl. Phys. B*. 2019. Vol. 940. P. 332 – 350.
390. *Kousvos S. R., Stergiou A.* Bootstrapping Mixed Correlators in Three-Dimensional Cubic Theories // *SciPost Phys.* 2019. Vol. 6. P. 35.
391. Ising-model critical indices in three dimensions from the Callan-Symanzik equation / G. A. Baker, B. G. Nickel, M. S. Green, D. I. Meiron // *Phys. Rev. Lett.* 1976. Vol. 36. P. 1351–1354.
392. *Baker G. A., Nickel B. G., Meiron D. I.* Critical indices from perturbation analysis of the Callan-Symanzik equation // *Phys. Rev. B*. 1978. Vol. 17, no. 3.

- P. 1365–1374.
393. *Feldman D. E.* Quasi-long-range order in nematics confined in random porous media // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 4886–4889.
 394. *Feldman D. E., Pelcovits R. A.* Liquid crystals in random porous media: Disorder is stronger in low-density aerosils // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 040702.
 395. *Berzin A. A., Morosov A. I., Sigov A. S.* Imry-Ma disordered state induced by impurities of “random local anisotropy” type in the system with $O(n)$ symmetry // *Phys. Solid State.* 2016. Vol. 58. P. 2018–2020.
 396. *Berzin A. A., Morosov A. I., Sigov A. S.* Cubic anisotropy created by defects of “random local anisotropy” type, and phase diagram of the $O(n)$ model // *Phys. Solid State.* 2017. Vol. 59. P. 2448–2452.
 397. *Berzin A. A., Morosov A. I., Sigov A. S.* Phase diagram of the $O(n)$ model with defects of “random local anisotropy” type // *J. Magn. Magn. Mater.* 2018. Vol. 459. P. 256 – 259.
 398. *Halperin B. I., Hohenberg P. C., Ma S.-k.* Renormalization-group methods for critical dynamics: I. Recursion relations and effects of energy conservation // *Phys. Rev. B.* 1974. Vol. 10, no. 1. P. 139–153.
 399. *Goretsveig V. I., Fratzl P., Lebowitz J. L.* Kinetics of joint ordering and decomposition in binary alloys // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 55, no. 5. P. 2912–2919.
 400. *Tanaka H.* Two-order-parameter description of liquids: critical phenomena and phase separation of supercooled liquids // *J. Phys.: Condens. Matter.* 1999. Vol. 11, no. 15. P. L159.
 401. *Binder K., Kinzel W., Landau D.* Theoretical aspects of order-disorder transitions in adsorbed layers // *Surface Science.* 1982. Vol. 117, no. 1. P. 232 – 244.
 402. *Berges J., Schlichting S., Sexty D.* Dynamic critical phenomena from spectral functions on the lattice // *Nucl. Phys. B.* 2010. Vol. 832, no. 1. P. 228 – 240.
 403. *Castillo G., Mujica N., Soto R.* Universality and criticality of a second-order granular solid-liquid-like phase transition // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 1. P. 012141.

404. Lannert C., Vishveshwara S., Fisher M. Critical dynamics of superconductors in the charged regime // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 92. P. 097004.
405. Dudka M., Folk R., Moser G. Gauge dependence of the critical dynamics at the superconducting phase transition // *Condens. Matter Phys.* 2007. Vol. 10, no. 2. P. 189–200.
406. Sen, P., Dasgupta, S., Stauffer, D. Dynamics of antiferromagnetic Ising model with fixed magnetization // *Eur. Phys. J. B.* 1998. Vol. 1, no. 1. P. 107–110.
407. Zheng B., Luo H. J. Monte Carlo simulations of short-time critical dynamics with a conserved quantity // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, no. 6. P. 066130.
408. Stauffer D. Critical 2d and 3d dynamics of q2r cellular automata // *Int. J. Mod. Phys. C.* 1997. Vol. 08, no. 06. P. 1263–1266.
409. Brézin E., De Dominicis C. Field-theoretic techniques and critical dynamics. II. Ginzburg-Landau stochastic models with energy conservation // *Phys. Rev. B.* 1975. Vol. 12, no. 11. P. 4954–4962.
410. Folk R., Moser G. Critical dynamics of stochastic models with energy conservation (model C) // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69, no. 3. P. 036101.
411. Privman V., Hohenberg P. C., Aharony A. Universal critical-point amplitude relations // *Phase Transitions and Critical Phenomena* / Ed. by C. Domb, J.L. Lebowitz. London, UK : Academic Press, 1991. Vol. 14.
412. Five-loop renormalization group functions of $O(n)$ -symmetric ϕ^4 -theory and ϵ -expansions of critical exponents up to ϵ^5 : (phys. lett. b 272 (1991) 39) / H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde et al. // *Phys. Lett. B.* 1993. Vol. 319, no. 4. P. 545.
413. Five-loop additive renormalization in the φ^4 theory and amplitude functions of the minimally renormalized specific heat in three dimensions / S. A. Larin, M. Mönnigmann, M. Strösser, V. Dohm // *Phys. Rev. B.* 1998. Vol. 58. P. 3394–3408.
414. Holovatch Yu., Dudka M., Yavors'kii T. A marginal dimension of a weakly diluted quenched m -vector model // *J. Phys. Stud.* 2001. Vol. 5, no. 3/4. P. 233 – 239.
415. Adzhemyan L. T., Novikov S. V., Sladkoff L. Calculation of the dynamical critical

- exponent in the model a of critical dynamics to order ε^4 // *preprint cond-mat*. 2008. Vol. arXiv:0808.1347. 5 p.
416. *Lipatov L.* // *Sov. Phys. JETP*. 1977. Vol. 45. P. 216.
 417. *Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Perturbation theory at large order. I. The φ^{2N} interaction // *Phys. Rev. D*. 1977. Vol. 15, no. 6. P. 1544–1557.
 418. *Brézin E., Parisi G.* Critical exponents and large-order behavior of perturbation theory // *J. Stat. Phys.*. 1978. Vol. 19, no. 3. P. 269–292.
 419. *Jakubczyk P., Dupuis N., Delamotte B.* Reexamination of the nonperturbative renormalization-group approach to the Kosterlitz-Thouless transition // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, no. 6. P. 062105.
 420. *Canet L., Chaté H.* A non-perturbative approach to critical dynamics // *J. Phys. A*. 2007. Vol. 40, no. 9. P. 1937.
 421. *Codello A., D’Odorico G.* $O(n)$ -universality classes and the Mermin-Wagner theorem // *Phys. Rev. Lett.* 2013. Vol. 110, no. 14. P. 141601.
 422. *Mati P.* Vanishing beta function curves from the functional renormalization group // *Phys. Rev. D*. 2015. Vol. 91, no. 12. P. 125038.
 423. Random Ising model in three dimensions: theory, experiment and simulation - a difficult coexistence / P. E. Berche, C. Chatelain, B. Berche, W. Janke // *Condens. Matter Phys.* 2005. Vol. 8, no. 1. P. 47–58.
 424. *Kyriakidis J., Geldart D. J. W.* Universal correction to scaling amplitude ratios for inhomogeneous ferromagnets with continuous symmetry // *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 53, no. 17. P. 11572–11581.
 425. *Alba M., Pouget S.* Dynamic critical behavior of disordered 3d Heisenberg ferromagnets // *J. Magn. Magn. Mater.* 2001. Vol. 226, no. Part 1. P. 542 – 544.
 426. *Wiseman S., Domany E.* Lack of self-averaging in critical disordered systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, no. 4. P. 3469–3484.
 427. *Aharony A., Harris A. B.* Absence of self-averaging and universal fluctuations in random systems near critical points // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, no. 18. P. 3700–3703.

428. *Dotsenko V., Klumov B.* Free energy distribution function of a random Ising ferromagnet // *J. Stat. Mech.* 2012. Vol. 2012, no. 05. P. P05027.
429. *Tomita Y., Okabe Y.* Crossover and self-averaging in the two-dimensional site-diluted Ising model: Application of probability-changing cluster algorithm // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64, no. 3. P. 036114.
430. *Janke W., Johnston D. A.* Non-self-averaging in autocorrelations for Potts models on quenched random gravity graphs // *J. Phys. A*. 2000. Vol. 33, no. 14. P. 2653.
431. *Dotsenko V., Holovatch Y.* Universal free-energy distribution in the critical point of a random Ising ferromagnet // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, no. 5. P. 052126.
432. *Fytas N. G., Malakis A.* Critical behavior of the pure and random-bond two-dimensional triangular Ising ferromagnet // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81, no. 4. P. 041109.
433. *Itzykson C., Drouffe J.-M.* Statistical field theory. Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
434. *Ludwig A. W.* Critical behavior of the two-dimensional random q -state Potts model by expansion in $(q - 2)$ // *Nucl. Phys. B*. 1987. Vol. 285, no. Supplement C. P. 97 – 142.
435. *Larkin A. I., Khmel'nitskii D. E.* Phase transition in uniaxial ferroelectrics // *Sov. Phys. JETP*. 1969. Vol. 29, no. 6. P. 1123–1128.
436. *Aharony A.* New singularities in the critical behavior of random Ising models at marginal dimensionalities // *Phys. Rev. B*. 1976. Vol. 13, no. 5. P. 2092–2098.
437. *Rajabpour M. A., Sepehrinia R.* Explicit renormalization group for $d=2$ random bond Ising model with long-range correlated disorder // *J. Stat. Phys.* 2008. Vol. 130.
438. *Fedorenko A. A., Carpentier D., Orignac E.* Two-dimensional Dirac fermions in the presence of long-range correlated disorder // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 85, no. 12. P. 125437.
439. Integer quantum Hall transition: An alternative approach and exact results / A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar, G. Grinstein // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, no. 11. P. 7526–7552.

440. Analytic theory of ballistic transport in disordered graphene / A. Schuessler, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79, no. 7. P. 075405.
441. *Fedorenko A. A., Le Doussal P., Wiese K. J.* Statics and dynamics of elastic manifolds in media with long-range correlated disorder // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74, no. 6. P. 061109.
442. *Fisher D. S.* Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51, no. 10. P. 6411–6461.
443. *Le Doussal P., Ristivojevic Z., Wiese K. J.* Exact form of the exponential correlation function in the glassy super-rough phase // *Phys. Rev. B*. 2013. Vol. 87, no. 21. P. 214201.
444. Replica-symmetry breaking in the critical behaviour of the random ferromagnet / Vik. Dotsenko, A. B. Harris, D. Sherrington, R. B. Stinchcombe // *J. Phys. A*. 1995. Vol. 28, no. 11. P. 3093.
445. *Dotsenko V., Feldman D. E.* Replica symmetry breaking and the renormalization group theory of the weakly disordered ferromagnet // *J. Phys. A*. 1995. Vol. 28, no. 18. P. 5183.
446. *Feldman D. E., Izyumov A. V., Dotsenko V.* Stability of the renormalization group in the 2d random Ising and Baxter models with respect to replica symmetry breaking // *J. Phys. A*. 1996. Vol. 29, no. 15. P. 4331.
447. *Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A. A.* Stability of critical behavior of weakly disordered systems with respect to the replica symmetry breaking // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 63, no. 18. P. 184201.
448. *Fedorenko A. A.* Replicon modes and stability of critical behaviour of disordered systems with respect to the continuous replica symmetry breaking // *J. Phys. A*. 2003. Vol. 36, no. 5. P. 1239.
449. *Chatelain C.* Griffiths phase and critical behavior of the two-dimensional Potts models with long-range correlated disorder // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89, no. 3. P. 032105.
450. Finite-size scaling and correlation lengths for disordered systems / J. T. Chayes,

- L. Chayes, D. S. Fisher, T. Spencer // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 57, no. 24. P. 2999–3002.
451. Jug G., Shalaev B. N. Critical behavior of weakly disordered anisotropic systems in two dimensions // *Phys. Rev. B*. 1996. Vol. 54, no. 5. P. 3442–3453.
452. Brézin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Discussion of critical phenomena for general n -vector models // *Phys. Rev. B*. 1974. Vol. 10, no. 3. P. 892–900.
453. Hasenbusch M., Pelissetto A., Vicari E. Instability of $O(5)$ multicritical behavior in $SO(5)$ theory of high- T_c superconductors // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 72, no. 1. P. 014532.
454. Laptev V. M., Skryabin Y. Phase diagrams of disordered systems with coupled order parameters // *Fiz. Tverd. Tela (Leningrad)*. 1980. Vol. 22, no. 10. P. 2949.
455. Prudnikov V. V., Prudnikov P. V., Fedorenko A. A. Multicritical behavior of disordered systems with two order parameters // *Phys. Solid State*. 2000. Vol. 42, no. 1. P. 165–169.
456. Calabrese P., Pelissetto A., Vicari E. Multicritical behavior in frustrated spin systems with non-collinear order // *Nucl. Phys. B*. 2005. Vol. 709, no. 3. P. 550 – 577.
457. Abreu L. M., de Calan C., Malbouisson A. P. C. Multicritical behavior of the two-field Ginzburg-Landau model coupled to a gauge field // *Physica A*. 2008. Vol. 387, no. 4. P. 817 – 824.
458. Dohm V., Janssen H.-K. Dynamic scaling near bicritical points // *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 39, no. 15. P. 946–949.
459. Dohm V., Janssen H. K. Dynamic scaling and corrections to scaling near bicritical and tetracritical points // *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49, no. 3. P. 1347–1349.
460. Folk R., Holovatch Yu., Moser G. Field theory of bicritical and tetracritical points. II. Relaxational dynamics // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 041125.
461. Antonenko S. A., Sokolov A. I. Critical exponents for a three-dimensional $O(n)$ -symmetric model with $n > 3$ // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, no. 3. P. 1894–1898.
462. Yosefin M., Domany E. Phase transitions in fully frustrated spin systems // *Phys. Rev. B*. 1985. Vol. 32, no. 3. P. 1778–1795.

463. Spurious fixed points in frustrated magnets / B. Delamotte, Yu. Holovatch, D. Ivaneyko et al. // *preprint cond-mat*. 2006. Vol. arXiv:cond-mat/0609285. 4 p.
464. *Magnen J., Sénéor R.* Phase space cell expansion and Borel summability for the euclidean ϕ_3^4 theory // *Commun. Math. Phys.*. 1977. Vol. 56, no. 3. P. 237–276.
465. *Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* Critical exponents for the n -vector model in three dimensions from field theory // *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 39, no. 2. P. 95–98.
466. *Kazakov D. I., Tarasov O. V., Shirkov D. V.* Analytic continuation of the results of perturbation theory for the model $g\varphi^4$ to the region $g \gtrsim 1$ // *Theoret. and Math. Phys.* 1979. Vol. 38, no. 1. P. 15–25.
467. *Mudrov A. I., Varnashev K. B.* Modified borel summation of divergent series and critical-exponent estimates for an n -vector cubic model in three dimensions from five-loop ϵ expansions // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58, no. 5. P. 5371–5375.
468. *Calabrese P., Parruccini P.* Critical behavior of two-dimensional frustrated spin models with noncollinear order // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 64, no. 18. P. 184408.
469. *Calabrese P., Parruccini P.* Erratum: Critical behavior of two-dimensional frustrated spin models with noncollinear order // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 65, no. 9. P. 099901.
470. *Aharony A.* Critical behavior of anisotropic cubic systems // *Phys. Rev. B*. 1973. Vol. 8, no. 9. P. 4270–4273.
471. Randomly dilute Ising model: A nonperturbative approach / M. Tissier, D. Mouhanna, J. Vidal, B. Delamotte // *Phys. Rev. B*. 2002. Vol. 65, no. 14. P. 140402.
472. *Itakura M.* Monte Carlo simulation of the antiferromagnetic four-state Potts model on simple cubic and body-centered-cubic lattices // *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 60, no. 9. P. 6558–6565.
473. *Kawamura H., Miyashita S.* Phase transition of the two-dimensional Heisenberg antiferromagnet on the triangular lattice // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1984. Vol. 53, no. 12. P. 4138–4154. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.53.4138>.

474. Unconventional dynamics in triangular Heisenberg antiferromagnet NaCrO_2 / A. Olariu, P. Mendels, F. Bert et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97, no. 16. P. 167203.
475. High-field electron spin resonance in the two-dimensional triangular-lattice antiferromagnet NiGa_2S_4 / H. Yamaguchi, S. Kimura, M. Hagiwara et al. // *Phys. Rev. B.* 2008. Vol. 78, no. 18. P. 180404.
476. Short-range magnetic ordering process for the triangular-lattice compound NiGa_2S_4 : A positive muon spin rotation and relaxation study / A. Yaouanc, P. Dalmas de Réotier, Y. Chapuis et al. // *Phys. Rev. B.* 2008. Vol. 77, no. 9. P. 092403.
477. Spin dynamics and spin freezing behavior in the two-dimensional antiferromagnet NiGa_2S_4 revealed by Ga-NMR, NQR and μSR measurements / H. Takeya, K. Ishida, K. Kitagawa et al. // *Phys. Rev. B.* 2008. Vol. 77, no. 5. P. 054429.
478. Vortex dynamics and frustration in two-dimensional triangular chromium lattices / M. Hemmida, H.-A. Krug von Nidda, N. Büttgen et al. // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 80, no. 5. P. 054406.
479. *Southern B. W., Young A. P.* Spin stiffness in frustrated antiferromagnets // *Phys. Rev. B.* 1993. Vol. 48, no. 17. P. 13170–13173.
480. *Wintel M., Everts H. U., Apel W.* The Heisenberg antiferromagnet on a triangular lattice: Topological excitations // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 25, no. 9. P. 711.
481. *Southern B., Xu H.-J.* Monte Carlo study of the Heisenberg antiferromagnet on the triangular lattice // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 52, no. 6. P. R3836–R3839.
482. *Wintel M., Everts H. U., Apel W.* Monte Carlo simulation of the Heisenberg antiferromagnet on a triangular lattice: Topological excitations // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 52, no. 18. P. 13480–13486.
483. Spin stiffness and topological defects in two-dimensional frustrated spin systems / M. Caffarel, P. Azaria, B. Delamotte, D. Mouhanna // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 64, no. 1. P. 014412.
484. Thermal destruction of chiral order in a two-dimensional model of coupled trihedra / L. Messio, J.-C. Domenge, C. Lhuillier et al. // *Phys. Rev. B.* 2008.

Vol. 78, no. 5. P. 054435.

485. *Kawamura H., Yamamoto A., Okubo T.* Z2-vortex ordering of the triangular-lattice Heisenberg antiferromagnet // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2010. Vol. 79, no. 2. P. 023701.
486. *Okubo T., Kawamura H.* Signature of a Z2 vortex in the dynamical correlations of the triangular-lattice Heisenberg antiferromagnet // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2010. Vol. 79, no. 8. P. 084706.
487. *Hasenbusch M., Pelissetto A., Vicari E.* Multicritical behaviour in the fully frustrated XY model and related systems // *J. Stat. Mech.* 2005. Vol. 2005, no. 12. P. P12002.
488. Chiral critical behavior of frustrated spin systems in two dimensions from five-loop renormalization-group expansions / P. Calabrese, E. V. Orlov, P. Parruccini, A. I. Sokolov // *Phys. Rev. B.* 2003. Vol. 67, no. 2. P. 024413.
489. *Mermin N. D., Wagner H.* Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models // *Phys. Rev. Lett.* 1966. Vol. 17, no. 22. P. 1133–1136.
490. *Polyakov A.* Interaction of Goldstone particles in two dimensions. applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields // *Phys. Lett. B.* 1975. Vol. 59, no. 1. P. 79 – 81.
491. *Brézin E., Zinn-Justin J.* Spontaneous breakdown of continuous symmetries near two dimensions // *Phys. Rev. B.* 1976. Vol. 14, no. 7. P. 3110–3120.
492. *Orlov E. V., Sokolov A. I.* Critical thermodynamics of two-dimensional systems in the five-loop renormalization-group approximation // *Phys. Solid State.* 2000. Vol. 42, no. 11. P. 2151–2158.
493. *Pogorelov A. A., Suslov I. M.* Renormalization group functions for two-dimensional phase transitions: To the problem of singular contributions // *JETP.* 2007. Vol. 105, no. 2. P. 360–370.
494. Non-analyticity of the Callan-Symanzik β -function of two-dimensional $O(n)$ models / P. Calabrese, M. Caselle, A. Celi et al. // *J. Phys. A.* 2000. Vol. 33, no. 46. P. 8155.

495. *Sokal A. D.* Static scaling behavior of high-molecular-weight polymers in dilute solution: A reexamination // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 27, no. 9. P. 661.
496. *Sokal A. D.* Erratum: Static scaling behavior of high-molecular-weight polymers in dilute solution: a reexamination // *Europhys. Lett.* 1995. Vol. 30, no. 2. P. 123.
497. *Azaria P., Delamotte B., Jolicoeur T.* Nonuniversality in helical and canted-spin systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, no. 26. P. 3175–3178.
498. *Azaria P., Delamotte B., Mouhanna D.* Low-temperature properties of two-dimensional frustrated quantum antiferromagnets // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68, no. 11. P. 1762–1765.
499. *Azaria P., Lecheminant P., Mouhanna D.* The massive CP^{N-1} model for frustrated spin systems // *Nucl. Phys. B.* 1995. Vol. 455, no. 3. P. 648 – 684.
500. *Nakayama Y., Ohtsuki T.* Bootstrapping phase transitions in QCD and frustrated spin systems // *Phys. Rev. D.* 2015. Vol. 91, no. 2. P. 021901.
501. *Wetterich C.* Average action and the renormalization group equations // *Nucl. Phys. B.* 1991. Vol. 352, no. 3. P. 529 – 584.
502. *Wetterich C.* Improvement of the average action // *Z. Phys. C.* 1993. Vol. 60, no. 3. P. 461–469.
503. *Litim D. F.* Critical exponents from optimised renormalisation group flows // *Nucl. Phys. B.* 2002. Vol. 631, no. 1. P. 128 – 158.
504. *Berges J., Tetradis N., Wetterich C.* Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics // *Phys. Rep.* 2002. Vol. 363, no. 4. P. 223 – 386.
505. *Pawlowski J. M.* Aspects of the functional renormalisation group // *Annals of Physics*. 2007. Vol. 322, no. 12. P. 2831 – 2915.
506. *Kopietz P., Bartosch L., Schütz F.* Introduction to the Functional Renormalization Group. Berlin : Springer, 2010.
507. *Rosten O. J.* Fundamentals of the exact renormalization group // *Phys. Rep.* 2012. Vol. 511, no. 4. P. 177 – 272.
508. *Nagy S.* Lectures on renormalization and asymptotic safety // *Annals of Physics*. 2014. Vol. 350, no. Supplement C. P. 310 – 346.

509. *Wetterich C.* Exact evolution equation for the effective potential // *Phys. Lett. B*. 1993. Vol. 301, no. 1. P. 90 – 94.
510. *Ellwanger U.* Collective fields and flow equations // *Z. Phys. C*. 1993. Vol. 58, no. 4. P. 619–627.
511. *Tetradis N., Wetterich C.* Critical exponents from the effective average action // *Nucl. Phys. B*. 1994. Vol. 422, no. 3. P. 541 – 592.
512. *Morris T. R.* The exact renormalization group and approximate solutions // *Int. J. Mod. Phys. A*. 1994. Vol. 09, no. 14. P. 2411–2449.
513. *Blaizot J.-P., Méndez-Galain R., Wschebor N.* A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations // *Phys. Lett. B*. 2006. Vol. 632, no. 4. P. 571 – 578.
514. *Blaizot J.-P., Méndez-Galain R., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n -point functions. I // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74, no. 5. P. 051116.
515. *Blaizot J.-P., Méndez-Galain R., Wschebor N.* Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n -point functions. II // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74, no. 5. P. 051117.
516. *Morris T. R., Turner M. D.* Derivative expansion of the renormalization group in $O(n)$ scalar field theory // *Nucl. Phys. B*. 1998. Vol. 509, no. 3. P. 637 – 661.
517. Nonperturbative renormalization group approach to the ising model: A derivative expansion at order ∂^4 / L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, J. Vidal // *Phys. Rev. B*. 2003. Vol. 68, no. 6. P. 064421.
518. Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group / L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, J. Vidal // *Phys. Rev. D*. 2003. Vol. 67, no. 6. P. 065004.
519. Critical behavior of frustrated systems: Monte Carlo simulations versus renormalization group / D. Loison, A. I. Sokolov, B. Delamotte et al. // *JETP Lett.* 2000. Vol. 72, no. 6. P. 337–340.
520. *Folk R., Moser G.* Critical dynamics in two loop order // *Acta Phys. Slovaca*. 1972. Vol. 52, no. 4. P. 285-294.

521. *Dotsenko V., Picco M., Pujol P.* Renormalisation-group calculation of correlation functions for the 2d random bond Ising and Potts models // *Nucl. Phys. B*. 1995. Vol. 455, no. 3. P. 701 – 723.
522. *Guida R., Magnoli N.* Tricritical Ising model near criticality // *Int. J. Mod. Phys. A*. 1998. Vol. 13, no. 07. P. 1145–1157.

ДОДАТОК А

ФУНКЦІОНАЛИ ТА ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ОПИСУ МОДЕЛЕЙ З БЕЗЛАДОМ В РАМКАХ КРИТИЧНОЇ ДИНАМІКИ МОДЕЛІ С.

А.1. Динамічні функціонали і розклад теорії збурень для магнетиків з точковим безладом

Модель, що визначається виразами (1.17), (1.18), (4.95), у формулюванні Бауша-Янсена-Вагнера [339] буде описуватись неперенормованим лагранжіаном:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int d^d x dt \Bigg\{ & -\dot{\Gamma} \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_{0,i} \tilde{\phi}_{0,i} + \sum_{i=1}^n \tilde{\phi}_{0,i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\Gamma}(\mu_0 - \nabla^2) \right) \phi_{0,i} + \dot{\lambda} \tilde{m}_0 \nabla^2 \tilde{m}_0 \\ & + \tilde{m}_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\lambda} \nabla^2 \right) m_0 + \frac{1}{3!} \dot{\Gamma} u_0 \sum_i \tilde{\phi}_{0,i} \phi_{0,i} \sum_j \phi_{0,j} \phi_{0,j} \\ & + \dot{\Gamma} V(x) \sum_i \tilde{\phi}_{0,i}(x, t) \phi_{0,i}(x, t) + \dot{\Gamma} \gamma_0 m_0 \sum_i \tilde{\phi}_{0,i} \phi_{0,i} \\ & - \frac{1}{2} \dot{\lambda} \gamma_0 \tilde{m}_0 \sum_i \nabla^2 \phi_{0,i} \phi_{0,i} \Bigg\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

з новими допоміжними полями відгуку $\tilde{\phi}_i(x, t)$. Є два способи усереднити безлад за випадковим потенціалом безладу $V(x)$ в динаміці. Перший спосіб є таким же, як в статистиці, й полягає у використанні реплічного трюку [107].

Однак, як було встановлено [262], результати на основі перенормування реплікованого лагранжіана в границі $N \rightarrow 0$ співпадають з результатами перенормування лагранжіана, отриманого уникаючи методу реплік, тобто, у нашому випадку, отриманого при усередненні лагранжіану (A.1) за випадковим потенціалом з розподілом (4.96). Лагранжіан, отриманий таким способом, можна записати у

формі:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{rs}, \quad (\text{A.2})$$

де гаусова частина $\mathcal{L}_0$ задається (4.97), $\mathcal{L}_{int}$ задається (4.98), а $\mathcal{L}_{rs}$ задається (4.99). Ми проводимо розрахунки на основі лагранжіану, визначеного (A.2), використовуючи техніку діаграм Фейнмана. Конструкційні частини цих діаграм, представлені на Рис. A.1 і на Рис. A.2.

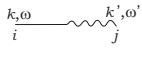
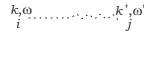
	$G(k, \omega) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \delta_{i,j}$		$H(k, \omega) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \delta_{i,j}$
	$C(k, \omega) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \delta_{i,j}$		$D(k, \omega) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \delta_{i,j}$

Рис. A.1. Пропагатори для побудови діаграм Фейнмана. $G(k, \omega)$ і $H(k, \omega)$ – пропагатори функцій відгуку, тоді як $C(k, \omega)$ і $D(k, \omega)$ – пропагатори кореляційних функцій.

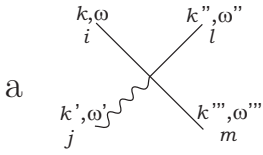
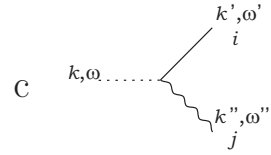
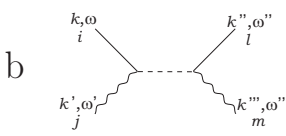
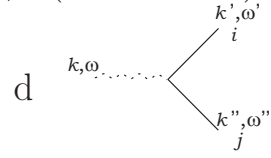
	
$\Gamma A \delta(k + k' + k'' + k''') \delta(\omega + \omega' + \omega'' + \omega''')$	$\mathring{\Gamma} \gamma_0 \delta(k + k' + k'') \delta(\omega + \omega' + \omega'') \delta_{i,j}$
	
$\Gamma^2 B \delta(k + k') \delta(k'' + k''') \delta(\omega + \omega') \delta(\omega'' + \omega''')$	$\frac{1}{2} \mathring{\lambda} \gamma_0 k^2 \delta(k + k' + k'') \delta(\omega + \omega' + \omega'') \delta_{i,j}$

Рис. A.2. Вершини для моделі. Для вершини **a** літера A позначає $u_0/3! (\delta_{i,j} \delta_{l,m} + \delta_{i,l} \delta_{j,m} + \delta_{i,m} \delta_{j,l})/3$. Для вершини **b** літера B позначає $2\Delta_0 \delta_{i,j} \delta_{l,m}$. Вершини **c** і **d** з'являються через зв'язок із збереженою величиною.

Пропагатори відгуку для параметра порядку $G(k, \omega)$ і збереженої густини $H(k, \omega)$ є такими:

$$G(k, \omega) = 1/(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\mu_0 + k^2)) \quad \text{і} \quad H(k, \omega) = 1/(-i\omega + \mathring{\lambda}k^2), \quad (\text{A.3})$$

у той час як пропагатори кореляційних функцій $C(k, \omega)$ і $D(k, \omega)$ мають вигляд:

$$C(k, \omega) = 2\mathring{\Gamma}/|-i\omega + \mathring{\Gamma}(\mu_0 + k^2)|^2 \quad \text{і} \quad D(k, \omega) = 2\mathring{\lambda}k^2/|-i\omega + \mathring{\lambda}k^2|^2. \quad (\text{A.4})$$

З розрахованої за допомогою діаграм Фейнмана двопетлевої функції $\mathring{\Gamma}_{\phi\tilde{\phi}}(\xi, k, \omega)$ (див. р-ня (1.43)) виділяємо динамічну функцію $\mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}$ у формі:

$$\mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}(\xi, k, \omega) = 1 + \mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}^1(\xi, k, \omega) + \mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}^2(\xi, k, \omega), \quad (\text{A.5})$$

де однопетлевий вклад має структуру:

$$\mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}^1(\xi, k, \omega) = 4\Delta_0\mathring{\Gamma} \int_{k'} \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))(\xi^{-2} + k'^2)} + \gamma\mathring{\Gamma}I_C(\xi, k, \omega), \quad (\text{A.6})$$

у той час як двопетлеві внески мають форму:

$$\begin{aligned} \mathring{\Omega}_{\phi\tilde{\phi}}^2(\xi, k, \omega) = & \frac{n+2}{18}\mathring{\Gamma}u_0^2\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(A)}(\xi, k, \omega) - \frac{n+2}{3}\mathring{\Gamma}u_0\gamma_0^2\mathring{C}_{\phi\tilde{\phi}}^{(T3)}(\xi, k, \omega) + \\ & \mathring{\Gamma}\gamma_0^4\mathring{S}_{\phi\tilde{\phi}}(\xi, k, \omega) - 4\frac{n+2}{3}\mathring{\Gamma}u_0\Delta_0\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD2)}(\xi, k, \omega) + \\ & 16\mathring{\Gamma}\Delta_0^2\left(\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD3)}(\xi, k, \omega) + \mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD4)}(\xi, k, \omega)\right) + \\ & 4\mathring{\Gamma}\Delta_0\gamma_0^2\left(\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD5)}(\xi, k, \omega) + \mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD6)}(\xi, k, \omega) + 2\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD7)}(\xi, k, \omega)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Вирази для інтегралу I_C і для $\mathring{W}^{(A)}$, $\mathring{C}^{(T3)}$ та $\mathring{S}$ чистої моделі С подані у Додатку А.1 роботи [410], вклади $\mathring{W}^{(CDi)}$ є такими:

$$\begin{aligned} \mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD2)}(\xi, k, \omega) = & \int_{k'} \int_{k''} \frac{1}{(\xi^{-2} + k'^2)(\xi^{-2} + k''^2)(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2)} \\ & \times \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2))}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD3)}(\xi, k, \omega) = & \int_{k'} \int_{k''} \frac{\mathring{\Gamma}}{(\xi^{-2} + k''^2)(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))^2} \\ & \times \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2))}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathring{W}_{\phi\tilde{\phi}}^{(CD4)}(\xi, k, \omega) = \int_{k'} \int_{k''} \frac{1}{(\xi^{-2} + k'^2)(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2))}$$

$$\times \left[\frac{1}{(\xi^{-2} + k''^2)} \left(\frac{1}{(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2)} + \frac{\mathring{\Gamma}}{-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2)} \right) + \frac{\mathring{\Gamma}^2}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2))(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))} \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathring{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD5)}(\xi, k, \omega) &= \int_{k'} \int_{k''} \frac{\mathring{\Gamma}^2}{(\xi^{-2} + k''^2)(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))^2} \\ &\times \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2) + \mathring{\lambda}(k' + k'')^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathring{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD6)}(\xi, k, \omega) &= \int_{k'} \int_{k''} \frac{\mathring{\Gamma}^2}{(\xi^{-2} + k''^2)(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2) + \mathring{\lambda}(k + k')^2)^2} \\ &\times \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2) + \mathring{\lambda}(k + k')^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \mathring{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD7)}(\xi, k, \omega) &= \int_{k'} \int_{k''} \frac{1}{(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2)(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))} \\ &\times \frac{1}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + k''^2) + \mathring{\lambda}(k' + k'')^2)} \\ &\times \left[\frac{\mathring{\Gamma}}{(\xi^{-2} + k'^2)} + \frac{\mathring{\Gamma}^2}{(-i\omega + \mathring{\Gamma}(\xi^{-2} + (k + k' + k'')^2) + \mathring{\lambda}(k' + k'')^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.2. Динамічний перенормовуючий множник для $\mathring{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}$

Перенормовуючи $\mathring{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}$, ми отримуємо двопетлевий перенормовуючий множник $Z_{\tilde{\phi}}$ у формі:

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{\phi}} &= 1 - 8\frac{\Delta}{\varepsilon} - 2\frac{\gamma^2}{\varepsilon} \frac{W}{1+W} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\left(\gamma^2 \frac{W}{1+W} \left(\frac{1}{1+W} - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) - \frac{n+2}{3} u \right) \gamma^2 \frac{W}{1+W} \right. \\ &\quad \left. + 4\Delta \gamma^2 \left(\frac{W}{1+W} \right)^2 + 20\Delta \gamma^2 \frac{W}{1+W} + 96\Delta^2 - 4\frac{n+2}{3} u \Delta \right] + \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \left[\frac{n+2}{3} u \left(1 - 3 \ln \frac{4}{3} \right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma^2 \frac{W}{1+W} \left(\frac{n}{2} - \frac{W}{1+W} - \frac{3(n+2)}{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{1+2W}{1+W} \ln \frac{(1+W)^2}{1+2W} \right) \left[\gamma^2 \frac{W}{1+W} + 3 \frac{n+2}{3} u \Delta \right. \\
& \quad \left. - 44 \Delta^2 - 12 \Delta \gamma^2 \frac{W}{1+W} \right] - \frac{n+2}{12} \frac{u}{\varepsilon} \left(\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \right) + \\
& \quad 4 \frac{\Delta}{\varepsilon} \gamma^2 \frac{W}{1+W} \left[\frac{W}{2} \ln \frac{W}{1+W} - \frac{3}{2} \ln(1+W) - \frac{1}{2} \frac{W}{1+W} \ln W \right]
\end{aligned} \tag{A.14}$$

А.3. Розклад теорії збурень динамічної РГ для магнетика з випадковою анізотропією

Розрахунки РГ на основі Лагранжіану, заданого р-ням (4.110), виконуються з використанням техніки діаграм Фейнмана. Конструкційні частини цих діаграм такі, як і для моделі з випадковими вузлами, і подані на Рис. А.1 і на Рис. А.2. Де пропагатори функцій відгуку $G(k, \omega)$ і $H(k, \omega)$ та пропагатори кореляційних функцій $C(k, \omega)$ і $D(k, \omega)$ знову виражаються р-нями (А.3) і (А.3). Але на Рис. А.2 позначення A означає $u_0/3! (\delta_{i,j}\delta_{l,m} + \delta_{i,l}\delta_{j,m} + \delta_{i,m}\delta_{j,l})/3$ або $y_0/3! \delta_{i,j}\delta_{j,l}\delta_{l,m}$, а позначення B — $v_0/3! \delta_{i,j}\delta_{l,m}$ або $w_0/3! \delta_{i,j}\delta_{j,l}\delta_{l,m}$.

Двопетлева динамічна функція отримана за допомогою діаграм Фейнмана буде мати вигляд, представлений р-ням (А.5), але однопетлевий внесок вже задається так:

$$\dot{\Omega}_{\tilde{\phi}\phi}^1(\xi, k, \omega) = -\frac{v_0+w_0}{3} \dot{\Gamma} \int_{k'} \frac{1}{(-i\omega + \dot{\Gamma}(\xi^{-2} + k'^2))(\xi^{-2} + k'^2)} + \gamma \dot{\Gamma} I_C(\xi, k, \omega), \tag{A.15}$$

тоді як двопетлевий внесок має форму:

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_{\tilde{\phi}\phi}^2(\xi, k, \omega) = & \dot{\Gamma} \left(\frac{n+2}{18} u_0^2 + \frac{y_0^2}{6} + \frac{u_0 y_0}{3} \right) \dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(A)}(\xi, k, \omega) - \\
& \dot{\Gamma} \left(\frac{n+2}{3} u_0 + y_0 \right) \gamma_0^2 \dot{C}_{\tilde{\phi}\phi}^{(T3)}(\xi, k, \omega) + \dot{\Gamma} \gamma_0^4 \dot{S}_{\tilde{\phi}\phi}(\xi, k, \omega) + \\
& \dot{\Gamma} \left(\frac{n+2}{9} v_0 u_0 + \frac{y_0 w_0}{3} + \frac{w_0 u_0}{3} + \frac{y_0 v_0}{3} \right) \dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD2)}(\xi, k, \omega) + \\
& \dot{\Gamma} \left(\frac{v_0^2}{9} + \frac{w_0^2}{9} + 2 \frac{w_0 v_0}{9} \right) \left(\dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD3)}(\xi, k, \omega) + \dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD4)}(\xi, k, \omega) \right) - \\
& \dot{\Gamma} \left(\frac{v_0 + w_0}{3} \right) \gamma_0^2 \left(\dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD5)}(\xi, k, \omega) + \dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD6)}(\xi, k, \omega) + 2 \dot{W}_{\tilde{\phi}\phi}^{(CD7)}(\xi, k, \omega) \right).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

У (A.15) і (A.16) вирази для інтегралів I_C , $\mathring{W}^{(A)}$, $\mathring{C}^{(T3)}$ і $\mathring{S}$ чистої моделі С подані у Додатку А.1 роботи [410], тоді як внески для $\mathring{W}^{(CDi)}$ представлені у нашому Додатку А.1.

Перенормовуючи $\mathring{\Gamma}_{\tilde{\phi}\phi}$ отримуємо двопетлевий перенормовуючий множник $Z_{\tilde{\phi}}$:

$$\begin{aligned}
 Z_{\tilde{\phi}} = & 1 + \frac{2v+w}{\varepsilon} \frac{1}{3} - 2 \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \frac{W}{1+W} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\left(\gamma^2 \frac{W}{1+W} \left(\frac{1}{1+W} - \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left(\frac{n+2}{3} v + y \right) \right) \gamma^2 \frac{W}{1+W} - \left(5 + \frac{W}{1+W} \right) \frac{v+w}{3} \gamma^2 \frac{W}{1+W} + \frac{2}{3} v^2 + \\
 & \frac{4}{3} vw + \frac{2}{3} w^2 + \frac{n+2}{9} uv + \frac{yv}{3} + \frac{uw}{3} + \frac{yw}{3} \Big] + \\
 & \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \left[\left(\frac{n+2}{3} u + y \right) \left(1 - 3 \ln \frac{4}{3} \right) + \gamma^2 \frac{W}{1+W} \left(\frac{n}{2} - \frac{W}{1+W} - \frac{3(n+2)}{2} \ln \frac{4}{3} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{1+2W}{1+W} \ln \frac{(1+W)^2}{1+2W} \right) \right] \gamma^2 \frac{W}{1+W} - \frac{11}{36} v^2 - \frac{3(n+2)}{36} uv - \frac{11}{18} vw - \frac{vy}{4} - \\
 & \left. \frac{uw}{4} - (v+w) \gamma^2 \frac{W}{1+W} \right\} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{n+2}{12} u^2 + \frac{uy}{6} + \frac{y^2}{4} \right) \left(\ln \frac{4}{3} - \frac{1}{12} \right) - \\
 & \frac{1}{\varepsilon} \frac{v+w}{3} \gamma^2 \frac{W}{1+W} \left[\frac{W}{2} \ln \frac{W}{1+W} - \frac{3}{2} \ln(1+W) - \frac{1}{2} \frac{W}{1+W} \ln W \right]. \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

ДОДАТОК В

ЕЛЕМЕНТИ ПІДХОДУ РГ ДО КРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ДВОВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ З БЕЗЛАДОМ

В.1. Знаходження розподілу внутрішньої енергії двовимірної моделі Ізінга з нескорельованим безладом

У цьому додатку ми пояснимо виведення р-ня (5.40) більш детально. Давай-те розглянемо величину

$$I(\tau) = \int_{|p|<1} \frac{d^2p}{p^2 + \tau^2} f[\ln(1/p)], \quad (\text{B.1})$$

де $f(\kappa) \in$ “достатньо доброю” (не занадто розбіжною) функцією у границі $\kappa \rightarrow \infty$, тобто, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} f(\kappa) \exp\{-\kappa\} \rightarrow 0$. Провідну сингулярність $I(\tau)$ у границі $\tau \rightarrow 0$ можна оцінити стандартним чином:

$$I(\tau) \sim \int_{|\tau|<|p|<1} \frac{d^2p}{p^2} f[\ln(1/p)] \sim \int_{|\tau|}^1 \frac{dp}{p} f[\ln(1/p)] \sim \int_0^{\ln(1/|\tau|)} d\kappa f(\kappa), \quad (\text{B.2})$$

де $\kappa = \ln(1/p)$. Тепер розглянемо дещо складніший об’єкт:

$$\tilde{I}(\tau) \equiv \int_{|p|<1} \frac{d^2p}{p^2 + \mu^2(p)} f[\ln(1/p)], \quad (\text{B.3})$$

де замість τ^2 у знаменнику ми маємо p -залежний масовий член $\mu^2(p)$,

$$\mu^2(p) = \frac{\tau^2}{1 + \frac{2}{\pi} g_0 \ln(1/p)}, \quad (\text{B.4})$$

як це є у випадку, коли розраховують сингулярність теплоємності слабко неупорядкованої двовимірної моделі Ізінга. Можна розглянути два граничні випадки:

- (a) $\frac{2}{\pi}g_0 \ln(1/|\tau|) \ll 1$ or $|\tau| \gg \exp(-\pi/2g_0) \equiv \tau_*$. У цьому випадку інтегруючи за p , можна опустити присутність нетривіального знаменника в (B.4) і маємо

$$\tilde{I}(\tau) \sim \int_{|\tau|}^1 \frac{dp}{p} f[\ln(1/p)] \sim \int_0^{\ln(1/|\tau|)} d\kappa f(\kappa), \quad (\text{B.5})$$

що співпадає з “чистим” випадком (B.2).

- (b) $\frac{2}{\pi}g_0 \ln(1/|\tau|) \gg 1$ or $|\tau| \ll \tau_*$. У цьому випадку ми маємо

$$\tilde{I}(\tau) \equiv \int_{|p|<1} \frac{d^2p}{p^2 + \mu^2(p)} f[\ln(1/p)] \sim \int_{p_*(\tau)}^1 \frac{dp}{p} f[\ln(1/p)], \quad (\text{B.6})$$

де $p_*(\tau)$ визначається з умови:

$$p_* \sim \frac{|\tau|}{\sqrt{g_0 \ln(1/p_*)}}, \quad (\text{B.7})$$

яка дає

$$p_*(\tau) \sim \frac{|\tau|}{\sqrt{g_0 \ln(1/|\tau|)}}. \quad (\text{B.8})$$

Підставляючи це у (B.6), ми дістаємо

$$\tilde{I}(\tau) \sim \int_0^{\kappa_*(\tau)} d\kappa f(\kappa), \quad (\text{B.9})$$

де в границі $|\tau| \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \kappa_*(\tau) &\sim \ln \left[\frac{\sqrt{g_0 \ln(1/|\tau|)}}{|\tau|} \right] = \ln(1/|\tau|) + \frac{1}{2} \ln \ln(1/|\tau|) + \frac{1}{2} \ln(g_0) \\ &\sim \ln(1/|\tau|) + O(\ln \ln(1/|\tau|)). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Тому, у цьому випадку ми маємо

$$\tilde{I}(\tau) \sim \int_0^{\ln(1/|\tau|)} d\kappa f(\kappa), \quad (\text{B.11})$$

що означає, що у цій границі $\tau \rightarrow 0$ в обох випадках (a) і (b) ми можемо обмежити інтегрування за p при $p_* \sim \tau$. Зазначимо, що тут $|\tau|^{-1} \sim \xi$, де ξ – кореляційна довжина, тому присутність безладу породжує логарифмічні поправки до кореляційної довжини.

У випадку, який ми розглядаємо, ситуація є дещо складніша через наявність другого члену в дужках в р-ня (5.34). Згідно р-нь (5.34)–(5.36) у границі $\tau \rightarrow 0$ (при $|\tau| \ll \tau_*$ де $g_0\kappa \gg 1$) маємо:

$$\mu(p) \sim \frac{\tau + \frac{1}{2}(\epsilon N) \ln(g_0 \ln(1/p))}{\sqrt{g_0 \ln(1/p)}}. \quad (\text{B.12})$$

Згідно з застосуванням техніки реплік, ми маємо спочатку прийняти, що для даного значення реплічного параметру N значення параметру ϵ є меншим, ніж інші величини, так що $(\epsilon N) \ln \ln(1/|\tau|) \ll 1$, тоді інтегрування за p обмежується $p_* \sim \tau$, як і в попередніх прикладах. З іншого боку, у подальшому інтегруванні в інверсному перетворенні Лапласа за аналітичним продовженням параметра N в комплексну площину, його релеванте значення є порядку $1/\epsilon$, що означає, що значення (комплексного) добутку (ϵN) є скінченним.

В.2. Вершинні функції для моделі Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом

Тут ми представляємо вирази для вершинних функцій двовимірної моделі Ізінга з далекосяжно скорельованим безладом, використовуючи діаграмне представлення (див. Рис. 5.1 і Рис. 5.2). Беручи до уваги комбінаторні фактори для діаграм, двоточкова функція має форму:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) = & \sigma p \left\{ 1 + A_2^1 v_0 - C_3^{0,0} u_0^2 - (C_3^{1,0} + C_3^{0,1}) u_0 v_0 - C_3^{1,1} v_0^2 \right\} \\ & - i\mu_0 \left\{ 1 - A_1^0 u_0 - A_1^1 v_0 \right. \\ & + (C_1^{0,0} + C_2^{0,0}) u_0^2 + (C_1^{1,0} + C_1^{0,1} + C_2^{1,0} \\ & \left. + C_2^{0,1}) u_0 v_0 + (C_1^{1,1} + C_2^{1,1}) v_0^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Короткосяжна частина повної чотириточкової вершинної функції записується:

$$\begin{aligned}
\Gamma_u^{(4)}(0) = & u - 2B_1^{0,0}u^2 - 2B_1^{0,1}uv + u^2v(\tilde{D}_{12}^{1,0,0} + 2\tilde{D}_{14}^{1,0,0} \\
& + 2D_1^{1,0,0} + 2D_2^{1,0,0} + 4D_3^{1,0,0} + 4D_4^{1,0,0} + D_5^{1,0,0} \\
& + 4\tilde{D}_6^{1,0,0} + \tilde{D}_{12}^{0,1,0} + 2\tilde{D}_{14}^{0,1,0} + 2D_1^{0,1,0} + 2D_2^{0,1,0} \\
& + 4D_3^{0,1,0} + 4D_4^{0,1,0} + D_5^{0,1,0} + 4\tilde{D}_8^{0,1,0} + \tilde{D}_{12}^{0,0,1} \\
& + 2\tilde{D}_{14}^{0,0,1} + 4\tilde{D}_6^{0,0,1}) + uv^2(\tilde{D}_{12}^{1,1,0} + 2\tilde{D}_{14}^{1,1,0} \\
& + 2D_1^{1,1,0} + 2D_2^{1,1,0} + 4D_3^{1,1,0} + 4D_4^{1,1,0} + D_5^{1,1,0} \\
& + 4\tilde{D}_6^{1,1,0} + \tilde{D}_{12}^{1,0,1} + 2\tilde{D}_{14}^{1,0,1} + 4\tilde{D}_6^{1,0,1} \\
& + \tilde{D}_{12}^{0,1,1} + 2\tilde{D}_{14}^{0,1,1} + 4\tilde{D}_6^{0,1,1}) + v^3(\tilde{D}_{12}^{1,1,1} \\
& + 2\tilde{D}_{14}^{1,1,1} + 4\tilde{D}_6^{1,1,1}) + u^3(\tilde{D}_{12}^{0,0,0} + 2\tilde{D}_{14}^{0,0,0} \\
& + 2D_1^{0,0,0} + 2D_2^{0,0,0} + 4D_3^{0,0,0} \\
& + 4D_4^{0,0,0} + D_5^{0,0,0} + 4\tilde{D}_6^{0,0,0}), \tag{B.14}
\end{aligned}$$

де $\tilde{D}_i^{a,b,c} = D_i^{a,b,c} + D_{i+1}^{a,b,c}$. Довгосяжна частина чотириточкової вершини задається як

$$\begin{aligned}
\Gamma_v^{(4)}(0) = & v - 2B_1^{1,1}v^2 - 2B_1^{1,0}uv + v^3(2D_1^{1,1,1} + 2D_2^{1,1,1} \\
& + 4D_3^{1,1,1} + 4D_4^{1,1,1} + D_5^{1,1,1}) + uv^2(2D_1^{1,0,1} \\
& + 2D_2^{1,0,1} + 4D_3^{1,0,1} + 4D_4^{1,0,1} + D_5^{1,0,1} + 2D_1^{0,1,1} \\
& + 2D_2^{0,1,1} + 4D_3^{0,1,1} + 4D_4^{0,1,1} + D_5^{0,1,1}) \\
& + u^2v(2D_1^{0,0,1} + 2D_2^{0,0,1} + 4D_3^{0,0,1} + 4D_4^{0,0,1} \\
& + D_5^{0,0,1}). \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Полюси і скінченні частини однопетлевих діаграм (A_i^a у (B.13) і $B_i^{a,b}$ у (B.14), (B.15) показані на Рис. 5.1) подані у Таблиці B.1 разом з комбінаторними факторами. Полюси двопетлевих діаграм ($C_i^{a,b}$ у (B.13) і $D_i^{a,b,c}$ у (B.14), (B.15) показані на Рис. 5.2) підсумовані у Таблицях B.2 і B.3. Деякі двопетлеві інтеграли, що з'являлись у розрахунках полюсів, зібрані у Додатку B.3. Кутові дужки у таблицях B.1, B.2 і B.3 позначають внески, що походять від маси у чисельнику чистого пропо-

гатора (5.78). Ці внески скорочуються у Z -факторах (5.95)–(5.98) принаймні до двопетлевого порядку, як і у випадку нескорельованого безладу [440].

Табл. В.1. Полюси і скінченні частини одно-петлевих діаграм в одиницях $\frac{K_d}{2}$. С.Ф. – це комбінаторний фактор. Кутові дужки позначають внески з маси у чисельнику чистого пропагатора (5.78).

Diag.	Value	C.F.
A_1^0	$\langle \frac{2}{\varepsilon} \rangle$	1
A_1^1	$\langle \frac{2}{\delta} \rangle$	1
A_2^0	0	1
A_2^1	$1 - \frac{\varepsilon}{\delta}$	1
$B_1^{0,0} = B_1^{1,0}$	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 - \langle 1 \rangle$	2
$B_1^{0,1} = B_1^{1,1}$	$\frac{2}{\delta} - 1 - \langle 1 \rangle$	2
$B_2^{a,b} + B_3^{a,b}$	$-\langle 1 \rangle$	2

В.3. Таблиця двопетлевих інтегралів

Тут наводимо список інтегралів з двома петлями, які є допоміжними при обчисленні двопетлевих діаграм. Для обчислення цих інтегралів ми використовували методи, основані на представленні гіпергеометричних функцій, які були розроблені у роботі [46] для моделі ϕ^4 зі скорельованим безладом. Введемо скорочені позначення $[1] := q_1^2 + \mu^2$, $[2] := q_2^2 + \mu^2$, $[3] := (q_1 + q_2)^2 + \mu^2$, $\hat{K} = \frac{K_d^2}{4}$, а також скорочені позначення для інтегрування $\int = \int_{\vec{q}_1} \int_{\vec{q}_2}$. Приведено тільки полюси, опускаючи члени порядку $O(1)$, якщо явно не зазначено іншого.

В.3.1. $a = b = c = 0$

$$\int \frac{1}{[1][2]} = \int \frac{1}{[1][3]} = \hat{K} \mu^{-2\varepsilon} \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \right], \quad (\text{B.16})$$

$$\int \frac{1}{[1][3]^2} = \int \frac{1}{[1][2]^2} = \hat{K} \mu^{-2\varepsilon-2} \left[\frac{2}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \right]. \quad (\text{B.17})$$

Табл. В.2. Полюси і скінченні частини двопетлевих діаграм в одиницях $\hat{K}$. С.Ф.
– це комбінаторний множник. Кутові дужки позначають внески з маси
у чисельнику чистого пропагатора (5.78).

Діаграми	Різні вершини $\{a, b, c\}$	Полюси	С.Ф.
$C_1^{a,b}$	$\{0, 0\}$	$\frac{4}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon)$	1
	$\{1, 0\}$	$\frac{4}{\delta\varepsilon} (1 - \delta)$	1
	$\{0, 1\}$	$\frac{8\varepsilon}{\delta(\varepsilon+\delta)} - \frac{8\varepsilon}{\delta(\varepsilon+\delta)}$	1
	$\{1, 1\}$	$\frac{2(3\delta-\varepsilon)}{\delta^2(2\delta-\varepsilon)} - \frac{2(\delta+\varepsilon)}{\delta^2}$	1
$C_2^{a,b}$	$\{0, 0\}$	$\frac{2}{\varepsilon^2}$	1
	$\{1, 0\}, \{0, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon(\delta+\varepsilon)}$	1
	$\{1, 1\}$	$\frac{2(3\delta-2\varepsilon)}{\delta^2(2\delta-\varepsilon)}$	1
$C_3^{a,b}$	$\{0, 0\}$	$\frac{1}{\varepsilon}$	1
	$\{1, 0\}, \{0, 1\}$	$\frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon+\delta}$	1
	$\{1, 1\}$	$\frac{(3\delta-2\varepsilon)}{\delta^2}$	1
$D_1^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon^2} (1 - \varepsilon) - \left\langle \frac{4}{\varepsilon} \right\rangle$	2
	$\{1, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon\delta} \left(1 - \frac{\varepsilon+\delta}{2}\right) - \left\langle \frac{2}{\varepsilon} \right\rangle - \left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle$	2
	$\{0, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}$	$\frac{8}{\delta(\varepsilon+\delta)} \left(1 - \frac{\varepsilon+\delta}{2}\right) - \left\langle \frac{4}{\delta} \right\rangle$	2
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$	$\frac{2(3\delta-\varepsilon)}{\delta^2(2\delta-\varepsilon)} - \frac{2(3\delta-\varepsilon)}{\delta(2\delta-\varepsilon)} - \left\langle \frac{2(3\delta-\varepsilon)}{\delta(2\delta-\varepsilon)} \right\rangle$	2
$D_2^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + \left\langle \frac{2}{\varepsilon} \right\rangle$	2
	$\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}$	$-\frac{4}{\delta(\varepsilon+\delta)} + \frac{2}{\delta} + \left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle$	2
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$	$-\frac{2}{\delta(2\delta-\varepsilon)} + \frac{2}{2\delta-\varepsilon} + \left\langle \frac{2}{2\delta-\varepsilon} \right\rangle$	2
$D_3^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} - \left\langle \frac{2}{\varepsilon} \right\rangle$	4
	$\{1, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon(\varepsilon+\delta)} - \frac{2}{\varepsilon} - \left\langle \frac{2}{\varepsilon} \right\rangle$	4
	$\{0, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}$	$\frac{4}{\delta(\varepsilon+\delta)} - \frac{2}{\delta} - \left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle$	4
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$	$\frac{2}{\delta^2} - \frac{2}{\delta} - \left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle$	4
$D_4^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}$	$-\left\langle \frac{2}{\varepsilon} \right\rangle$	4
	$\{0, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}$	$-\left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle + \frac{2(\delta-\varepsilon)}{\delta(\varepsilon+\delta)}$	4
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$	$-\left\langle \frac{2}{\delta} \right\rangle + \frac{(\delta-\varepsilon)}{\delta^2}$	4
$D_5^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{4}{\varepsilon} - \left\langle \frac{4}{\varepsilon} \right\rangle$	1
	$\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}$	$\frac{4}{\varepsilon\delta} - \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{\delta} - \left\langle \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{2}{\delta} \right) \right\rangle$	1
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$	$\frac{4}{\delta^2} - \frac{4}{\delta} - \left\langle \frac{4}{\delta} \right\rangle$	1
$D_6^{a,b,c} + D_7^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}$	$-\left\langle \frac{4}{\varepsilon} \right\rangle$	4
	$\{1, 0, 0\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 1\}$	$-\left\langle \frac{4}{\delta} \right\rangle$	4
$D_8^{a,b,c} + D_9^{a,b,c}$	$\{a, b, c\}$	0	2
$D_{10}^{a,b,c} + D_{11}^{a,b,c}$	$\{a, b, c\}$	0	2

Табл. В.3. Полюси і скінченні частини двопетлевих діаграм в одиницях $\hat{K}$ (продовження). С.Ф. – це комбінаторний множник. Кутові дужки позначають внески з маси у чисельнику чистого пропагатора (5.78).

Діаграми	Різні вершини $\{a, b, c\}$	Полюси	С.Ф.
$D_{12}^{a,b,c} + D_{13}^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}$	$\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon}$	1
	$\{1, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$\frac{4}{\delta\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon}$	1
	$\{0, 1, 0\}$	$\frac{8\delta\varepsilon}{\delta(\delta+\varepsilon)} - \frac{4}{\delta+\varepsilon}$	1
	$\{1, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}$	$\frac{2(3\delta-\varepsilon)}{\delta^2(2\delta-\varepsilon)} - \frac{3\delta-\varepsilon}{\delta^2}$	1
	$\{1, 0, 1\}$	$\frac{4}{\delta^2} - \frac{2(2\delta-\varepsilon)}{\delta^2}$	1
	$\{1, 1, 1\}$	$\frac{8}{(2\delta-\varepsilon)(3\delta-\varepsilon)} - \frac{4(3\delta-2\varepsilon)}{(2\delta-\varepsilon)(3\delta-\varepsilon)}$	1
$D_{14}^{a,b,c} + D_{15}^{a,b,c}$	$\{0, 0, 0\}$	$-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}$	2
	$\{1, 0, 0\}$	$\frac{4}{\delta(\delta+\varepsilon)} - \frac{4}{\varepsilon\delta} + \frac{2}{\varepsilon}$	2
	$\{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}$	$-\frac{4}{\delta(\delta+\varepsilon)} + \frac{4}{\delta+\varepsilon}$	2
	$\{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}$	$-\frac{2}{\delta^2} + \frac{3}{\delta} - \frac{\varepsilon}{\delta^2}$	2
	$\{0, 1, 1\}$	$-\frac{2}{\delta(2\delta-\varepsilon)} + \frac{2}{\delta}$	2
	$\{1, 1, 1\}$	$-\frac{4}{(2\delta-\varepsilon)(3\delta-\varepsilon)} - \frac{2}{2\delta-\varepsilon} + \frac{8}{3\delta-\varepsilon}$	2

В.3.2. $a \neq 0$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[1][2]} = \int \frac{q_1^{a-d}}{[1][3]} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta} \left[\frac{4}{\varepsilon\delta} \right], \quad (\text{B.18})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[2][3]} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta} \left[\frac{8}{\delta(\delta+\varepsilon)} \right], \quad (\text{B.19})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[1][2]^2} = \int \frac{q_1^{a-d}}{[1][3]^2} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-2} \left[\frac{2}{\delta} \right], \quad (\text{B.20})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[2]^2[3]} = \int \frac{q_1^{a-d}}{[2][3]^2} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-2} \left[\frac{2}{\delta} \right], \quad (\text{B.21})$$

$$\int \frac{q_1^2 q_1^{a-d}}{[2]^2[3]^2} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-2} \left[\frac{4}{\delta} \right], \quad (\text{B.22})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[1]^2[2]} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-2} \left[\frac{2}{\varepsilon} \right], \quad (\text{B.23})$$

$$\int \frac{q_1^2 q_1^{a-d}}{[2]^3 [3]} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-2} [-1 + O(\delta, \varepsilon)], \quad (\text{B.24})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d}}{[2]^3 [3]} = \hat{K} \mu^{-\varepsilon-\delta-4} \left[\frac{1}{\delta} \right]. \quad (\text{B.25})$$

B.3.3. $a \neq 0, b \neq 0$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1][2]} = \hat{K} \mu^{-2\delta} \left[\frac{4}{\delta^2} \right], \quad (\text{B.26})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1][3]} = \int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[2][3]} = \hat{K} \mu^{-2\delta} \left[\frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.27})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1][3]^2} = \int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[2][3]^2} = \hat{K} \mu^{-2\delta-2} \left[\frac{2}{2\delta - \varepsilon} \right], \quad (\text{B.28})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[2]^2 [3]} = \int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1][2]^2} = \hat{K} \mu^{-2\delta-2} \left[\frac{2}{\delta} \right], \quad (\text{B.29})$$

$$\int \frac{q_2^2 q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1]^2 [3]} = \hat{K} \mu^{-2\delta} \left[\frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} - \frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2} \right], \quad (\text{B.30})$$

$$\int \frac{[2] q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1]^2 [3]^2} = \hat{K} \mu^{-2\delta-2} \left[\frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta(2\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.31})$$

$$\int \frac{[2] q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1][3]^2} = \hat{K} \mu^{-2\delta} \left[\frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} - \frac{2}{\delta} \right], \quad (\text{B.32})$$

$$\int \frac{[2]q_1^{a-d}q_2^{a-d}}{[1]^2[3]} = \hat{K}\mu^{-2\delta} \left[\frac{2(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} - \frac{2(2\delta - \varepsilon)}{\delta^2} \right], \quad (\text{B.33})$$

$$\int \frac{q_2^4 q_1^{a-d} q_2^{a-d}}{[1]^2[3]^2} = \hat{K}\mu^{-2\delta} \left[\frac{8(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} - \frac{2(8\delta - 3\varepsilon)(3\delta - \varepsilon)}{\delta^2(2\delta - \varepsilon)} \right]. \quad (\text{B.34})$$

B.3.4. $b \neq 0, c \neq 0$

$$\int \frac{q_2^{2(a-d)}}{[1][2]} = \int \frac{q_2^{2(a-d)}}{[2][3]} = \hat{K}\mu^{-2\delta} \left[\frac{4}{\varepsilon(2\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.35})$$

$$\int \frac{q_2^{2(a-d)}}{[1][3]} = \hat{K}\mu^{-2\delta} \left[\frac{4}{\delta(2\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.36})$$

$$\int \frac{q_2^{2(a-d)}}{[1][2]^2} = \int \frac{q_2^{2(a-d)}}{[2]^2[3]} = \hat{K}\mu^{-2\delta-2} \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]. \quad (\text{B.37})$$

B.3.5. $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{2(a-d)}}{[1][2]} = \hat{K}\mu^{-3\delta+\varepsilon} \left[\frac{4}{\delta(2\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.38})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{2(a-d)}}{[1][3]} = \hat{K}\mu^{-3\delta+\varepsilon} \left[\frac{4(5\delta - 3\varepsilon)}{(3\delta - 2\varepsilon)(2\delta - \varepsilon)(3\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.39})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{2(a-d)}}{[2][3]} = \hat{K}\mu^{-3\delta+\varepsilon} \left[\frac{8(2\delta - \varepsilon)}{\delta(3\delta - 2\varepsilon)(3\delta - \varepsilon)} \right], \quad (\text{B.40})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{2(a-d)}}{[2]^2 [3]} = \hat{K} \mu^{-3\delta+\varepsilon-2} \left[\frac{2}{\delta} \right], \quad (\text{B.41})$$

$$\int \frac{q_1^{a-d} q_2^{a-d} |q_1+q_2|^{a-d}}{[1][2]} = \hat{K} \mu^{-3\delta+\varepsilon} \left[\frac{8}{(2\delta-\varepsilon)(3\delta-\varepsilon)} \right]. \quad (\text{B.42})$$

В.4. Логарифмічні поправки для короткосяжного безладу

Для обчислення субдомінантних логарифмічних поправок до скейлінгової поведінки у двох вимірах, викликаних короткосяжним безладом, ми повинні знайти асимптотичний потік до гаусівської нерухомої точки. Тут робимо це для дво-петлевого порядку. Рівняння потоку запишеться:

$$\frac{du}{dl} = \beta_u(u, v=0) = -4u^2 + 8u^3 + O(u^4), \quad (\text{B.43})$$

$$\frac{d \ln \tau}{dl} = -[1 + \gamma(u, 0)] = -1 + 2u - 2u^2 + O(u^3), \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{d \ln F}{dl} = \gamma(u, 0) = -2u + 2u^2 + O(u^3), \quad (\text{B.45})$$

де $l = \ln \xi$, і F є вершинною функцією з вставкою композитного оператора $\bar{\psi}(0)\psi(0)$, визначеного у роботах [290, 451]. Асимптотична поведінка розв'язку р-ня (B.43) у границі $l \rightarrow \infty$ є такою:

$$u(l) = \frac{1}{4l} + \frac{\ln l}{8l^2} + O\left(\frac{1}{l^2}\right). \quad (\text{B.46})$$

Підставляючи потік (B.46) у р-ня (B.44), отримаємо:

$$\tau^{-1} \sim \xi (\ln \xi)^{-1/2} \left[1 + \frac{\ln \ln \xi}{4 \ln \xi} \right]. \quad (\text{B.47})$$

Обертаючи цю рівність з логарифмічною точністю, ми приходимо до р-ня (5.105).

Сингулярна частина питомої теплоємності в асимптотичному режимі задається $C_{\text{sing}} = \int dl F^2(l)$ [451]. Розв'язуючи р-ня (B.45), отримаємо:

$$C_{\text{sing}}(l) = \ln l \left[1 - \frac{1}{2 \ln l} \right]. \quad (\text{B.48})$$

Використовуючи $l = \ln \xi$, де ξ подана р-ням (5.105), виводимо р-ня (5.106).

В.5. Кореляційна функція

Тепер обчислимо двоточкову функцію (5.124) для репліки $\alpha = 1$ до найнижчого порядку за безладом. Поправка першого порядку за безладом може бути розділена на частини SR та LR наступним чином:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle_S &= \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle_0 + \delta_{SR}^{(1)} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle \\ &+ \delta_{LR}^{(1)} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Провідний вклад у р-ня (B.49) дає двоточкову функцію для чистої системи:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle_0 &= \langle \sin \sqrt{\pi} \phi_1(r) \sin \sqrt{\pi} \phi_1(0) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{(2i)^2} \left\langle (e^{i\sqrt{\pi}\phi_1(r)} - e^{-i\sqrt{\pi}\phi_1(r)}) \right. \\ &\quad \times (e^{i\sqrt{\pi}\phi_1(0)} - e^{-i\sqrt{\pi}\phi_1(0)}) \left. \right\rangle_0 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle e^{i\sqrt{\pi}(\phi_1(r) - \phi_1(0))} \right\rangle_0 = \frac{1}{2} (\Lambda r)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

де ми використовували р-ня (5.120) і (5.121). Поправка першого порядку за короткосяжним безладом була розрахована в роботі [275] з використанням бозонізації двовимірної масивної моделі Тірінга [7]. Остання дозволяє виключити вклади в дії (5.123), які є діагональними у репліках і локальні в просторі за допомогою рівності:

$$\left[\frac{\Lambda}{\pi} \cos \sqrt{4\pi} \varphi(r) \right]^2 = -\frac{1}{2\pi} (\nabla \varphi)^2. \quad (\text{B.51})$$

У результаті кінетичний член масштабується фактором $1 + u_0/(2\pi)$. Члени, недіагональні за репліками, не дають вкладу в однопетлеве наближення. Використовуючи $\varphi = [1 + u_0/(2\pi)]^{-1/2} \varphi'$, отримуємо для короткосяжного безладу:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle_0 + \delta_{SR}^{(1)} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle \\ = \frac{1}{2} (\Lambda r)^{-1/[2(1+u_0/(2\pi))]} \approx \frac{1}{2} (\Lambda r)^{-1/2} \left[1 + \frac{u_0 \ln r \Lambda}{4\pi} \right]. \end{aligned}$$

(B.52)

Для довгосяжного безладу ми розраховуємо поправки явно:

$$\begin{aligned}
\delta_{LR}^{(1)} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle &= \frac{\Lambda^2}{2\pi^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 g(r_1 - r_2) \\
&\left\langle \sin \sqrt{\pi} \phi_1(r) \times \sin \sqrt{\pi} \phi_1(0) \cos \sqrt{4\pi} \varphi_1(r_1) \right. \\
&\left. \cos \sqrt{4\pi} \varphi_1(r_2) \right\rangle = -\frac{\Lambda^2}{2\pi^2} \frac{2^2}{2^2 (2i)^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 g(r_1 - r_2) \\
&\times \left\langle e^{i\sqrt{\pi} \phi_1(r)} e^{-i\sqrt{\pi} \phi_1(0)} e^{i\sqrt{4\pi} \phi_1(r_1)} e^{-i\sqrt{4\pi} \phi_1(r_2)} \right\rangle \\
&= \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} (\Lambda r)^{-1/2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 g(r_1 - r_2) (\Lambda |r_1 - r_2|)^{-2} \\
&\times \frac{|r - r_1| |r_2|}{|r - r_2| |r_1|}.
\end{aligned} \tag{B.53}$$

Беручи $g(r_1 - r_2)$ як обернене перетворення Фур'є (5.77) при $d = 2$,

$$g(r_1 - r_2) = u_0 \delta^{(2)}(r_1 - r_2) + \frac{v_0 \delta}{2\pi} |r_1 - r_2|^{-a}, \tag{B.54}$$

де $\delta^{(2)}$ є двовимірною δ -функцією, і покладаючи $u_0 = 0$, знаходимо:

$$\delta_{LR}^{(1)} \langle \mathcal{O}_1(r) \mathcal{O}_1(0) \rangle = \frac{(\Lambda r)^{-1/2} v_0 \delta}{8\pi^2} |r|^\delta J\left(\frac{1}{2}, \frac{\delta}{4}\right), \tag{B.55}$$

де введено інтеграл:

$$J(p, \tau) = \mathcal{FP} \int d^2 r_1 d^2 r_2 |r_1 - r_2|^{4(\tau-1)} \left[\frac{|e - r_1| |r_2|}{|e - r_2| |r_1|} \right]^{2p}. \tag{B.56}$$

Тут e – це довільний одиничний вектор, і $\mathcal{FP}$ означає “скінченну частину” у сенсі вимірної регуляризації. Метод розрахунку інтегралу типу (B.56) був розвинутий у роботах [443, 521, 522]. Він записується:

$$\frac{J(p, \tau)}{4\pi^2} = \frac{p^2}{8\tau^2} + O(\tau^{-1}). \tag{B.57}$$

Збираючи усі фактори, ми приходимо до р-ня (5.124).

В.6. Скейлінгова поведінка з рівнянь на потоки

Тут покажемо як асимптотичну скейлінгову поведінку для двовимірної моделі Ашкіна-Телера з далекосяжним безладом можна вивести з рівнянь на потоки:

$$\frac{dX(l)}{dl} = \beta_X[\lambda(l), u(l), v(l)], \quad X=\lambda, u, v, \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{d \ln \tau(l)}{dl} = -1 - \gamma[\lambda(l), u(l), v(l)], \quad \frac{d \ln F(l)}{dl} = \gamma[\lambda(l), u(l), v(l)]. \quad (\text{B.59})$$

Для λ і u :

$$\frac{d\lambda}{dl} = 2(N_i - 2)\lambda^2 - 4\lambda u, \quad \frac{du}{dl} = 4(N_i - 1)\lambda u - 4u^2. \quad (\text{B.60})$$

Для $N_i = 2$ ми вводимо $x = u/|\lambda|$, що веде до

$$\frac{d \ln x}{dl} = 4\lambda, \quad \frac{d \ln |\lambda|}{dl} = -4x|\lambda|. \quad (\text{B.61})$$

Для $\lambda_0 > 0$ ми знаходимо $x + \ln \lambda = \text{const}$. Таким чином, асимптотична поведінка для великих l запишеться:

$$u \approx \frac{1}{4l}, \quad \lambda = \frac{1}{4l \ln 4l}. \quad (\text{B.62})$$

Підставляючи р-ня (B.62) у р-ня (B.58) і враховуючи, що потік в основному визначається $u(l)$, отримаємо р-ня (5.151). Для $\lambda_0 < 0$ знаходимо $x - \ln |\lambda| = \text{const}$ і

$$\frac{d|\lambda|}{dl} = -4\lambda^2(x_0 + \ln \lambda/\lambda_0), \quad (\text{B.63})$$

яка має розв'язок на НТ $\lambda^* = \lambda_0 e^{-x_0}$, $x^* = u^* = 0$. Підставляючи цю НТ у р-ня (5.92) і (5.143), отримуємо скейлінгову поведінку (5.152).

У випадку $N_i > 2$ ми змінюємо змінні $x = \pm u/\lambda$ і $y = u^{N_i-2}/\lambda^{2(N_i-1)}$, де “+” і “−” відповідають $\delta > 0$ і $\delta < 0$, відповідно. Це дає:

$$\frac{d \ln x}{dl} = \pm 2N_i \frac{x^{(N_i-2)/N_i}}{y^{1/N_i}}, \quad \frac{d \ln y}{dl} = 4N_i \frac{x^{2(N_i-1)/N_i}}{y^{1/N_i}}. \quad (\text{B.64})$$

Розділивши перше рівняння на друге, отримуємо:

$$\frac{d \ln x}{dl} = \pm 2N_i \frac{x^{2(N_i-1)/N_i}}{y_0^{1/N_i}} e^{\pm 2(x_0-x)/N_i}, \quad \ln y/y_0 = \pm 2(x - x_0). \quad (\text{B.65})$$

Ми визначаємо $x_0 = \pm u_0/\lambda_0$, $y_0 = u_0^{N_i-2}/\lambda_0^{2(N_i-1)}$ і $a_0 = e^{\pm 2x_0}/y_0$. Для $\lambda_0 > 0$ знаходимо $x^{-2+2/N_i}e^{2x/N_i} \approx 4la_0^{1/N_i}$. Тому асимптотична поведінка для великого l задається:

$$u \approx \frac{1}{4l}, \quad \lambda = \frac{1}{2lN_i \ln 4l}. \quad (\text{B.66})$$

Підставляючи р-ня (B.66) у р-ня (B.58) і вважаючи, що потік в основному визначається $u(l)$, ми отримаємо рівняння (5.151). Для $\lambda_0 < 0$ знайдемо $x^{-1+2/N_i} \approx 2(N_i - 2)la_0^{1/N_i}$, яке приводить до наступної асимптотичної поведінки:

$$u \approx \frac{a_0^{-1/(N_i-2)}}{[2(N_i - 2)l]^{2(N_i-1)/(N_i-2)}}, \quad \lambda = -\frac{1}{2(N_i - 2)l}. \quad (\text{B.67})$$

Підставляючи р-ня (B.67) у р-ня (B.58) і вважаючи, що потік в основному визначається $\lambda(l)$, ми отримуємо таку саму скейлінгову поведінку як у р-ні (5.149).

ДОДАТОК С

ЕЛЕМЕНТИ НІРГ ДЛЯ ФРУСТРОВАНИХ МАГНЕТИКІВ

С.1. Пропагатор

Пропагатор моделі є матрицею, компоненти якої задаються перетворенням Фур'є другої похідної Γ_k за полями (див. р-ня (7.38)), розрахованої у конфігурації (7.41). Вона має вигляд:

$$\Gamma_{k,(a,i),(b,j)}^{(2)}[q_1, q_2] + R_k(q) = \begin{pmatrix} \Gamma_{k,(1,1),(1,1)} & \Gamma_{k,(1,1),(1,2)} & \Gamma_{k,(1,1),(2,1)} & \Gamma_{k,(1,1),(2,2)} & & & \\ \Gamma_{k,(1,2),(1,1)} & \Gamma_{k,(1,2),(1,2)} & \Gamma_{k,(1,2),(2,1)} & \Gamma_{k,(1,2),(2,2)} & & & \\ \Gamma_{k,(2,1),(1,1)} & \Gamma_{k,(2,1),(1,2)} & \Gamma_{k,(2,1),(2,1)} & \Gamma_{k,(2,1),(2,2)} & & 0 & \\ \Gamma_{k,(2,2),(1,1)} & \Gamma_{k,(2,2),(1,2)} & \Gamma_{k,(2,2),(2,1)} & \Gamma_{k,(2,2),(2,2)} & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \Gamma_{k,(1,i>2),(1,i>2)} & & & \\ & & & & \Gamma_{k,(2,i>2),(2,i>2)} & & \\ & & 0 & & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

або, взявши до уваги симетрію і те, що деякі компоненти зануляються:

$$\Gamma_{k,(a,i),(b,j)}^{(2)}[q_1, q_2] + R_k(q) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & C & & & \\ 0 & E & D & 0 & & & \\ 0 & D & F & 0 & & 0 & \\ C & 0 & 0 & B & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & H & \\ & & & & & & G \\ & & & & & & & H \\ & & 0 & & & & & & G \\ & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

(C.2)

де матричні елементи A, B, C, D, E, F, G і H задаються наступними виразами:

$$A = Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} + (\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(0,1)} + \phi_1^2 \left(4U_k^{(2,0)} + 4(\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(1,1)} + 2U_k^{(0,1)} + (\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 U_k^{(0,2)} \right), \quad (C.3)$$

$$B = Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} - (\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(0,1)} + \phi_2^2 \left(4U_k^{(2,0)} - 4(\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(1,1)} + 2U_k^{(0,1)} + (\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 U_k^{(0,2)} \right),$$

$$C = \phi_1 \phi_2 \left(4U_k^{(2,0)} - 2U_k^{(0,1)} - (\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 U_k^{(0,2)} \right), \quad (C.4)$$

$$D = \phi_1 \phi_2 \left(-\frac{\omega_k}{2} q^2 + 2U_k^{(0,1)} \right),$$

$$E = Z_k q^2 + R_k(q^2) + \frac{\omega_k}{2} \phi_1^2 q^2 + 2U_k^{(1,0)} + \rho U_k^{(0,1)}, \quad (C.5)$$

$$F = Z_k q^2 + R_k(q^2) + \frac{\omega_k}{2} \phi_2^2 q^2 + 2U_k^{(1,0)} + \rho U_k^{(0,1)},$$

$$G = Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} - (\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(0,1)}, \quad (C.6)$$

$$H = Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} + (\phi_1^2 - \phi_2^2)U_k^{(0,1)}.$$

Власні значення (C.2) тоді будуть такими:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A+B \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}{2}, \quad (C.7)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{E+F \pm \sqrt{(E-F)^2 + 4D^2}}{2},$$

$$\lambda_5 = \dots = \lambda_{2n-1} = H, \quad \lambda_6 = \dots = \lambda_{2n} = G. \quad (C.8)$$

Взявши до уваги, що у конфігурації (7.41) отримується: $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \rho$ і

$(\phi_1^2 - \phi_2^2)^2 = 2\tau$, власні значення запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1\pm} &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} + 2\rho U_k^{(2,0)} + \rho U_k^{(0,1)} + \rho\tau U_k^{(0,2)} + 8\tau U_k^{(1,1)} \\
 &\pm \left\{ \tau \left(4U_k^{(0,1)} + 4U_k^{(2,0)} + 4\tau U_k^{(0,2)} + 4\rho U_k^{(1,1)} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\rho^2 - 4\tau) \left(2U_k^{(2,0)} - U_k^{(0,1)} - 2\tau U_k^{(0,2)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{1\pm}^2,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{2\pm} &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} + \rho U_k^{(0,1)} + \frac{\omega_k}{4} \rho q^2 \\
 &\pm \frac{1}{2} \left\{ \omega_k^2 \tau q^4 + (\rho^2 - 4\tau) \left(-\frac{\omega_k}{2} q^2 + 2U_k^{(0,1)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{2\pm}^2,
 \end{aligned}$$

де потрібно враховувати факт, що “маси” m_{2+} та m_{2-} є імпульсно-залежними. Більше того, є $n-2$ мод з власним значенням λ_{3+} та $n-2$ мод з власним значенням λ_{3-} , де:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{3\pm} &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + 2U_k^{(1,0)} \pm 2\sqrt{\tau} U_k^{(0,1)} \\
 &= Z_k q^2 + R_k(q^2) + m_{3\pm}^2.
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

Для повноти подаємо спектр мас у мінімумі потенціалу, де $U_k^{(1,0)} = 0$ і $\tau = 0$. Тут отримуємо: $m_{1+}^2 = 4\rho U_k^{(2,0)}$, $m_{1-}^2 = 2\rho U_k^{(0,1)}$, $m_{2+}^2 = 2\rho U_k^{(0,1)} = m_{1-}^2$ і $m_{2-} = m_{3+} = m_{3-} = 0$. Як наслідок, отримується такий спектр: один масивний синглет з квадратом маси $m_s^2 = 4\rho U_k^{(2,0)}$, один масивний дуплет з квадратом маси $m_d = 2\rho U_k^{(0,1)}$ та $2n-3$ Голдстонівських мод.

С.2. Порогові функції

Тут ми наведемо означення порогових функцій l_{n_1, n_2}^d , m_{n_1, n_2}^d і n_{n_1, n_2}^d , що виникають у рівняннях на потоки для фрустрованих магнетиків.

Вирази для порогових функцій мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 l_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \quad y^{d/2-1} \tilde{\partial}_t \left\{ \frac{1}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}} \right\}, \\
 m_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \quad y^{d/2-1} \tilde{\partial}_t \left\{ \frac{y(\partial_y P_1)^2}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}} \right\}, \\
 n_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \quad y^{d/2-1} \tilde{\partial}_t \left\{ \frac{y \partial_y P_1}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}} \right\},
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

де:

$$\begin{cases} P_1 = P_1(y) = y(1 + r(y)); \\ P_2 = P_2(y, w) = y(1 + r(y) + w); \end{cases} \tag{C.12}$$

і $r(y)$ є безвимірним обрізанням: $r(y) = R_k(yk^2)/Z_k yk^2$.

Нагадаємо, що знак тільди у $\tilde{\partial}_t$ означає, що розглядається тільки залежність від t функції R_k . Як наслідок, нам не потрібно розглядати t -залежність констант, щоб провести це диференціювання. Таким чином:

$$\tilde{\partial}_t P_i = \frac{\partial R_k}{\partial t} \frac{\partial P_i}{\partial R_k} = -y(\eta r(y) + 2yr'(y)). \tag{C.13}$$

Тепер порогові функції можна виразити через явні інтеграли, якщо ми проведемо операцію $\tilde{\partial}_t$. Тут варто відзначити рівність: $\tilde{\partial}_t \partial_y P_i = \partial_y \tilde{\partial}_t P_i$, з якої слідує:

$$\tilde{\partial}_t \partial_y r(y) = -\eta \left(r(y) + yr'(y) \right) - 2y \left(2r'(y) + yr''(y) \right). \tag{C.14}$$

Тоді ми отримуємо:

$$\begin{aligned}
 l_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \quad y^{d/2} \frac{\eta r(y) + 2yr'(y)}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}} \times \\
 &\quad \left(\frac{n_1}{P_1 + w_1} + \frac{n_2}{P_2 + w_2} \right), \\
 n_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \quad y^{d/2} \frac{1}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}}
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ y \left(1 + r(y) + yr'(y) \right) \left(\eta r(y) + 2yr'(y) \right) \times \right. \\
& \left(\frac{n_1}{P_1 + w_1} + \frac{n_2}{P_2 + w_2} \right) - \eta \left(r(y) + yr'(y) \right) - \\
& \left. 2y \left(2r'(y) + yr''(y) \right) \right\}, \tag{C.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{n_1, n_2}^d(w_1, w_2, w) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty dy \, y^{d/2} \frac{1 + r(y) + yr'(y)}{(P_1 + w_1)^{n_1} (P_2 + w_2)^{n_2}} \times \\
& \left\{ y \left(1 + r(y) + yr'(y) \right) \left(\eta r(y) + 2yr'(y) \right) \times \right. \\
& \left(\frac{n_1}{P_1 + w_1} + \frac{n_2}{P_2 + w_2} \right) - 2\eta \left(r(y) + yr'(y) \right) - \\
& \left. 4y \left(2r'(y) + yr''(y) \right) \right\}. \tag{C.17}
\end{aligned}$$

ДОДАТОК D

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. *Dudka M., Holovatch Yu., Yavors'kii T.* Universality classes of the three-dimensional mn -vector model // *J. Phys. A*. 2004. Vol. 37, no. 45. P. 10727.
2. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Critical properties of random anisotropy magnets // *J. Magn. Magn. Mater.* 2005. Vol. 294, no. 3. P. 305 – 329.
3. Critical dynamics and effective exponents of magnets with extended impurities / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B*. 2005. Vol. 72, no. 6. P. 064417(1–11).
4. Critical dynamics of diluted relaxational models coupled to a conserved density / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, no. 3. P. 036107(1–4).
5. Critical slowing down in random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* 2005. Vol. 8, no. 4. P. 737–748.
6. Enhancement of the critical slowing down influenced by extended defects / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // *J. Mol. Liq.* 2006. Vol. 127, no. 1-3. P. 60–61.
7. Model C critical dynamics of disordered magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A*. 2006. Vol. 39, no. 25. P. 7943.
8. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *J. Phys. A*. 2007. Vol. 40, no. 29. P. 8247.

9. Дудка М. Критична динаміка неупорядкованих магнетиків: теоретико-польовий підхід // *Фіз. Збірник НТШ*. 2008. Т. 7. С. 210–223.
10. *Dudka M., Folk R., Moser G.* Dynamic scaling functions and amplitude ratios of stochastic models with energy conservation above T_c // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, no. 3. P. 031124(1–15).
11. Relevance of the fixed dimension perturbative approach to frustrated magnets in two and three dimensions / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82, no. 10. P. 104432(1–12).
12. Analysis of the 3d massive renormalization group perturbative expansions: a delicate case / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // *Condens. Matter Phys.* 2010. Vol. 13, no. 4. P. 43703(1–16).
13. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // *Condens. Matter Phys.* 2012. Vol. 15, no. 4. P. 43001(1–10).
14. *Dudka M.* Two-loop Feynman integrals for ϕ^4 theory with long-range correlated disorder // *J. Math. Phys.* 2015. Vol. 56, no. 1. P. 013302.
15. Monte Carlo study of anisotropic scaling generated by disorder / O. Vasilyev, B. Berche, M. Dudka, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, no. 4. P. 042118(1–9).
16. Functional renormalization group approach to noncollinear magnets / B. Delamotte, M. Dudka, D. Mouhanna, S. Yabunaka // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 6. P. 064405(1–14).
17. *Dudka M., Folk R., Holovatch Yu.* Phase diagram of Model C in the parametric space of order parameter and space dimensions // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 9. P. 094301(1–8).
18. Critical behavior of the two-dimensional Ising model with long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, V. Blavatska, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93, no. 22. P. 224422(1–13).

19. Self-averaging in the random two-dimensional Ising ferromagnet / Vic. Dotsenko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 95, no. 3. P. 032118(1–8).
20. *Dudka M., Fedorenko A. A.* Emergent universal critical behavior of the 2D N -color Ashkin-Teller model in the presence of correlated disorder // *Condens. Matter Phys.* 2017. Vol. 20, no. 1. P. 13603(1–11).
21. Статистична фізика складних систем у світі та у Львові / Ю. Головач, М. Дудка, В. Блавацька, В. Пальчиков, М. Красницька, О. Мриглюд // *Журн. Фіз. Досл.* 2018. Vol. 22, no. 2. P. 2801(1–21).
22. Possibility of a continuous phase transition in random-anisotropy magnets with a generic random-axis distribution / D. Shapoval, M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch // *Phys. Rev. B*. 2020. Feb. Vol. 101. P. 064402.
23. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 30, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Cortona, Italy, 3–6 April 2005. P. 19.
24. Critical dynamics of disordered model C / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // 69 Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Abstracts. Berlin, Germany, 4–9 März 2005. P. DY 34.117.
25. Influence of extended defects on the critical dynamics of a non-conserved order parameter / V. Blavats'ka, M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch // PLM MP 2005, Physics of liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. Kyiv, Ukraine, 27–31.05.2005. P. 76, 3–4.O.
26. On the critical dynamics of random anisotropy systems / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. P. 16.
27. Critical dynamics of generalized model C / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 28–30 August 2005. P. 31.

28. Critical dynamics of magnets with random anisotropy / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // AKF-Frühjahrstagung-2006 in conjunction with 21 General Conference of the EPS Condensed Matter Division, Abstracts. Dresden, Germany, 27–31 March 2006. P. 209, DY 44.4.
29. Model C critical dynamics of random anisotropy magnets / R. Folk, M. Dudka, Yu. Holovatch, G. Moser // MECO 31, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Primošten, Croatia, 23–26 April 2006. P. 73.
30. *Folk R., Dudka M., Moser G.* Dynamic scaling functions and amplitude ratio for model C dynamics // MECO 33, Middle European Cooperation in Statistical Physics, Abstracts. Puchberg/ Wels, Austria, 14–16 April 2008. P. P8.
31. *Dudka M., Folk R., Moser G.* Correlation functions and amplitude ratio for relaxational dynamics with energy conservation. model C // Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 23–25 June 2009. P. 128.
32. On the application of the perturbative renormalization group approach at fixed space dimension for study of critical behaviour / B. Delamotte, M. Dudka, Yu. Holovatch, D. Mouhanna // PLMMP-2010, Physics of Liquid Matter: Modern Problems, Abstracts. Kyiv, Ukraine, 21–23 May 2010. P. 144.
33. Marginal dimensions for multicritical phase transitions / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 4-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications, Abstracts. Lviv, Ukraine, 3–6 July 2012. P. 102.
34. Influence of different types of structural disorder on the critical properties of magnets / M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch, G. Moser // 6-th International Conference “Physics of Disordered Systems”, Lviv, Ukraine, 14–16 October 2013. P. 41.
35. Critical behavior of two-dimensional models with ising spins in the presence of long-range correlated disorder / M. Dudka, A. A. Fedorenko, Yu. Holovatch, V. Blavatska // 43-th International Conference “Middle European Coopera-

- tion in Statistical Physics” (MECO43), Kraków, Poland, 1–4 May 2018. P. 50.
36. Self-averaging in the two-dimensional random-bond ising model / Vic. Dotsenko, Yu. Holovatch, M. Dudka, M. Weigel // 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications, Lviv, Ukraine, 3–6 June 2019. P. 61.

ДОДАТОК Е

АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на таких наукових зустрічах: МЕСО30: 30-th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Кортон, Італія, 3-6 квітня 2005 р.); 69 Jahrestagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (Берлін, Німеччина, 4-9 березня 2005 р.); PLM MP 2005, Physics of liquid Matter: Modern Problems (Київ, 27-31 травня 2005 р.); Statistical Physics 2005: Modern Problems and New Applications (Львів, 28-30 серпня 2005 р.); AKF-Frühjahrstagung-2006 in conjunction with 21 General Conference of the EPS Condensed Matter Division (Дрезден, Німеччина, 27-31 березня 2006 р.); МЕСО 31, Middle European Cooperation in Statistical Physics (Прімоштен, Хорватія, 23-26 квітня 2006 р.); МЕСО 33, Middle European Cooperation in Statistical Physics (Пухберг/Вельс, Австрія, 14-16 квітня 2008 р.); Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Львів, 23-25 червня, 2009 р.); PLMMP-2010, Physics of Liquid Matter: Modern Problems (Київ, 21-23 травня, 2010 р.); 4-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications (Львів, 3-6 липня 2012 р.); 6-th International Conference on the Exact Renormalization Group “ERG 2012” (Оссуа, Франція, 3-7 вересня 2012 р.); 6-th International Conference “Physics of Disordered Systems” (Львів, 14-16 жовтня 2013 р.); МЕСО41: 41-st International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Відень, Австрія, 14–17 лютого 2016 р.); МЕСО43: 43-rd International Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics (Краків, Польща, 1-4 травня 2018 р.); International 11th Workshop on Current Problems in Physics (Львів, 2-5 липня 2018 р.); IX Scientific Conference “Selected issues of astronomy and astrophysics”

(Lviv, Ukraine, 1-5 жовтня 2018 р.); 5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends & Applications (Lviv, Ukraine, 3-6 червня 2019 р.); Різдв'яні дискусії на кафедрі теоретичної фізики Львівського національного університету ім. І. Франка (9–10 січня 2014, 11–12 січня 2017, 11–12 січня 2018, 10–11 січня 2019 рр.); а також на семінарах Відділу теорії неоднорідної конденсованої речовини Інституту Макса Планка для інтелекгентних систем (Штутгарт, Німеччина, 29 листопада 2012 р.), Групи статистичної фізики Університету Естремадури (Бадахос, Іспанія, 17 червня 2015 та 27 січня 2016 рр.), Відділу конденсованої речовини Інституту теоретичної фізики Варшавського університету (Варшава, Польща, 25 листопада 2016 та 23 листопада 2018 рр.), Групи статистичної фізики Університету Лотарингії (Нансі, Франція, 14 вересня 2017 р.), Відділу конденсованої речовини Інституту низьких температур та досліджень структури (Вроцлав, Польща, 28 січня 2020 р.) та Інституту фізики конденсованих систем НАН України.