

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНИХ СИСТЕМ

*На правах рукопису*

КРАСНИЦЬКА Мар'яна Богданівна

УДК 537.9

**ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ НА СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ**

01.04.02 — теоретична фізика

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Наукові керівники:  
габілітований доктор, професор  
Берш Бертран

член-кореспондент НАН України,  
доктор фіз.-мат. наук, професор  
Головач Юрій Васильович

Львів — 2016

Хочу висловити щирю вдячність своїм двом материнським науковим установам, Інституту фізики конденсованих систем НАН України та Лабораторії фізики матеріалів Інституту Жана Лямура Університету Лотарингії (Нансі, Франція).

Ця робота була б не можлива без постійної допомоги та підтримки моїх наукових керівників. Тому особлива подяка Юрію Васильовичу Головачеві та Бертрану Бершу. Вони не тільки допомагали мені у процесі навчання, що дозволило завершити дисертаційну роботу, але надали можливість навчання в міжнародній аспірантурі, як такій. Їх захоплення невіршеними завданнями й проблемами та науковий позитив додавали і мені бажання та сил у процесі навчання.

Я вдячна за підтримку міжнародному коледжу аспірантів “Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems” Leipzig-Lorraine-Lviv-Coventry (Ляйпціг-Лотарингія-Львів-Ковентрі) ( $\mathbb{L}^4$ ) та проектам FP7 EU IRSES, а також людям, які доклали зусиль для існування подібної співпраці, серед яких і мої наукові керівники.

Хочу подякувати науковим групам, гостем яких я була, та людям, що допомагали освоїтися в новому середовищі.

Дякую своїм друзям та співробітникам, за цікаві дискусії (наукові і не тільки), та за те, що наповнювали навчальні будні позитивними емоціями.

Щира подяка моїй родині, що підтримувала на відстані. Вони додавали мені віри та сил справлятися із труднощами і вселяли відчуття впевненості.

Я щиро вдячна усім, хто допомагав, сприяв та цікавився моєю роботою.

Дякую ВАМ!

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	<b>6</b>
<b>1 Огляд літератури</b>	<b>12</b>
1.1 Складні мережі: моделі та спостережувані . . . . .	12
1.2 Спінові моделі на складних мережах . . . . .	17
1.3 Аналіз нулів статистичної суми в комплексній площині . . . . .	23
1.4 Висновки . . . . .	29
<b>2 Фазові переходи в моделі Поттса на безмасштабній мережі</b>	<b>31</b>
2.1 Гамільтоніан моделі Поттса на безмасштабній мережі . . . . .	32
2.2 Наближення неоднорідного середнього поля . . . . .	33
2.3 Вільна енергія моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі . . . . .	35
2.3.1 Нецілі $\lambda$ . . . . .	38
2.3.2 Цілі $\lambda$ . . . . .	39
2.4 Фазова діаграма . . . . .	40
2.4.1 $1 \leq q < 2$ . . . . .	41
2.4.2 $q = 2$ . . . . .	42
2.4.3 $q > 2, 3 < \lambda < \lambda_c(q)$ . . . . .	43
2.4.4 Довільне $q, 2 < \lambda \leq 3$ . . . . .	44
2.5 Режим фазового переходу другого роду . . . . .	46
2.5.1 Термодинамічні функції, критичні показники, логарифмічні поправки до скейлінгу . . . . .	46
2.5.2 Скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд . . . . .	49

	4
2.5.3 Про перколяцію на безмасштабних мережах . . . . .	57
2.5.4 Стрибок теплоємності моделі Ізінга . . . . .	59
2.6 Режим фазового переходу першого роду . . . . .	63
2.7 Висновки . . . . .	64
<b>3 Нулі статистичної суми моделі Ізінга на повному графі</b>	<b>65</b>
3.1 Статистична сума . . . . .	65
3.2 Нулі Фішера . . . . .	67
3.3 Нулі Лі-Янга . . . . .	74
3.4 Рух нулів Фішера у дійсному магнітному полі . . . . .	79
3.5 Висновки . . . . .	82
<b>4 Нулі статистичної суми моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі</b>	<b>84</b>
4.1 Статистична сума . . . . .	84
4.1.1 Наближення відпаленої мережі . . . . .	86
4.1.2 Точне інтегральне представлення . . . . .	86
4.1.3 Представлення розкладеної статистичної суми . . . . .	87
4.2 Нулі Фішера . . . . .	90
4.3 Нулі Лі-Янга . . . . .	94
4.3.1 Порушення теореми Лі-Янга . . . . .	94
4.3.2 Асимптотична поведінка нулів Лі-Янга . . . . .	102
4.4 Висновки . . . . .	105
<b>Висновки</b>	<b>108</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>111</b>
<b>А Про вибір верхньої межі обрізання</b>	<b>131</b>
<b>Б Нулі моделі Ізінга на повному графі для дво- та три-спінової системи</b>	<b>134</b>

- В Чисельно знайдені значення показника  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі (I спосіб) **136**
- Г Чисельно знайдені значення показника  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі (II спосіб) **141**

## ВСТУП

Задачі, що стосуються науки про складні мережі (complex network science) стали предметом зацікавлення фізиків відносно недавно – в останні десятиліття ХХ століття. Теорія графів, а формально складна мережа, як множини вершин (вузлів) та ребер (зв'язків), що їх пов'язують є не чим іншим, як випадковим графом, бере свій початок із знаменитої роботи Леонарда Ойлера про сім мостів в Кьонігсберзі [1] і є одним із розділів дискретної математики [2]. Значною мірою, сучасне зацікавлення складними мережами спричинене появою потужних комп'ютерів та носіїв інформації, що здатні оперувати великим об'ємом інформації та зберігати значні масиви даних. Як виявилось, багато природних та створених людиною систем описуються у термінах мережевих структур, а не ґраткових. Серед них мережі метаболізму, харчування, екологічні мережі, інтернет, www, транспортні, соціальні, мережі цитування та багато інших (див., наприклад, [3–7]). Більше того, ці мережі за своїми властивостями суттєво відрізняються від класичного випадкового графа Ердоша-Рені [8]. Як правило, це скорельовані структури, які, незважаючи на велику кількість вершин, мають невеликий характерний розмір (ефект тісного світу [9, 10]), вони надзвичайно стійкі до випадкового усунення складових, однак чутливі до спрямованих атак [11, 12]. Їм притаманні ефекти самоорганізації і дуже часто їх статистика описується степеневими законами (так звані безмасштабні мережі [13, 14]). А саме такі властивості притаманні багатьом складним системам і застосування методів статистичної фізики до їх опису дозволяє зрозуміти причини такої поведінки.

Серед різних задач науки про складні мережі у самостійний напрямок ви-

діляється дослідження фазових переходів на складних мережах. Ці дослідження важливі для опису та моделювання процесів, що відбуваються на мережах. Відомо, що для ґраткових структур однією із глобальних характеристик, що визначає рід фазового переходу, є евклідова вимірність простору. Для мереж поняття евклідової вимірності не є добре означене. Уже з цього одного факту слід очікувати відмінностей у фазових переходах на ґратках та на мережах. Зокрема, це буде продемонстровано у дисертаційній роботі.

**Актуальність теми.** Задачі, пов'язані із дослідженням критичної поведінки та фазових переходів на складних мережах, почали розглядати порівняно недавно. Можливі застосування моделей фазових переходів на складних мережах можна знайти у різних ділянках фізики. Так у задачах соціофізики розглядаються різні стани соціуму – системи взаємодіючих агентів-індивідуумів, розташованих на вузлах соціальної мережі [15]. Впорядкованому стану у такій системі відповідає суспільний консенсус, а виникнення такого впорядкованого стану описується, як фазовий перехід (opinion formation). Іншим прикладом є об'єкти нанофізики, структура яких часто краще описується не геометрією ґратки, а мережі чи фракталу [16]. Більш того, в процесі досліджень виявилось, що фазові переходи на мережах суттєво відрізняються від переходів на ґратках, оскільки поняття евклідової вимірності для мереж неозначено, і часто супроводжуються низкою незвичних ефектів. Це, в свою чергу, викликає чисто академічний інтерес до їх розгляду. Нещодавно реалізований експеримент [17] дозволив виміряти фізичні характеристики квантової системи, які можна поставити у відповідність комплексним фізичним параметрам класичної багаточастинкової системи. А отже, дослідження комплексних нулів статистичної суми спінових моделей на безмасштабних мережах є новим напрямком і потребує пошуку шляхів їх експериментального спостереження для квантових систем.

**Мета і задачі дослідження.** Основними *об'єктами дослідження* у дисертаційній роботі вибрано спінові системи (моделі Ізінга та Поттса) на графах (повному графі, конфігураційній моделі графа та нескорельованій відпаленій

безмасштабній мережі). *Предметом дослідження* є вивчення критичної поведінки цих моделей. *Мета дисертації* полягає у одержанні термодинамічних функцій, побудові фазової діаграми, пошуку критичних показників та інших універсальних величин у випадку фазового переходу другого роду. При дослідженні критичної поведінки ми використовували два основні *методи*: наближення неоднорідного середнього поля та формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми у випадку комплексного поля та температури.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Досліджуючи критичну поведінку  $q$ -станової моделі Поттса на безмасштабній мережі (зі степеневу згасною функцією розподілу із показником  $\lambda$ ) в наближенні середнього поля нам вдалося отримати: фазову діаграму, критичні показники, показники для логарифмічних поправок до скейлінгу. Так, для  $q = 1$ -станової моделі Поттса (задача про перколяцію) показано, що при  $\lambda = 4$  перколяція на безмасштабній мережі характеризується появою логарифмічних поправок до скейлінгу. Ці поправки послаблюють сингулярності спостережуваних величин в околі точки протікання [18]. В режимі фазового переходу другого роду для моделі Поттса на безмасштабній мережі вперше отримано вирази для скейлінгових функцій та універсальні співвідношення для критичних амплітуд [19]. Досліджуючи стрибок теплоємності моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при критичній температурі ми встановили, що стрибок залишається  $\lambda$ -залежним навіть при  $\lambda > 5$  та прямує до середньопольового значення в границі  $\lambda \rightarrow \infty$  [20].

Вперше застосовано формалізм Лі-Янга-Фішера для дослідження фазових переходів на безмасштабних мережах. Проаналізовано нулі статистичної суми в площині комплексної температури та магнітного поля для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі. Таким чином, вперше здійснено опис критичної поведінки багаточастинкової системи на безмасштабній мережі в термінах конформно інваріантних кутів, що характеризують розташування нулів статистичної суми. Показано зв'язок цих кутів, а також показника, що характеризує наближення нулів Лі-Янга до дійсної осі, із критичними показниками, що опи-

сують сингулярності термодинамічних функцій в околі точки переходу. Подібно до критичних показників, кути розташування нулів виявляються  $\lambda$ -залежними, що свідчить про розширення гіпотези універсальності для критичної поведінки на складній безмасштабній мережі. Виявлено порушення теореми Лі-Янга про коло одиничного радіусу для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі у діапазоні  $3 < \lambda < 5$  [21, 22].

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані у дисертаційній роботі результати можуть служити підставою для подальшого моделювання процесів впорядкування у взаємодіючих системах на безмасштабних мережах. Оскільки більшість суспільних мереж є безмасштабними, то наші результати застосовні для моделей виникнення консенсусу у задачах соціофізики. Подібним чином отримані результати застосовні для опису фазового переходу в феромагнітний стан у наноструктурах із топологією мережі. Зовсім недавно було запропоновано та експериментально реалізовано дослідження, що дозволило пов'язати координати уявних нулів статистичної суми з часами квантової когерентності пробного спіна у середовищі інших спінів [17]. Це відкриває можливість для експериментального спостереження нулів статистичної суми в комплексній площині. Таким чином, одержані нами результати будуть корисні для теоретиків та експериментаторів, що розроблятимуть методи дослідження квантової когерентності спінових систем на мережах.

**Особистий внесок здобувача.** У роботах, виконаних із співавторами, автору належить:

- вирази для вільної енергії в наближенні неоднорідного середнього поля для  $q$ -станової моделі Поттса на безмасштабній нескорельованій мережі та їх аналіз [18, 23];
- вираз для стрибка теплоємності моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $\lambda > 5$ . Порівняння поведінки теплоємності ґраткової та мережевої структур [20];

- точні інтегральні представлення статистичної суми для моделі Ізінга на повному графі та на безмасштабній мережі у випадку комплексного магнітного поля, чисельні розв'язки системи нелінійних рівнянь для нулів Лі-Янга та Фішера [21, 22];
- значення логарифмічних поправок до показників скейлінгу для координат нулів Фішера та Лі-Янга при  $\lambda = 5$  [21, 22];
- виявлення порушення теореми Лі-Янга про коло одиничного радіуса для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі у діапазоні  $3 < \lambda < 5$ . Чисельний аналіз та аналітичне пояснення [21, 22].

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем НАН України та групі статистичної фізики Університету Лотарингії (Нансі, Франція) згідно з планами робіт за темами: 0112U007763 “Про розвиток теоретичних методів опису флюїдів, ґраткових та складних систем поблизу точок фазового переходу” НАНУ; за підтримки аспірантської програми “Doctoral College for the Statistical Physics of Complex Systems” (Ляйпціг-Лотарингія-Львів-Ковентрі) ( $\mathbb{L}^4$ ), та проектів співпраці FP7 EU IRSES 269139 “Dynamics and Cooperative Phenomena in Complex Physical and Biological Media”, 295302 “Statistical Physics in Diverse Realizations”, 612707 “Dynamics of and in Complex Systems”, 612669 “Structure and Evolution of Complex Systems with Applications in Physics and Life Sciences”, та Посольства Франції в Україні (стипендія на короткострокове стажування у французькому університеті).

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи були представлені на таких конференціях: “Різдвяні дискусії-2013” (Львів, 3-4 січня 2013); XIII Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 5-7 червня 2013); VI Міжнародна конференція “Фізика неупорядкованих систем” (Львів, 14-16 жовтня 2013); конференція молодих вчених (Київ, 24-27 грудня 2013); конференція МЕСО-

39 (Ковентрі, Англія, 8-10 квітня 2014); конференція CompPhys (Ляйпціг, Німеччина, 27-29 листопада 2014); “Різдвяні дискусії-2015” (Львів, 12-13 січня 2015); XV Всеукраїнська школа-семинар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини (Львів, 4-5 червня 2015), “Йорданські читання - 2016” (Львів, 20.01.16), конференція МЕСО-41 (Відень, Австрія, 15-17 лютого 2016). А також на таких семінарах: семінар групи статистичної фізики університету Анрі Пуанкаре (Нансі, Франція, 20.01.13, 25.11.14); семінар-нарада наглядового комітету акції IRSES DCP-PhysBio, (Львів, 28-30 травня 2013); семінар групи статистичної фізики університету Ковентрі (Ковентрі, Англія, 12.07.13); семінар групи чисельної квантової теорії поля університету Ляйпцігу (Ляйпціг, Німеччина, 7.11.13); стендова доповідь на річному семінарі Ecole doctorale (Нансі, Франція, 12.06.14); семінар кафедри прикладної математики та інформатики в університеті Марії Склодовської-Кюрі (Люблін, Польща, 22.10.15); семінари Лабораторії статистичної фізики складних систем ІФКС НАНУ.

**Публікації.** За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей в журналах [18–22], одна стаття в матеріалах доповідей конференції [23] та 9 тез конференцій [24–32].

**Структура та об’єм дисертації.** Дисертація складається із чотирьох розділів основного тексту (огляду літератури та трьох оригінальних розділів), висновків та списку використаних джерел. У розділі 1 здійснено огляд літератури, подано означення основних понять; у наступному розділі 2 проаналізовано критичну поведінку моделі Поттса у наближенні середнього поля на безмасштабній мережі; 3 та 4 розділи містять результати аналізу нулів статистичної суми моделі Ізінга на повному графі та на відпаленій безмасштабній мережі відповідно; у висновках коротко підведені підсумки роботи та окреслено подальші перспективи. Робота викладена на 110 сторінках (разом з літературою та додатками – 145 сторінок), бібліографічний список містить 208 найменувань публікацій у вітчизняних та закордонних виданнях.

# РОЗДІЛ 1

## ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі подається огляд основних робіт, присвячених дослідженню критичної поведінки спінових моделей на складних мережах. Спочатку (підрозділ 1.1) ми розглянемо моделі складних мереж та введемо основні величини, які описують їх кількісні характеристики. Особливу увагу буде приділено так званим безмасштабним мережам, що характеризуються степеневим загасанням функції розподілу ступенів вузлів. В наступному підрозділі 1.2 приведено результати аналізу критичної поведінки багаточастинкових взаємодіючих систем на складних мережах. Тут, крім моделі Ізінга та моделі Поттса, розглянемо поведінку також й інших моделей і зокрема явище перколяції. Порівнюючи критичну поведінку цих моделей на ґратках та на складних мережах, ми зосередимося на тих змінах у критичній поведінці, до яких приводять ефекти тісного світу та безмасштабності, притаманні багатьом складним мережам. Оскільки значна частина дисертації (розділи 3-4) виконана із застосуванням методу аналізу нулів статистичної суми у комплексній площині, в підрозділі 1.3 ми здійснимо короткий огляд робіт, присвячених цьому методу.

### 1.1. Складні мережі: моделі та спостережувані

Останнім часом у фізичній літературі все частіше зустрічається поняття “складна мережа” (complex network), що є сукупність вузлів, поєднаних зв’язками - лінками. А отже, під цим поняттям мається на увазі граф, чи, точніше, випадковий граф. Теорія графів є одним із розділів дискретної математики

[33, 34] та бере свій початок іще з 18 століття [1]. Однак сучасна наука про мережі почала розвиватись на початку 90-тих років минулого століття, із появою потужних комп'ютерів та носіїв інформації для обробки та зберігання великих масивів даних [35–38]. В той час було проаналізовано властивості та структуру багатьох штучних та природних мереж і показано, що їх неможливо описати в термінах ґраткових структур чи регулярних графів, тим самим заклавши фундамент розвитку науки про мережі (див. наприклад, огляди [4–7]).

Випадковий граф - це структура, що складається із множини вершин та випадково розподілених ребер, що їх поєднують. Однією із характеристик графу із певною кількістю вершин ( $N$ ) та відомою кількістю зв'язків між відповідними вершинами є матриця суміжності (adjacency matrix). Матричний елемент цієї матриці рівний  $a_{ij} = 1$ , якщо вузли  $i$  та  $j$  пов'язані між собою, та рівний  $a_{ij} = 0$ , якщо лінку між ними не існує. У випадку неспрямованих мереж  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a_{ii} = 0$  й для ступеня вузла (тобто, для кількості зв'язків, що виходять з цього вузла)  $k_i$  отримуємо  $k_i = \sum_j a_{ij}$ .

Є багато інших величин, введених для характеристики мереж та графів [5]:

- середня довжина найкоротшого шляху між двома вузлами (mean shortest pass length):

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} l(ij), \quad (1.1)$$

де підсумовування ведеться за зв'язною компонентою мережі, а  $l(ij)$  - довжина найкоротшого шляху, між вузлами;

- коефіцієнт кластерності (clustering coefficient) - це локальна характеристика вузла  $i$  для конкретного вузла  $i$  із ступенем  $k_i$  відповідає відношенню кількість зв'язків між найближчими сусідами  $E_i$  до максимально можливої кількості зв'язків між ними:

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (1.2)$$

Через матрицю суміжності коефіцієнт кластерності можна виразити таким чином:

$$C_i = \frac{\sum_i (\hat{A}^3)_{ii}}{\sum_{i \neq j} (\hat{A}^2)_{ij}}. \quad (1.3)$$

Коефіцієнт кластерності є специфічною мірою скорельованості вузлів мережі, він показує скільки найближчих сусідів конкретного вузла є пов'язаними між собою;

- частка клік (clique) - кількість взаємопов'язаних груп вузлів у мережі;
- посередництво (betweenness centrality) - це також локальна характеристика вузла, що показує, скільки найкоротших шляхів проходить через нього. Посередництво означається, як відношення кількості таких найкоротших шляхів між всіма парами вузлів в мережі, що проходять через вузол  $m$ , до загальної кількості найкоротших шляхів між цими вузлами:

$$\sigma(m) = \sum_{i \neq j} \frac{l(i, m, j)}{l(i, j)}. \quad (1.4)$$

Іншою важливою характеристикою мереж є розподіл за ступенем вузлів  $P(k)$ , що має сенс імовірності того, що випадково вибраний вузол  $i$  має ступінь  $k_i = k$  (кількість найближчих сусідів). Для складних мереж найбільш типовими прикладами розподілів можна вважати:

розподіл Пуассона

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (1.5)$$

експоненційно-згасний

$$P(k) \sim e^{-k/\langle k \rangle}, \quad k \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

чи степеневозгасний розподіл

$$P(k) \sim 1/k^\gamma, \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Якщо перші два розподіли володіють типовим масштабом, то третій принципово відрізняється від них, вже хоча б тому, що для безмежної мережі існують

всі моменти  $\langle k^\alpha \rangle$  розподілів (1.5)-(1.6), в той час, як для розподілу (1.7) збіжними є лише кілька моментів із  $\alpha < \gamma - 1$ . Мережі зі степеневозгасною функцією розподілу за ступенем вузлів відносять до окремого класу, що має назву – безмасштабні (scale-free) мережі [13]. Назва впливає власне із означення функції розподілу, що не має типового масштабу.

Мережі із степеневим розподілом описують дуже багато природніх та створених людиною систем. Так наприклад, було встановлено безмасштабну структуру інтернету [14, 35, 36, 39–41], де вузлами вважаються веб-сторінки, а існуванню зв'язку відповідає гіперлінки. Це відкриття привернуло особливу увагу до вивчення задач на мережах. Ще раніше поняття з теорії мереж використовували для вивчення процесів у соціумі, де вузлам ставили у відповідність членів чи цілі групи суспільства [42, 43], а лінкам відповідали випадки знайомства-незнайомства, ділові контакти, зв'язки ворог-друг між членами соціуму. Яскравим прикладом соціальної мережі є мережа наукової співпраці [42, 44], для якої вузли системи - це науковці, а лінк відповідає, наприклад, наявності спільних публікацій. Вивчення розподілу лінків у таких мережах показує, що він підпорядковується степеневому закону, але із експоненційним обрізанням [42, 45], зумовленим обмеженістю часового проміжку простереження. Іншим цікавим прикладом для дослідження є мережі транспорту, де вузли - це станції (зупинки), а лінкам відповідають лінії маршрутів. Таким чином було встановлено безмасштабну структуру як мереж аеропортів [46–51], залізниць [52], так і громадського транспорту [53–58].

Для опису складних мереж було запропоновано ряд моделей, найвідомішими з них є:

- **Класичний випадковий граф Ердоша-Рені**

Застосовуючи пробалістичні методи, А. Рені та П. Ердош в середині минулого століття детально описали властивості цього графу [8]. Можливі два способи побудови класичного випадкового графу. Для моделі першого типу в ансамблі із довільного числа вершин фіксується імовірність,

з якою між двома вершинами може існувати ребро. У другому випадку ребра розподілені незалежно й випадково між усіма вершинами. Обидва способи приводять до ідентичних результатів у випадку безмасштабного графу.

- **Модель тісного світу**

Мережею тісного світу називається така мережа, характерний розмір якої  $l$  спадає повільніше, ніж за степеневим законом із зростанням кількості вузлів  $N$ . Для так званої мережі тісного світу Ваттса-Строгаца  $l \sim \ln N$  [9]. Виявляється, що соціальні мережі є мережами тісного світу (звідси і виник термін "small world network"). Мережа Ваттса-Строгаца утворюється із регулярної структури (одновимірного ланцюжка), шляхом процедури перез'єднання (rewiring) [9]: із імовірністю  $p$  кожен існуючий зв'язок розривається та перез'єднується із іншими вузлами. Таким чином мережа тісного світу дозволяє здійснити інтерполяцію між регулярною ґраткою та випадковим графом за допомогою зміни одного параметра  $p$ . На мережах такого типу одночасно реалізується локальне розташування сусідів, як у регулярній ґратці, разом з глобальними властивостями випадкових графів, такими як мала середня відстань між довільною парою вузлів [10].

- **Модель Барабаші-Альберта (переважне приєднання)**

Одним із можливих способів побудови безмасштабної мережі є сценарій Барабаші-Альберта [13, 14]. Цій моделі відповідає функція розподілу за ступенем вузлів –  $P(k) \sim 1/k^3$ . Побудова мережі базується на двох принципах: зростання та переважного приєднання [13, 14]. На початку система складається із невеликої кількості вузлів  $n_0$ , до яких на кожному наступному кроці додається новий вузол з  $n < n_0$  зв'язками, які поєднуються із існуючими  $n_0$  вузлами. А імовірність існування лінку між новим вузлом та вузлом  $i$  системи пропорційна до ступеня вузла  $k_i$ .

В подальшому ми зупинимось на роботах, в яких досліджувалася поведін-

ка традиційних моделей статистичної фізики (як правило - спінових моделей) на складних мережах. В такому розгляді доводиться мати справу як із безладом, пов'язаним із структурою мережі, так і з безладом, пов'язаним із розподілом індивідуальних станів частинок. В свою чергу, це призводить до введення різних моделей, подібно до того, як розглядаємо заморожений (quenched) та відпалений (annealed) структурний безлад в теорії структурно-невпорядкованих систем [59]. Для нескорельованих мереж такими моделями є конфігураційна модель мережі (configurational model) [60] та відпалена мережа (annealed network) [61, 62]. Конфігураційна модель є максимально випадковим графом із заданим розподілом ступенів вузлів. В теорії графів такий граф називається випадковим графом з мітками (labeled random graph) із заданою послідовністю вузлів [60, 63, 64]. Відповідно у відпаленій мережі конфігурації зв'язків флюктуюють на однакових часових масштабах із спіновими змінними. Це призводить до необхідності усереднення статистичної суми, а не її логарифму, як у попередньому випадку [59]. Така властивість відпалених мереж дозволяє точно описати поведінку багатьох спінових моделей на мережах [61, 62], зокрема для нескорельованої відпаленої мережі статистичну суму можна записати у формі характерній для моделі на повному графі із сепарабельними взаємодіями [61].

## 1.2. Спінові моделі на складних мережах

Впродовж кількох останніх десятиліть, критичні явища на складних мережах становили одну із найбільш досліджуваних ділянок статистичної фізики та фізики конденсованих систем [64]. В цьому контексті розглядалася різноманітна тематика, як от виникнення критичної (безмасштабної) структури мережі, явище перколяції, поріг протікання епідемії на мережі, фазові переходи та кооперативна поведінка багаточастинкових систем, локалізованих на вузлах мережі. У цьому підрозділі ми здійснимо короткий огляд робіт, присвячених останньому з перелічених вище питань, а саме, ми зосередимося на дослідженнях, метою яких був аналіз критичної поведінки спінових моделей на

складних мережах. Такі дослідження мають цілу низку цікавих застосувань, від задач фізики наносистем до соціофізики. Так, часто виявляється, що архітектура багаточастинкових наноутворень адекватніше описується топологією мережі, ніж топологією ґратки [16]. З іншого боку, численні моделі суспільної поведінки базуються на розгляді взаємодіючих агентів у соціальних мережах [3]. Відповідно, питання про можливість впорядкованого стану у спіновій системі на заданій складній мережі може бути переформульоване у питання про можливість досягнення спільної думки у системі взаємодіючих агентів на мережі такої ж структури (opinion formation models) [65, 66]. Згадані вище мотивації для вивчення фазових переходів на складних мережах слід доповнити іще однією: поведінка базових багаточастинкових моделей статистичної фізики зазнає кардинальних змін, якщо ці моделі розглядаються не на  $d$ -вимірних ґратках, а на мережах.

Для моделі Поттса критична поведінка визначається не тільки вимірністю ґратки, але й значенням потсівської змінної  $q$  [67]. Схоже, як для моделі Ізінга [68, 69], модель Поттса на дереві Кейлі характеризується далекосяжним впорядкуванням [70], але у ній відбувається новий тип фазового переходу, так званий фазовий перехід неперервного порядку (phase transition of continuous order) [71]. В залежності від значення температурно-залежної константи взаємодії, порядок нийнижчої сингулярної похідної зменшується від першого до безмежного.

Уже той факт, що поняття евклідової вимірності не є означеним для графа, а саме вимірність простору є одним із факторів, який (поряд із симетрією параметра порядку та типом взаємодії) визначає критичну поведінку, дозволяє сподіватися на відмінності у критичній поведінці ґраткових систем та систем на графах. У випадку мереж ситуація ускладнюється присутністю безладу у розподілі за ступенями вузлів. На відміну від структурного безладу, що може бути присутнім у ґраткових системах [75, 76], для складних мереж маємо справу із сильним безладом (strong disorder), що часто характеризується розбіжною

дисперсією. Присутність такого безладу, поряд із ефектом тісного світу (див. попередній підрозділ), є головними факторами, що обумовлюють особливості поведінки системи на складній мережі. Так, у моделі Ізінга та у XY моделі на мережі тісного світу, побудованій на основі одновимірної ґратки, відбувається фазовий перехід другого роду типу середнього поля [77, 78]. Подібний фазовий перехід типу середнього поля спостерігався на мережах тісного світу побудованих на  $d = 2$  і  $d = 3$  ґратках [79, 80], а в антиферромагнітній моделі Ізінга на мережі тісного світу, побудованій на двовимірній ґратці, відбувається фазовий перехід парамагнетик-спінове скло [81].

Критична поведінка на складних мережах суттєвим чином залежить від наявності кореляції між ступенями вузлів, що утворюють мережу. Більшість результатів, отриманих у дисертаційній роботі, стосується нескорельованих мереж. Короткий огляд критичної поведінки спінових моделей на таких мережах ми приведемо у цьому підрозділі. Перед тим зауважимо, що кореляції між ступенями вузлів є важливою рисою складних мереж. Так відомо [82], що у соціальних мережах вузли з великою кількістю лінків (габи) мають тенденцію приєднуватися один до одного. Така властивість мереж називається асортативністю. Протилежними прикладами є багато біологічних мереж, неспрямована мережа *www* [83, 84], у яких спостерігається антикореляція габів. Такі мережі називають дисортативними. Врахування ефектів дисортативності та асортативності на критичну поведінку багаточастинкових систем залишається актуальною проблемою теорії фазових переходів [85, 86].

Для випадкових нескорельованих мереж (для яких імовірність існування лінку між двома вузлами пропорційна до добутку їх ступенів) критична поведінка визначається збіжністю моментів функції розподілу вузлів  $P(k)$ . У мережах із збіжним моментом  $\langle k^4 \rangle$  спостерігається поведінка типу класичного середнього поля. Якщо момент  $\langle k^4 \rangle$  розбіжний, а момент  $\langle k^2 \rangle$  – збіжний, універсальні характеристики критичної поведінки залежать від асимптотики функції  $P(k)$  при великих  $k$ . Відповідно, спінові системи на мережах із збіжним  $\langle k \rangle$  і

розбіжним  $\langle k^2 \rangle$  знаходяться у впорядкованому стані при будь-якому скінченному значенні температури. Для феромагнітної моделі Ізінга на нескорельованій випадковій мережі ці результати були отримані з використанням точного рекурентного методу [63] та методу реплік [87]. Для безмасштабної мережі із функцією розподілу ступенів вузлів (1.7) показник загасання функції розподілу вузлів  $\lambda$  визначає колективну поведінку та відіграє роль глобального параметра, подібно до того, як вимірність простору  $d$  є глобальним параметром для ґраткових систем. Для моделей на мережах також існує верхнє та нижнє критичне значення параметра  $\lambda$ , що аналогічне існуванню верхньої та нижньої критичної вимірності для ґраток. При верхньому критичному значенні  $\lambda = \lambda_{uc}$  та  $d = d_{uc}$  скейлінгова поведінка характеризується появою логарифмічних поправок [63, 87–89], в той час як вище цього значення критичні показники співпадають із класичними з теорії середнього поля. Однак, така аналогія має певні обмеження: ґраткова система при  $d \leq d_{lc}$  залишається неупорядкованою при будь-якій скінченній температурі  $T$ , тоді як системи на мережах завжди зберігають впорядкування в діапазоні  $\lambda \leq \lambda_{lc}$ . Будучи глобальним параметром,  $\lambda$  визначає універсальні термодинамічні властивості в околі критичної точки й у випадку відсутності евклідової вимірності простору, контролює фазовий перехід. Для моделі Ізінга,  $\lambda_{lc} = 3$ ,  $\lambda_{uc} = 5$  тоді як  $d_{lc} = 1$  і  $d_{uc} = 4$ . Про особливості логарифмічних поправок моделі Поттса, див. Розділ 2.

Відомо, що для ґраткових систем критична поведінка XY-моделі суттєво відрізняється від моделі Ізінга. Так у двовимірному випадку ( $d=2$ ) у цій моделі відбувається своєрідний фазовий перехід Костерліца-Таулеса-Березицького між двома фазами [90]: низькотемпературною, що характеризується степеневим законом загасання спін-спінової парної кореляційної функції (хоча спонтанна намагніченість при цьому рівна нулю) та неупорядкованою високотемпературною фазою із експоненційним загасанням кореляційної функції. Однак, якщо XY-модель розглядати на безмасштабній мережі, критична поведінка виявляється подібною до моделі Ізінга: одержані при моделюванні критичні показники XY-

моделі співпадають із відповідними значеннями для моделі Ізінга [91].

Деякі точні результати для три-станової моделі Поттса із конкуруючими взаємодіями на гратці Бете подані в [72], а фазова діаграма моделі із наступними найближчими сусідами на гратці Бете поаналізована у роботі [73]. Також досліджувалась поведінка моделі Поттса на Apollonian мережі (неспрямованому графі, побудованому використовуючи процедури рекурсивного поділу) [92]. Однак, про критичну поведінку моделі Поттса на безмасштабній мережі відомо небагато. У перших статтях з цієї тематики [93, 94] (остання стаття була більш детально проаналізована у [95]) використовуючи методи середнього поля та рекурентних співвідношень у деревоподібному наближенні було отримано результати про наявність фазового переходу першого роду. Однак фазові діаграми, отримані в роботах [93, 94] дещо відрізнялись. Декілька результатів Монте-Карло симуляцій також показали, що критична поведінка моделі Поттса на мережі відрізняється від двовимірної граткової системи [95, 96]. Для моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі спостерігають фазовий перехід першого чи другого роду. Однак, крім залежності від змінної  $q$ , рід переходу визначається значенням показника загасання функції розподілу  $\lambda$  [93, 94].

В границі  $q \rightarrow 1$  модель Поттса описує явище перколяції. Аналогом перколяційного кластера, що виникає в граткових системах [97] є гігантська зв'язна компонента (GCC) [98]. Це така зв'язна частка вузлів мережі, яка залишається скінченною в границі, коли загальна кількість вузлів  $N \rightarrow \infty$ . Для нескорельованої мережі поріг протікання  $c_{\text{perc}}$  (концентрація вузлів, при якій в системі з'являється GCC) визначається відношенням другого та першого моментів функції розподілу ступенів вузлів:  $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle = 2$  при  $c_{\text{perc}}$ . Це твердження відоме, як критерій Молоя-Ріда [11, 99, 100]. Зваживши на приведені вище міркування про збіжність моментів функції розподілу безмасштабних мереж (1.7), можна зробити висновок, що явище перколяції на безмасштабних мережах суттєво залежить від значення параметра  $\lambda$ . Зокрема, при  $\lambda \leq 3$  GCC існує для будь-якої відмінної від нуля концентрації вузлів. Дослідження явища перколяції на складних

мережах дає змогу виявити вразливість і встановити найкращі способи захисту систем від атак (усунення вузлів чи зв'язків). Було встановлено, що реальні безмасштабні мережі є стійкими до випадкових атак, однак найдзвичайно чутливі до спрямованих, а саме досліджувались мережі інтернету [101, 102], метаболізму [37], харчування [103], протеїнів [104]. Природньо, що при вилученні вузлів із високим ступенем система значно втрачала продуктивність, наприклад для інтернету вилучення 1% вузлів із найбільшим ступенем удвічі зменшує продуктивність мережі [101]. Однак, не у всіх системах найважливішу роль при стійкості до атак відіграють габи (вузли із великим ступенем). Так, для мережі аеропортів було встановлено, що для зв'язності мережі сполучення вузли з великим посередництвом важливіші [47, 48]. Природнім застосуванням задачі про стійкість мереж до атак є дослідження явища поширення комп'ютерних вірусів в інтернеті чи епідемій у соціальних мережах [13, 82, 105–107].

Феноменологічна теорія Ландау також застосовується для аналізу фазових переходів на нескорельованих мережах [88, 108]. Однак, в цьому випадку вважається, що енергія Ландау залежить не лише від параметра порядку, але й від функції розподілу ступенів вузлів. Для моделі із скалярним параметром порядку теорія Ландау була сформульована у [108]. Модель зв'язаних скалярних полів, а також локальна анізотропія були враховані у [88].

Багато реальних структур утворені кількома взаємодіючими мережами, це так звані багатошарові мережі (multilayer networks) [86]. До них відносяться мережі мереж (network of networks), коли поєднані між собою різні множини вузлів, кожна з яких утворює мережу. Іншим прикладом багатошарових мереж є так звані мультиплексні (multiplex) мережі. У них одна і та сама множина вузлів пов'язана зв'язками різного типу. Такими мережами є, наприклад, соціальні мережі, коли зв'язкам різного типу відповідають різні типи соціальних взаємодій. Дослідженню критичних явищ на багатошарових мережах присвячені, зокрема, роботи [109–111] (у цих роботах вивчалось явище перколяції) та [112–114].

Будь-яка реальна чи штучна система, яку б кількість частин чи об'єктів вона не містила, є все-таки скінченною. Це у свою чергу призводить до того, що критична поведінка багаточастинкової системи на мережі залежить від розміру  $N$  цієї мережі (finite size effect) [115, 116]. Так, для безмасштабних мереж другий момент розподілу ступеня вузлів  $\langle k^2 \rangle$  розбігається при  $2 < \lambda \leq 3$  лише в границі  $N \rightarrow \infty$ . Однак, якщо мережа має скінченний розмір, ця розбіжність не проявляється. Ефект скінченного розміру для мереж приводить до того, що й максимальна кількість лінків у системі також буде скінченною, а тому система не може містити вузли із безмежним ступенем  $k$ . Максимальний ступінь вузла для скінченної системи  $k_{max}$  прийнято називати природнім ступенем обрізання (natural cut-off). Цей ступінь, в свою чергу залежить від розміру мережі  $N$ , див. Додаток А. Так, якщо для випадку перколяції в діапазоні  $2 < \lambda \leq 3$  прийняти  $k_{max} \sim \sqrt{N}$ , то можна отримати наступні залежності порогу протікання  $p_c$  від розміру системи [64]:  $p_c(N, 2 < \lambda < 3) \sim N^{\frac{\lambda-3}{2}}$ ,  $p_c(N, \lambda = 3) \sim 1/\ln N$ . Бачимо, що поріг протікання рівний нулю лише для мережі безмежного розміру. Методи, запропоновані у теорії скінченно розмірного скейлінгу (FSS, finite size scaling) [115, 116], використовують також і для аналізу критичної поведінки на мережах [117].

### 1.3. Аналіз нулів статистичної суми в комплексній площині

Робота Лі та Янга [118, 119] і пізніша праця Фішера [120], заклали фундамент нового способу дослідження критичної поведінки, аналізуючи нулі статистичної суми у площині комплексного поля чи температури. Цей аналіз є універсальним методом дослідження фазових переходів у різних системах [121, 122], зокрема і ґраткових спінових моделей.

Нулі Лі-Янга - це нулі статистичної суми у площині комплексного магнітного поля ( $H$ ) при дійсній температурі ( $T$ ), в той час нулями Фішера (зазвичай при відсутності зовнішнього магнітного поля) прийнято називати нулі у площині

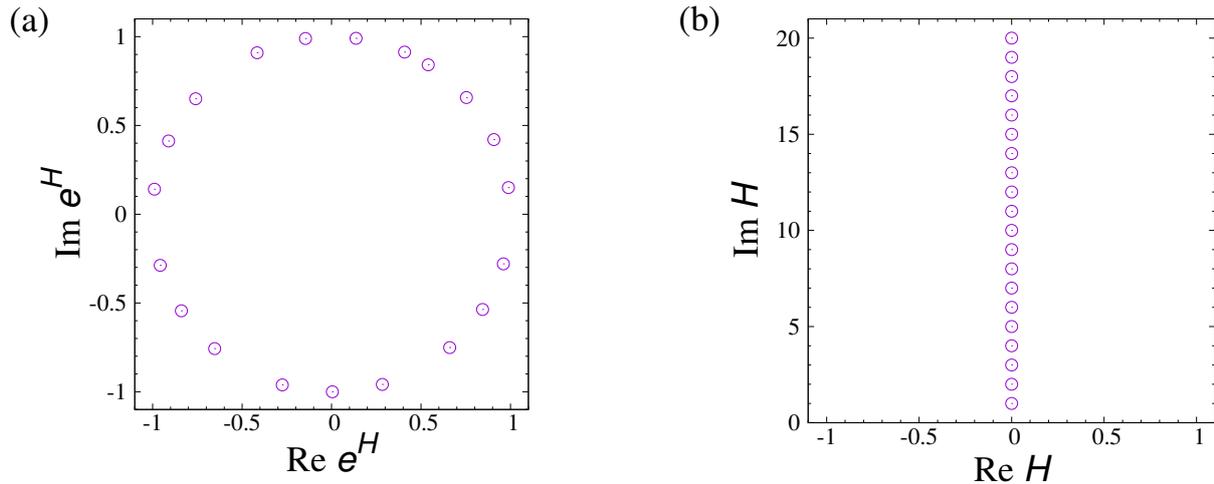


Рис. 1.1. Схематичне представлення нулів Лі-Янга моделі Ізінга на двовимірній ґратці у (a) комплексній  $e^H$  площині та (b) комплексній  $H$  площині. Згідно теореми Лі-Янга, всі нулі лежать на колі одиничного радіуса чи є суто уявними у площині  $e^H$  та площині  $H$  відповідно.

ні комплексної температури. У термодинамічній границі, коли розмір системи  $N$  прямує до безмежності, нулі Лі-Янга та Фішера формують криві у комплексній площині ( $H$  чи  $T$ , відповідно). На підставі аналізу положення та скейлінгу нулів, був запропонований альтернативний опис критичних явищ, який здійснюється в термінах кутів, що формують лінії нулів статистичної суми [123–127]. В цьому представленні нулі можна пов'язати із набором критичних показників та відношенням критичних амплітуд. Відповідно, існують співвідношення скейлінгу для координат нулів, які також можна пов'язати із характеристиками фазових переходів [124].

Як приклад, на Рис. 1.1 схематично зображено координати нулів статистичної суми двовимірної моделі Ізінга  $Z(T_c, H)$  при критичній температурі  $T = T_c$  в площині комплексного магнітного поля. Запишемо  $H = \text{Re } H + i \text{Im } H$  та означимо нулі Лі-Янга  $H = H_j$  статистичної суми  $Z(T_c, H)$ , як результати чисельного розв'язку системи рівнянь  $\text{Re } Z(T_c, H) = 0$  та  $\text{Im } Z(T_c, H) = 0$  у площині комплексного магнітного поля (дивитися детальніше Додаток Б). Згідно теореми Лі-Янга про коло одиничного радіуса [118, 119], усі нулі Лі-Янга для двовимірної моделі Ізінга у представленні  $e^H$  лежать на колі одиничного радіуса, або ж нулі  $H = H_j$  містять тільки уявну частину координати,  $H = i \text{Im } H$

див. Рис. 1.1 (а) та (b) відповідно. У термодинамічній границі перший нуль із чисто уявною частиною (поріг Лі-Янга) наближається до дійсної осі [128, 129].

Теорема Лі-Янга справедлива для моделі Ізінга на регулярній гратці [118, 119], вона виконується також і для ширшого класу ізінгоподібних моделей на регулярних гратках. Окрім класичних граткових дискретних спінових моделей [130], теорема також виконується для неперервних спінових систем [131]; для квантових систем, таких як ідеальний бозе-газ псевдоспіну  $-1/2$  у зовнішньому полі та довільному зовнішньому потенціалі [132]; для нерівноважних систем [133], які описують колективні явища і біофізичні процеси [134, 135]. Також є велика кількість моделей, для яких теорема Лі-Янга не виконується: моделі Ізінга із антиферромагнітними взаємодіями [136, 137]; із виродженими спінами [138, 139]; моделі із мультиспіновими взаємодіями при високих температурах [140, 141]; і Ван-дер-Ваальсові гази [142, 143]. Теорема також порушується для моделей, у яких спостерігається фазовий перехід першого роду: багатостанова модель Поттса та модель Блюма-Капеля [144, 145]. Теорема порушується для певних квантових багаточастинкових систем: ізінгівські ферромагнетики із довільним значенням спіна [146] та квантовий ізотропний ізінгівський ланцюжок в поперечному полі [147]. Для більш детального огляду, див. [122].

Щоб детальніше пояснити зв'язок між лініями розташування нулів Фішера та універсальними характеристиками термодинамічних функцій в околі критичної температури, перепишемо  $T = \text{Re} T + i \text{Im} T = T_c(1 + t)$ , де  $T_c$  – (дійсна) критична температура за відсутності магнітного поля та введемо нову змінну для означення температури у полярних координатах  $t = \rho e^{i\Phi}$  ( $t = (T - T_c)/T_c$ ) [148]. Нулями Фішера назвемо точки перетину кривих  $\text{Re} Z(t, 0) = 0$  та  $\text{Im} Z(t, 0) = 0$ . В околі критичної точки нулі Фішера мають тенденцію лягати на пряму, що утворює кут  $\Phi(t \rightarrow 0) = \varphi$  [123, 127, 148] із додатнім напрямком дійсної осі. Розглянемо детальніше розташування нулів Фішера у площині комплексних температур, див. Рис. 1.2. На рисунку нулі Фішера зображено світлими кругами, чорний круг відповідає положенню критичної то-

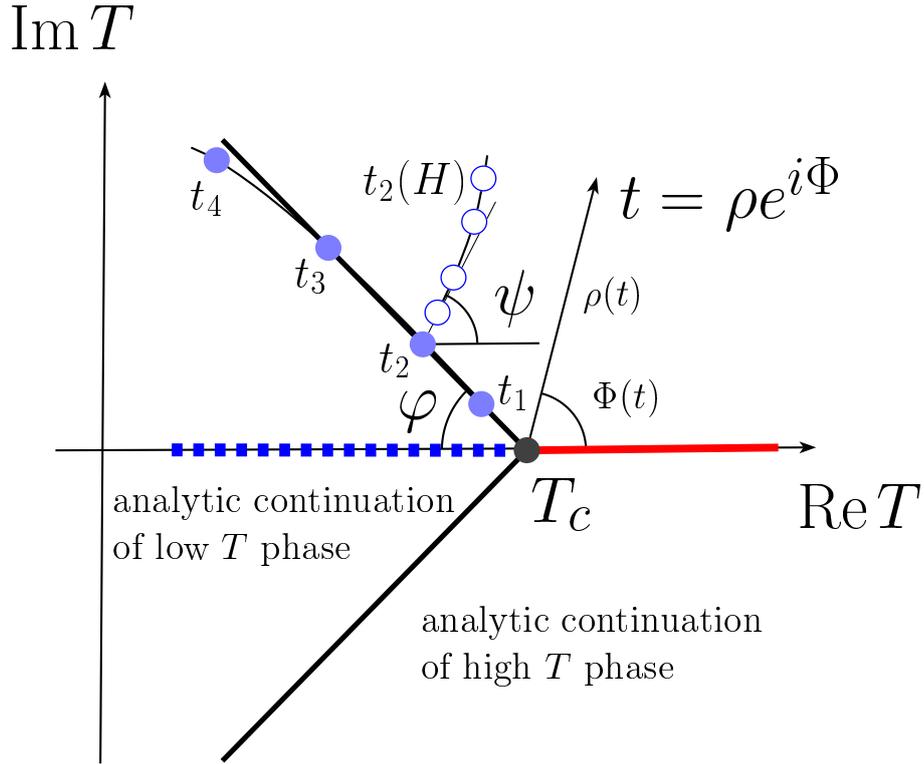


Рис. 1.2. Картина нулів Фішера у комплексній  $T$  площині. Змінна  $t = \rho e^{i\Phi}$  пов'язує комплексні температури із  $T_c$ . Кут  $\varphi$  є кутом, що нулі Фішера формують із від'ємним напрямом дійсної осі, так що  $\Phi \approx \pi - \varphi$  для кількох перших нулів, що зображено колами. Кут  $\psi$  описує рух нулів Фішера за наявності дійсного зовнішнього поля. Рух першого нуля зі збільшенням магнітного поля  $H$  зображено колами.

чки. Критична температура є дійсною, тому критична точка розташована на дійсній осі. Якщо прикласти дійсне магнітне поле, ми спостерігатимемо як нулі Фішера “рухаються” у комплексній площині вздовж кривої, що формує кут  $\psi$  із додатнім напрямком дійсної осі [124].

Одне із корисних співвідношень пов'язує кут  $\varphi$  із критичним показником теплоємності  $\alpha$  та відношенням кричних амплітуд теплоємності  $A_-/A_+$ , де  $A_+$ ,  $A_-$  скейлінгові амплітуди при  $t > 0$ ,  $t < 0$  відповідно [115, 149]. Ідея доведення цього співвідношення наступна [124]. На дійсній осі у термодинамічній границі в околі критичної точки вільну енергію при відсутності магнітного поля можна записати як  $f \simeq F_{\pm}|t|^{2-\alpha}$ , де  $\alpha$  - критичний показник питомої теплоємності. У високотемпературній області при  $t > 0$  справедливий запис  $f \simeq F_+t^{2-\alpha}$ . У низькотемпературній області, для якої  $t < 0$ , вільна енергія рівна  $f \simeq F_-(-t)^{2-\alpha}$ . У

комплексній площині вільна енергія є аналітична всюди, за винятком лінії нулів статистичної суми. Ця лінія розділяє два режими (високих та низьких температур), див. Рис. 1.2. При аналітичному продовженні із області високих температур, для ділянки праворуч лінії нулів (“високотемпературна фаза”) справедливо

$$f_+(t) \simeq F_+(\rho e^{i\Phi})^{2-\alpha} + f_+^{reg}, \quad 0 \leq \Phi < \pi - \varphi. \quad (1.8)$$

З іншого боку, при аналітичному продовженні в ділянку ліворуч лінії нулів (“низькотемпературна фаза”) ми одержуємо

$$f_-(t) \simeq F_-(-\rho e^{i\Phi})^{2-\alpha} + f_-^{reg}, \quad \pi - \varphi < \Phi \leq \pi. \quad (1.9)$$

При переході вздовж лінії нулів Фішера  $\Phi = \pi - \varphi$  й дійсні частини вільної енергії в обох фазах рівні між собою [123, 124]. Підставляючи  $\Phi = \pi - \varphi$  у (1.8)-(1.9) та використовуючи той факт, що  $F_-/F_+ = A_-/A_+$  ми приходимо до формули [124, 126, 127]:

$$\tan[(2 - \alpha)\varphi] = \frac{\cos(\pi\alpha) - A_-/A_+}{\sin(\pi\alpha)}. \quad (1.10)$$

Скейлінгові співвідношення для нулів впливають із загальних означень. Замінивши вимірність  $L^d$  регулярної ґратки на число вузлів  $N$  графа статистичну суму,  $Z(t, H)$ , в представленні приведеної комплексної температури  $t$  та магнітного поля  $H$  можна записати, як узагальнену однорідну функцію [124]:

$$Z(t, H) = e^{\epsilon_0} Z(tN^{1/(2-\alpha)}, HN^{\beta\delta/(2-\alpha)}), \quad (1.11)$$

де  $\beta$  і  $\delta$  – критичні показники, що описують температурну і польову залежності параметра порядку відповідно. Стала  $e^{\epsilon_0}$  приймає тільки дійсні значення, а отже, шукаючи нулі статистичної суми, ми можемо цією сталою знехтувати:

$$Z(t, H) = Z(tN^{1/(2-\alpha)}, HN^{\beta\delta/(2-\alpha)}) = 0. \quad (1.12)$$

Тепер знайдемо розв’язки рівняння (1.4). Статистична сума є парною функцією поля  $H$ , тому попереднє скейлінгове співвідношення можна переписати інакше:

$$H^2 N^{2\beta\delta/(2-\alpha)} = f(tN^{1/(2-\alpha)}), \quad (1.13)$$

чи як

$$tN^{1/(2-\alpha)} = g(HN^{\beta\delta/(2-\alpha)}), \quad (1.14)$$

де  $f(x)$ ,  $g(x)$  є деякими аналітичними функціями відносно  $x$ .

При  $H = 0$  рівняння (1.14) описує скейлінг нулів Фішера:

$$t_j = N^{-1/(2-\alpha)} g_j(0), \quad (1.15)$$

де  $g_j(0)$  - довільне комплексне число. Переходячи до скейлінгу за порядком нуля  $j$  [124] ми з (1.13) та (1.14) одержуємо скейлінгові відношення для нулів Лі-Янга та Фішера у наступній формі:

$$H_j(N, t = 0) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{\frac{\beta\delta}{2-\alpha}}, \quad (1.16)$$

$$t_j(N, H = 0) \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}. \quad (1.17)$$

Покладаючи  $t = 0$  у (1.13) для нулів Лі-Янга запишемо [124]:

$$H_j^2 = N^{-2\beta\delta/(2-\alpha)} f_j(0). \quad (1.18)$$

Загалом,  $f_j(0)$  приймає комплексні значення. Однак, для моделей, що задовільняють теорему Лі-Янга (всі нулі є чисто уявними  $H_j \sim i \operatorname{Im} H_j$  [118, 119]),  $f_j(0)$  - від'ємне дійсне число. Використовуючи цю властивість, зі скейлінгових характеристик статистичної суми [124] ми можемо отримати кут  $\psi$  руху нулів у дійсному полі. При зафіксованій температурі  $t$  і для  $N \rightarrow \infty$  змінна  $H_j$  прямує до порогу Лі-Янга, а тому покладаючи  $N^{-1/(2-\alpha)}$  з (1.15) у (1.18) ми параметризуємо вираз:

$$t_j \sim H_j^{1/(\beta\delta)} \exp(\pm i\psi), \quad (1.19)$$

та отримуємо [124]

$$\psi = \frac{\pi}{2\beta\delta}. \quad (1.20)$$

Важливість теоретичного аналізу нулів та інформація про критичну поведінку, яку можна отримати з цього аналізу, привертають увагу до пошуку можливих шляхів їх експериментального спостереження. Перша спроба пов'язати

нулі із експериментальними спостережуваними була зроблена в роботі [150]. Густина нулів Лі-Янга визначалась із аналізу даних ізотермічної намагніченості ізінгівських феромагнетиків. Нещодавно зауважили можливу відповідність між уявними магнітними полями та квантовою когерентністю [151] пробного спіна у спіновій ванні, а також підтвердили це припущення і експериментально [17, 152, 153]. Для дослідження була вибрана молекула триметилфосфіду, що складається із одного атома фосфору та 9 атомів гідрогену. Вивчаючи взаємодію пробного спіну із спіновою ванною (9 атомів гідрогену), вимірювали зміну у часі функції квантової декорентності  $L(t)$ . У певні моменти часу  $L(t_n) = 0$ . Експериментально отримані часи  $t_n$ , коли квантова когерентність зникає, можна поставити у відповідність чисто уявним нулям Лі-Янга статистичної суми наступним чином [152]:

$$t_n = \Theta_n / (4\lambda). \quad (1.21)$$

де аргумент  $\Theta_n$  відповідає координатам нулів Лі-Янга статистичної суми у представленні  $u_n \equiv e^{i\Theta_n}$ , а  $\lambda$  – стала взаємодії пробного спіна із середовищем. Таке експериментальне підтвердження існування зв'язку між статичними (комплексне магнітне поле у термодинаміці) та динамічними (часи квантової когерентності) характеристиками показує важливість методу аналізу комплексних нулів статистичної суми і дає можливість порівнювати аналітичні результати із даними експерименту.

## 1.4. Висновки

У цьому розділі ми дали коротку характеристику складних мереж, навели приклади спінових моделей на мережах. Більшість робіт, що виконувалась раніше, стосувалась дослідження критичної поведінки спінових моделей на ґратках чи регулярних графах, тому дослідження критичної поведінки на складних мережах іще містить багато невирішених завдань. В той час, як для моделі Ізінга на безмасштабній мережі було знайдено набір скейлінгових функцій та відношень амплітуд [88], подібні дослідження ще не проведені для багатьох інших

спінових моделей, в тому числі для моделі Поттса. Як відомо, в границі  $q \rightarrow 1$  модель Поттса описує явище перколяції за зв'язками (bond percolation). А отже, розгляд також границі для моделі Поттса на складній мережі актуальний для дослідження цілої низки явищ, пов'язаних із виникненням гігантської зв'язної компоненти мережі. Серед них – стійкість мереж до спрямованих атак та випадкових збоїв, розповсюдження епідемій у соціальних мережах та ін. Така тематика активно розвивається в літературі, однак не з'ясованою дотепер залишається роль лагарифічних поправок при кількісному описі явища перколяції на безмасштабних мережах.

Застосування аналізу комплексних нулів статистичної суми привело до значного успіху в якісному розумінні та кількісному описі фазових переходів в багатьох системах. Тому, на перший погляд, дивним є те, що цей метод іще не застосовувався до опису фазових переходів та критичних явищ на безмасштабних мережах. В рамках цього методу опис термодинаміки системи проводиться не в термінах моментів статистичної суми, а в термінах її нулів. Відповідно, універсальними спостережуваними є не набори критичних показників та відношень критичних амплітуд, а комформно-інваріантні кути, що описують локалізацію нулів статистичної суми в площині комплексного поля та комплексної температури. Значення цих кутів для спінових систем на безмасштабних мережах невідомі. Невідомим також є те, чи справедливими залишаються класичні твердження, такі як теорема Лі-Янга про коло одиничного радіусу для випадку, коли спінова система знаходиться на безмасштабній мережі.

З'ясуванню перелічених вище запитань і буде присвячена дисертаційна робота.

## РОЗДІЛ 2

# ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ В МОДЕЛІ ПОТТСА НА БЕЗМАСШТАБНІЙ МЕРЕЖІ

В цьому розділі ми розглянемо  $q$ -станову модель Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. Застосовуючи метод неоднорідного середнього поля (підрозділ 2.2) ми проаналізуємо фазову діаграму (підрозділи 2.3, 2.4) та отримаємо термодинамічні функції (підрозділи 2.5, 2.6). Зокрема, ми покажемо, що критична поведінка моделі суттєво залежить від значення  $q$  та показника загасання розподілу ступенів вузлів  $\lambda$ . Так, в системі можуть відбуватись фазові переходи першого чи другого роду, а для малих значень  $\lambda$  (так звані розподіли з товстими хвостами) система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі. На відміну від попередніх робіт на подібну тематику, наше дослідження базується на аналізі вільної енергії. Зокрема, це дозволить нам записати усі термодинамічні функції системи в універсальній скейлінговій формі. Також знайдено інші кількісні характеристики класів універсальності: критичні показники та відношення критичних амплітуд. Показано, що, подібно до ґраткових систем, на безмасштабних мережах з'являються логарифмічні поправки до скейлінгу та обчислено показники логарифмічних поправок. Для явища перколяції ці показники знайдено вперше. Головні висновки наших досліджень приведено у підрозділі 2.7.

Основні результати цього розділу викладені у публікаціях [18–20].

## 2.1. Гамільтоніан моделі Поттса на безмасштабній мережі

Модель Поттса – це одне із узагальнень моделі Ізінга, однак вона характеризується багатшою критичною поведінкою. Зокрема, для неї спостерігають фазові переходи першого та другого роду в залежності від значень  $q$  та  $d$  для  $d$ -вимірної ґратки [67] (див., наприклад, [154] та [155] для 2 та 3 вимірних ґраток). Гамільтоніан моделі Поттса записується наступним чином:

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \delta_{n_i, n_j} + H \sum_i \delta_{n_i, 0}, \quad (2.1)$$

тут  $n_i = 0, 1, \dots, q-1$ , де  $q \geq 1$  – кількість потсівських станів, а  $H$  – зовнішнє поле, спрямоване вздовж нульової компоненти потсівської змінної  $n_i$ . Головна відмінність ґраткового гамільтоніану та гамільтоніану моделі Поттса на мережі полягає в тому, що підсумовування у (2.1) ведеться за усіма парами  $i, j$  вузлів мережі  $N$ , а взаємодія  $J_{ij}$  рівна  $J$ , якщо між вузлами  $i$  та  $j$  існує лінк й 0, якщо вузли не поєднані між собою.

Можливі застосування спінових моделей на складних мережах можна знайти у різних ділянках соціофізики [15] чи фізики наносистем [16], коли структури набагато краще описуються геометрією випадкового графу, аніж ґратки. В свою чергу модель Поттса має багато різноманітних застосувань (див. наприклад [67]). Границя  $q \rightarrow 1$  для моделі Поттса відповідає явищу перколяції [156, 157]. Випадок  $q = 0$  описує перколяцію типу проникаючих дерев з геометричним типом фазового переходу [158]. Згодом було показано еквівалентність між моделлю Поттса при  $q = 0$  та абелевими моделями купи піску у випадку довільних скінченних графів [159]. Такі моделі, зокрема, описують процеси у нейронних мережах. Іншому випадку при  $q = 1/2$  відповідає модель спінового скла [160, 161]. Модель Поттса в діапазоні  $0 \leq q < 1$  описує процеси геляції та вулканізації у гільчастих полімерах [162]. Можна також виділити випадки застосування моделі Поттса при великих значеннях  $q$ . Трикомпонентна модель Поттса описує кубічні тривісні феромагнетики в діагональному зовнішньому

магнітному полі [163], абсорбцію атомів гелію  $^4\text{He}$  на поверхні графіту [164], переходи у репліках гелію на графітовій підкладці [165], тощо. 4-станова модель Поттса також описує процес абсорбції на поверхнях [166]. Моделі в границі великих  $q$  використовують при дослідженні процесу адгезії й описі поширення раку [167], див. також [168].

У цьому розділі ми проаналізуємо вплив топології багаточатинкової системи на критичну поведінку, а саме, розглянемо випадок, коли спіни в моделі Поттса локалізовані у вузлах нескорельованої безмасштабної мережі.

## 2.2. Наближення неоднорідного середнього поля

У цьому підрозділі ми проаналізуємо термодинаміку моделі Поттса (2.1) на нескорельованій безмасштабній мережі, використовуючи наближення неоднорідного середнього поля. Така мережа характеризується степеневим розподілом ступенів вузлів:

$$P(k) = c_\lambda k^{-\lambda}, \quad (2.2)$$

де  $P(k)$  імовірність того, що випадково вибраний вузол має ступінь  $k$ , а константу  $c_\lambda$  одержуємо із умови нормування  $\sum_{k=k_*}^{k^*} P(k) = 1$ , де  $k_*$  та  $k^*$  - мінімальне та максимальне значення ступеня вузла відповідно. Для безмежної мережі  $\lim_{N \rightarrow \infty} k^* \rightarrow \infty$ . Модель нескорельованої мережі із заданим розподілом ступенів вузлів (так звана конфігураційна модель, див., наприклад [60]) є прикладом випадкового графа, максимально випадкового при заданому розподілі ступенів вузлів. Було показано, що для таких мереж наближення середнього поля у багатьох випадках приводить до асимптотично точних результатів. Зокрема, це було підтверджено для моделі Ізінга, використовуючи метод рекурентних співвідношень [63] та метод реплік [87], а пізніше застосовано і до  $O(m)$ -симетричної та анізотропної кубічної моделей [88], взаємодіючих моделей Ізінга [112, 169], а також випадку перколяції [93]. Два різні наближення для моделі Поттса - середнього поля [93] та розв'язок у наближення типу ґратки Бете [94] - приводять, однак, до дещо різних результатів.

Щоб означити параметр порядку та виконати наближення середнього поля для Гамільтоніану (2.1), означимо локальні термодинамічні середні:

$$\mu_i = \overline{\delta_{n_i,0}}, \quad \nu_i = \overline{\delta_{n_i,\alpha \neq 0}}, \quad (2.3)$$

де усереднення означає:

$$\overline{(\dots)} = \frac{\text{Tr}(\dots) \exp(-\mathcal{H}/T)}{\mathcal{Z}}, \quad (2.4)$$

$T$  - температура в одиницях сталої Больцмана  $k_B = 1$ . Статистична сума

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \exp(-\mathcal{H}/T), \quad (2.5)$$

та шпур означається як:

$$\text{Tr}(\dots) = \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^{q-1} (\dots). \quad (2.6)$$

Дві величині означені вище у (2.3) можна пов'язати, використовуючи умову нормування  $\delta_{n_i,0} + \sum_{\alpha=1}^{q-1} \delta_{n_i,\alpha} = 1$  отримуємо:

$$\nu_i = (1 - \mu_i)/(q - 1). \quad (2.7)$$

Розглянемо поведінку середніх (2.3) для гамільтоніана (2.1) у границі низьких та високих температур:  $\mu_i(T \rightarrow \infty) = \nu_i(T \rightarrow \infty) = 1/q$ ,  $\mu_i(T \rightarrow 0) = 1$ ,  $\nu_i(T \rightarrow 0) = 0$ . Тоді локальний параметр порядку (локальну намагніченість),  $0 \leq m_i \leq 1$ , можна переписати як:

$$m_i = \frac{q\overline{\delta_{n_i,0}} - 1}{q - 1}. \quad (2.8)$$

Нехтуючи внесками другого порядку малості (квадратами відхилення від середнього)  $\delta_{n_i,n_j} - \overline{\delta_{n_i,n_j}}$  ми одержуємо вираз для гамільтоніану (2.1) в наближенні середнього поля:

$$-\mathcal{H}^{mfa} = \sum_{i,j} J_{ij} \delta_{n_i,0} m_j + \frac{1}{q} \sum_{i,j} J_{ij} (1 - m_j + (1 - q)m_i m_j) + \sum_i H_i \delta_{n_i,0}. \quad (2.9)$$

### 2.3. Вільна енергія моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі

Вільну енергію моделі Поттса на безмасштабній мережі в наближенні середнього поля,  $-g = T \ln \text{Tr} \exp(-\mathcal{H}^{mfa}/T)$ , можна записати наступним чином:

$$-g = \frac{1}{q} \sum_{i,j} J_{ij} (1 - m_j + (1 - q) m_i m_j) + T \sum_i \ln \left[ \exp \left( \frac{\sum_j J_{ij} m_j + H_i}{T} \right) + q - 1 \right]. \quad (2.10)$$

У цьому випадку вільна енергія (2.10) є функцією не тільки температури та зовнішнього магнітного поля, але й намагніченості, яка відіграє роль параметра порядку. Для аналізу критичної поведінки використовуватиме вираз для вільної енергії системи, проте також можна досліджувати і рівняння стану. Так, у роботі [93] розглядали рівняння стану для моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі, яке можна отримати із р-ня (2.9). На відміну від наближення середнього поля для ґраткових моделей, де справедливе припущення про однорідність локальних параметрів порядку (тобто,  $m_i = m$  для ґраток), у випадку мережі мають справу із наближенням *неоднорідного* середнього поля. Так, для моделей на мережах в наближенні середнього поля еквівалентними можна вважати тільки вузли із однаковим ступенем. А тому глобальний параметр порядку спінових моделей на мережах означається через зважені локальні параметри порядку (див., наприклад, [170]). Означимо глобальний параметр порядку наступним чином [93]:

$$m = \frac{\sum_i k_i m_i}{\sum_i k_i}. \quad (2.11)$$

Згідно наближення середнього поля, підставимо матричні елементи  $J_{ij}$  у рівняння (2.10), де існування лінку між вузлами  $i$  та  $j$  можливе з імовірністю  $p_{ij}$ . Імовірність існування лінку між вузлами залежить тільки від їх ступенів  $k_i, k_j$  як:

$$J_{ij} = J p_{ij} = J \frac{k_i k_j}{N \langle k \rangle}, \quad (2.12)$$

де  $J$  – стала взаємодії, а  $\langle k \rangle = 1/N \sum_{i=1}^N k_i$  – середній ступінь вузла.<sup>1</sup> Вільна енергія (2.10) в змінних (2.11) та (2.12) міститиме суми за всіма вузлами мережі. Використовуючи означення функції розподілу ступенів вузлів, можна перейти від суми за вузлами до підсумовування за ступенями вузлів:  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(k_i) = \sum_{k=k_*}^{k^*} P(k)f(k)$ . У термодинамічній границі для безмежної мережі  $N \rightarrow \infty$ ,  $k^* \rightarrow \infty$ , перейдемо до інтегрування за ступенем вузла. Вважаючи зовнішнє поле однорідним,  $H_i = H$ , отримуємо такий вираз для вільної енергії моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі:

$$g = \int_{k_*}^{\infty} \left[ -\frac{Jk}{q} + \frac{Jk}{q}m + \frac{Jk(q-1)}{q}m^2 - T \ln(e^{\frac{mJk+H}{T}} + q - 1) \right] P(k)dk, \quad (2.13)$$

де функція розподілу за ступенями вузлів задана у формі (2.2). У випадку малого зовнішнього поля  $H$ , зберігаючи у виразі (2.13) лише провідні внески за  $H$  та ввівши незалежні від  $m$  доданки у перенормовану вільну енергію, ми отримуємо:

$$g = \frac{J\langle k \rangle}{q}m + \frac{J\langle k \rangle(q-1)}{q}m^2 - T \int_{k_*}^{\infty} \ln(e^{mJk/T} + q - 1)P(k)dk - \frac{(q-1)\langle k \rangle J}{q^2 T}mH. \quad (2.14)$$

Вираз для вільної енергії (2.14) є основним виразом для подальшого дослідження критичної поведінки. У рамках теорії Ландау, розкладаючи р-ня (2.14) при малих значеннях параметра порядку  $m$  та зберігаючи перші провідні доданки малості за відсутності магнітного поля ми отримаємо:

$$g \simeq -\ln q + \frac{J\langle k \rangle(q-1)}{qT}(T - T_0)m^2, \quad (2.15)$$

де  $T_0 = \frac{J\langle k^2 \rangle}{2q\langle k \rangle}$ . Якщо існує другий нерозбіжний момент  $\langle k^2 \rangle$  для розподілу (2.2), то легко бачити, що в залежності від значення температури коефіцієнт при

<sup>1</sup>Таке наближення робить нашу модель схожою на модель Хопфілда, що використовується для опису спінових стекел та асортативної пам'яті [66, 171–175].

квадратичному доданку  $m^2$  змінює знак при  $T_0$ . Пізніше буде показано, що ця температура відповідає значенню критичної температури для фазового переходу другого роду. Іншою характерною особливістю спінових моделей на безмасштабних мережах є те, що система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі, коли розбігається другий момент  $\langle k^2 \rangle$ , тобто, коли  $T_0 \rightarrow \infty$  [64]. Для степеневого розподілу (2.2) другий момент розбіжний в діапазоні  $\lambda \leq 3$ . А тому нас цікавитиме критична поведінка моделі Поттса в залежності від зовнішнього поля та температури при  $\lambda > 3$ .<sup>2</sup> Розклад логарифма у виразі (2.14) при малих значеннях параметра порядку  $m$  включатиме малі (нижня межа інтегрування) та великі (верхня межа інтегрування) значення аргумента  $mJk$ . Для подальшого аналізу виразу (2.14) вільної енергії системи, перепишемо його виділивши доданки типу (2.15)<sup>3</sup> та введемо нову змінну інтегрування  $x = mJk/T$ :

$$g = \frac{J\langle k \rangle(q-1)}{qT}(T - T_0)m^2 + \frac{c_\lambda(mJ)^{\lambda-1}}{T^{\lambda-2}} \int_{x_*}^{\infty} \varphi(x) dx - \frac{(q-1)\langle k \rangle J}{q^2 T} mH, \quad (2.16)$$

де  $x_* = mJk_*/T$  і

$$\varphi(x) = [-\ln(e^x + q - 1) + \ln q + \frac{x}{q} + \frac{q-1}{2q^2} x^2] \frac{1}{x^\lambda}. \quad (2.17)$$

Зауважмо, що розклад в ряд Тейлора виразу в квадратних дужках в р-ні (2.17) при малих  $x$  починається із  $x^3$ , в той час, як при великих  $x$  функція  $\varphi(x)$  поводитья, як  $x^{2-\lambda}$  а тому інтеграл у (2.16) є збіжним на верхній межі інтегрування при  $\lambda > 3$ . Щоб проаналізувати поведінку інтегралу на нижній межі інтегрування, коли параметр порядку  $m \rightarrow 0$ , розглянемо окремо випадки цілих та нецілих значень параметра  $\lambda$ , щоб виділити розбіжності при інтегруванні.

<sup>2</sup>Для моделей на безмасштабних мережах при  $k_* = 1$  не існує проникаючого кластеру в діапазоні  $\lambda > \lambda_c$  ( $\lambda_c = 4$  для неперервного розподілу вузлів та  $\lambda_c \simeq 3.48$  для дискретного розподілу [176]). Ми можемо задовільнити умову існування кластеру, вибравши нижню межу інтегрування  $k_* > 1$ .

<sup>3</sup>Ми внесемо доданок  $-\ln q$  у перенормовану вільну енергію.

### 2.3.1. Нецілі $\lambda$

Розглянемо частковий випадок нецілих значень  $\lambda$ . При малих значеннях змінної  $x$  функцію  $\varphi(x)$  можна записати наступним чином:<sup>4</sup>

$$\varphi(x) = \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}} + \sum_{i=[\lambda]}^{\infty} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}}, \quad (2.18)$$

де позначення  $[\ell]$  означає, що ми беремо цілу частину від  $\ell$ , а  $a_i \equiv a_i(q)$  – коефіцієнти розкладу в ряд Тейлора:

$$-\ln(e^x + q - 1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i. \quad (2.19)$$

Для декількох перших коефіцієнтів цього розкладу знаходимо:

$$a_0 = -\ln q, \quad a_1 = -1/q, \quad a_2 = -\frac{q-1}{2q^2},$$

$$a_3 = -\frac{(q-1)(q-2)}{6q^3}, \quad a_4 = -\frac{(q-1)(q^2-6q+6)}{24q^4}.$$

При інтегруванні першого доданку у р-ні (2.18) ми отримуємо доданки, які розбігаються в границі  $x \rightarrow 0$ . Виділимо цю розбіжність та обчислимо інтеграл (2.16) наступним чином:

$$\lim_{x_* \rightarrow 0} \int_{x_*}^{\infty} \varphi(x) dx = \lim_{x_* \rightarrow 0} \int_{x_*}^{\infty} \left[ \varphi(x) - \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}} \right] dx + \lim_{x_* \rightarrow 0} \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \int_{x_*}^{\infty} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}} dx. \quad (2.20)$$

Перший доданок при інтегруванні у (2.20) не розбігається при малих  $x$ , так само, як і при великих  $x$ , тому його можна обчислити чисельно при  $m = 0$ . Позначимо результат чисельного інтегрування як коефіцієнт коефіцієнт  $c(q, \lambda)$ :

$$c(q, \lambda) \equiv \int_0^{\infty} \left[ \varphi(x) - \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}} \right] dx. \quad (2.21)$$

Чисельні значення  $c(q, \lambda)$  при різних  $q$  та  $\lambda$  представлені у Табл. 3.1.

<sup>4</sup>Це означає, що у р-ні (2.18) та наступних подібних виразах перша сума рівна нулеві, якщо верхня межа сумування є менша, аніж нижня, наприклад, при  $\lambda < 4$ .

Проінтегрувавши другий доданок у рівнянні (2.20) отримуємо:

$$\sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \int_{x_*}^{\infty} \frac{a_i}{x^{\lambda-i}} dx = \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i(x_*)^{-\lambda+i+1}}{\lambda-1-i}. \quad (2.22)$$

Підставляючи (2.21) та (2.22) у р-ня (2.16) одержимо остаточний вираз для перших провідних доданків вільної енергії при *нецілих*  $\lambda$ :

$$g = \frac{J\langle k \rangle(q-1)}{qT} (T - T_0)m^2 + \frac{c_\lambda c(q, \lambda)}{T^{\lambda-2}} (mJ)^{\lambda-1} + c_\lambda \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} \frac{a_i(mJk_*)^i}{\lambda-1-i} T^{1-i} - \frac{J\langle k \rangle(q-1)}{q^2T} mH + O(m^{[\lambda]}). \quad (2.23)$$

Табл. 2.1. Нормовані чисельні значення коефіцієнта  $c(q, \lambda)/(q-1)$ , р-ня (2.21), для різних  $q$  та  $\lambda$ .

$\lambda \setminus q$	1	2	3	4	6	8
5.4	-3.0692	-0.0079	-0.0002	0.0013	0.0011	0.0007
5.1	-5.9318	-0.0454	-0.0106	-0.0006	0.0028	0.0025
4.8	-0.1686	0.0352	0.0148	0.0058	0.0005	-0.0005
4.5	-0.2439	0.0237	0.0154	0.0085	0.0030	0.0012
4.2	-0.6809	0.0275	0.0344	0.0240	0.0119	0.0067
3.9	0.5975	0.0420	-0.0540	-0.0528	-0.0346	-0.0231
3.6	0.7240	0.0830	0.0065	-0.0076	-0.0102	-0.0085
3.3	1.4001	0.2469	0.0790	0.0315	0.0052	-0.0010

### 2.3.2. Цілі $\lambda$

Тепер розглядаємо випадок, коли параметр  $\lambda$  приймає цілі значення. Щоб виділити логарифмічну розбіжність інтегралу у р-ні (2.16) при цілих  $\lambda$ , діяти- мемо наступним чином [177]: означимо інтеграл

$$K(y) = \int_y^{\infty} \varphi(x) dx \quad (2.24)$$

де

$$\frac{dK(y)}{dy} = -\varphi(y). \quad (2.25)$$

Значення інтегралу  $K(y)$  можна отримати із розкладу виразу у квадратних дужках р-ня (2.17) при малих  $y$  та інтегруючи вираз (2.25):

$$K(y) = - \int \varphi(y) dy = \sum_{i=3, i \neq \lambda-1}^{\infty} \frac{a_i y^{i+1-\lambda}}{\lambda - i - 1} - a_{\lambda-1} \ln(y) + C(q, \lambda), \quad (2.26)$$

із константою інтегрування  $C(q, \lambda)$  та коефіцієнтами  $a_i$ , заданими виразом (2.19). Чисельні результати для сталої інтегрування  $C(q, \lambda)$  при різних значеннях  $q$  та  $\lambda$  приведені у Таблиці 2.2.

Підставляючи значення інтегралу  $K(mJk_*)$  у (2.16), отримуємо наступний вираз для вільної енергії при *цільних*  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} g = & \frac{J\langle k \rangle (q-1)}{qT} (T - T_0) m^2 - \frac{c_\lambda a_{\lambda-1}}{T^{\lambda-2}} (mJ)^{\lambda-1} \ln m + c_\lambda [C(q, \lambda) - \\ & a_{\lambda-1} \ln(Jk_*/T)] \frac{(mJ)^{\lambda-1}}{T^{\lambda-2}} + c_\lambda \sum_{i=3}^{\lambda-2} \frac{a_i (mJk_*)^i}{\lambda - i - 1} T^{1-i} - \\ & \frac{J\langle k \rangle (q-1)}{q^2 T} mH + O(m^{[\lambda]}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

У наступних підрозділах ми проаналізуємо вирази (2.23) та (2.27) для вільної енергії моделі Поттса в різних діапазонах  $q$  та  $\lambda$ .

Табл. 2.2. Чисельне значення  $C(q, \lambda)/(q-1)$  при різних  $q$  та  $\lambda$ .

$\lambda \setminus q$	1	2	3	4	6	8
4	0.9810	0.0355	-0.0085	-0.0134	-0.0109	-0.0079
5	0.4853	0.0194	-0.0527	-0.0483	-0.0303	-0.0197

## 2.4. Фазова діаграма

Перенормуємо вільну енергію, щоб дослідити критичну поведінку у випадку перколяції ( $q = 1$ ), поділивши її на  $(q-1)$  та перепозначивши наступним

чином:  $g'^{mfa} = g/(q-1)$ . В такому випадку з кожного доданку виразів (2.23), (2.27), можна винести на скоротити множник  $(q-1)$ . Означимо коефіцієнти біля різних доданків за степенями  $m$  у рівняннях (2.23) та (2.27):

$$A = \frac{2J\langle k \rangle}{q}, \quad (2.28)$$

$$B = -\frac{c_\lambda(Jk_\star)^3(q-2)}{2q^3(\lambda-4)}, \quad B' = -\frac{c_\lambda J^3(q-2)}{2q^3}, \quad (2.29)$$

$$C = -\frac{c_\lambda(Jk_\star)^4(q^2-6q+6)}{6q^4(\lambda-5)}, \quad C' = -\frac{c_\lambda J^4(q^2-6q+6)}{6q^4}, \quad (2.30)$$

$$K = \frac{c_\lambda J^{\lambda-1} c(q, \lambda)}{(q-1)}, \quad (2.31)$$

$$D = \frac{J\langle k \rangle}{q^2}. \quad (2.32)$$

Нижче ми проаналізуємо термодинамічні властивості моделі Поттса на безмасштабній мережі та побудуємо фазову діаграму в змінних  $q$ - $\lambda$ .

Щоб детально проаналізувати фазову діаграму моделі Поттса на безмасштабній мережі, запишемо вільну енергію, розклавши логарифмічний вираз за степенями параметра порядку зберігаючи у виразах (2.23) та (2.27) тільки такі доданки за  $m$ , що дозволяють описати нестандартну поведінку, а також забезпечують термодинамічну стійкість системи. Оскільки коефіцієнти при різних степенях  $m$  є залежними від  $q$  та  $\lambda$ , див. (2.28)–(2.32), вигляд вільної енергії відрізнятиметься у різних діапазонах  $q$  та  $\lambda$ .

#### 2.4.1. $1 \leq q < 2$

Оскільки коефіцієнти  $K$ ,  $B$  і  $B'$  перед степенями  $m^{\lambda-1}$ ,  $m^3$  і  $m^3 \ln m$  приймають додатні значення в діапазоні даних  $q$ , достатньо брати до уваги тільки перші три доданки розкладу у вільній енергії:

$$3 < \lambda < 4: \quad g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + \frac{K}{T^{\lambda-2}}m^{\lambda-1} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.33)$$

$$\lambda = 4: \quad g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + \frac{B'}{3T^2}m^3 \ln \frac{1}{m} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.34)$$

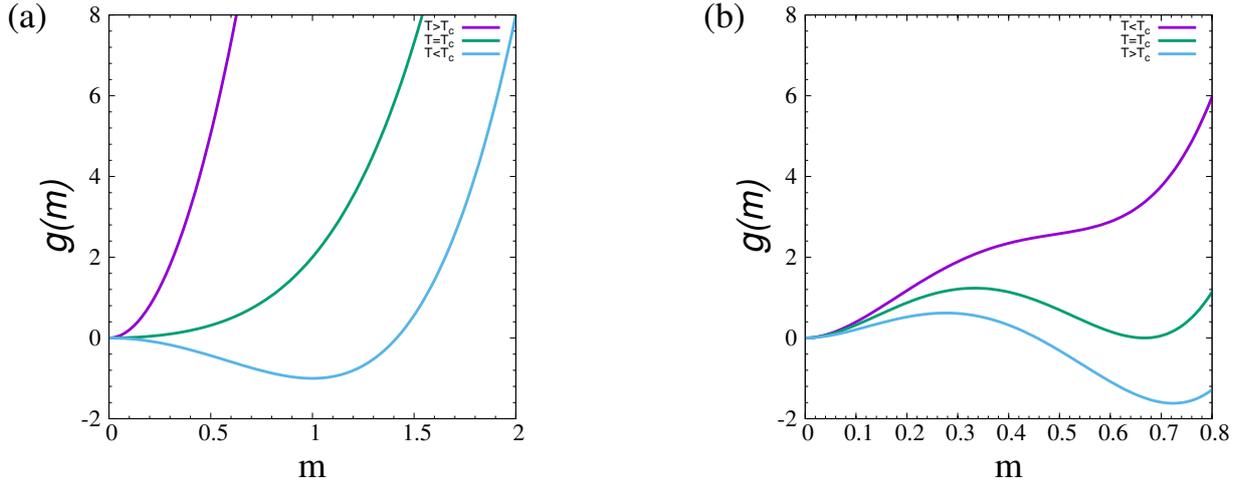


Рис. 2.1. Типова поведінка вільної енергії моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі при відсутності зовнішнього поля  $H = 0$ . (a): неперервний фазовий перехід (другого роду); (b): фазовий перехід першого роду.

$$\lambda > 4: g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + \frac{B}{3T^2}m^3 - \frac{D}{T}mH. \quad (2.35)$$

Типова залежність від  $m$  функцій (2.33)–(2.35) при відсутності магнітного поля  $H=0$  показана на Рис.2.1a. Як і очікується, при фазовому переході другого роду вільна енергія має єдиний мінімум при  $m = 0$  для температур  $T > T_0$ . Ненульове значення параметра порядку, що мінімізує вираз вільної енергії, pojawiaється при  $T = T_0$ . Зокрема, фазовий перехід є неперервним для випадку перколяції  $q = 1$ , як буде показано нижче у підрозділі 2.5.3.

#### 2.4.2. $q = 2$

При  $q = 2$  модель Поттса описує модель Ізінга. У даному випадку коефіцієнт при кубічному доданку параметра порядку занулюється і вільну енергію можна записати у наступній формі:

$$3 < \lambda < 5: g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + K \frac{1}{T^{\lambda-2}}m^{\lambda-1} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.36)$$

$$\lambda = 5: g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + \frac{C'}{4T^3}m^4 \ln \frac{1}{m} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.37)$$

$$\lambda > 5: g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + \frac{C}{4T^3}m^4 - \frac{D}{T}mH. \quad (2.38)$$

Можна перевірити, що коефіцієнти  $K$ ,  $C$ ,  $C'$  при різних степенях параметра порядку є додатні при  $q = 2$ . А отже, у системі спостерігається фазовий перехід другого роду, див. Рис.2.1а.

### 2.4.3. $q > 2$ , $3 < \lambda < \lambda_c(q)$

У цьому діапазоні  $q$  рід фазового переходу залежить від знаку коефіцієнта наступного доданку у вільній енергії після квадратичного. При додатніх значеннях коефіцієнта  $K$  для вільної енергії моделі Поттса отримуємо:

$$3 < \lambda < \lambda_c(q) : \quad g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + K \frac{1}{T^{\lambda-2}}m^{\lambda-1} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.39)$$

де  $K$  залишається додатнім при  $\lambda$ , менших за певне граничне значення  $\lambda_c$ , яке можна отримати із умови

$$c(q, \lambda_c) = 0, \quad (2.40)$$

де значення сталої  $c(q, \lambda)$  задане рівнянням (2.21). Поведінка вільної енергії (2.39) в різних діапазонах температур подана на Рис.2.1а. Як і в попередніх випадках, див. підрозділи 2.4.1 та 2.4.2, критична поведінка характеризується фазовим переходом другого роду. Зі збільшенням  $\lambda$  коефіцієнт  $K$  змінює знак та набуває від'ємних значень, тому необхідно брати до розгляду наступний доданок розкладу за  $m$ :

$$\lambda_c(q) < \lambda < 4 : \quad g = \frac{A}{2T}(T - T_0)m^2 + K \frac{1}{T^{\lambda-2}}m^{\lambda-1} + \frac{B}{3T^2}m^3 - \frac{D}{T}mH, \quad (2.41)$$

коефіцієнт  $B > 0$  при  $\lambda < 4$ . Оскільки коефіцієнт перед доданком  $m^{\lambda-1}$  набуває від'ємних значень, появляється локальний мінімум для вільної енергії системи при малих температурах  $T$  (див. Рис. 2.1b) й параметр порядку розбігається при критичній температурі  $T_c$ : такий тип поведінки типовий для фазових переходів першого роду. Із подальшим зростанням  $\lambda$ , необхідно брати до розгляду щоразу більше доданків розкладу, щоб забезпечити термодинамічну стійкість системи. Однак, знак перед другим провідним доданком розкладу залишати-

меться від’ємним, що відповідає поведінці вільної енергії на Рис.2.1b, тобто, фазовому переходу першого роду.

Аналіз вільної енергії у різних діапазонах  $\lambda$  та  $q$  можна підсумувати, побудувавши “фазову діаграму” моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. На Рис.2.2 показано режими фазових переходів у різних діапазонах  $\lambda$  та  $q$ .

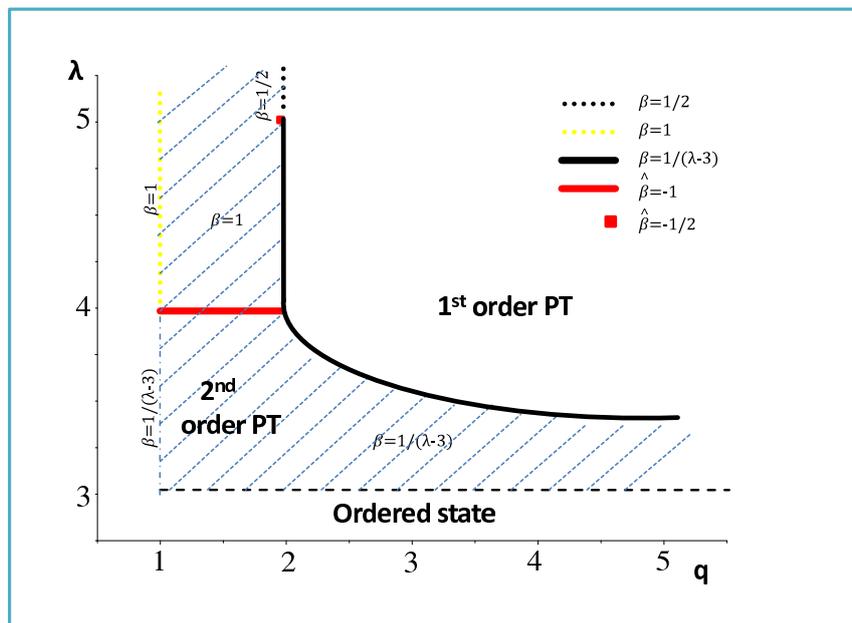


Рис. 2.2. Фазова діаграма моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. Суцільна чорна крива розділяє режим фазового переходу першого роду від режиму фазового переходу другого роду. При  $\lambda \leq 3$  система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі (область нижче штрихованої лінії).

#### 2.4.4. Довільне $q$ , $2 < \lambda \leq 3$

Як зазначалось раніше, при  $2 < \lambda \leq 3$  модель Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі, тобто параметр порядку рівний нулеві тільки при безмежній

температурі. Як і для моделі Ізінга [63], легко знайти залежність параметра порядку у високотемпературній області при  $2 < \lambda \leq 3$  та будь-яких значень  $q \geq 1$ . Оскільки другий момент  $\langle k^2 \rangle$  є розбіжний у діапазоні  $2 < \lambda \leq 3$ , ми не виділяємо цей доданок із виразу (2.16), й приходимо до наступного виразу для вільної енергії:

$$2 < \lambda < 3 : g = \frac{A}{2T}m^2 + \frac{K'}{T^{\lambda-2}}m^{\lambda-1} - \frac{D}{T}mH, \quad (2.42)$$

$$\lambda = 3 : g = \frac{A}{2T}m^2 + \frac{c_\lambda J^2}{4q^2 T}m^2 \ln \frac{1}{m} + \frac{c_\lambda J^2}{T} \left[ \frac{C'(q, 3)}{q-1} + \frac{1}{2q^2} \ln \left( \frac{Jk_*}{T} \right) \right] m^2 - \frac{D}{T}mH. \quad (2.43)$$

Тут коефіцієнти  $K'$ ,  $C'(q, 3)$  є аналогічні до  $K$ ,  $C(q, 3)$  у виразах (2.31) та (2.26), при умові, що функція  $\varphi(x)$ , яка використовується для їх чисельного розрахунку, не міститиме квадратичного доданку  $x^2$ .

Мінімізуючи вільні енергії (2.42), (2.43) за параметром порядку, отримуємо наступну асимптотику при високих температурах  $T$  [87, 93]:

$$2 < \lambda < 3 : m \sim T^{-\frac{\lambda-2}{3-\lambda}}, \quad (2.44)$$

$$\lambda = 3 : m \sim T e^{-\alpha T}, \quad \alpha > 0. \quad (2.45)$$

Рівняння (2.44) і (2.45) описують залежність параметра порядку  $m$  від температури в наближенні середнього поля. Зв'язок параметра порядку із намагніченістю системи  $M$  можна знайти із рівняння самоузгодження:

$$M = - \left( \frac{\partial g}{\partial H} \right)_T. \quad (2.46)$$

В границі високих температур можна знайти розв'язок  $M \sim \frac{m}{T}$ . Це в свою чергу призводить до наступної асимптотики намагніченості  $M$  [63]:

$$2 < \lambda < 3 : M \sim T^{\frac{1}{\lambda-3}}, \quad (2.47)$$

$$\lambda = 3 : M \sim e^{-\alpha T}, \quad \alpha > 0. \quad (2.48)$$

Не зменшуючи загальності, нижче ми запишемо термодинамічні функції у термінах змінної параметра порядку  $m$ .

## 2.5. Режим фазового переходу другого роду

### 2.5.1. Термодинамічні функції, критичні показники, логарифмічні поправки до скейлінгу

Із виразів для вільної енергії в різних діапазонах  $\lambda$  та  $q$  можна знайти значення критичних показників, що описують степеневі залежності термодинамічних величин в околі точки фазового переходу другого роду  $H = 0, \tau \equiv |T - T_0|/T_0 = 0$  [115, 149], де  $T_0$  – критична температура фазового переходу другого роду. Тобто, нас цікавитимуть показники, що описують залежність від температури та поля параметра порядку  $m$ , ізотермічної сприйнятливості  $\chi_T = (\frac{\partial m}{\partial H})_T$ , теплоємності  $c_H = T(\frac{\partial S}{\partial T})_H$  та магнетокалоричного коефіцієнта<sup>5</sup>  $m_T = -T(\frac{\partial S}{\partial H})_T$ . Зокрема, при  $H = 0$  параметр порядку  $m$ , ізотермічна сприйнятливість  $\chi_T$ , теплоємність  $c_H$  та магнетокалоричний коефіцієнт  $m_T$  описуються такими асимптотиками в околі критичної температури  $\tau = \frac{|T-T_c|}{T_c}$ ):

$$m = B_{\pm}\tau^{\beta}, \quad \chi_T = \Gamma_{\pm}\tau^{-\gamma}, \quad c_h = \frac{A_{\pm}}{\alpha}\tau^{-\alpha}, \quad m_T = B_T^{\pm}\tau^{-\omega}. \quad (2.49)$$

Тут індекси  $\pm$  відповідають діапазону температур вище і нижче критичної, що беруться до уваги  $T - T_0 \rightarrow 0^{\pm}$ . В самій критичній точці при  $T = T_0$  (тобто,  $\tau = 0$ ) термодинамічні функції залежать від поля наступним чином:

$$m = D_c^{\frac{-1}{\delta}} H^{1/\delta}, \quad \chi = \Gamma_c H^{-\gamma_c}, \quad c_H = \frac{A_c}{\alpha_c} H^{-\alpha_c}, \quad m_T = B_T^c H^{-\omega_c}. \quad (2.50)$$

У даному підрозділі ми проаналізуємо степеневі залежності термодинамічних величин у різних діапазонах  $q$  та  $\lambda$ . Результати аналізу показників скейлінгу для термодинамічних функцій підсумовано у Таблиці 2.3.

<sup>5</sup>Магнетокалоричний коефіцієнт вимірює кількість теплоти, яку система отримує при ізотермічному зростанні магнітного поля внаслідок магнетокалоричного ефекту (див., наприклад, [178]).

Табл. 2.3. Критичні показники моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі. Зокрема, ми відтворюємо результати, одержані для моделі Ізінга ( $q = 2$ ) [87, 179] та задачі про перколяцію ( $q = 1$ ) [180].

$q$	$\lambda$	$\alpha$	$\alpha_c$	$\beta$	$\delta$	$\gamma$	$\gamma_c$	$\omega$	$\omega_c$
$1 \leq q \leq 2$	$3 < \lambda < 4$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-2}$	$\frac{1}{\lambda-3}$	$\lambda - 2$	1	$\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-2}$
$1 \leq q < 2$	$\lambda \geq 4$	-1	-1/2	1	2	1	1/2	0	0
$q = 2$	$3 < \lambda < 5$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-2}$	$\frac{1}{\lambda-3}$	$\lambda - 2$	1	$\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-2}$
$q = 2$	$\lambda \geq 5$	0	0	1/2	3	1	2/3	1/2	1/3
$q > 2$	$3 < \lambda \leq \lambda_c(q)$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-5}{\lambda-2}$	$\frac{1}{\lambda-3}$	$\lambda - 2$	1	$\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-3}$	$\frac{\lambda-4}{\lambda-2}$

- $1 \leq q < 2$

У діапазоні  $1 \leq q < 2$  вільна енергія моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі задається виразами (2.33)–(2.35). При високих температурах  $T > T_0$  мінімуму вільної енергії  $g$  при  $H = 0$  відповідає нульове значення параметра порядку  $m = 0$ . При  $T < T_0$  мінімум вільної енергії спостерігається при ненульових  $m$ . Використовуючи означення виразів (2.33)–(2.35) у різних діапазонах  $\lambda$  знаходимо характерну степеневу поведінку параметра порядку в околі критичної точки:

$$3 < \lambda < 4: m = T_0^{\frac{\lambda-2}{\lambda-3}} \left( \frac{A\tau}{K(\lambda-1)} \right)^{\frac{1}{\lambda-3}}, \quad (2.51)$$

$$\lambda = 4: m = \frac{AT_0^2}{B'} \tau |\ln \tau|^{-1}, \quad (2.52)$$

$$\lambda > 4: m = \frac{AT_0^2}{B} \tau. \quad (2.53)$$

Покладаючи  $q = 1$  у виразах (2.51) та (2.53) відтворюємо відповідні результати для випадку перколяції на безмасштабних мережах [180]: середньопольове значення показника перколяції  $\beta = 1$  при  $\lambda > 4$  та  $\beta = \frac{1}{\lambda-3}$  при  $3 < \lambda < 4$ . Зауважимо, що при граничному значенні  $\lambda = 4$  pojawiaються логарифмічні поправки. Остаточні значення показників наведено у Таблиці 2.3. Також, можна отримати значення й інших показників, означених раніше (див. (2.49), (2.50)) і їх чисельні значення наведено у перших двох рядках Таблиці 2.3.

Так само, як для параметра порядку (2.52), залежність від поля та температури інших термодинамічних функцій (2.49)-(2.50) характеризується появою логарифмічних поправок при  $\lambda = 4$  в колі критичної точки. Означимо показники логарифмічних поправок до скейлінгу наступним чином [89]:

$$m \sim \tau^\beta |\ln \tau|^{\hat{\beta}}, \quad \chi_T \sim \tau^{-\gamma} |\ln \tau|^{\hat{\gamma}}, \quad (2.54)$$

$$c_H \sim \tau^{-\alpha} |\ln \tau|^{\hat{\alpha}}, \quad m_T \sim \tau^{-\omega} |\ln \tau|^{\hat{\omega}}, \quad (2.55)$$

$$m \sim H^{1/\delta} |\ln H|^{\hat{\delta}}, \quad \chi_T \sim H^{-\gamma_c} |\ln H|^{\hat{\gamma}_c}, \quad (2.56)$$

$$c_H \sim H^{-\alpha_c} |\ln H|^{\hat{\alpha}_c}, \quad m_T \sim H^{-\omega_c} |\ln H|^{\hat{\omega}_c}. \quad (2.57)$$

Значення одержаних показників див. у Таблиці 2.4. Зауважимо, однак, що значення усіх показників логарифмічних поправок є від'ємними. Це означає, що логарифмічні поправки послаблюють розбіжність термодинамічних характеристик. Детальніше проаналізуємо таку поведінку у підрозділі 2.5.3.

Табл. 2.4. Показники логарифмічних поправок до скейлінгу для моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі.

$q$	$\lambda$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_c$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\gamma}_c$	$\hat{\omega}$	$\hat{\omega}_c$
$1 \leq q < 2$	$\lambda = 4$	-2	-3/2	-1	-1/2	0	-1/2	-1	-1
$q = 2$	$\lambda = 5$	-1	-1	-1/2	-1/3	0	-1/3	-1/2	-2/3

- $q = 2$ , модель Ізінга

Для різних значень  $\lambda$  вільна енергія моделі описується виразами (2.36)–(2.38). Мінімізуючи ці представлення за параметром порядку, при  $H = 0$  та  $T < T_0$  отримаєм:

$$3 < \lambda < 5: m = T_0^{\frac{\lambda-2}{\lambda-3}} \left( \frac{A\tau}{K(\lambda-1)} \right)^{\frac{1}{\lambda-3}}, \quad (2.58)$$

$$\lambda = 5: m = \sqrt{\frac{AT_0^3}{C'}} \tau^{1/2} |\ln \tau|^{-1/2}, \quad (2.59)$$

$$\lambda > 5 : m = \sqrt{\frac{AT_0^3}{C}} \tau^{1/2}. \quad (2.60)$$

Відповідні критичні показники інших термодинамічних величин записано у третьому та четвертому рядку Таблиці 2.3. Логарифмічні поправки до скейлінгу (2.54)– (2.57) виникають при  $\lambda = 5$  і їх значення наведено у другому рядку Таблиці 2.4. Критична поведінка моделі на нескорельованій безмасштабній мережі досліджувалася і раніше [63, 87, 88, 178], й у Таблиці 2.3 ми, зокрема, відтворюємо одержані результати.

- $q > 2, 3 < \lambda \leq \lambda_c(q)$

У цьому діапазоні  $q, \lambda$  у системі відбувається фазовий перехід другого роду, див. фазову діаграму на Рис.2.2, а вільній енергії відповідає вираз (2.39). Тоді залежність параметра порядку від температури є наступною:

$$3 < \lambda \leq \lambda_c(q) : m = T_0^{\frac{\lambda-2}{\lambda-3}} \left( \frac{A\tau}{K(\lambda-1)} \right)^{\frac{1}{\lambda-3}}. \quad (2.61)$$

Значення решти критичних показників див. у шостому рядку Таблиці 2.3. Оскільки провідні доданки у вільній енергії моделі Поттса (2.39) при  $3 < \lambda \leq \lambda_c(q)$  співпадають із аналогічними для моделі Ізінга при  $3 < \lambda \leq 5$ , то і поведінка термодинамічних величин в околі точки фазового переходу другого роду описується тим самим набором критичних показників. Тобто, модель Поттса при  $q > 2$  у діапазоні  $3 < \lambda \leq \lambda_c(q)$  належить до того ж самого класу універсальності, що й модель Ізінга у ділянці  $3 < \lambda \leq 5$ . Вперше таку залежність спестережено, використовуючи наближення середнього поля для рівняння стану моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі [93].

### 2.5.2. Скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд

Іншими універсальними характеристиками <sup>6</sup>, які ми дослідимо у цьому підрозділі, будуть скейлінгові функції та відношення для критичних амплі-

<sup>6</sup>Принцип універсальності відіграє важливу роль у теорії критичних явищ [181–183]. Системи, що проявляють схожу критичну поведінку в околі критичної точки відносять до одного класу універсальності. Клас

туд моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі в околі критичної точки. У попередньому підрозділі ми записали термодинамічні функції через представлення критичних амплітуд та критичних показників, див. формули (2.49) та (2.50). Критичні амплітуди залежать від мікроскопічних локальних характеристик системи, однак, існують універсальні їх комбінації [115]. У даному підрозділі ми шукатимемо такі універсальні відношення для критичних амплітуд:

$$R_{\chi}^{\pm} = \Gamma_{\pm} D_c B_-^{\delta-1}, \quad R_c^{\pm} = \frac{A_{\pm} \Gamma_{\pm}}{\alpha B_-^2}, \quad (2.62)$$

$$R_A = \frac{A_c}{\alpha_c} D_c^{-(1+\alpha_c)} B_-^{-2/\beta}, \quad A_+/A_-, \quad \Gamma_+/\Gamma_-. \quad (2.63)$$

Скейлінгові функції можна виміряти експериментально чи знайти за допомогою чисельних симуляцій. В околі критичної точки вільну енергію Гельмгольца  $F(\tau, m)$ , згідно гіпотези скейлінгу, можна записати у формі однорідної узагальненої функції [184]:

$$F(\tau, m) \approx \tau^{2-\alpha} f_{\pm}(x), \quad (2.64)$$

де  $x = m/\tau^{\beta}$  – скейлінгова змінна, а  $f_{\pm}(x)$  – скейлінгова функція (знаки  $+$ ,  $-$  відповідають діапазонам температур  $T > T_c$  й  $T < T_c$  відповідно). Головним змістом рівняння (2.64) є те, що вільну енергію  $F(\tau, m)$ , залежну від двох параметрів, можна записати через скейлінгову функцію однієї змінної  $f_{\pm}(x)$ . Решту термодинамічних функцій також можна представити у формі однорідних узагальнених функцій [184].

Виходячи із представлення для вільної енергії, отримуємо наступні скейлінгові представлення для поля та ентропії:

$$H(m, \tau) = \tau^{\beta\delta} H'_{\pm}(x), \quad (2.65)$$

$$S(m, \tau) = \tau^{1-\alpha} \mathcal{S}(x), \quad (2.66)$$

---

універсальності не залежить від локальних параметрів системи, а визначається її глобальними характеристиками: вимірністю простору, симетрією, типом взаємодій тощо. Якщо системи належать до одного класу універсальності, то окрім критичних показників та показників логарифмічних поправок, для них співпадають вирази для скейлінгових функцій та відношення критичних амплітуд [115].

із відповідними скейлінговими функціями  $H'_{\pm}(x)$  та  $\mathcal{S}(x)$ . Аналогічні скейлінгові функції для теплоємності, ізотермічної сприйнятливості та магнетокалоричного коефіцієнту означають як (див., наприклад, [178]):

$$c_H(m, \tau) = (1 \pm \tau)\tau^{-\alpha}\mathcal{C}_{\pm}(x), \quad (2.67)$$

$$\chi_T(m, \tau) = \tau^{-\gamma}\chi_{\pm}(x), \quad (2.68)$$

$$m_T(m, \tau) = (1 \pm \tau)\tau^{\beta-\gamma}\mathcal{M}_{\pm}(x). \quad (2.69)$$

У попередніх підрозділах знайдено та проаналізовано вирази для вільної енергії у різних діапазонах  $q$  та  $\lambda$ . Область, де спостерігається фазовий перехід другого роду при нецілих значеннях параметра  $\lambda$  можна поділити на 3 ділянки: Region I ( $q = 2, \lambda > 5$ ), Region II ( $1 \leq q < 2, \lambda > 4$ ) та Region III ( $3 < \lambda < 5, q = 2; 3 < \lambda < 4, 1 \leq q < 2; 3 < \lambda \leq \lambda_c(q), q > 2$ ), див. Рис. 2.2. Критичні показники, знайдені у цих ділянках належать до різних класів універсальності. Region I характеризується критичними показниками середнього поля для моделі Ізінга, а Region II відповідає середньопольовим показникам для випадку перколяції. У третій області, Region III, критичні показники стають  $\lambda$ -залежними. Значення відповідних критичних показників див. у Таблиці 2.3. Знайдемо тепер в цих ділянках скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд. Для нецілих  $\lambda > 3$  вільну енергію можна записати як:

$$F(\tau, M) = a_1\tau M^2 + a_2M^{\lambda-1} + \sum_{i=3}^{[\lambda-1]} a_i M^i + O(M^{[\lambda]}), \quad (2.70)$$

де  $M$  – намагніченість, коефіцієнти  $a_i$  задаються формулами (2.28)-(2.32), із урахуванням зв'язку між намагніченістю та параметром порядку. Подібно, як в рівнянні (2.18) позначення  $[l]$  означає, що при обчисленні ми беремо цілу частину від  $l$ . Вважатимемо вираз для вільної енергії моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі (2.70) вихідним при подальшому аналізі у цьому підрозділі. Замінивши змінні, перейдемо до безрозмірної вільної енергії  $f(m, \tau)$  та безрозмірної намагніченості  $m$ . Зберігаючи провідні доданки за

малими  $m$  перепишемо (2.70) у різних ділянках наступним чином:

$$f(m, \tau) = \pm \frac{\tau}{2} m^2 + \frac{1}{4} m^4, \quad (\text{Region I}), \quad (2.71)$$

$$f(m, \tau) = \pm \frac{\tau}{2} m^2 + \frac{1}{4} m^3, \quad (\text{Region II}), \quad (2.72)$$

$$f(m, \tau) = \pm \frac{\tau}{2} m^2 + \frac{1}{4} m^{\lambda-1}, \quad (\text{Region III}). \quad (2.73)$$

Із виразів для вільної енергії ми можемо отримати рівняння стану та вивести решту термодинамічних величин у представленні скейлінгових функцій. Рівняння стану для магнітного поля та ентропії у безрозмірних змінних  $m$  й  $\tau$  запишеться:

$$H(m, \tau) = \partial f(m, \tau) / \partial m|_{\tau}, \quad s(m, \tau) = \mp \partial f(m, \tau) / \partial \tau|_m. \quad (2.74)$$

Записане для різних діапазонів  $q$  та  $\lambda$  магнітне рівняння стану набуде виду:

$$H(m, \tau) = m^3 \pm \tau m, \quad (\text{Region I}), \quad (2.75)$$

$$H(m, \tau) = \frac{3}{4} m^2 \pm \tau m, \quad (\text{Region II}), \quad (2.76)$$

$$H(m, \tau) = \frac{\lambda - 1}{4} m^{\lambda-2} \pm \tau m, \quad (\text{Region III}). \quad (2.77)$$

Щоб знайти рівняння стану для ентропії, візьмемо похідну від вільної енергії за температурою при сталій намагніченості  $m$ , коли залежність від температури  $\tau$  є однаковою у всіх областях фазового переходу другого роду. А тому рівняння зберігатиме свою форму у всіх трьох діапазонах значень  $q-\lambda$ :

$$s = -m^2/2, \quad (\text{Regions I-III}). \quad (2.78)$$

Значення відношення критичних амплітуд для  $\chi_T$ ,  $c_H$ , і  $m_T$  у різних діапазонах наведені у Таблиці 2.5. Для часткового випадку  $q = 2$  ми відтворюємо результати для виразів моделі Ізінга на нескорельованій безмасштабній мережі [88, 178].

Знайдемо скейлінгові функції для вільної енергії та інших термодинамічних функцій. Використовуючи означення (2.64) та беручи до уваги той факт,

Табл. 2.5. Скейлінгові функції та відношення критичних амплітуд для моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі.

	Region I	Region II	Region III
$f_{\pm}(x)$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}$	$\pm \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\lambda-1}}{4}$
$H_{\pm}(x)$	$x^3 \pm x$	$\frac{3}{4}x^2 \pm x$	$\frac{\lambda-1}{4}x^{\lambda-2} \pm x$
$\mathcal{S}(x)$	$-x^2/2$	$-x^2/2$	$-x^2/2$
$\mathcal{C}_{\pm}(x)$	$\frac{x^2}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x^2}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{x^2}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$
$\chi_{\pm}(x)$	$\frac{1}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{1}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$
$\mathcal{M}_{\pm}(x)$	$\frac{x}{3x^2 \pm 1}$	$\frac{x}{3x/2 \pm 1}$	$\frac{x}{(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}/4 \pm 1}$
$A^+/A^-$	0	0	0
$\Gamma^+/\Gamma^-$	2	1	$\lambda - 3$
$R_{\chi}^+$	1	1	1
$R_{\chi}^-$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{\lambda-3}$
$R_c^+$	0	0	0
$R_c^-$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{(\lambda-3)^2}$
$R_A$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\lambda-2}$

що критичні показники  $\alpha$ ,  $\beta$  та інші приймають різні значення у різних діапазонах, див. Рис. 2.2 та Таблицю 2.3, ми перепишемо потенціал Гельмгольца  $F(\tau, m)$  у формі скейлінгових функцій  $f_{\pm}(m/\tau^{\beta})$ . Відповідні вирази для скейлінгових функцій у трьох режимах фазового переходу другого роду моделі Поттса, наведені у Таблиці 2.5. Характерна поведінка скейлінгових функцій вільної енергії  $f_+(x)$  і  $f_-(x)$  зображена на Рис. 2.3a та 2.3b.

При всіх значеннях  $q$  скейлінгові функції характеризуються одноковою властивістю: їхня кривина поступово зростає зі зростанням  $\lambda > 3$ . Це відбувається до певного граничного значення  $\lambda = \lambda_c$ . Граничне значення  $\lambda_c$  залежить від кількості потсівських станів  $q$ . Так для  $\lambda > \lambda_c$  і  $1 \leq q \leq 2$  скейлінгові функції залишаються незмінними: їх форма не змінюється із подальшим збільшенням  $\lambda$ . Логарифмічні поправки до скейлінгу появляються при  $\lambda = \lambda_c$ , а фазовий перехід другого роду спостерігається при  $\lambda > \lambda_c$ , див. Рис. 2.2. Крім того, для  $\lambda > \lambda_c$  й  $q > 2$  фазовий перехід другого роду переходить у перший рід. Суцільні криві на Рис. 2.3 демонструють граничну поведінку скейлінгових

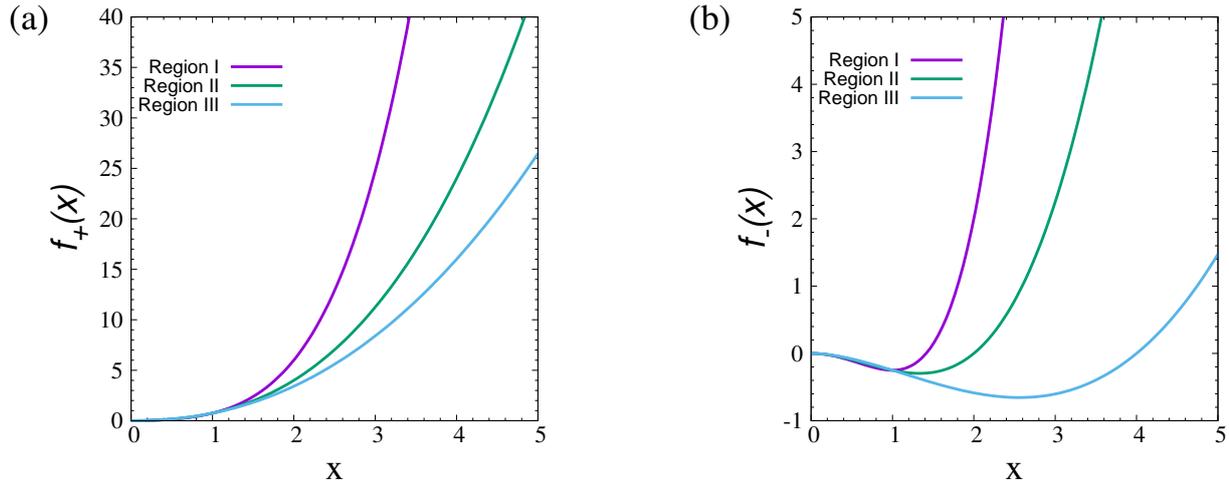


Рис. 2.3. Поведінка скейлінгових функцій вільної енергії (а)  $f_+$  при  $T > T_c$  та (б)  $f_-$  при  $T < T_c$ . Функції залишаються незмінними при  $\lambda > 5$ ,  $q = 2$  та  $\lambda > 4$ ,  $1 \leq q < 2$  (суцільні та штриховані криві, I і II, відповідно). При  $q > 2$  спостерігають фазовий перехід першого роду при  $\lambda > \lambda_c(q)$ . Пунктирна крива III:  $q = 4$ ,  $\lambda = \lambda_c(4) \simeq 3.5$ .

функцій при  $q = 2$ ,  $\lambda > 5$ : скейлінгові функції залишаються незмінними для всіх  $\lambda > 5$ . Схожий тип поведінки справедливий для випадку  $1 \leq q < 2$ , коли значення  $\lambda_c$  змінюються: наприклад,  $\lambda_c(1 \leq q < 2) = 4$  для штрихованої кривої II на рисунку. Пунктирні криві III для випадку  $q = 4$  є прикладом граничної поведінки скейлінгових функцій у діапазоні  $q > 2$ .

Скейлінгова функція ентропії  $\mathcal{S}(x)$  означається через (2.66). Використовуючи вираз (2.78) для ентропії, та беручи до уваги значення критичних показників  $\alpha$  й  $\beta$  з Таблиці 2.3, ми означаємо скейлінгову функцію для ентропії, що є незмінною у всіх діапазонах  $q$ - $\lambda$ :  $\mathcal{S}(x) = -x^2/2$ . Рівняння стану у представленні Вайдома-Гріфітса [185, 186] можна подати у наступних формах:

$$H = m^\delta H_\pm(\tau/m^{1/\beta}), \quad H = \tau^{\beta\delta} H'_\pm(m/\tau^\beta), \quad (2.79)$$

із відповідними скейлінговими функціями  $H_\pm(x)$  та  $H'_\pm(x)$ . Інше представлення рівняння стану виражає намагніченість через магнітне поле (це так зване представлення Генкеля-Стенлі) [184]:

$$m = \tau^\beta \mu_\pm(h/\tau^{\beta\delta}) \quad (2.80)$$

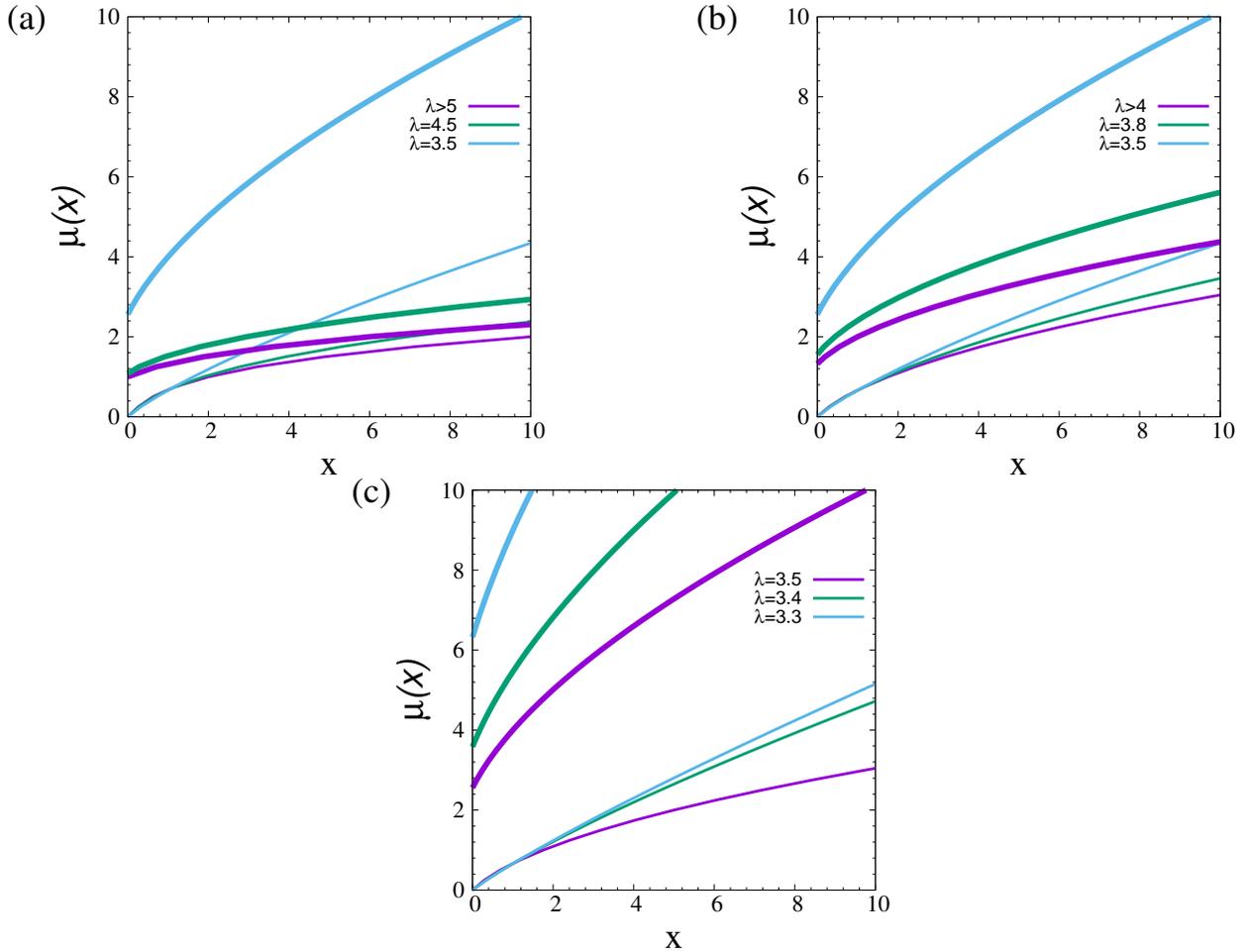


Рис. 2.4. Поведінка скейлінгової функції параметра порядку  $\mu_+(x)$  (світлі криві) й  $\mu_-(x)$  (темні криві) при різних значеннях  $\lambda$  та  $q$ . (а):  $q = 2$ , (б):  $1 \leq q < 2$ , (с):  $q = 4$ . Значення показника  $\lambda$  дано у легенді рисунку.

із відповідною скейлінговою функцією  $\mu_{\pm}(x)$ .

Виходячи із магнітного рівняння стану у діапазонах I–III, що описуються рівняннями (2.75)–(2.77), легко отримати вирази для скейлінгових функцій  $H_{\pm}(x)$ . Відповідні вирази подано в Таблиці 2.5. Звісно, легко переписати ці вирази, й отримати скейлінгові функції у  $h_{\pm}$ -представленні. Поведінка скейлінгових функцій  $\mu_{\pm}(x)$  для різних значень  $\lambda$  та  $q$  показана на Рис. 2.4. Із точної форми рівняння стану легко знайти асимптотичну поведінку скейлінгових функцій. Так, для  $q = 2$  та  $\lambda > 5$  отримуємо, що  $\mu_{\pm}(x) \sim x^{1/3}$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Справедливо, що зі зростанням значення  $\lambda$  скейлінгові функції прямують до безмежності швидше:  $\mu_{\pm}(x) \sim x^{1/(\lambda-2)}$ ,  $x \rightarrow \infty$  для  $3 < \lambda < 5$ . Схожий тип по-

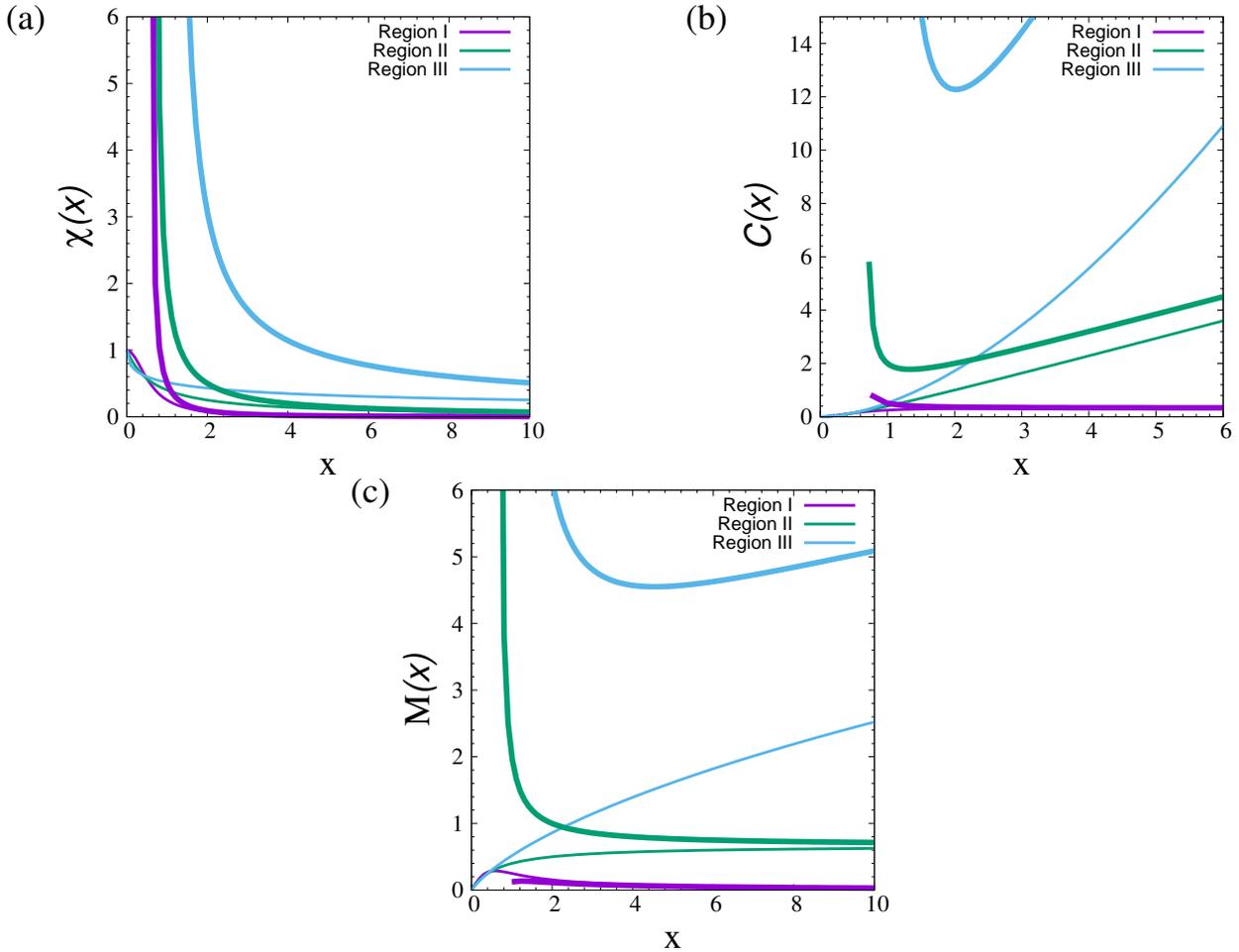


Рис. 2.5. Скейлінгові функції для (а) ізотермічної сприйнятливості, (б) теплоємності та (с) магнетокалоричного коефіцієнту. Світлі криві – функції при  $T > T_c$ :  $\chi_+(x)$ ,  $\mathcal{C}_+(x)$ ,  $\mathcal{M}_+(x)$ . Чорні криві – скейлінгові функції при  $T < T_c$ :  $\chi_-(x)$ ,  $\mathcal{C}_-(x)$ ,  $\mathcal{M}_-(x)$ . Суцільні, штриховані та пунктирні криві відповідають значенням вільної енергії у трьох різних діапазонах значень  $q$  та  $\lambda$  із Таблиці 2.3.

ведінки спостерігається і для інших значень  $q$ . При  $1 \leq q < 2$ ,  $\lambda > 4$  скейлінгові функції  $\mu_{\pm}(x) \sim \sqrt{x}$ ,  $x \rightarrow \infty$  і  $\mu_{\pm}(x) \sim x^{1/(\lambda-2)}$ ,  $x \rightarrow \infty$  при  $3 < \lambda < 4$ . Остання асимптотика справджується і для  $q > 2$  та  $\lambda \leq \lambda_c(q)$ . Зауважимо, що всі світлі криві на Рис. 2.4 беруть свій початок в нулі: це пояснюється відсутністю спонтанної намагніченості при температурах  $T > T_c$ . Величина скейлінгової функції  $\mu_-(x)$  при  $x = 0$  дає значення критичної амплітуди спонтанної намагніченості  $B_-$  (2.50), а із Рис. 2.4 можемо бачити, що вона зростає зі зменшенням  $\lambda$ .

На Рис. 2.5 ми демонструємо поведінку скейлінгових функцій для ізотер-

мічної сприйнятливості (Рис. 2.5а), теплоємності (Рис. 2.5б) та магнетокалоричного коефіцієнту (Рис. 2.5с). Значення потсівської змінної  $q$  та показника  $\lambda$  для побудованих кривих відповідають значенням, для яких отримані скейлінгові функції на Рис.2.3. При  $1 \leq q \leq 2$  та значеннях  $\lambda > \lambda_c(q)$  у системі відбувається фазовий перехід другого роду, але значення критичних показників, як і скейлінгові функції більше не залежать від  $\lambda$ . Однак, для  $q > 2$ ,  $\lambda > \lambda_c(q)$  фазовий перехід переходить у режим першого роду, й відповідні скейлінгові співвідношення не справедливі. В свою чергу у діапазоні нижче  $\lambda_c$ , критичні показники є залежними від  $\lambda$ , так само це справедливо і для скейлінгових функцій (див. рисунок).

### 2.5.3. Про перколяцію на безмасштабних мережах

Проаналізувавши фазовий перехід другого роду у різних діапазонах  $q$  та  $\lambda$ , слід однак розглянути детальніше випадок  $q = 1$ , що відповідає перколяції на нескорельованій безмасштабній мережі. Магнітні критичні показники, що описують асимптотичну поведінку термодинамічних величин наведені у Таблицях 2.3, 2.4. Розглянемо більш детально відповідність між цими магнітними критичними показниками та показниками перколяції. Щоб описати явище перколяції [187, 188] використовують наступні показники та характеристики в околі порогу протікання  $p_c$ <sup>7</sup>: імовірність того, що вибраний вузол належить проникаючому кластеру

$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta, \quad p > p_c, \quad (2.81)$$

кількість кластерів розміру  $s$

$$n_s \sim s^{-\tau} e^{-s/s^*}, \quad (2.82)$$

розмір кластера при критичній концентрації  $p_c$

$$s^* \sim |p - p_c|^{-\sigma}, \quad (2.83)$$

---

<sup>7</sup>Для означеності, розглянемо перколяцію вузлів, тоді змінна  $p$  характеризує імовірність зайнятості вузла.

середній розмір скінченних кластерів

$$\langle s \rangle \sim |p - p_c|^{-\gamma}. \quad (2.84)$$

Вище означені показники перколяції  $\beta$  і  $\gamma$  співпадають із відповідними магнітними критичними показниками  $\beta$  та  $\gamma$  для  $q = 1$ -станової моделі Поттса (див. Табл. 2.3, 2.4). Звідси можна знайти показники скейлінгу для імовірності, що вибраний вузол належить перколяційному кластеру та середнього розміру скінченних кластерів для перколяції на нескорельованій безмасштабній мережі:

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{\lambda-3}, & 3 < \lambda < 4, \\ 1, & \lambda > 4, \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\gamma = 1, \quad \lambda > 3. \quad (2.86)$$

Показники  $\tau$  і  $\sigma$  можна знайти із відповідних скейлінгових співвідношень [187, 188]:

$$\sigma\beta = \tau - 2, \quad (2.87)$$

$$\gamma = (3 - \tau)/\sigma. \quad (2.88)$$

Підставляючи значення показників  $\beta$  (2.85) та  $\gamma$  (2.86) у вирази (2.87)-(2.88), отримуємо наступні значення для показників перколяції  $\tau$  і  $\sigma$ :

$$\tau = \begin{cases} \frac{2\lambda-3}{\lambda-\frac{5}{2}}, & 3 < \lambda < 4, \\ \frac{5}{2}, & \lambda > 4, \end{cases} \quad (2.89)$$

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\lambda-3}{\lambda-2}, & 3 < \lambda < 4, \\ 1/2, & \lambda > 4. \end{cases} \quad (2.90)$$

Аналізуючи критичну поведінку намагніченості моделі Поттса у області високих температур при  $2 < \lambda < 3$ , (2.47), для показників перколяції при  $p_c = 0$  отримуємо  $\beta = 1/(3 - \lambda)$ ,  $\gamma = -1$ .

Формули (2.85), (2.86), (2.89) та (2.90) відповідають значенням показників перколяції на нескорельованій безмасштабній мережі [180, 189], а також вони описують моделі, що відповідають за поширення вірусів [105, 190]. Однак, усі

вище згадані роботи не описували точно випадок  $\lambda = 4$  та можливі логарифмічні поправки, що появляються. Більш того, в огляді [191], де також розглядаються особливості перколяції на нескорельованій безмасштабній мережі, нічого не зазначено про появу логарифмічних поправок при  $\lambda = 4$ . В попередньому підрозділі ми одержали набір логарифмічних поправок до скейлінгу  $q = 1$ -станової моделі Поттса при  $\lambda = 4$ , як і було передбачено із аналізу вільної енергії в теорії Ландау для систем із довільною симетрією на нескорельованій безмасштабній мережі [108]. Ці показники приведені в першому рядку Таблиці 2.4. Порівняймо одержані значення цих показників із показниками для перколяції на  $d = 6$ -вимірній ґратці:  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = \hat{\alpha}_c = 2/7$  (див. наприклад [89]). Порівнюючи значення показників логарифмічних поправок перколяції на ґратці при  $d = 6$  та на безмасштабній мережі при  $\lambda = 4$  можна зробити висновок, що вони належать до різних класів універсальності. Легко перевірити, що показники скейлінгу із останнього рядка таблиці 2.4 задовільняють скейлінгові співвідношення для показників логарифмічних поправок [88, 192, 193]:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\delta - 1) &= \delta\hat{\delta} - \hat{\gamma}, & \hat{\alpha} &= 2\hat{\beta} - \hat{\gamma}, \\ \hat{\gamma}_c &= \hat{\delta}, & \hat{\alpha}_c &= \frac{(\gamma + 2)(\hat{\beta} - \hat{\gamma})}{\beta + \gamma} + \hat{\gamma}.\end{aligned}$$

#### 2.5.4. Стрибок теплоємності моделі Ізінга

Відомо, що ізотермічна сприйнятливість  $\chi_T$  та магнетокалоричний коефіцієнт  $m_T$  для магнітних систем є сильно розбіжними величинами, в той час як теплоємність  $c_H$  може й не розбігатись при  $T_c$ . У наближенні середнього поля перші дві термодинамічні величини в околі критичної точки  $\tau = |T - T_c|/T_c = 0$  розбігаються:  $\chi_T \sim \tau^{-\gamma}$ ,  $m_T \sim \tau^{-\omega}$  із показниками  $\gamma^{\text{mfa}} = 1$ ,  $\omega^{\text{mfa}} = 1/2$  (див. Табл. 2.3). Стрибок теплоємності в критичній точці  $T_c$  запишеться:

$$\delta c_H = c_H(T \rightarrow T_c^-) - c_H(T \rightarrow T_c^+), \quad (2.91)$$

із значенням в наближенні середнього поля  $\delta c_H^{\text{mfa}} = 3/2$ , а сама теплоємність  $c_H \sim \tau^{-\alpha}$  із показником  $\alpha^{\text{mfa}} = 0$ .

У даному підрозділі ми дослідимо стрибок теплоємності моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі. Наближення середнього поля для моделі Ізінга на нескорельованій мережі із замороженим безладом відповідає точному розв'язку для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі [61, 62, 66] (див. Розділ 4 для більш детального аналізу). Для випадку відпаленої мережі спіни та конфігурації флюктуують у часі одночасно, що призводить до необхідності усереднення статистичної суми, а не вільної енергії. Гамільтоніан моделі Ізінга на відпаленій мережі при відсутності зовнішнього поля запишеться [61]:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{N\langle k \rangle} \sum_{i>j} k_i k_j S_i S_j. \quad (2.92)$$

Тут спіни можуть приймати 2 можливі значення  $S_i = \pm 1$ ,  $N$  - кількість вузлів, а  $k_i, k_j$  - ступені вузлів, що задовільняють степеневий розподіл (2.2). Особливістю гамільтоніана (2.92) є те, що взаємодії між вузлами можна записати у сепарабельній формі. Це в свою чергу дає змогу використати перетворення Стратоновича-Габбарда, як для моделі Ізінга на повному графі [194], див. також [21]. А нас цікавитиме поведінка стрибка теплоємності в діапазоні  $\lambda > 5$ , коли критичні показники співпадають із стандартними показниками теорії середнього поля для моделі Ізінга. Зберігаючи провідні доданки за  $N$  у статистичній сумі, її можна переписати у такому вигляді (див. [21] чи Розділ 4 для детальнішого аналізу):

$$Z_N(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N\left(-\frac{\langle k \rangle x^2}{2}(T-T_c) - \frac{\langle k^4 \rangle x^4}{12}\right)} dx, \quad \lambda > 5, \quad (2.93)$$

де  $T_c = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ , а несуттєвими для подальшого аналізу множниками ми нехтуємо. Використовуючи метод найшвидшого спуску знаходимо точку максимуму для підінтегральної функції статистичної суми ( $x_*$ ) при температурі  $T > T_c$  ( $x_* = 0$ ) та  $T < T_c$  ( $x_* = \sqrt{-\frac{3\langle k \rangle}{\langle k^4 \rangle}(T - T_c)}$ ). Вільна енергія в цих діапазонах

температур запишеться наступним чином:

$$f(T) = 0, \quad T > T_c, \quad (2.94)$$

$$-\frac{3\langle k \rangle^2}{4\langle k^4 \rangle} T(T - T_c)^2, \quad T < T_c. \quad (2.95)$$

Використовуючи означення для теплоємності із виразів вільної енергії (2.94) отримаємо:

$$c_H = 0, \quad T > T_c, \quad (2.96)$$

$$-\frac{9\langle k \rangle^2}{2\langle k^4 \rangle} T^2 + \frac{6\langle k \rangle^2}{2\langle k^4 \rangle} T T_c, \quad T < T_c. \quad (2.97)$$

Стрибок теплоємності при критичній температурі  $T_c$  задається різницею теплоємностей вище та нижче критичної точки і становитиме:

$$\delta c_H = \frac{3\langle k^2 \rangle^2}{2\langle k^4 \rangle}. \quad (2.98)$$

Підставляючи середні значення моментів, отримані із степеневого розподілу ступенів вузлів (2.2), отримуємо:

$$\delta c_H = \frac{3(\lambda - 5)(\lambda - 1)}{2(\lambda - 3)^2}, \quad \lambda > 5. \quad (2.99)$$

У границі великих значень  $\lambda$  стрибок теплоємності рівний  $\delta c_H = 3/2$ , що співпадає із значенням для стрибка теплоємності моделі Ізінга в середньому полі для повного графа.

Відомо, що модель Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $\lambda > 5$  характеризується критичними показниками середнього поля. Однак, ми спостерігаємо, що значення для стрибка теплоємності моделі  $\delta c_H$  при  $\lambda > 5$  не співпадає із відповідним середньопольовим значенням та є залежним від  $\lambda$ , досягаючи очікуваного значення  $\delta c_H = 3/2$  тільки в границі  $\lambda \rightarrow \infty$ . Графік залежності  $\delta c_H(\lambda)$  показано на Рис. 2.6 кривою більшої товщини. Схожий тип залежності спостерігаємо і для моделі Ізінга на ґратках із вимірністю простору  $d > 4$ . На рисунку прямокутникам відповідають результати Монте-Карло

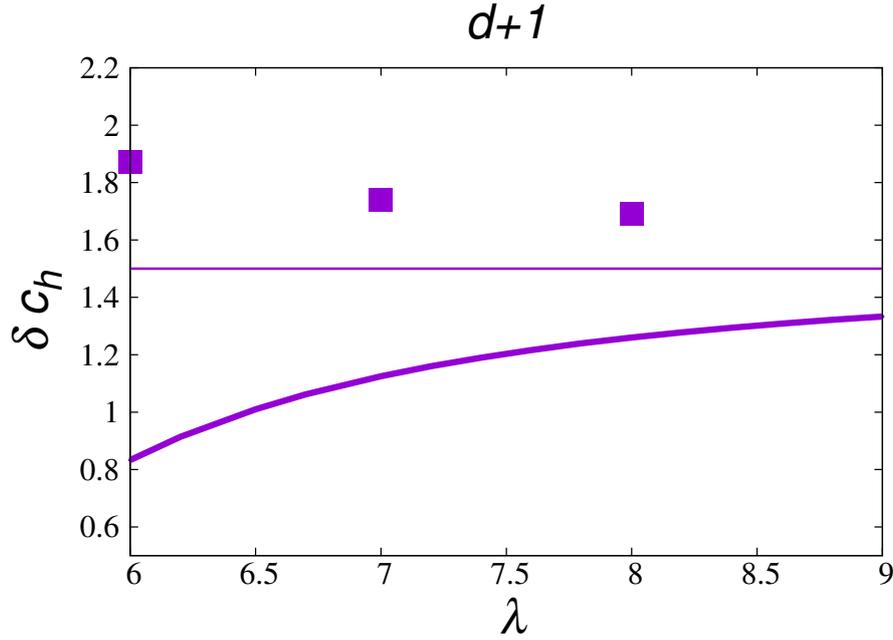


Рис. 2.6. Стрибок теплоємності на ґратках при вимірності простору  $d > 4$  (прямокутники, результати Монте-Карло симуляцій [195]) та на відпаленій безмасштабній мережі в діапазоні  $\lambda > 5$ , суцільна крива на основі рівняння (2.99). Тонка крива відповідає точному значенню стрибка теплоємності з теорії середнього поля  $\delta c_H = 3/2$ . У границі великих  $\lambda$  чи  $d$  стрибок  $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = \delta c_H(d \rightarrow \infty) = 3/2$  наближається до точного значення знизу чи зверху від прямої відповідно.

симуляцій для  $d = 5, 6, 7$ -вимірних ґраток [195]. У випадку ґраткових систем стрибок теплоємності виявляється також залежним від вимірності простору і прямує до значення з теорії середнього поля тільки при високих вимірностях простору  $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = \delta c_H(d \rightarrow \infty) = 3/2$ . Іншою важливою відмінністю між поведінкою теплоємності  $c_H$  моделі Ізінга на ґратках та на безмасштабних мережах є поведінка при верхньому критичному значенні  $d$  та  $\lambda$ . В той час, як критичний показник для обох випадків співпадає  $\alpha = 0$ , теплоємність  $c_H$  залишається розбіжною для ґраток при  $d = 4$  (логарифмічна розбіжність із показником логарифмічної поправки до скейлінгу  $\hat{\alpha} = 1/3$ ), тоді як у випадку мережі при  $\lambda = 5$  показник скейлінгу  $\hat{\alpha} = -1$  є від'ємним, а тому  $\delta c_H = 0$ .

## 2.6. Режим фазового переходу першого роду

У діапазоні  $q > 2$ ,  $\lambda > \lambda_c(q)$  у моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі відбувається фазовий перехід першого роду (див. Рис. 2.2). Як раніше зазначалось у підрозділі 2.4.3, наступний (після квадратичного) провідний доданок за степенем параметра порядку у виразі для вільної енергії матиме від'ємне значення. Типова поведінка вільної енергії у цьому випадку показана на Рис. 2.2b. Чим більше значення параметра  $\lambda$ , тим більше доданків вільної енергії слід брати до уваги, щоб отримати правильну асимптотику. Тому нижче для аналізу критичної поведінки обмежимося діапазоном  $\lambda_c(q) < \lambda < 4$ , для якого вільна енергія задана рівнянням (2.41). Температуру фазового переходу першого роду  $T_c^{1st}$  знаходимо із умови  $g(m = 0, T_c^{1st}) = g(m \neq 0, T_c^{1st})$  (поведінку вільної енергії при  $T_c^{1st}$  описує червона (середня) крива на Рис. 2.2b):

$$T_c^{1st} = T_0 + \left( \frac{-B}{3K(\lambda - 1)(\lambda - 3)} \right)^{\frac{\lambda-3}{\lambda-4}} \frac{2K(\lambda - 1)(\lambda - 4)}{A}. \quad (2.100)$$

Для стрибка параметра порядку  $\Delta m$  при критичній температурі  $T_c$  отримуємо:

$$\Delta m = \left( \frac{-B}{3K(\lambda - 1)(\lambda - 3)} \right)^{\frac{1}{\lambda-4}}. \quad (2.101)$$

Іншою характеристикою фазового переходу першого роду є прихована теплота  $Q$ . Ця термодинамічна характеристика задається як:

$$Q = \Delta S \cdot T_c^{1st}, \quad (2.102)$$

де  $\Delta S$  – стрибок ентропії при температурі  $T_c$ . Із р-ня (2.41) для вільної енергії знаходимо ентропію системи:

$$S = - \left( \frac{\partial g}{\partial T} \right)_{H,m}. \quad (2.103)$$

Розглядаючи ентропію при температурі фазового переходу можна знайти приховану теплоту фазового переходу першого роду у діапазоні  $\lambda_c(q) < \lambda < 4$ :

$$Q = \frac{A}{2} (\Delta m)^2. \quad (2.104)$$

## 2.7. Висновки

У цьому розділі ми дослідили критичну поведінку моделі Поттса на нескорельованій безмасштабній мережі в наближенні неоднорідного середнього поля, однак, на відміну від авторів [93], що для дослідження використовували рівняння стану, ми розглянули вільну енергію системи. В режимі фазового переходу другого роду ми вперше отримали скейлінгові функції моделі та відношення критичних амплітуд. Ці величини, подібно до критичних показників, є кількісними характеристиками класу універсальності. Цікаво зазначити, що хоча критичний показник ізотермічної сприйнятливості  $\gamma$  не є  $\lambda$ -залежним, відповідне відношення критичних амплітуд  $\Gamma^+/\Gamma^-$  залежить від  $\lambda$ .

При дослідженні явища перколяції на безмасштабних мережах (границя  $q \rightarrow 1$  моделі Поттса) ми показали виникнення логарифмічних поправок до скейлінгу.

Недавні симуляції показали, що стрибок теплоємності моделі Ізінга на ґратках при вимірностях простору  $d > 4$ , є залежним від  $d$  і прямує до середньопольового значення  $\delta c_H = 3/2$  тільки в границі  $d \rightarrow \infty$  [195]. Проведений нами аналіз поведінки питомої теплоємності моделі Ізінга на безмасштабній мережі свідчить про подібний ефект: стрибок теплоємності  $\delta c_H$  є  $\lambda$ -залежним в діапазоні  $\lambda > 5$  і  $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = 3/2$ .

## РОЗДІЛ 3

# НУЛІ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ МОДЕЛІ ІЗІНГА НА ПОВНОМУ ГРАФІ

В цьому розділі ми приведемо результати отримані за допомогою аналізу нулів статистичної суми моделі Ізінга в площині комплексної температури (нулі Фішера) та комплексного магнітного поля (нулі Лі-Янга). Ми скористаємося методом запропонованим в роботі [196] та узагальнимо його на випадок комплексних полів. Розгляд задачі на повному графі дозволить отримати точне представлення для статистичної суми в комплексній площині (підрозділ 3.1). Нулі Фішера будуть проаналізовані в підрозділі 3.2, а нулі Лі-Янга – у підрозділі 3.3. Рух нулів Фішера при прикладенні дійсного магнітного поля буде проаналізовано в підрозділі 3.4. Загальні висновки підсумовано у підрозділі 3.5. Основні результати дослідження опубліковано в [21, 22].

### 3.1. Статистична сума

У цьому підрозділі ми розглянемо модель Ізінга із далекосяжною взаємодією, що еквівалентна гратковій версії моделі у представленні середнього поля [194, 197]. Її також можна вважати моделлю Ізінга на повному графі, де кожен вузол графу пов'язаний із будь-яким іншим вузлом, формуючи еквівалентні міжспінові зв'язки. Аналіз комплексних нулів статистичної суми моделі, представленої у цьому розділі, має на меті два завдання. З одного боку, ми доповнюємо результати статті [196], одержані для нулів Фішера, обчислюючи рух цих нулів у дійсному полі та використовуючи схожу методологію для ви-

вчення нулів Лі-Янга. Нулі Лі-Янга для точної статистичної суми моделі Ізінга на повному графі аналізували і раніше [129], тут ми отримуємо результати для розкладеної функції: знаходячи координати нулів Лі-Янга у приведених змінних, увібравши залежність від розміру ситеми. З іншого боку, ми представляємо метод, який використовуватимемо у Розділі 4 для схожого аналізу нулів моделі на відпаленій мережі. Гамільтоніан моделі Ізінга на повному графі запишеться наступним чином:

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2N} \sum_{l \neq m} S_l S_m + H \sum_l S_l. \quad (3.1)$$

Тут, індекси  $l, m$  нумерують вузли графа, так що  $(l, m) = 1, \dots, N$ ;  $S_l = \pm 1$  - значення ізінгівських спінів;  $H$  - зовнішнє магнітне поле й сума  $\sum_{l \neq m}$  береться за усіма парами вузлів. Взаємодія між спінами обернено пропорційна кількості вузлів, що надає моделі сенсу у термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$ . Ми можемо одержати інтегральне представлення статистичної суми моделі (3.1) використовуючи рівність  $(\sum_l S_l)^2 = N + \sum_{l \neq m} S_l S_m$ , тоді вираз для  $N$ -частинкової статистичної суми запишеться як:

$$Z_N(T, H) = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{-\frac{\beta}{2} N} \prod_{l=1}^N \sum_{S_l = \pm 1} \exp \left( \frac{\beta}{2N} (\sum_l S_l)^2 + \beta H \sum_l S_l \right). \quad (3.2)$$

Виконавши перетворення Габбарда-Стратоновича, ми можемо записати статистичну суму у виді, де суму за  $S_l$  можна узяти точно:

$$Z_N(T, H) = e^{-\frac{\beta}{2} N} \sqrt{\frac{N\beta}{2\pi}} \prod_{l=1}^N \sum_{S_l = \pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{-Nx^2\beta}{2} + \sum_m S_m \beta(x + H) \right) dx. \quad (3.3)$$

Виконуючи підсумовування, ми одержуємо інтегральне представлення для статистичної суми моделі Ізінга на повному графі:

$$Z_N(T, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( \frac{-Nx^2}{2T} + N \ln \cosh[(x + H)/T] \right) dx, \quad (3.4)$$

де ми явно записуємо температуру  $T = \beta^{-1}$ , покладаючи сталу Больцмана  $k_B = 1$ . У (3.4) та у всіх наступних інтегральних виразах для статистичної суми ми опускаємо несуттєві для подальшого аналізу нулів множники.

У класичному підході, щоб отримати термодинамічні функції з інтегралу (3.4), використовують метод найменшого спуску ( див. напр. [194]). Зокрема, в моделі відбувається фазовий перехід другого роду при  $T_c = 1$ , що описується стандартними середньопольовими значеннями критичних показників:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \delta = 3, \quad \gamma = 1. \quad (3.5)$$

Для зручності доцільно переписати статистичну суму (3.4) у термінах приведеної температури  $t = (T - T_c)/T_c = T - 1$ . Замінивши змінну інтегрування  $\sqrt{N}x/T \rightarrow x$ , ми одержуємо [196]:

$$Z_N(t, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2(t+1)}{2} + N \ln \cosh[x/\sqrt{N} + H/(t+1)]\right) dx. \quad (3.6)$$

Цікавлячись властивостями статистичної суми, ми використаємо наближення для (3.6), розкладаючи функцію при великих  $N$  та малих  $H$ . Зберігаючи провідні за  $1/N$  доданки та доданок лінійний за  $H$ , ми розкладаємо функцію в експоненті в границі  $N \rightarrow \infty$  та отримуємо [196]:

$$Z_N^{\text{exp}}(t, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-tx^2}{2} - \frac{x^4}{12N} + \frac{x\sqrt{N}H}{t+1} + O(1/N^2)\right) dx. \quad (3.7)$$

У решті цього розділу ми проаналізуємо вирази для точної та наближеної статистичної суми моделі Ізінга на повному графі, рівняння (3.6) та (3.7).

## 3.2. Нулі Фішера

Ми розпочнемо аналіз із точного представлення статистичної суми у випадку нульового зовнішнього поля. Спершу ми отримаємо нулі Фішера, розв'язуючи для статистичної суми (3.6) при  $H = 0$  систему рівнянь  $\text{Re } Z(t, H) = 0$

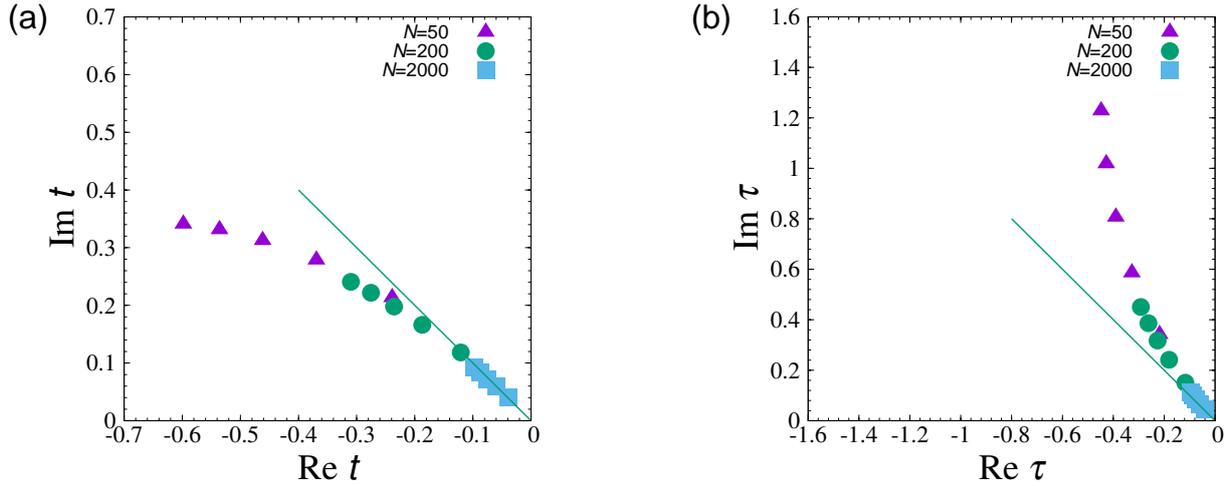


Рис. 3.1. Перші п'ять нулів Фішера для точного представлення статистичної суми (3.6) в залежності від розміру системи  $N$  (a) у комплексній  $t$  площині ( $t = T - 1$ ) та (b) комплексній  $\tau$  площині  $\tau = 1 - 1/T$ . Зі збільшенням  $N$ , нулі акумулюються у околі критичної точки, перетинаючи дійсну вісь при  $t = \tau = 0$ . Суцільна крива утворює кут  $\varphi = \pi/4$  із дійсною віссю.

та  $\text{Im } Z(t, H) = 0$  відносно комплексної змінної  $t = \text{Re } t + i \text{Im } t$ . На Рис. 3.1a ми наводимо чисельні розв'язки перших п'яти нулів Фішера у площині  $t$  для  $N = 50, 200, 2000$ . Нулі лягають на криву і в околі критичної точки наближаються до дійсної осі, утворюючи кут  $\varphi$  із її від'ємним напрямом.

Зручно досліджувати нулі у іншому температурному представленні. Означимо приведену обернену температуру як:

$$\tau = (1/T_c - 1/T)/(1/T_c) = 1 - 1/T, \quad (3.8)$$

при  $H = 0$  із (3.4) отримуємо:

$$Z_N(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-Nx^2(1-\tau)}{2} + N \ln \cosh[(1-\tau)x]\right) dx. \quad (3.9)$$

Нулі статистичної суми (3.9) в площині комплексних значень  $\tau$  показані на Рис. 3.1b. Із рисунків легко бачити, що нулі формують гладкі криві та “конденсуються” в околі критичної точки ( $t = \tau = 0$ ), а зі збільшенням  $N$  прагнуть перетнути додатню дійсну вісь температур у критичній точці. Використовуючи відомі значення критичних показників та відношення амплітуд, ми можемо

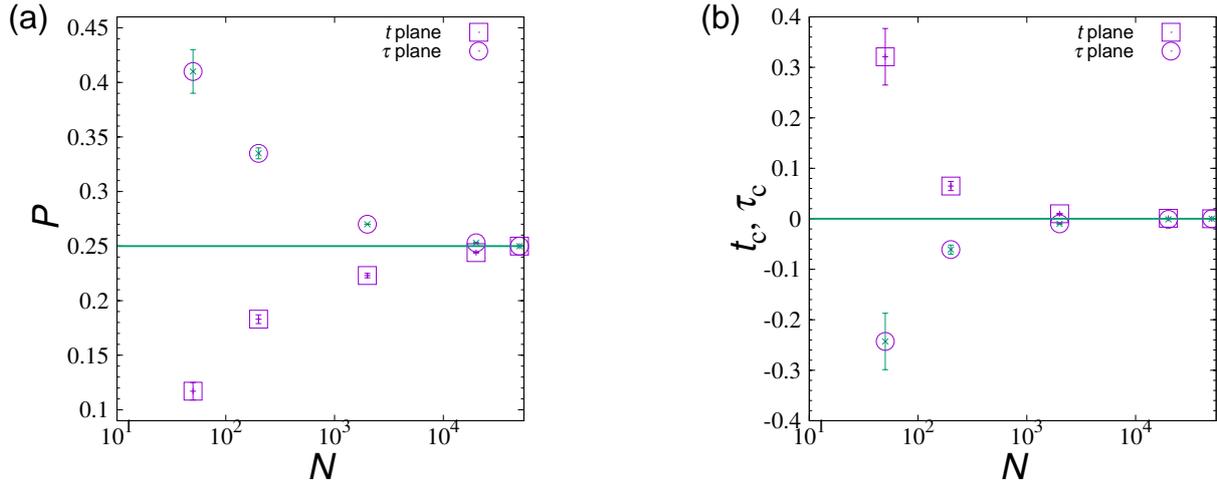


Рис. 3.2. Значення (а) приведенного кута  $P = \varphi/\pi$  та (б) критичної температури для точного виразу статистичної суми отримане з підгонки за першими п'ятьма нулями Фішера при різних  $N$ . Квадрати: результати у комплексній  $t$ -площині; кружечки: результати у комплексній  $\tau$ -площині; лінії: точні результати. Що більший розмір системи, тим точніша підгонка. Для  $N > 100$  інтервал точності є меншим, за розмір символів, використаних у рисунку.

знайти очікуване значення кута  $\varphi$  під яким нулі перетинають дійсну вісь. Підставляючи (3.5) у (1.10) та беручи відповідне значення відношення амплітуд теплоємності  $A_+/A_- = 0$  ми отримуємо

$$\varphi = \pi/4. \quad (3.10)$$

Це значення показано на Рис. 3.1 суцільною кривою. Той факт, що лінії, вздовж яких лежать нулі, зі збільшенням  $N$  утворюють такий самий кут  $\varphi$  із дійсною віссю в  $t$ - і в  $\tau$ - площинах підтверджує конформну інваріантність кута  $\varphi$  – його незалежність від будь-якого аналітичного перетворення у комплексній площині. Однак, наближення кута до його значення у термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$  є залежним від параметризації. Дійсно, залежно від параметризації, криві на Рис. 3.1 прямують до асимптотики знизу (рис. а) чи зверху (рис. б). Це також підтверджує Рис. 3.2, де показано як кут  $\varphi$  та критична температура змінюються з  $N$ .

Чисельно розв'язуючи систему нелінійних рівнянь ми отримали координати перших п'яťох нулів Фішера для системи розміром до  $N = 50000$ . Апро-

ксимуючи ці точки прямою ми знаходимо значення кута та точку перетину цих ліній із дійсною віссю (критичну температуру). Що більший розмір системи, то точніша підгонка (для  $N > 100$  інтервал точності менший за розмір символів, використаних у рисунку). Починаючи з  $N = 5000$ ,  $\varphi$  відрізняється від точного значення ( $\varphi = \pi/4$ ) менш ніж на 1% в той час, як критична температура відрізняється від точного значення при  $t = 0$  менш ніж на 1% починаючи з  $N = 10000$ . Рис. 3.1 та 3.2 демонструють поведінку нулів Фішера для точної статистичної суми (3.4) в площині комплексної температури. Результати для кута  $\varphi$  та критичної температури, отримані на їх основі при порівнянні із точними результатами, демонструють дві характерні властивості: (i) спостережувані стають точнішими при збільшенні  $N$  та (ii) краще узгоджуються із очікуваними значеннями при менших значеннях індексу  $j$ .

Зараз звернемо увагу на нулі наближеної статистичної суми (3.7), щоб перевірити, як згадані вище властивості працюють для такого випадку. При нульовому магнітному полі, зберігаючи провідні члени розкладу за  $1/N$ , статистичну суму (3.7) можна записати

$$Z_N^{\text{exp}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2 t}{2} - \frac{x^4}{12N}\right) dx. \quad (3.11)$$

Перші кілька нулів Фішера для наближеної статистичної суми (3.11) показані у комплексній  $t$ -площині на Рис. 3.3a для різних значень  $N$ . Схоже, як і для точної статистичної суми (див. Рис. 3.1a), зі збільшенням  $N$  нулі акумулюються в околі критичної точки й прагнуть перетнути дійсну вісь у цій точці. Очевидною відмінністю у поведінці нулів для точної та розкладеної статистичної суми є те, що у останньому випадку кут конденсації нулів є дуже стійким та майже не залежить від  $N$ . Причина стає очевидною, якщо підінтегральну функцію у (3.11) записати у формі

$$Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-z x^2 - x^4\right) dx, \quad (3.12)$$

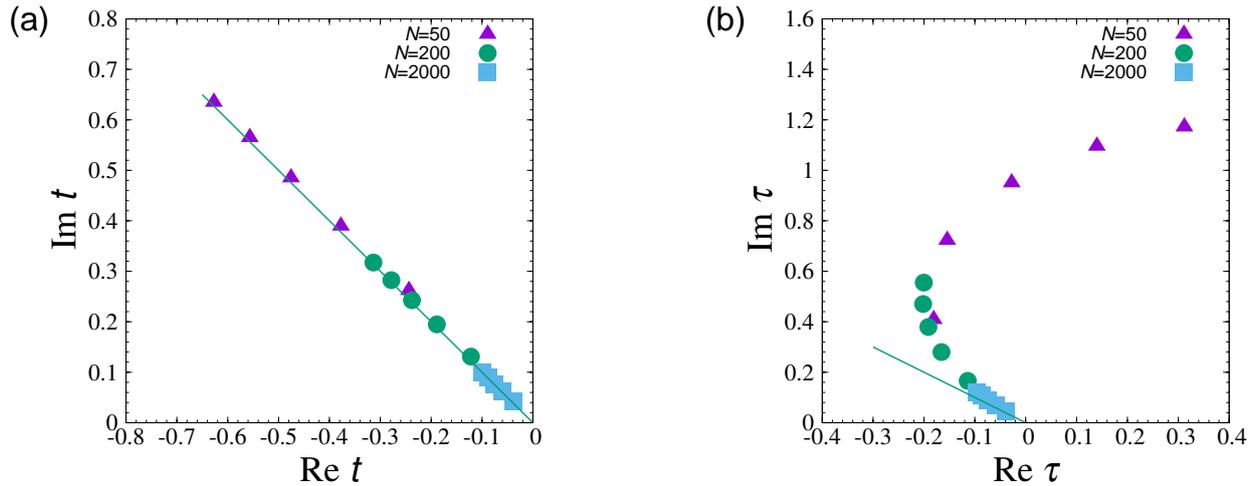


Рис. 3.3. Перші п'ять нулів Фішера для наближеної статистичної суми при різних значеннях  $N$  (а) у комплексній  $t$  площині, р-ня (3.11) та (б) комплексній  $\tau$  площині, р-ня (3.14). Суцільна лінія утворює кут  $\varphi = \pi/4$  із дійсною віссю.

де залежність від  $N$  та температури включена у нову скейлінгову змінну  $z$

$$z = \sqrt{3N}t. \quad (3.13)$$

Легко помітити, що зв'язок між двома наборами нулів  $t_j(N_1)$  та  $t_j(N_2)$ , знайдених для різних розмірів системи  $N_1$  і  $N_2$ , визначається простою пропорцією:  $t_j(N_1) = t_j(N_2)\sqrt{N_1/N_2}$ . Це в свою чергу демонструє той факт, що для різних розмірів системи нулі лежать вздовж однієї прямої на Рис. 3.3а. Той самий вираз (3.11), записаний для різних значень  $N$  у змінній  $\tau$  набуває вигляду

$$Z_N^{\text{exp}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2(\tau - \tau^2)}{2} - \frac{x^4(1 - \tau)^4}{12N}\right) dx. \quad (3.14)$$

Тут  $\tau$ -представлення є нелінійним і нулі є нетривіальними функціями  $N$ . Перші кілька нулів зображені на Рис. 3.3б, де ми спостерігаємо схожу поведінку як на Рис. 3.1 для точної статистичної суми: набір нулів обчислений при різних  $N$  формує схожі криві. Однак, обчислюючи (3.14) в околі критичної точки при малих  $\tau$  та зберігаючи провідний лінійний доданок за  $\tau$ , ми приходимо для виразу для статистичної суми  $Z_N^{\text{exp}}(\tau)$ , що співпадає з відповідним представленням (3.7) для  $Z_N^{\text{exp}}(t)$  у якому  $t$  можна замінити на  $\tau$ . При відсутності магнітного

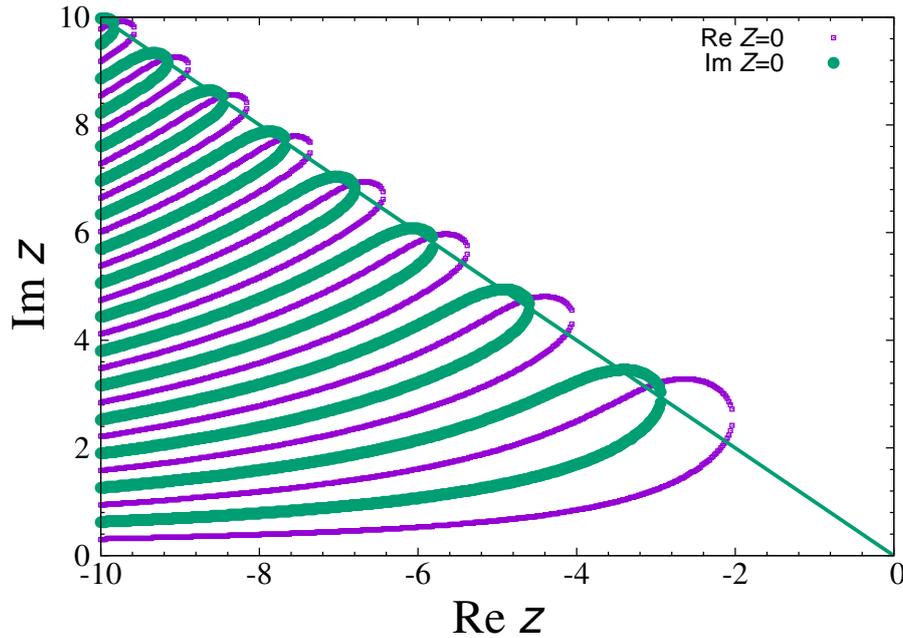


Рис. 3.4. Розташування нулів для дійсної та уявної частини розкладеної статистичної суми (3.12) зображено тонкими та товстими кривими відповідно. Точки, де криві різних типів перетинаються, дають координати нулів Фішера. У асимптотичній границі  $N \rightarrow \infty$  вони лежать вздовж прямої.

поля в околі критичної точки функції  $Z_N^{\text{exp}}(\tau)$  та  $Z_N^{\text{exp}}(t)$  набувають форми, заданої р-ням (3.11). Зокрема, в цьому наближенні  $Z_N^{\text{exp}}(\tau)$  розглядалася в роботі [196].

Нулі статистичної суми (3.12) в комплексній  $z$ -площині показані на Рис. 3.4. Тонкі та товсті криві відповідають розв'язкам системи рівнянь  $\text{Re } Z(z) = 0$  та  $\text{Im } Z(z) = 0$  відповідно. Точки перетину кривих різного типу задають положення нулів Фішера. У границі  $N \rightarrow \infty$  вони лежать вздовж асимптотичної прямої, утворюючи кут  $\varphi = \pi/4$  та починаються у критичній точці (суцільна пряма на рисунку). Із рисунку очевидно, що чим вищий порядок нуля, тим точніше він лягає на пряму. Ця залежність більш детально продемонстрована на Рис. 3.5, що описує поведінку кута  $\varphi$  та оцінки критичної температури  $z_c$ , коли вони отримані з лінійної апроксимації нулів Фішера в діапазоні  $j = j_{\min}, \dots, j_{\max}$ . Підгонка для вищих порядків нулів  $j$  дає кращі результати. Ця поведінка відрізняється від тієї, що спостерігаємо для нулів у

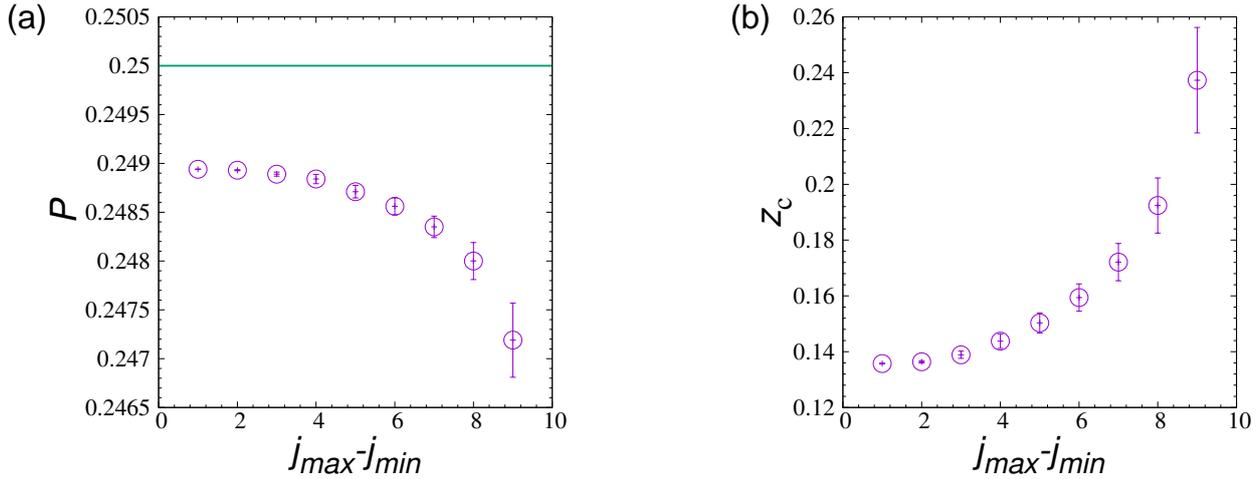


Рис. 3.5. Оцінки (а) для приведенного кута  $P = \varphi/\pi$  і (б) для критичної температури  $z_c$  статистичної суми (3.12), отримані з апроксимації нулів Фішера у діапазоні  $j = j_{\min}, \dots, j_{\max}$  для  $j_{\max} = 10$  та при різних значеннях  $j_{\min}$ . Суцільна крива на рисунку зліва відповідає точному значенню  $P = 1/4$ .

комплексних  $t$  чи  $\tau$  площинах (див. Рис. 3.2) та пояснюється виглядом скейлінгової змінної (3.13), яка увібрала у себе залежності від температури та розміру системи.

Координати перших дев'яти нулів Фішера у комплексній  $z$  площині, отримані з чисельного розв'язку системи рівнянь (1.9), наведено у лівій колонці Таблиці 3.1. Як легко бачити із таблиці, в той час, як порядок нулів  $j$  зростає, їх дійсна та уявні частини починають співпадати, що відповідає наближенню значення  $\varphi$  до очікуваного  $\varphi = \pi/4$  (див. також Рис. 3.4). Значення  $z_j$  для вищих  $j$  можна знайти асимптотично, переписавши статистичну суму (3.12) через спеціальні функції:

$$Z(z) = \frac{\sqrt{z}}{4} \exp\left(\frac{z^2}{8}\right) K_{1/4}\left(\frac{z^2}{8}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{5/4}} \exp\left(\frac{z^2}{8}\right) D_{-1/2}\left(\frac{z}{2^{1/2}}\right), \quad (3.15)$$

де  $K_{1/4}(x)$  та  $D_{-1/2}(x)$  є функціями Бесселя та функціями параболічного циліндра, відповідно [198]. Для провідних доданків у асимптотичному розкладі змінна координата нуля  $z_j$  запишеться[196]:

$$z_j \simeq 2(2\pi j)^{1/2} \exp(3\pi i/4) \left(1 + O(1/j)\right), \quad (3.16)$$

Табл. 3.1. Нулі Фішера для статистичної суми (3.12). Друга колонка відповідає нашим чисельним результатам для нулів порядку  $j = 1, \dots, 9$ . У третій колонці вони порівнюються зі значеннями, заданими апроксимаційною формулою (3.16). Коли цифри у лівій та правій колонках співпадають, вони підкреслені. Починаючи з  $j = 9$  чисельно отримані значення співпадають із асимптотично передбаченими з представленою точністю.

$j$	Чисельно	Р-ня. (3.16)
1	$-2.9852 + i3.2061$	$-\underline{2.9823} + i\underline{3.2023}$
2	$-\underline{4.6236} + i\underline{4.7707}$	$-\underline{4.6231} + i\underline{4.7700}$
3	$-\underline{5.8237} + i\underline{5.9414}$	$-\underline{5.8235} + i\underline{5.9411}$
4	$-\underline{6.8167} + i\underline{6.9176}$	$-\underline{6.8167} + i\underline{6.9174}$
5	$-\underline{7.6829} + i\underline{7.7725}$	$-\underline{7.6828} + i\underline{7.7724}$
6	$-\underline{8.4610} + i\underline{8.5425}$	$-\underline{8.4609} + i\underline{8.5424}$
7	$-\underline{9.1734} + i\underline{9.2486}$	$-\underline{9.1733} + i\underline{9.2486}$
8	$-\underline{9.8343} + i\underline{9.9046}$	$-\underline{9.8343} + i\underline{9.9045}$
9	$-\underline{10.4536} + i\underline{10.5197}$	$-\underline{10.4536} + i\underline{10.5197}$

що в свою чергу свідчить про те, що  $\operatorname{Re} z_j = -\operatorname{Im} z_j = \sqrt{4\pi j}$  для вищих порядків  $j$ . Це асимптотичне значення для різних  $j$  показано у правій колонці Таблиці 3.1. Рівняння (3.16) було одержано у статті [196] для  $|z_j| \geq 1$ . Оскільки уже для першого нуля  $|z_1| \simeq 4$ , впливає, то асимптотична формула дає доволі точні значення і для решти нулів  $j$ , як ми можемо побачити порівнюючи праву та ліву колонки таблиці. Починаючи з  $j = 9$  чисельні значення співпадають із асимптотичними в межах представленої точності.

### 3.3. Нулі Лі-Янга

У цьому підрозділі ми проаналізуємо статистичну суму у випадку комплексного магнітного поля  $H$  при  $T = T_c$ . Точний вираз для статистичної суми (3.6) при  $t = \tau = 0$  запишеться:

$$Z_N(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + N \ln \cosh[x/\sqrt{N} + H]\right) dx. \quad (3.17)$$

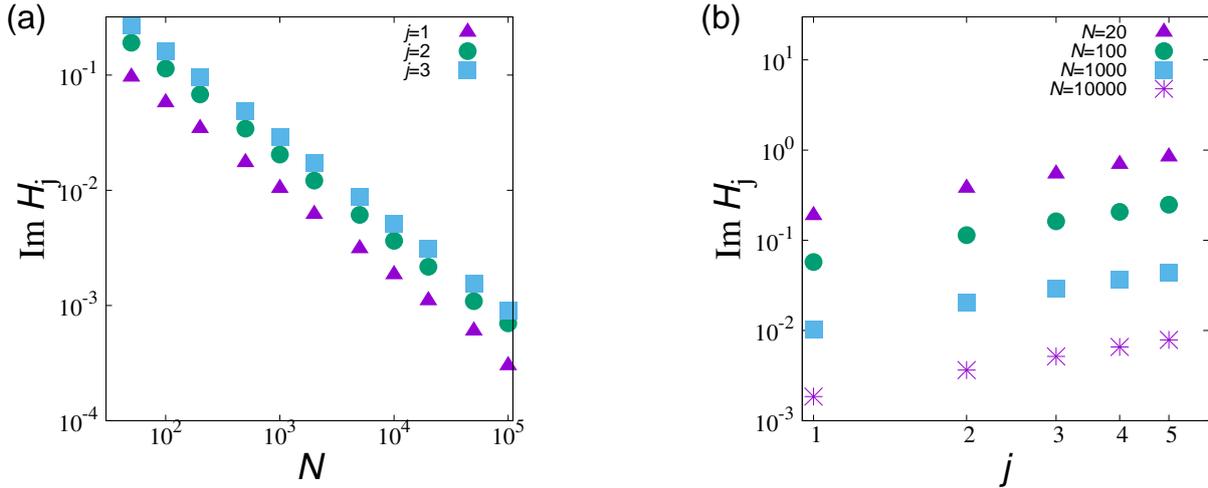


Рис. 3.6. Поведінка  $\text{Im } H_j$  для кількох перших нулів Лі-Янга точного виразу статистичної суми (3.17). (а) Залежність від розміру системи  $\text{Im } H_j(N)$  перших трьох нулів  $j = 1, 2, 3$ . Скейлінг з  $N$ , рівняння (3.19), справджується навіть для малих  $N$  та  $j$  з показником близьким до  $\sigma = 3/4$ . (б) Координати перших п'яти нулів, пораховані для кількох значень  $N = 20, 100, 1000, 10000$ . Показники скейлінгу залишаються майже незмінними при різних  $N$ , але не співпадають із асимптотичним значенням.

З іншого боку, зберігаючи провідні члени розкладу за степенями  $N^{-1}$  у розкладеній статистичній сумі (3.7) отримуємо:

$$Z_N^{\text{exp}}(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{12N} + x\sqrt{N}H\right) dx. \quad (3.18)$$

Раніше було запропоновано [124] скейлінгову формулу для відношення  $j/N$  нулів статистичної суми при великих значеннях  $j$  при критичній температурі. Більш того, багато моделей задовільняють скейлінгове відношення для змінної  $(j - C)/N$ , де  $C = 1/2$  - емпіричний параметр підгонки [199, 200]. Нещодавно була запропонована узагальнена форма скейлінгу для нулів Лі-Янга [201]:

$$\text{Im } H_j \sim \left(\frac{j - C}{N}\right)^\sigma, \quad (3.19)$$

де показник  $\sigma$  пов'язаний із критичними показниками параметра порядку та теплоємності через співвідношення

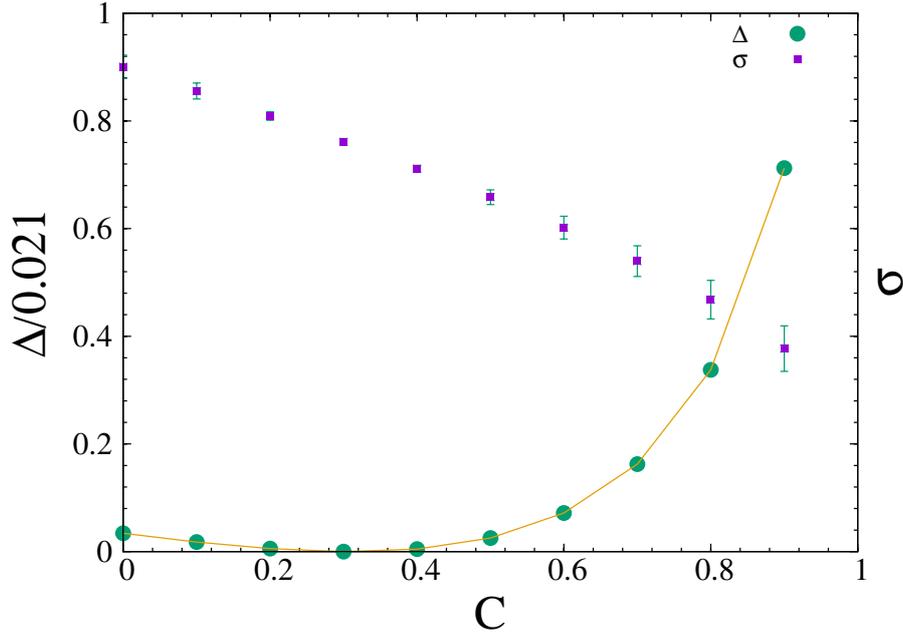


Рис. 3.7. Середнє квадратичне відхилення  $\Delta$  та показник  $\sigma$ , отримані внаслідок апроксимації перших п'яти координат нулів Лі-Янга з рівняння (3.19), як функції параметра підгонки  $C$ . Оптимальне значення  $\sigma$  обчислене при  $C_{\text{opt}} = 0.31$ , де крива  $\Delta(C)$  має мінімум. Результуюче значення  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.7563(1)$  є близьке до точного результату  $\sigma = 0.75$ .

$$\sigma = \frac{\beta \delta}{2 - \alpha}. \quad (3.20)$$

Підставляючи значення критичних показників (3.5) у (3.20) ми приходимо до виразу

$$\sigma = 3/4. \quad (3.21)$$

Перевіримо справедливість скейлінгової форми (3.19) для нулів Лі-Янга для точної і розкладеної функції статистичної суми та знайдемо значення параметра  $C$ .

Розв'язуючи систему рівнянь  $\text{Re } Z(t, H) = 0$  та  $\text{Im } Z(t, H) = 0$  при  $t = t_c = 0$  для дійсної та уявної частин точного виразу для статистичної суми (3.17) ми отримуємо координати нулів у комплексній  $H$ -площині. Можна бачити, що нулі Лі-Янга у цьому випадку є чисто уявними. Той факт, що всі нулі лежать на уявній осі, задовільняє знамениту теорему Лі-Янга про коло одиничного радіуса [118, 119]: у експоненційному представленні  $e^H$  всі нулі лежать

на колі одиничного радіуса. На Рис. 3.6а ми відкладаємо чисельно отримані координати перших трьох нулів Лі-Янга в залежності від розміру системи  $N$ . З Рис. 3.6а можна виділити дві характерні особливості: (i) всі  $H_j(N)$ -залежності є степеневими (представлені суцільними лініями у подвійному логарифмічному масштабі); (ii) ці степеневі закони описуються однаковими значеннями показників (лінії паралельні) для різних  $j$ . Отже, скейлінг з  $N$ , як і було передбачено рівнянням (3.19), справджується навіть для малих  $N$  та  $j$ . Використовуючи лінійну апроксимацію для всіх одинадцяти координат на Рис. 3.6а для кожного  $j$  ми отримуємо:  $\sigma = 0.749(5)$  ( $j = 1$ ),  $\sigma = 0.744(3)$  ( $j = 2$ ),  $\sigma = 0.750(1)$  ( $j = 3$ ).

Щоб перевірити, чи справедливий скейлінг нулів з  $j$ , ми зобразимо на Рис. 3.6b координати перших п'яти нулів, обчислені при кількох значеннях  $N = 20, 100, 1000, 10000$ . Апроксимація дозволяє отримати наступні значення показників  $\sigma = 0.930(22)$  ( $N = 20$ ),  $\sigma = 0.909(22)$  ( $N = 100$ ),  $\sigma = 0.901(22)$  ( $N = 1000$ ),  $\sigma = 0.900(21)$  ( $N = 10000$ ): ці показники залишаються майже незмінними при різних значеннях  $N$ , але не співпадають із асимптотичним  $\sigma = 3/4$ , рівняння (3.21). Однак, введення параметра підгонки  $C$  згідно рівняння (3.19) дозволяє змінити ситуацію. Ми апроксимуємо залежність координат перших п'яти нулів Лі-Янга від  $j$  у подвійному логарифмічному масштабі лінійною функцією при різних значеннях параметра  $C$  та знаходимо справедливість цієї підгонки, обчислюючи середнє квадратичне відхилення (приведене  $\chi^2$ ), тобто суму квадратичних відхилень розділену на кількість ступенів свободи, тут позначену через  $\Delta$ . Крива залежності  $\Delta(C)$  на Рис. 3.7 показує оптимальне значення параметра підгонки  $C_{\text{opt}}$ , що відповідає мінімуму  $\Delta$ . У даному випадку  $C_{\text{opt}} = 0.31$ . Для значення показника  $\sigma$  обчислене цим методом одержуємо  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.7563(1)$ , що є близьким до точного значення  $\sigma = 0.75$ .

Для розкладеної статистичної суми, вираз (3.18) можна зручно переписати у представленні нової скейлінгової змінної:

$$Z(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^4 - xh\right) dx, \quad (3.22)$$

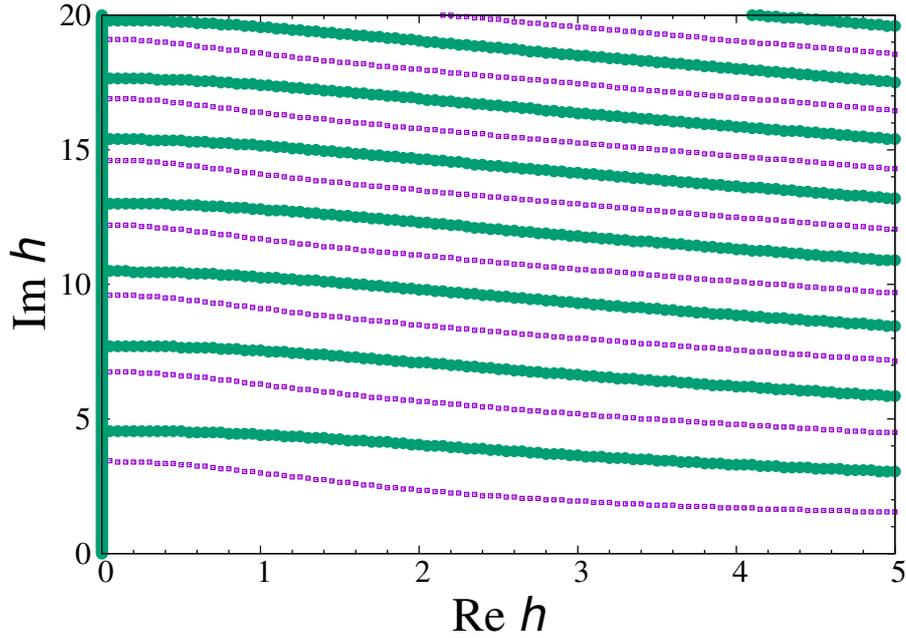


Рис. 3.8. Лінії нулів дійсної та уявної частини наближеної статистичної суми (3.22) при  $T = T_c$  в площині комплексного магнітного поля (фіолетові та зелені онлайн). Точки, де лінії різних кольорів перетинаються, дають координати нулів Лі-Янга. Зауважимо, що одна з ліній  $\text{Im } Z(h) = 0$  співпадає із вертикальною віссю на графіку.

де залежність від поля та розміру системи ми увібрали у змінну

$$h = H(12N^3)^{1/4}. \quad (3.23)$$

На Рис. 3.8 зображено лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (3.22) при  $T = T_c$  у площині комплексного магнітного поля  $h$ , тонкі й товсті лінії відповідно. Координати нулів Лі-Янга (точки перетину ліній) є чисто уявними (задовільняючи колову теорему Лі-Янга). Скейлінг координати  $h_j$  в залежності від розміру системи  $N$  описується рівнянням (3.23) і легко бачити, що показник скейлінгу точно співпадає зі своїм очікуваним значенням (3.21) для будь-якого порядку  $j$ . Зауважимо, що оскільки дійсна частина координати нулів Лі-Янга  $\text{Re } h = 0$ , легко бачити, що з (3.18) уявну координату  $\text{Im } h$  можна отримати, як розв'язок інтегрального рівняння:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} \cos(x \text{Im } h) dx = 0. \quad (3.24)$$

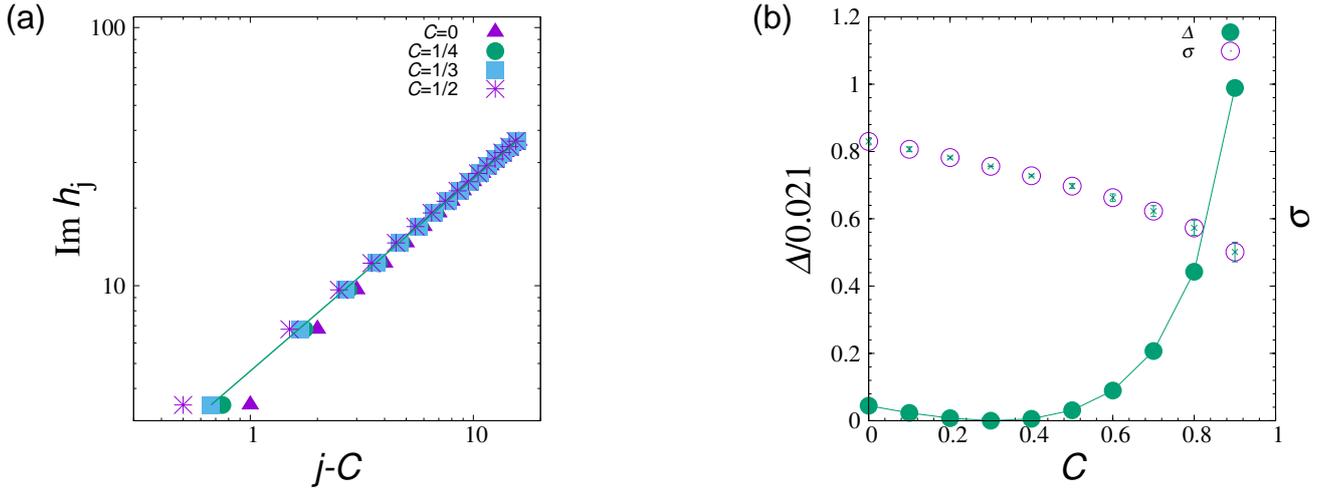


Рис. 3.9. Поведінка координати  $\text{Im } h_j$  для провідних нулів Лі-Янга розкладеної статистичної суми (3.22). (а) Координати  $\text{Im } h_j$  перших шістнадцяти чисельно порохованих нулів Лі-Янга, як функції  $j - C$  для різних значень  $C = 0, 1/4, 1/3, 1/2$ . Суцільна крива наочно демонструє скейлінг з показником  $\sigma = 3/4$ . Цей скейлінг сигналізує про те, що зі збільшенням  $j$ . (б) Середнє квадратичне відхилення  $\Delta$  та показник  $\sigma$  отримані із апроксимації координат перших шістнадцяти нулів Лі-Янга згідно рівняння (3.19), як функцій параметра підгонки  $C$ . Значення показника  $\sigma$ , обчислене при  $C_{\text{opt}} = 0.31$ ,  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.7531(2)$ , є близьке до точного результату  $\sigma = 0.75$ .

А зараз розглянемо скейлінг нулів із  $j$ . На Рис. 3.9 ми побудували координати  $\text{Im } h_j$  перших шістнадцяти нулів Лі-Янга, як функції  $j - C$  при різних значеннях  $C = 0, 1/4, 1/3, 1/2$ . Як і очікувалось, для великих  $j$  з'являється лінійний скейлінг із  $j$  й точки лежать вздовж прямої із тангенсом кута нахилу  $\sigma \simeq 3/4$ . Однак, як і для випадку точної статистичної суми, ця залежність є нелінійною для малих значень  $j$  і вибір відповідного параметра підгонки  $C$  здійснюється схожим чином, як і для точної функції (див. Рис. 3.7). Це дозволяє покращити результати. Як наслідок, ми отримуємо оптимальне значення  $C_{\text{opt}} = 0.31$  та  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.7531(2)$ .

### 3.4. Рух нулів Фішера у дійсному магнітному полі

У передостанньому підрозділі цього розділу ми аналізуємо рух нулів Фішера у (дійсному) магнітному полі [124]. Оскільки нулі Лі-Янга моделі ма-

ють чисто уявну координату, в околі критичної точки лінії руху нулів Фішера формують кут  $\psi$ , що пов'язаний із показниками параметра порядку рівнянням (1.20). У нашому випадку для значення показників  $\beta$  та  $\delta$  заданих (3.5) ми отримуємо кут:

$$\psi = \frac{\pi}{3}. \quad (3.25)$$

Вираз для наближеної функції статистичної суми в околі критичної точки отримується із (3.7):

$$Z_N^{\text{exp}}(t, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-t x^2}{2} - \frac{x^4}{12N} + x\sqrt{NH}\right) dx. \quad (3.26)$$

Щоб отримати вираз (3.26) ми повинні зберегти, як і раніше, тільки провідні доданки розкладу за  $H$  та  $t$ . Як було зауважено вище, у цьому випадку наближений вираз для статистичної суми набуває такої ж самої форми у  $t$ - та  $\tau$ -представленнях. Вираз (3.26) можна переписати через приведені параметри  $z$ ,  $h$ :

$$Z^{\text{exp}}(z, h) = \int_0^{\infty} e^{-zx^2 - x^4 + hx} dx. \quad (3.27)$$

Зауважмо, що для  $h = 0$  чи  $z = 0$  р-ня (3.27) приводить до виразів (3.12) чи (3.22) відповідно. Рис. 3.10а показує координати перших п'яти нулів Фішера для різних значень (дійсного) магнітного поля у комплексній  $z$  площині. Координати можна обчислити для різних значень магнітного поля  $h_j = j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$ . Для  $h_j = 0$  ми відтворюємо значення координат, показаних на Рис. 3.4. Можна помітити тенденцію нулів лягати на пряму лінію, утворюючи кут  $\psi = \frac{\pi}{3}$  із дійсною  $z$  віссю (суцільна крива на рисунку). Схожа тенденція для перших кількох нулів тривимірної моделі Ізінга спостерігалася у статті [124] та пояснювалася поправками скінченного розміру [202]. Що ближче нулі до критичної точки, то менша область переходу.

Для подальшого аналізу руху нулів ми використовуємо метод скінченно-розмірного скейлінгу (finite size scaling, FSS), як означено нижче. Згідно теорії

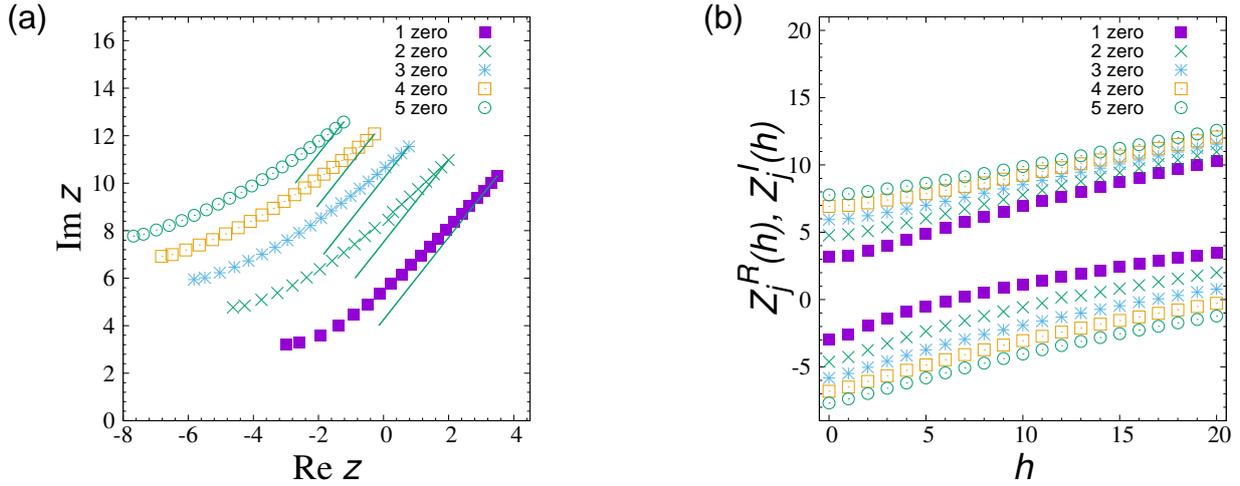


Рис. 3.10. (а) Координати перших п'яти нулів Фішера статистичної суми (3.27) у комплексній  $z$  площині для різних значень магнітного поля  $h_j = j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$ . Ми спостерігаємо тенденцію нулів розташовуватися вздовж ліній, утворюючи кут  $\psi = \pi/3$  із дійсною  $z$  віссю. (б) Скейлінгові функції для перших п'яти нулів  $Z_j^{\mathcal{R}}(h)$  (нижні криві),  $Z_j^{\mathcal{I}}(h)$  (верхні криві) для дійсної та уявної частини координати першого нуля Фішера, рівняння (3.35), як функцій скейлінгової змінної  $h = HN^{1+\frac{\beta}{\alpha-2}}$ .

FSS [115, 116], для  $d$ -вимірної системи в околі критичної точки ми очікується така залежність дійсної та уявної частин координати  $j$ -го нуля у площині приведеної температури  $t$ :

$$\text{Re } t_j(N, H) = b^{-1/\nu} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(H b^{y_H}, N b^{-d}), \quad (3.28)$$

$$\text{Im } t_j(N, H) = b^{-1/\nu} \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(H b^{y_H}, N b^{-d}). \quad (3.29)$$

Тут  $b$  – масштабний множник,  $\nu$  та  $y_H$  – критичний показник кореляційної довжини та скейлінгова вимірність поля,  $\mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(x, y)$  і  $\mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(x, y)$  – скейлінгові функції. Оскільки скейлінгові функції є однорідними функціями двох змінних, то їх можна переписати через функції однієї скейлінгової змінної. Якщо вибрати множник  $b = N^{-1/d}$ , тоді вирази (3.28), (3.29) набувають наступної форми:

$$\text{Re } t_j(N, H) = N^{-1/d\nu} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(H N^{-y_H/d}, 1), \quad (3.30)$$

$$\text{Im } t_j(N, H) = N^{-1/d\nu} \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(H N^{-y_H/d}, 1). \quad (3.31)$$

Використовуючи відомі співвідношення гіперскейлінгу ( $d\nu = 2 - \alpha$ ,  $y_h/d =$

$1 - \beta/2 - \alpha$ ) ми отримуємо наступні вирази для опису руху нулів:

$$\operatorname{Re} t_j(N, H) = N^{\frac{1}{\alpha-2}} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(H N^{1+\frac{\beta}{\alpha-2}}), \quad (3.32)$$

$$\operatorname{Im} t_j(N, H) = N^{\frac{1}{\alpha-2}} \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(H N^{1+\frac{\beta}{\alpha-2}}), \quad (3.33)$$

де ми означаємо функції однієї змінної, як:

$$\mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(x) \equiv \mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(x, 1), \quad \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(x) \equiv \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(x, 1). \quad (3.34)$$

Зауважимо, що у виразах (3.32)-(3.33) розмір системи входить через кількість частинок  $N$  (а не через об'єм чи вимірність), а тому їх зручно використовувати для опису систем на графах, де поняття евклідової вимірності не застосовне. Рівняння (3.32), (3.33) можна переписати у приведених змінних  $z$ ,  $h$  (див. рівняння (3.13) та (3.23)):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z_j &= \mathcal{Z}_j^{\mathcal{R}}(h), \\ \operatorname{Im} z_j &= \mathcal{Z}_j^{\mathcal{I}}(h), \end{aligned} \quad (3.35)$$

де

$$\mathcal{Z}_j^{\mathcal{R}}(h) \equiv \sqrt{3} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(h/\sqrt[4]{12}), \quad \mathcal{Z}_j^{\mathcal{I}}(h) \equiv \sqrt{3} \mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(h/\sqrt[4]{12}). \quad (3.36)$$

Скейлінгові функції (3.36) зображені на Рис. 3.10b для перших п'яти нулів  $j = 1, \dots, 5$ . Характерною особливістю графіка є те, що відношення значення скейлінгової функції при  $h = 0$  дає значення кута нулів Фішера  $\varphi$ :

$$\mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(0)/\mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(0) = \mathcal{Z}_j^{\mathcal{I}}(0)/\mathcal{Z}_j^{\mathcal{R}}(0) = \tan \varphi. \quad (3.37)$$

Підставивши у (3.37)  $\tan \varphi = \tan \pi/4 = -1$ , ми отримуємо  $\mathcal{T}_j^{\mathcal{I}}(0) = -\mathcal{T}_j^{\mathcal{R}}(0)$  чи  $\mathcal{Z}_j^{\mathcal{I}}(0) = -\mathcal{Z}_j^{\mathcal{R}}(0)$ , як легко бачити із рисунка.

### 3.5. Висновки

У цьому розділі коротко представлено метод аналізу нулів статистичної суми та подано означення величин, що характеризують розташування нулів у

площині комплексного поля та температури. Ми розглянули та проанілізували модель Ізінга на повному графі застосовуючи формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми. Використовуючи метод, запропонований для нулів у площині комплексної температури (нулі Фішера) [148], ми знайшли відповідні інтегральні представлення статистичної суми для випадку комплексного поля (нулі Лі-Янга) та дослідили рух нулів Фішера у дійсному полі. Як було показано раніше для інших моделей [124, 202], рух нулів описується комформно-інваріантним кутом  $\psi$ , що пов'язаний співвідношенням із критичними показниками параметра порядку (1.20). Одержані значення кута руху та показника конденсації нулів Лі-Янга співпадають із тими, що впливають зі співвідношень скейлінгу та результатів точного розв'язку. Важливою рисою моделі на повному графі є і те, що в площині комплексного поля усі нулі є чисто уявними, або ж лежать на колі одиничного радіуса в представлення  $e^{-H}$  [118, 119]. Це свідчить про те, що для моделі Ізінга на повному графі теорема Лі-Янга про коло одиничного радіуса виконується.

## РОЗДІЛ 4

# НУЛІ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ МОДЕЛІ ІЗІНГА НА ВІДПАЛЕНІЙ БЕЗМАСШТАБНІЙ МЕРЕЖІ

В цьому розділі ми продовжимо аналіз нулів статистичної суми моделі Ізінга в комплексній площині. Предметом нашого дослідження стане модель Ізінга на безмасштабній мережі. Варто зауважити, що до появи наших робіт цей формалізм ще не застосовувався до аналізу спінових моделей на безмасштабних мережах. В підрозділі 4.1 ми опишемо модель відпаленої безмасштабної мережі та отримаємо точний вираз для статистичної суми моделі Ізінга на такій мережі. Нулі статистичної суми в площині комплексної температури проаналізовані в підрозділі 4.2, а в площині комплексного поля – в підрозділі 4.3. Одним із головних результатів нашого дослідження є твердження про те, що теорема Лі-Янга про розташування нулів на колі одиничного радіуса (Lee-Yang unit circle theorem) не виконується для моделі Ізінга на безмасштабній мережі. Це твердження доведене в підрозділі 4.3. Висновки сформульовані у підрозділі 4.4. Основні результати цього розділу опубліковані в статтях [21, 22].

### 4.1. Статистична сума

Знаючи поведінку нулів статистичної суми моделі Ізінга на повному графі, ми дослідимо критичну поведінку моделі Ізінга на складній мережі – на

випадковому графі [3–7]. Гамільтоніан моделі у цьому випадку запишеться:

$$-\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J_{lm} S_l S_m + H \sum_l S_l. \quad (4.1)$$

Тут підсумовування проводиться за усіма вузлами графа  $l, m$  і матриця суміжності  $J_{lm}$  містить інформацію про структуру графу: матричні елементи  $J_{lm} = 1$ , якщо між вузлами існує лінк та  $J_{lm} = 0$  інакше. У випадкових графах різні вузли мають різну кількість зв'язків (різні ступені вузла  $K$ ). Ступені вузла є випадковими змінними й особливості, притаманні їх розподілу  $p(K)$ , відіграють одну із ключових ролей при описі критичної поведінки [64]. Як приклад складної мережі, розглянемо *відпалену* мережу. Ця мережа означається, як ансамбль всіх мереж, що складаються із  $N$  вузлів із заданою послідовністю для ступенів вузлів  $\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ , максимально випадковою за умови заданого розподілу ступенів  $p(K)$  (див. наприклад [61]). Така конструкція подібна до конфігураційної моделі нескорельованої складної мережі (див. наприклад [63]). Однак, конфігураційна модель є прикладом моделі із замороженим безладом, в той час, як для моделі Ізінга на відпаленій мережі конфігурації мережі флюктуують на однакових часових масштабах зі спіноюю змінною. При дослідженні термодинамічних властивостей наявність замороженого безладу береться до уваги усередненням вільної енергії за різними конфігураціями безладу, тоді як для відпаленого безладу усереднюється статистична сума [59]. Отже, при розгляді моделі Ізінга на відпаленій мережі, нас цікавитиме поведінка статистичної суми, усередненої за різними конфігураціями мережі.

З гамільтоніану (4.1) отримаємо статистичну суму:

$$Z_N(T, H) = \text{Tr}_S \text{Tr}_J e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (4.2)$$

Як і у виразі (3.2) перше усереднення виконується за спіноюю підсистемою:  $\text{Tr}_S(\dots) = \prod_l \sum_{S_l = \pm 1}(\dots)$ , а друге усереднення проводиться згідно розподілу лінків у мережі  $\mathcal{P}(J)$ :

$$\text{Tr}_J(\dots) = \prod_{l \neq m} \sum_{J_{lm} = 0, 1} \mathcal{P}(J)(\dots).$$

### 4.1.1. Наближення відпаленої мережі

Щоб побудувати відпалену мережу з  $N$  вузлів  $l = 1, \dots, N$ , кожному вузлу  $l$  приписується мітка  $k_l$  й імовірність існування лінку між вузлами  $l$  та  $m$  визначається як:

$$p_{lm} = \frac{k_l k_m}{N \langle k \rangle}, \quad (4.3)$$

де  $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_l k_l$ . Змінні  $k$  беруться із розподілу  $p(k)$  і вони задають очікуваний ступінь вузла. Дійсно, легко бачити, що очікуване значення ступеня вузла  $\mathbb{E}K_l = \sum_m p_{lm} = k_l$ . Раніше було показано [61], що усереднення (4.2) з розподілом лінків у мережі із функцією імовірності (4.3) приводить до наступного виразу для статистичної суми:

$$Z_N(T, H) = \text{Tr}_S \exp \left( \frac{1}{2N \langle k \rangle T} \sum_{l \neq m} S_l S_m k_l k_m + \frac{H}{T} \sum_l S_l \right). \quad (4.4)$$

Аналогічним виразом для статистичної суми є також представлення, отримане в наближенні середнього поля для моделі Ізінга на нескорельованій мережі із замороженим безладом [63, 64] (конфігураційна модель). Але для відпаленої мережі множник перед подвійною сумою у (4.4) є певною функцією температури [61]. Оскільки у нашій роботі нас цікавитимуть тільки кути нахилу нулів статистичної суми, які є незалежними від будь-якого аналітичного представлення у площині температури, у виразі (4.4) ми зберігаємо тільки лінійний доданок цієї функції.

### 4.1.2. Точне інтегральне представлення

Оскільки для відпаленої мережі доданок, що відповідає за взаємодію у (4.1), набуває роздільної форми, ми можемо використати перетворення Стратановича-Габбарда для (4.4). Беручи шпур ми отримуємо точний наступний

вираз для статистичної суми:

$$Z_N(T, H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-N\langle k \rangle x^2}{2T} + \sum_l \ln \cosh[(xk_l + H)/T]\right) dx. \quad (4.5)$$

Як і в попередньому розділі, несуттєвими для подальшого аналізу множниками перед інтегралом тут і нижче ми нехтуємо. Тепер сума за  $l$  в показнику (4.5) перепишеться через інтеграл за змінною  $k$  для заданої функції розподілу  $p(k)$ :

$$\sum_l f(k_l) = N \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} p(k) f(k) dk, \quad (4.6)$$

де  $k_{\min}$  і  $k_{\max}$  є відповідно мінімальне та максимальне значення змінної  $k$ . Для подальшого аналізу буде зручно зберегти інтегрування за змінною  $x$  у додатній півплощині, що в результаті приводить до такого виразу для статистичної суми:

$$\begin{aligned} Z_N(T, H) = & \int_0^{+\infty} e^{\frac{-(k)x^2 T}{2}} \left\{ \exp\left[N \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk p(k) \ln \cosh\left(\frac{xk}{\sqrt{N}} + \frac{H}{T}\right)\right] \right. \\ & \left. + \exp\left[N \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk p(k) \ln \cosh\left(-\frac{xk}{\sqrt{N}} + \frac{H}{T}\right)\right] \right\} dx. \quad (4.7) \end{aligned}$$

### 4.1.3. Представлення розкладеної статистичної суми

Для повного графу, що містить  $N$  вузлів, підставляючи в (4.7)  $p(k) = \delta(k - N + 1)$  ми відтворюємо (3.6). У цьому розділі нас цікавить безмасштабна мережа, де функція розподілу  $p(k)$  є степеневою

$$p(k) = c_\lambda k^{-\lambda}, \quad k \geq 1, \quad (4.8)$$

з константою нормування  $c_\lambda$ . Зауважмо, що для безмасштабної мережі з  $k_{\min} = 1$  не існуватиме гігантської зв'язної компоненти при  $\lambda > \lambda_c$  ( $\lambda_c = 4$  для неперервного і  $\lambda_c \simeq 3.48$  для дискретного розподілів [176]). Щоб обійти це обмеження, без втрати загальності, ми виберемо нижню межу інтегрування  $k_{\min} = 2$ , в той

час як верхню межу інтегрування у (4.6) розглядаємо у термодинамічній границі  $\lim_{N \rightarrow \infty} k_{\max} \rightarrow \infty$ .<sup>1</sup> Тоді для безмасштабної мережі рівняння (4.7) зручно переписати як:

$$Z_N(T, H) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(k)x^2 T}{2}} \left\{ \exp \left[ I_\lambda^+(x) \right] + \exp \left[ I_\lambda^-(x) \right] \right\} dx, \quad (4.9)$$

де

$$I_\lambda^\pm(x) = c_\lambda \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right)^{\lambda-1} N \int_{\frac{2x}{\sqrt{N}}}^{\infty} \frac{1}{y^\lambda} \ln \cosh \left( \pm y + \frac{H}{T} \right) dy. \quad (4.10)$$

Розглянемо інтеграл у (4.10). Для великих  $y$  підінтегральна функція спадає як  $y^{1-\lambda}$ , а інтеграл є скінченним на верхній межі інтегрування для діапазону значень  $\lambda > 3$ , який нас цікавить. Однак для малих  $y$  підінтегральна функція веде себе, як  $(\pm y + H/T)^2 y^{-\lambda} + \dots$  й виникають розбіжні доданки, коли нижня межа інтегрування прямує до нуля, чи в термодинамічній границі  $N \rightarrow \infty$ . Ці розбіжні доданки не входять у загальний вираз, оскільки вони скорочуються  $N$ -залежним множником у (4.10). Щоб виділити ці доданки та показати, як саме вони скорочуються, необхідно розглянути функцію  $I_\lambda^\pm(x)$  (4.10) при різних значеннях  $\lambda$  (див., наприклад, [18] для більш детального пояснення). Як у попередньому розділі, ми виконуємо асимптотичні оцінки при малих значеннях зовнішнього поля  $H$ . Провідні доданки у кінцевому виразі запишуться:

$$I_\lambda^\pm(x) = N \left[ \frac{\langle k^2 \rangle x^2}{2N} - a(\lambda) \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right)^{\lambda-1} \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right], \quad 3 < \lambda < 5, \quad (4.11)$$

$$I_\lambda^\pm(x) = N \left[ \frac{\langle k^2 \rangle x^2}{2N} - \frac{\langle k^4 \rangle}{12} \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right)^4 \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right], \quad \lambda > 5, \quad (4.12)$$

де чисельні значення коефіцієнтів  $a(\lambda) = -c_\lambda \int_0^\infty dy y^{-\lambda} (\ln \cosh y - y^2/2)$ ,  $a(\lambda) > 0$  при різних  $\lambda$  отримані у [18] (див. також підрозділ 2.3), а моменти  $\langle k^i \rangle$  обчислюються з розподілом (4.8). Випадок  $\lambda = 5$  потрібно розглянути окремо.

<sup>1</sup>Значення інтегралу не залежить від того, яким чином  $k_{\max}$  прямує до безмежності. Наступні провідні члени визначатимуться  $N$ -залежністю верхньої межі обрізання, див. Додаток А.

Заінтегровуючи логарифмічну сингулярність, ми отримуємо перші провідні доданки розкладу:

$$I_{\lambda}^{\pm}(x) = N \left[ \frac{\langle k^2 \rangle}{2} \frac{x^2}{N} - \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right)^4 \frac{\ln N}{24} \pm \frac{\langle k \rangle H x}{T \sqrt{N}} \right]. \quad (4.13)$$

Отримавши вирази (4.11)–(4.13) для  $I_{\lambda}^{\pm}(x)$ , ми можемо проаналізувати статистичну суму (4.9) при різних значеннях  $\lambda$ . Відомо, що критична поведінка систем на безмасштабній мережі зі статистичною сумою (4.9) суттєвим чином залежить від показника  $\lambda$  [3–7, 64]. Зокрема, система залишається впорядкованою при будь-якій скінченній температурі при  $\lambda \leq 3$ . Фазовий перехід другого роду спостерігається у діапазоні  $\lambda > 3$ . Він описується набором стандартних критичних показників середнього поля (3.5) у ділянці  $\lambda \geq 5$  із логарифмічними поправками при  $\lambda = 5$ , однак, показники стають  $\lambda$ -залежними для  $3 < \lambda < 5$  [63]:

$$\alpha = (\lambda - 5)/(\lambda - 3), \quad \beta = 1/(\lambda - 3), \quad \delta = \lambda - 2, \quad \gamma = 1. \quad (4.14)$$

Наближення середнього поля для показника магнітної сприйнятливості при будь-яких  $\lambda > 3$  дає значення критичного показника  $\gamma = 1$ . Але інші критичні показники у діапазоні  $3 < \lambda < 5$  залишаються залежними від  $\lambda$ . Це пояснюється тим, що модель Ізінга на складній безмасштабній мережі описується швидше в рамках неоднорідного, аніж однорідного магнітного поля.

Наше завдання - описати фазовий перехід моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі в термінах нулів статистичної суми, як це було зроблено для моделі на повному графі у попередньому параграфі. Підставляючи значення критичних показників (4.14) та відношення критичних амплітуд  $A_+/A_- = 0$  [88] у вирази (1.10), (3.20) для діапазону  $3 < \lambda < 5$  ми одержуємо:

$$\varphi = \frac{\pi(\lambda - 3)}{2(\lambda - 1)}, \quad (4.15)$$

$$\sigma = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}. \quad (4.16)$$

Перевіримо, чи ці значення можна безпосередньо отримати із аналізу нулів статистичної суми (4.9) у комплексних  $T$  та  $H$  площинах.

## 4.2. Нулі Фішера

Підставляючи вирази для  $I_\lambda^\pm(x)$  (4.11)–(4.13) при  $H = 0$  у статистичну суму (4.9) при різних значеннях  $\lambda$  ми отримуємо:

$$Z_N(t) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\langle k^2 \rangle x^2 t}{2} - a(\lambda) N \left( \frac{x}{\sqrt{N}} \right)^{\lambda-1} \right] dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\langle k^2 \rangle x^2 t}{2} - \frac{x^4 \ln N}{N^{24}} \right] dx, & \lambda = 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\langle k^2 \rangle x^2 t}{2} - \frac{\langle k^4 \rangle x^4}{12 N} \right] dx, & \lambda > 5, \end{cases} \quad (4.17)$$

із  $t = (T - T_c)/T_c$  та (псевдо)критичною температурою  $T_c = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ .<sup>2</sup> Як і в попередньому розділі, статистичну суму зручно переписати у змінних  $z$ , що поєднують  $t$  та  $N$  залежності, див. р-ня (3.13). Але тепер ця змінна виражається по-різному у різних діапазонах  $\lambda$ :

$$z = \begin{cases} t \frac{\langle k^2 \rangle}{2} [a(\lambda)]^{2/(\lambda-1)} N^{\frac{\lambda-3}{\lambda-1}}, & 3 < \lambda < 5, \\ t \langle k^2 \rangle \sqrt{6N} / \sqrt{\ln N}, & \lambda = 5, \\ t \langle k^2 \rangle \sqrt{3N \langle k^4 \rangle}, & \lambda > 5. \end{cases} \quad (4.18)$$

Записана у нових змінних (4.18) статистична сума (4.17) набуде простого вигляду:

$$Z(z) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp \left( -zx^2 - x^{\lambda-1} \right) dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp \left( -zx^2 - x^4 \right) dx, & \lambda \geq 5. \end{cases} \quad (4.19)$$

Звідси випливають два очевидні висновки: (1) оскільки функціональна форма залежності  $Z(z)$  при  $\lambda = 5$  та  $\lambda > 5$  однакова, положення нулів Фішера у комплексній  $z$  площині є такі ж самі. Це призводить до того, що кут локалізації нулів  $\varphi$  моделі Ізінга на відпаленій мережі не змінюється для  $\lambda \geq 5$ , а отже, (2) ці вирази співпадають із представленням статистичної суми моделі Ізінга на повному графі, див. вираз (3.12). Тому аналіз нулів Фішера останньої моделі, представлений у попередньому Розділі 3 можна використовувати для аналізу нулів Фішера моделі Ізінга на відпаленій мережі. Зокрема, слід зазначити, що

$$\varphi = \pi/4, \quad \lambda \geq 5. \quad (4.20)$$

<sup>2</sup>Для системи скінченного розміру  $T_c$  залежить від  $N$  через  $N$ -залежність моментів  $\langle k \rangle$ ,  $\langle k^2 \rangle$ .

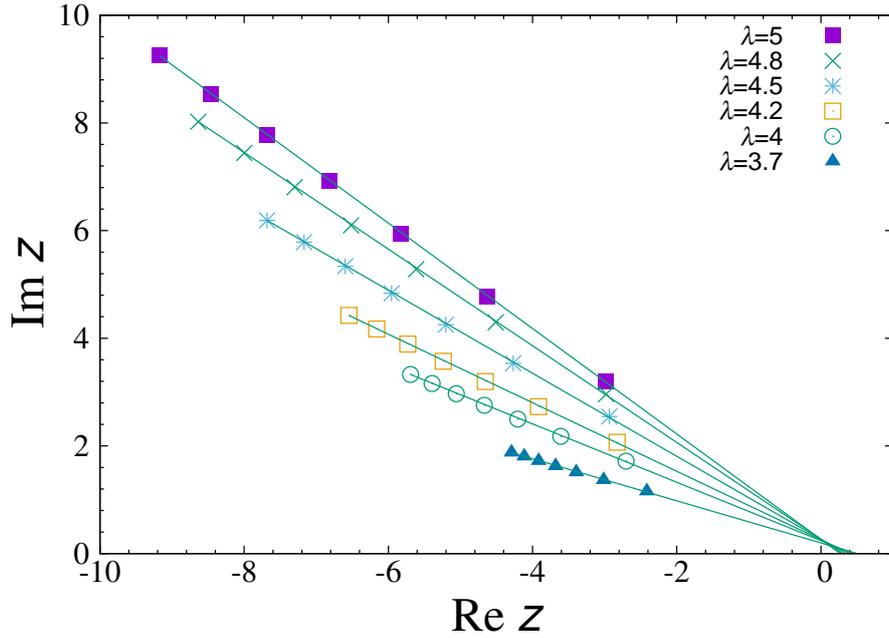


Рис. 4.1. Нулі Фішера моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі за відсутності магнітного поля та різних  $\lambda$ . Характерною поведінкою нулів є лягати на прямі, перетинаючи дійсну вісь  $z$  в околі критичної точки  $z_c$ . Кут, утворені кожною лінією із дійсною віссю  $z$  зростають у діапазоні  $3 < \lambda < 5$ , як і передбачено рівнянням (4.15).

Розглянемо логарифмічні поправки до скейлінгу, які виникають у проміжному випадку при  $\lambda = 5$  [87–89, 93, 94]. Такі логарифмічні поправки також появляються у  $I_\lambda^\pm(x)$  при  $\lambda = 5$ . Однак, їх наявність не дає вкладу основних доданків до розкладу за  $1/N$ , і як висновок, кут локалізації нулів Фішера (а, отже, і показник питомої теплоємності) залишається таким самим при  $\lambda = 5$  та  $\lambda > 5$ .

Схоже, як у попередньому розділі для моделі Ізінга на повному графі, продовжуючи аналіз нулів Фішера у діапазоні  $3 < \lambda < 5$ , ми знаходимо чисельно значення координат кількох перших нулів, як показано на Рис. 4.1. Як бачимо із рисунку, нулі чітко лягають на прямі, перетинаючи дійсну вісь  $z$  в околі критичної точки  $z_c = 0$ . Більше того, кут, який кожна лінія нулів утворює із дійсною віссю змінюється при різних  $\lambda$  і зростає із  $\lambda$ . Для більш детального вивчення цієї залежності, для кожного значення  $\lambda$  ми апроксимуємо  $j$  нулів Фішера у діапазоні  $j = j_{\min}, \dots, j_{\max}$  при  $j_{\max} = 7$  і результати остаточних оцінок приводимо у Таблиці 4.1. Ми можемо бачити, що чисельно отримані значення

близькі до аналітично передбачених у формулі (4.15), і що вищий порядок нулів використовуємо для апроксимації, тим вища точність обчислень. Цей тип поведінки є дуже схожим до тієї, що спостерігалась для нулів Фішера на повному графі (див. Рис. 3.5). Для подальшої ілюстрації цієї подібності ми побудуємо на Рис. 4.2a залежність відношення чисельно отриманого значення кута  $\varphi$  до передбаченого аналітичною формулою (4.15):  $P_{\text{norm}} = \varphi / \frac{\pi(\lambda-3)}{2(\lambda-1)}$ . Це відношення прямує до  $P_{\text{norm}} = 1$  зі збільшенням порядку нуля, що використовується для апроксимації. Можна помітити схожу тенденцію для поведінки критичної температури  $z_c$ , див. Рис. 4.2b. І знову ми спостерігаємо схожість із поведінкою  $z_c$  для моделі Ізінга на повному графі (Рис. 3.5b).

Табл. 4.1. Чисельно одержані значення кута  $\varphi$  для різних  $\lambda$ . Кут порахований, використовуючи лінійну апроксимацію нулів Фішера з номерами  $j = j_{\min}, \dots, 7$ . Інтервал точності, якщо не написано явно, є меншим, ніж остання значуща цифра. Останній рядок дає значення кута  $\varphi$ , передбачене аналітичною формулою (4.15).

$j_{\min}$	$\lambda \geq 5$	$\lambda = 4.8$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4.2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.7$
1	0.246(5) $\pi$	0.233(1) $\pi$	0.209(1) $\pi$	0.180(1) $\pi$	0.158(1) $\pi$	0.117(2) $\pi$
2	0.248 $\pi$	0.234 $\pi$	0.210 $\pi$	0.182 $\pi$	0.160(1) $\pi$	0.121(1) $\pi$
3	0.248 $\pi$	0.234 $\pi$	0.211 $\pi$	0.183 $\pi$	0.162 $\pi$	0.123 $\pi$
4	0.248 $\pi$	0.235 $\pi$	0.212 $\pi$	0.184 $\pi$	0.162 $\pi$	0.124 $\pi$
5	0.248 $\pi$	0.235 $\pi$	0.212 $\pi$	0.184 $\pi$	0.163 $\pi$	0.125 $\pi$
6	0.249 $\pi$	0.235 $\pi$	0.212 $\pi$	0.185 $\pi$	0.163 $\pi$	0.125 $\pi$
exact	0.250 $\pi$	0.237 $\pi$	0.214 $\pi$	0.188 $\pi$	0.167 $\pi$	0.130 $\pi$

Іншою характерною рисою положення нулів Фішера є те, що відстань між двома сусідніми нулями зростає зі зростанням порядку нуля (дивитися Рис. 4.1 для відпаленої безмасштабної мережі, а також Рис. 3.4 для випадкового графа). Справді, співвідношення скейлінгу скінченного розміру для  $j$ -го нуля  $t_j$  у комплексній  $t$  площині для великих  $j$  задається як [124]:

$$t_j \sim \left(\frac{j}{N}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}. \quad (4.21)$$

Відповідно, приходимо до висновку, що  $\Delta t_j \equiv t_j - t_{j-1} \sim j^\kappa$ , де  $\kappa = (\alpha -$

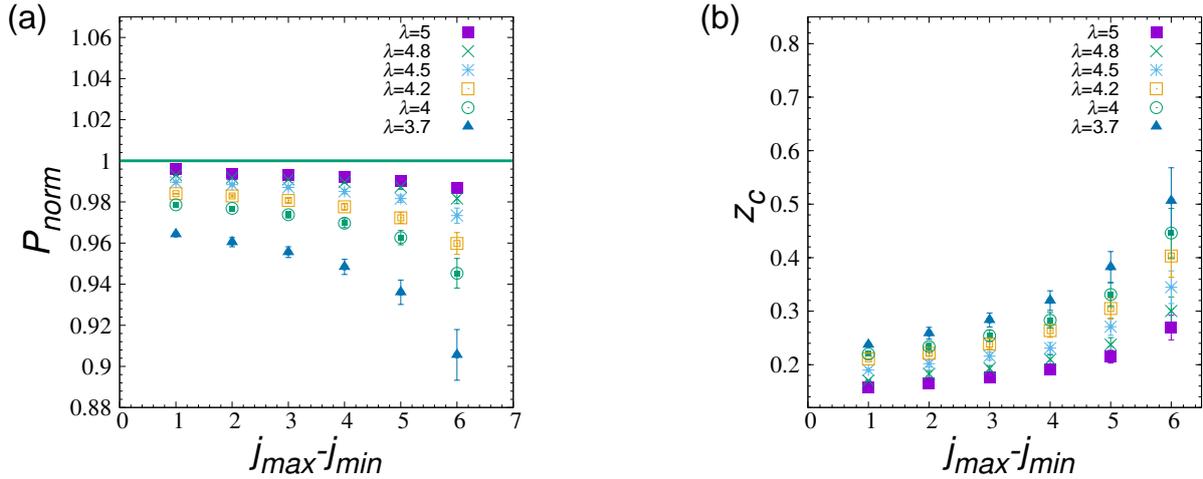


Рис. 4.2. Значення (а) відношення  $P_{\text{norm}} = \varphi / \frac{\pi(\lambda-3)}{2(\lambda-1)}$  та (б) критичної температури  $z_c$  для статистичної суми (4.19), отримані з апроксимації  $j$  нулів Фішера у інтервалі  $j = j_{\text{min}}, \dots, j_{\text{max}}$  для  $j_{\text{max}} = 7$  для різних значень  $j_{\text{min}}$ . Суцільна крива на рисунку (а) відповідає точному значенню  $P_{\text{norm}} = 1$ .

$1)/(2-\alpha)$ . Останній показник є від'ємним, для тих значень  $\alpha$ , які нас цікавлять:  $\kappa = -1/2$ ,  $\lambda \geq 5$  і  $\kappa = -2/(\lambda - 1)$ ,  $3 < \lambda < 5$ . Переписавши (4.21) через змінні  $z_j$  (4.18), отримуємо:

$$z_j \sim j^{\frac{1}{2-\alpha}}. \quad (4.22)$$

Щоб перевірити скейлінг нулів Фішера з  $j$ , ми знайдемо значення показника у (4.22) апроксимуючи функцією  $\ln |z_j| = a + b \ln j$  для нулів Фішера із номерами  $j = j_{\text{min}}, \dots, 7$  при різних  $\lambda$ . Результати порівнюємо із точним значенням у Таблиці 4.2. Легко побачити, що чисельно пораховані координати нулів наближаються до їх точних значень зі збільшенням порядку нуля  $j$ .

Для того, щоб перевірити скейлінг нулів Фішера  $t_j$  з  $N$ , не потрібно рахувати їх точні координати при різних значеннях  $N$ . Оскільки залежність  $t_j(N)$  впливає із форми функціональної залежності  $z(t, N)$ , як задано (4.18). Виражаючи  $t$  з цього виразу, ми отримуємо степеневий закон скейлінгу  $t_j \sim N^{1/(\alpha-2)}$ , що справедливий при  $3 < \lambda < 5$  та  $\lambda > 5$ , а також характеризується логарифмічними поправками при  $\lambda = 5$ :  $t_j \sim N^{-1/2}(\ln N)^{1/2}$ .

Табл. 4.2. Лінійна апроксимація функції  $\ln |z_j| = a + b \ln j$  для нулів Фішера з індексами  $j = j_{\min}, \dots, 7$  при різних  $\lambda$ . Таблиця показує результати для кутового коефіцієнту  $b$ . Інтервал точності, якщо не написано явно, є меншим, ніж остання значуща цифра. Останній рядок дає значення  $b = 1/(2 - \alpha)$ , як передбачає аналітична формула (4.22).

$j_{\min}$	$\lambda > 5$	$\lambda = 4.8$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4.2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.7$
1	0.558(8)	0.528(7)	0.477(6)	0.417(5)	0.370(5)	0.286(3)
2	0.537(4)	0.509(3)	0.460(3)	0.402(3)	0.357(2)	0.277(2)
3	0.529(2)	0.501(2)	0.453(2)	0.396(2)	0.352(1)	0.274(1)
4	0.525(1)	0.497(1)	0.450(1)	0.393(1)	0.349(1)	0.271(1)
5	0.522(1)	0.494(1)	0.447(1)	0.391(1)	0.348(1)	0.270(1)
6	0.520	0.492	0.445	0.390	0.346	0.269
exact	0.500	0.474	0.429	0.375	0.333	0.259

### 4.3. Нулі Лі-Янга

Підставляючи вирази для  $I_{\lambda}^{\pm}(x)$  (4.11)–(4.13) при  $T = T_c = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$  у статистичну суму (4.9) при різних значеннях  $\lambda$  та зберігаючи провідні доданки розкладу за  $1/N$  ми отримуємо:

$$Z(h) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-x^{\lambda-1}) \cosh(hx) dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp(-x^4) \cosh(hx) dx, & \lambda \geq 5. \end{cases} \quad (4.23)$$

Тут  $H$ - та  $N$ -залежності статистичної суми увібрано у приведену змінну  $h$ . Її точний вираз відрізняється для різних діапазонів  $\lambda$ :

$$h = \begin{cases} H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} a(\lambda)^{1/(1-\lambda)} N^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}, & 3 < \lambda < 5, \\ H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} \left( \frac{24}{\ln N} \right)^{1/4} N^{3/4}, & \lambda = 5, \\ H \frac{\langle k \rangle^2}{\langle k^2 \rangle} \left( \frac{12}{\langle k^4 \rangle} \right)^{1/4} N^{3/4}, & \lambda > 5. \end{cases} \quad (4.24)$$

#### 4.3.1. Порушення теореми Лі-Янга

Схоже, як для випадку аналізу скейлінгу нулів  $t_j(N)$  у попередньому підрозділі, тут скейлінг для координати  $h_j(N)$  прямо впливає із залежності

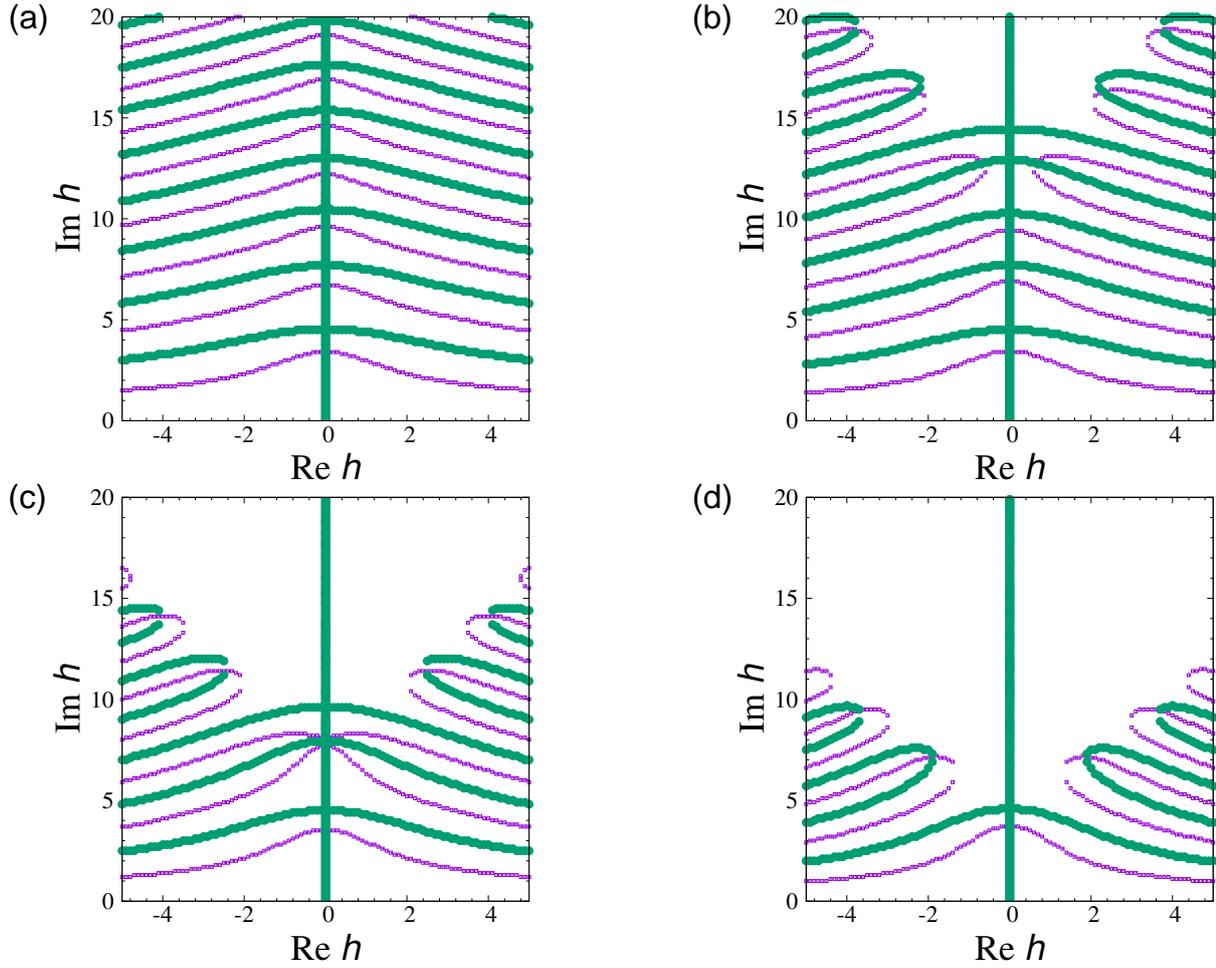


Рис. 4.3. Лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (4.23) при  $T = T_c$  та різних значеннях  $\lambda$  в площині комплексного магнітного поля, товсті й тонкі лінії відповідно: (a)  $\lambda \geq 5$ ; (b)  $\lambda = 4.5$ ; (c)  $\lambda = 4$ ; (d)  $\lambda = 3.5$ . Точки, де лінії різних типів перетинаються, дають координати нулів Лі-Янга. Слід зазначити, що одна із ліній  $\text{Im } Z = 0$  співпадає із вертикальною віссю на графіку.

$h(H, N)$  у (4.24). Порівнюючи (4.24) із означенням (3.19), ми отримуємо:

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\lambda-2}{\lambda-1}, & 3 < \lambda < 5, \\ 3/4, & \lambda > 5. \end{cases} \quad (4.25)$$

При  $\lambda = 5$  з'являються логарифмічні поправки:  $H_j \sim N^{-3/4} (\ln N)^{1/4}$ .

На Рис. 4.3 ми зображаємо лінії нулів дійсної та уявної частин статистичної суми (4.23) при  $T = T_c$  та різних значеннях  $\lambda$  в площині комплексного магнітного поля  $h = \text{Re } h + i \text{Im } h$ . Точки, де лінії різних типів перетинаються, дають нам координати нулів Лі-Янга. Зауважимо, що хоча координати пер-

шого нуля Лі-Янга (найближчого до початку координат) є суто уявними для будь-якого значення  $3 < \lambda < 5$  і його наявність дозволяє зробити висновок, що скейлінг з  $N$  описується показником (4.25)), це не справджується для нулів вищого порядку: кількість нулів із  $\operatorname{Re} h_j = 0$  зменшується із  $j$ . З цієї точки зору, поведінка нулів Лі-Янга моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі суттєво відрізняється від поведінки на повному графі. В той час, як на повному графі нулі є абсолютно уявними і задовільняють колову теорему Лі-Янга, ця теорема порушується у випадку відпаленої безмасштабної мережі.

Як видно із Рис. 4.3, уявна частина статистичної суми  $Z(h)$  занулюється, коли поле  $h$  є уявним, оскільки статистична сума є парною функцією  $h$ . Перетин кривих різного типу дає інформацію про положення нулів Лі-Янга. Коли  $\lambda \geq 5$  всі нулі лежать на уявній осі. Але при  $\lambda = 4.5$  тільки перші три нулі є уявними, а координати нулів вищого порядку ( $h_j$  для  $j > 3$ ) містять ненульову дійсну частину. Схожа поведінка спостерігається і для решти значень  $\lambda$  між 3 та 5; існує скінченне число  $\mathcal{N}$ , таке, що  $h_j$  є чисто уявними для  $j \leq \mathcal{N}$ , але для  $j > \mathcal{N}$  координати нулів містять ненульову дійсну частину. Значення  $\mathcal{N}$  зростає зі зростанням  $\lambda$ .

Отримані чисельно координати нулів Лі-Янга наведені у Таблиці 4.3 для різних значень  $3 < \lambda < \lambda = 5$ , і для  $\lambda \geq 5$ . Коли  $\lambda = 4$ ,  $\mathcal{N} = 3$ , в той час, як при  $\lambda = 3.5$ ,  $\mathcal{N} = 1$ . З огляду на це поведінка нулів відрізняється при  $\lambda \geq 5$  (де вона аналогічна поведінці нулів моделі Ізінга на повному графі) та для діапазону  $3 < \lambda < 5$ . У наступному підрозділі ми підтвердимо це спостереження, дослідивши асимптотичну поведінку інтегралу (4.23) при нецілих  $3 < \lambda < 5$ .

Графік на Рис. 4.4 також демонструє порушення теореми Лі-Янга для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі в комплексній  $e^h$ -площині: в той час як при  $\lambda = 5$  нулі лежать на колі одиничного радіусу, це не справджується при  $\lambda = 4.5$ . У останньому випадку лише кілька нулів лежать на одиничному колі, а всі решта – поза ним (на рисунку показано лише ті нулі, що потрапляють у даний масштабний діапазон).

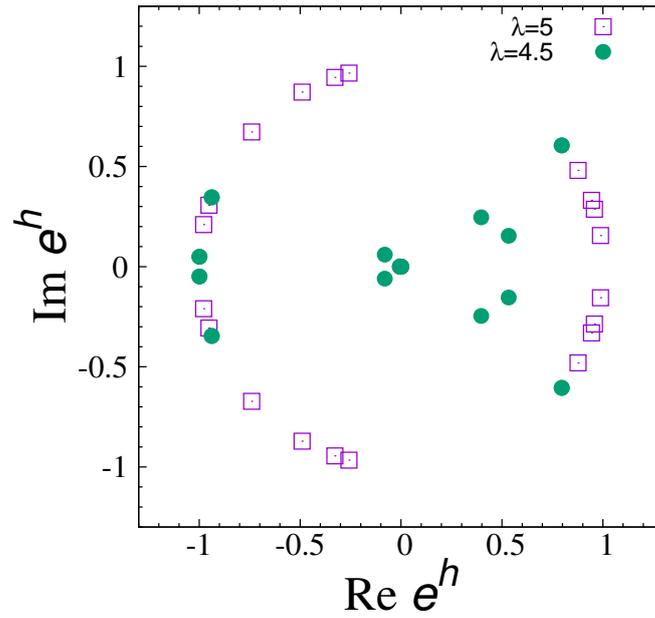


Рис. 4.4. Нулі Лі-Янга для статистичної суми у комплексній  $e^h$  площині при  $\lambda = 5$  та  $\lambda = 4.5$ , прямокутники та кола відповідно. На рисунку показано нулі, що потрапляють у даний масштабний діапазон.

Отже, модель Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $3 < \lambda < 5$  належить до групи моделей, в яких теорема Лі-Янга порушується, в той час, як теорема справджується для випадку повного графу. Відмінність у поведінці нулів Лі-Янга моделі Ізінга на повному графі та відпаленій безмасштабній мережі проявляється також, коли ми досліджуємо скейлінг координат нулів з  $j$ . У випадку комплексних координат нулів, можна спостерігати скейлінг дійсної та уявної частини координати чи їх комбінації. Типові результати наших обчислень, наведені на Рис. 4.5, де зображено координати  $\text{Im } h_j$ ,  $\text{Re } h_j$  та  $|h_j|$  для перших десяти нулів Лі-Янга моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при фіксованому значенні  $\lambda = 4.5$ . Суцільним кривим відповідають очікуване значення показника  $\sigma(\lambda = 4.5) \simeq 0.714$ , див. (4.25). Як легко бачити, прямі для  $\text{Im } h_j$  та  $|h_j|$  розташовуються близько одна до одної, оскільки значення  $\text{Re } h_j$  є порівняно малим. Схожу поведінку можна спостерігати і для інших значень  $\lambda$ . Зокрема, для великих  $j$  функції  $\text{Im } h_j$  й  $|h_j|$  описуються степеневими асимптотиками із показниками, що визначаються виразом (4.25).

Перевіримо, чи при малих  $j$  степенева поведінка уявної частини коорди-

Табл. 4.3. Координати перших кількох нулів Лі-Янга  $h_j$  моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при різних значеннях  $\lambda$ . В діапазоні  $3 < \lambda < 5$  кількість суто уявних нулів зменшується зі зменшенням  $\lambda$ . Однак, координата першого нуля Лі-Янга залишається уявною при будь-яких значеннях  $\lambda$ .

$j \setminus \lambda$	$\lambda > 5$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.5$
$j = 1$	$i3.453$	$i3.495$	$i3.569$	$i3.762$
$j = 2$	$i6.784$	$i6.933$	$i7.823$	$1.875 + i7.212$
$j = 3$	$i9.636$	$i9.474$	$i8.149$	$3.659 + i9.496$
$j = 4$	$i12.229$	$0.589 + i12.848$	$2.418 + i11.466$	$5.138 + i11.351$
$j = 5$	$i14.650$	$2.297 + i16.346$	$4.014 + i14.174$	$6.435 + i12.983$
$j = 6$	$i16.945$	$3.761 + i19.405$	$5.446 + i16.574$	$7.608 + i14.470$
$j = 7$	$i19.140$	$5.130 + i22.229$	$6.767 + i18.776$	$8.690 + i15.850$
$j = 8$	$i21.254$	$6.427 + i24.886$	$8.005 + i20.835$	$9.702 + i17.146$
$j = 9$	$i23.301$	$7.667 + i27.414$	$9.176 + i22.783$	$10.656 + i18.375$
$j = 10$	$i25.289$	$8.859 + i29.838$	$10.293 + i24.642$	$11.563 + i19.548$

нати нулів Лі-Янга, може бути відтворена, використовуючи рівняння (3.19), як це було зроблено у випадку нулів моделі Ізінга на повному графі. Для цього потрібно апроксимувати залежність координат нулів Лі-Янга від порядку нуля  $j$  в подвійному лагарифмічному масштабі лінійною функцією при різних  $C$  та  $\lambda$  і знайти оптимальне значення  $\sigma(C_{opt})$ . Однак, на відміну від чисто уявних нулів Лі-Янга для моделі Ізінга на повному графі, на безмасштабній мережі у діапазоні  $3 < \lambda < 5$  ми отримуємо тільки  $\mathcal{N}$  уявних нулів, а всі наступні містять і дійсну частину. Тому виконаємо апроксимацію двома способами, а саме візьмемо до уваги  $\mathcal{N}$  нулів Лі-Янга та уявні частини перших десяти нулів при різних  $\lambda$  (див. Рис. 4.6). На Рис. 4.6 а, с зображена залежність показника  $\sigma$  від  $\lambda$ . Суцільна крива демонструє точні значення (див. р-ня (4.16)), прямокутникам відповідають значення, отримані при підгонці з р-ня (3.19) при оптимальному  $C_{opt}$ . На Рис. 4.6 с, d зображено параметр підгонки  $C_{opt}$ , як функцію  $\lambda$ . У випадку підгонки за суто уявними нулями, ми можемо бачити, що значення  $C_{opt}$  спадає з  $\lambda$ , а показник  $\sigma(C_{opt})$  зростає зі зростанням  $\lambda$  наближаючись до сво-

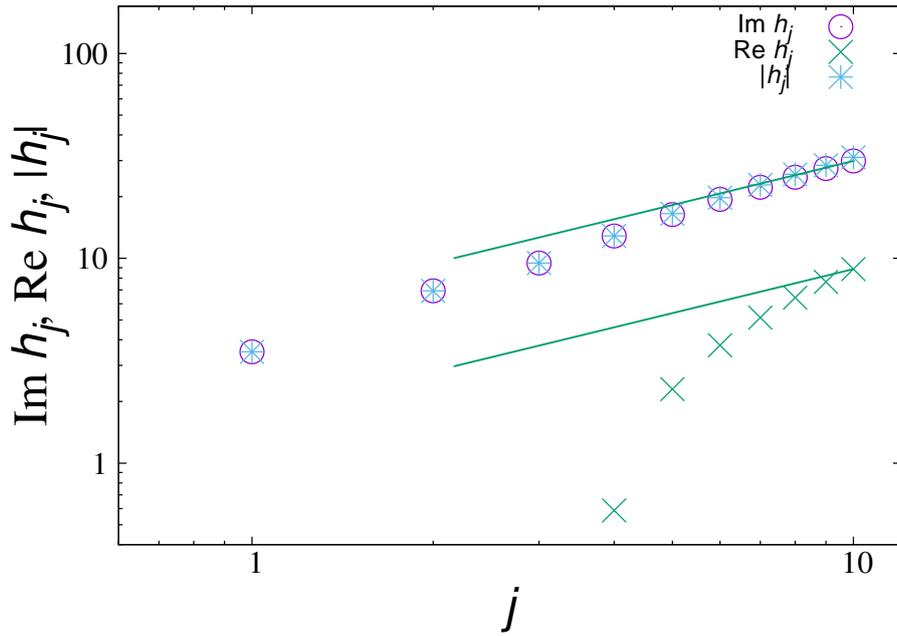


Рис. 4.5. Координати перших десяти нулів Лі-Янга  $h_j$  моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $\lambda = 4.5$ . Різні криві відповідають  $\text{Im } h_j$ ,  $\text{Re } h_j$ ,  $|h_j|$ , як показано в легенді. Можна помітити, що криві для  $\text{Im } h_j$  та  $|h_j|$  розташовані дуже близько (оскільки значення  $\text{Re } h_j$  є доволі малим). Лінії відповідають очікуваному значенню показника  $\sigma(\lambda = 4.5) \simeq 0.714$ , як впливає із (4.25).

го точного значення при великих  $\lambda$ , коли кількість чисто уявних нулів зростає (див. Рис. 4.6a, b). Однак, таку підгонку не можна використати при  $\lambda < 4$ , коли тільки один нуль є чисто уявним. З іншого боку, підгонка уявної частини координати  $h_j$  перших десяти нулів за  $j$  (див. Рис. Г.2c, d) також не дозволяє говорити про справедливість скейлінгу на мережі. По-перше, залежність  $\sigma$  та  $C_{opt}$  від  $\lambda$  не є монотонною функцією. Із Рис. 4.6c, d можна бачити, що при певних значеннях  $\lambda$  відбувається стрибок. Саме ці значення  $\lambda$  відповідають випадку, коли кількість чисто уявних нулів змінюється. А це, в свою чергу, впливає на залежності досліджуваних параметрів. По-друге, степенева поведінка функції менш виражена для малих  $j$ . Тобто, і такий тип підгонки не є універсальним і введення більш загального представлення скейлінгу, що включає параметр підгонки  $C$ , як це було зроблено для повного графа, див. вираз (3.19), не допомагає покращити результати (див. Додаток В). З іншого боку, апроксимуючи за певною кількістю нулів та при різних параметрах підгонки,

можна підібрати значення, що точніше наближається до очікуваного (див. Додаток Г). Приведений вище аналіз свідчить про те, що очікуваний скейлінг за  $j$  для нулів Лі-Янга на мережі у діапазоні  $3 < \lambda < 5$  не задовільняється.

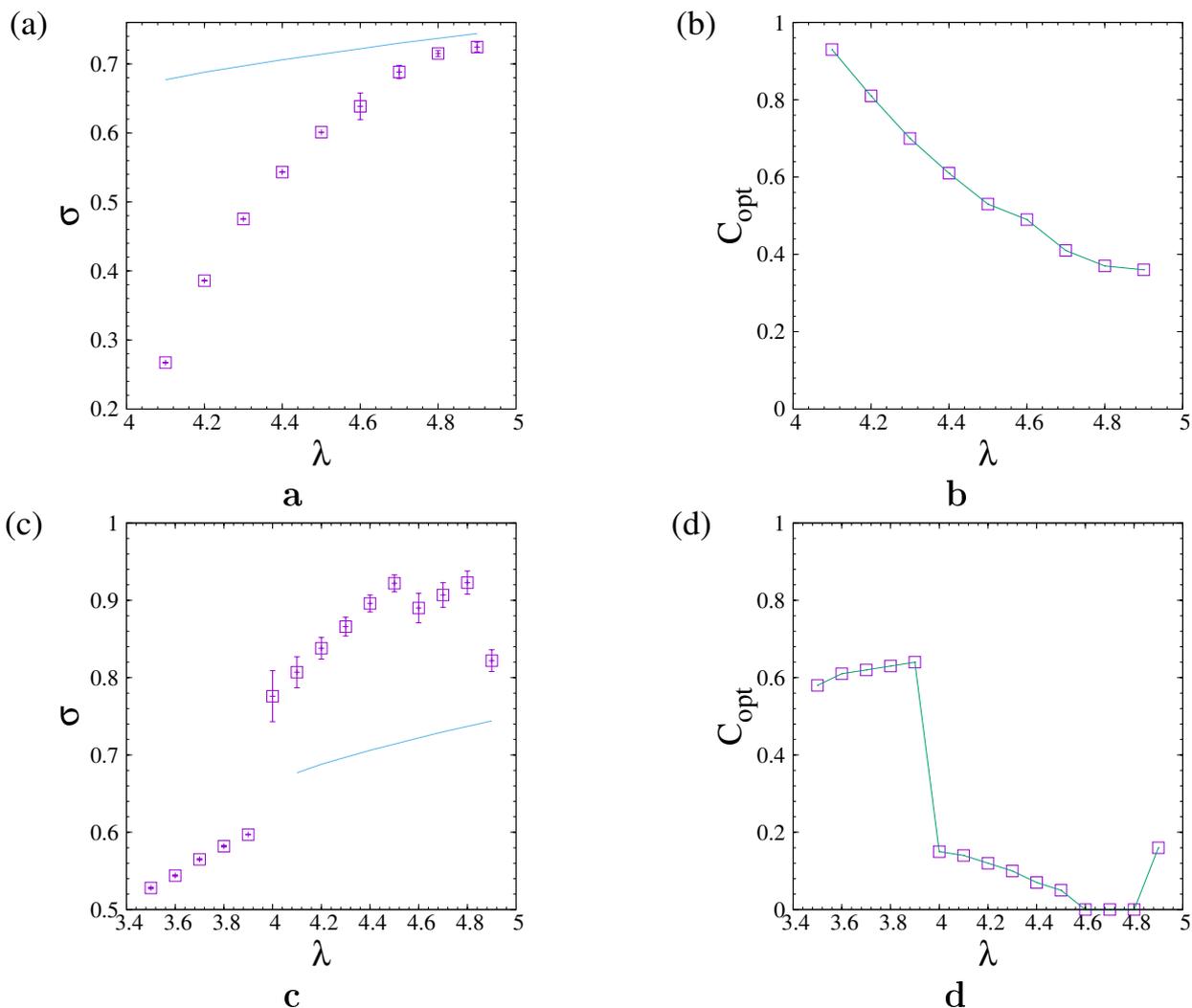


Рис. 4.6. (а), (с): Показник  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі, як функція  $\lambda$ , обчислений з опроксимації  $\mathcal{N}$  нулів Лі-Янга та уявної частини перших десяти нулів при різних  $\lambda$  відповідно. Суцільна крива відповідає точному значенню  $\sigma$ , р-ня (4.25). Прямокутники: чисельно знайдені значення з р-ня (3.19). (b), (d): Оптимальне значення параметра  $C_{opt}$ , як функції  $\lambda$ , обчислене з опроксимації  $\mathcal{N}$  нулів Лі-Янга та уявної частини перших десяти нулів при різних  $\lambda$  відповідно.

А тепер розглянемо рух нулів Фішера у дійсному магнітному полі. Так само, як це було зроблено у випадку моделі Ізінга на повному графі, ми наведемо вирази для статистичної суми моделі на відпаленій безмасштабній мережі у

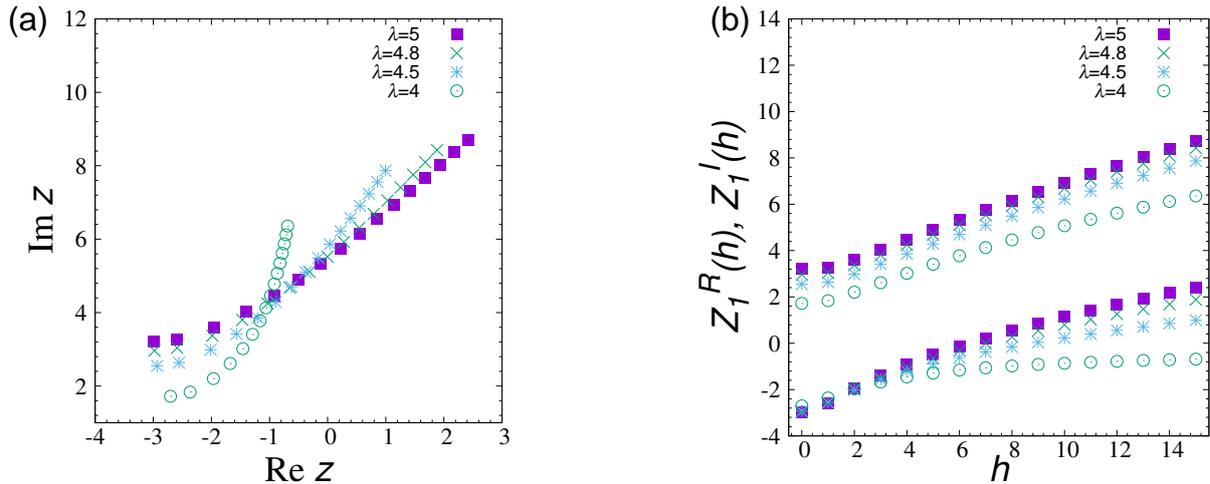


Рис. 4.7. (а) Рух перших нулів Фішера статистичної суми (4.26) у комплексній  $z$  площині при різних значеннях приведеного дійсного магнітного поля  $h = s$ ,  $s = 0, 1, \dots, 15$  та  $\lambda$ . (б) Скейлінгові функції  $Z_1^R(h)$  (нижні криві),  $Z_1^I(h)$  (верхні криві) (4.28) для дійсної та уявної частини координати першого нуля Фішера  $z_1$ , як функції скейлінгової змінної  $h$  при різних значеннях параметра  $\lambda$ .

приведених змінних  $z$  і  $h$ . Підставляючи вирази (4.11)–(4.13) для функцій  $I_\lambda^\pm(x)$  у статистичну суму (4.9) ми приходимо до наступного представлення:

$$Z(t, h) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-tx^2 - x^{\lambda-1}) \cosh(hx) dx, & 3 < \lambda < 5, \\ \int_0^{+\infty} \exp(-tx^2 - x^4) \cosh(hx) dx, & \lambda \geq 5, \end{cases} \quad (4.26)$$

де  $t$  та  $h$  визначаються із рівняння (4.18) та (4.24) відповідно.

Рис. 4.7а демонструє результати, що описують рух нулів Фішера у дійсному магнітному полі для функцій (4.26) при різних значеннях  $\lambda$ . Квадрати відповідають випадку  $\lambda \geq 5$  і очікуване значення кута руху згідно (4.27) становить  $\psi = \pi/3$ . Тому в цьому діапазоні  $\lambda$  наші чисельні результати добре узгоджуються із аналітичними передбаченнями, оскільки ми отримуємо кут  $\psi \simeq 59^\circ$ . Однак, це не справедливо при менших значеннях  $3 < \lambda < 5$ . Дійсно, підставляючи критичні показники у рівняння (1.20) для кута  $\psi$  отримуємо

$$\psi = \frac{\pi(\lambda - 3)}{2(\lambda - 2)}. \quad (4.27)$$

Зокрема, із (4.27) очікується, що кут руху нулів зменшується із  $\lambda$ . Однак, три криві з Рис.4.7а, знайдені для  $\lambda = 4.8, 4.5$  і  $4$ , демонструють зворотній тип

поведінки: кут руху нулів Фішера зростає зі зменшенням параметра  $\lambda$  і прямує до асимптотичного значення  $\psi = \pi/2$ . Як ми показали вище, для моделі при критичній температурі нулі не задовольняють теорему Лі-Янга: є скінченна кількість нулів із чисто уявною координатою при  $3 < \lambda < 5$ . Тому рівняння (4.27) отримане з припущення, що ця теорема справедлива, не можна вважати справедливим також. Кут  $\psi$  (1.20), що описує рух нулів Фішера у дійсному магнітному полі, не можна пов'язувати із відношенням скейлінгу для критичних показників.

Так само, як було зроблено для моделі Ізінга на повному графі, ми означаємо скейлінгові функції для дійсної та уявної частин  $j$ -го нуля  $z_j$ . Використовуючи вираз (3.3) для скейлінгових функцій із підрозділу 3.4 для  $\mathcal{Z}_j^{\mathcal{R}}(h)$ ,  $\mathcal{Z}_j^{\mathcal{I}}(h)$  у різних діапазонах  $\lambda$  ми означимо скейлінгові функції для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі як

$$\mathcal{Z}_j^{\mathcal{R},\mathcal{I}}(h) \equiv \begin{cases} \frac{\langle k^2 \rangle}{2} [a(\lambda)]^{2/(\lambda-1)} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R},\mathcal{I}} \left( h \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle^2} a(\lambda)^{1/(\lambda-1)} \right), & 3 < \lambda < 5, \\ \langle k^2 \rangle \sqrt{6} / \sqrt{\ln N} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R},\mathcal{I}} \left( h \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle^2} \left( \frac{\ln N}{24} \right)^{1/4} \right), & \lambda = 5, \\ \langle k^2 \rangle \sqrt{3 \langle k^4 \rangle} \mathcal{T}_j^{\mathcal{R},\mathcal{I}} \left( h \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle^2} \left( \frac{\langle k^4 \rangle}{12} \right)^{1/4} \right), & \lambda > 5, \end{cases} \quad (4.28)$$

а вирази для  $h$  при різних  $\lambda$  визначаються з (4.24). Скейлінгові функції першого нуля Фішера  $z_1$  при різних значеннях  $\lambda$  зображені на Рис. 4.7b. Із рівняння (3.37) ми очікуємо, що сподіване відношення  $\mathcal{Z}_1^{\mathcal{I}}(0)/\mathcal{Z}_1^{\mathcal{R}}(0)$  дає значення кута конденсації нулів Фішера  $\varphi$ , що для випадку безмасштабної мережі є  $\lambda$ -залежним (див. підрозділ 3.4). Із Рис. 4.7b ми знаходимо  $\mathcal{Z}_1^{\mathcal{I}}(0)/\mathcal{Z}_1^{\mathcal{R}}(0) = 0.921; 0.798; 0.577$  чи  $\varphi \simeq 0,249\pi; 0.228\pi; 0.18\pi$  для  $\lambda = 4, 8; 4.5; 4$  відповідно. Ці значення узгоджуються із передбаченими рівнянням (4.15) та наведені у Таблиці 4.1. Зазначимо, що точність зростає зі зростанням порядку нуля  $j$ .

### 4.3.2. Асимптотична поведінка нулів Лі-Янга

Дослідимо асимптотичну поведінку статистичної суми  $Z(h)$  (4.23) при  $\text{Re } h = 0$  в границі великих  $\text{Im } h$ . Так, у діапазоні  $3 < \lambda < 5$  розглянемо ін-

теграл виду

$$Z(ir) = \int_0^{\infty} e^{-x^{\lambda-1}} \cos(rx) dx, \quad (4.29)$$

що залежить від дійсної змінної  $r$ . При  $r = \text{Im } h$  (4.29) знаходимо уявну частину статистичної суми (4.23). Асимптотичну поведінку  $Z(ir)$  можна описати, застосовуючи лему Ердеї (див. [203]).

Лема Ердеї описує асимптотичну поведінку інтегралу виду:

$$F(y) = \int_0^A x^{b-1} f(x) e^{iyx^a} dx. \quad (4.30)$$

З леми випливає: якщо  $a \geq 1$ ,  $b > 0$  і функція  $f(x)$  та її похідні на верхній межі інтегрування рівні нулю  $f(A) = f'(x)|_{x=A} = \dots = f^{(n)}(x)|_{x=A} = 0$ , для інтегралу (4.30) справедлива наступна асимптотика:

$$F(y) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{-\frac{k+b}{a}}, \quad y \rightarrow \infty, \quad (4.31)$$

де коефіцієнти  $a_k$  задані наступним чином

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!a} \Gamma\left(\frac{k+b}{a}\right) \exp\left(\frac{i\pi(k+b)}{2a}\right). \quad (4.32)$$

Виконавши заміну змінних у (4.29) ми представимо  $J_{\lambda}(y)$  у формі, схожій до (4.31):

$$Z(ir) = \frac{5}{\lambda-1} \text{Re} \int_0^{\infty} x^{\frac{5}{\lambda-1}-1} e^{-x^5} e^{irx^{5/(\lambda-1)}} dx. \quad (4.33)$$

Зауважимо, що верхня межа інтегрування у цьому випадку рівна  $a = \infty$ . Легко бачити, що умови леми задовільняються і випливає наступний асимптотичний розклад для функції (4.29):

$$Z(ir) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{-\frac{k(\lambda-1)}{5}-1}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.34)$$

для коефіцієнтів  $b_k$  отримуємо

$$b_k = \frac{(\lambda-1)f^k(0)}{5k!} \Gamma\left(\frac{k(\lambda-1)}{5} + 1\right) \cos\left(\frac{\pi(k(\lambda-1) + 5)}{10}\right). \quad (4.35)$$

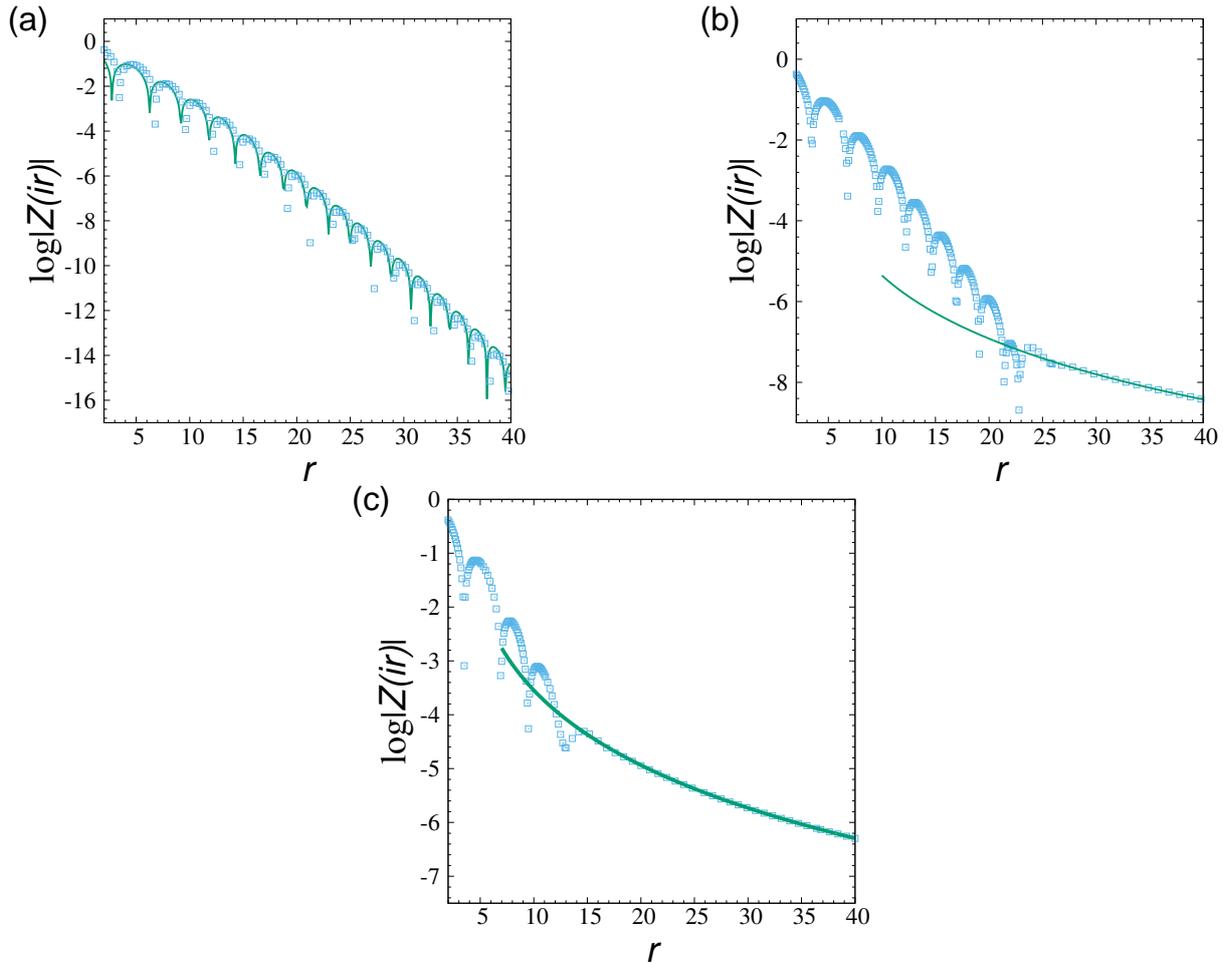


Рис. 4.8. Функція  $\log |Z(ir)|$  для: (a)  $\lambda \geq 5$ , (b)  $\lambda = 4.99$  та (c)  $\lambda = 4.5$ . Суцільні криві: результати асимптотичного розкладу. Для  $\lambda \geq 5$  функція постійно залишається знакозмінною (тобто, кількість нулів є необмеженою) на відміну від випадку  $\lambda < 5$ .

Нижче наведемо асимптотики статистичної суми при  $\lambda = 3$  та  $\lambda = 5$ .

- $\lambda = 3$

Для  $\lambda = 3$  інтеграл (4.23) береться точно і ми отримуємо

$$Z(ir) = \sqrt{\pi/2} \exp\left(-r^2/4\right). \quad (4.36)$$

Тобто, у границі великих  $r$  інтеграл загасає за експоненційним законом. Більш того,  $Z(ir) > 0$  для будь-яких  $0 < r < \infty$ , що свідчить про відсутність нулів для статистичної суми у площині комплексного поля  $h$  при  $\lambda = 3$ . У свою чергу, це свідчить про відсутність фазового переходу у цьому випадку.

- $\lambda = 5$

У даному випадку інтеграл (4.23) можна переписати як:

$$Z(ir) = \int_0^{+\infty} e^{-x^4} \cos(rx) dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^4} e^{ixr} dx. \quad (4.37)$$

Його асимптотичну поведінку можна знайти, використовуючи метод найшвидшого спуску, порахувавши підінтегральну функцію у точці екстремуму  $x = (ir/4)^{1/3}$ :

$$Z(ir) \sim \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{3}{2}(r/4)^{4/3}\right) \cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}(r/4)^{4/3}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Інтеграл  $Z(ir)$  має безмежну кількість нулів, оскільки присутні осциляції на всьому проміжку, як ми продемонструємо нижче.

На Рис. 4.8 ми порівнюємо поведінку чисельно порахованої функції  $\log |Z(ir)|$  із її асимптотичним розкладом (рівняння (4.34) та (4.38)) при різних  $\lambda$ . Можна помітити, що поведінка функції для випадку  $\lambda < 5$  якісно відрізняється від поведінки при  $\lambda \geq 5$ : у останньому випадку функція залишається знакозмінною (тобто кількість нулів є безмежною), що не характерно для випадку  $3 < \lambda < 5$ . У цьому випадку, кількість разів, коли функція статистичної суми змінює знак є скінченною і функція прямує до асимптотичного значення. Тому кількість нулів є обмеженою. Як можна бачити із Рис. 4.8а, б, с, кількість осциляцій зростає зі збільшенням  $\lambda$ .

#### 4.4. Висновки

У цьому розділі ми показали, як метод аналізу нулів статистичної суми в комплексній площині можна застосовувати для аналізу критичної поведінки спінових моделей на безмасштабних мережах. В процесі роботи було виявлено незвичну поведінку ряду універсальних характеристик.

Як було відомо раніше, критичні показники, скейлінгові функції та відношення амплітуд моделі Ізінга на безмасштабній мережі визначаються значе-

нням параметра  $\lambda$ . При аналізі нулів статистичної суми ми встановили, що кут конденсації нулів Фішера  $\varphi$  та показник  $\sigma$  є також  $\lambda$ -залежними. У діапазоні  $\lambda > 5$  їх значання відповідають спостережуваним на повному графі, а у випадку  $3 < \lambda < 5$  задаються виразами (4.15), (4.16).

По друге, логарифмічні поправки до скейлінгу, що спостерігаються для спінових моделях на безмасштабній мережі при  $\lambda = 5$  [88, 89, 93, 94] приводять до появи поправок для координат нулів як функції розміру мережі  $N$ :

$$H_j \sim N^{-3/4} (\ln N)^{1/4}, \quad t_j \sim N^{-1/2} (\ln N)^{1/2}. \quad (4.39)$$

Слід зауважити, що степені логарифмів задовільняють відповідні співвідношення скейлінгу [89].

Наступною цікавою рисою є те, що нулі Лі-Янга статистичної суми моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при критичній температурі не задовільняють теорему про одиничне коло в діапазоні  $3 < \lambda < 5$ . При  $\lambda \geq 5$  усі нулі є чисто уявними, тоді як при  $\lambda < 5$  зі спаданням  $\lambda$  кількість чисто уявних нулів зменшується та з'являються нулі із дійсною та уявною частиною. Це неочікувано, оскільки означає, що роль показника загасання  $\lambda$  (для мереж) та вимірності  $d$  (періодичних ґраток), які контролюють універсальні характеристики фазових переходів і є глобальними параметрами, не еквівалентна на рівні нулів Лі-Янга. Зазначимо, що експериментальне спостереження нулів Лі-Янга [17] відповідає випадку суто уявних нулів [152], однак даний випадок порушення теореми не єдиний [136–147], тому розроблення нових методів, що дозволяють експериментально виявляти нулі із дійсною частиною, є вкрай важливим.

Підводячи підсумок зазначимо, що справедливість теореми Лі-Янга було доведено [204] для будь-якого класу ізінгоподібних моделей із феромагнітними взаємодіями, див. також [205, 206]. Даючи означення відпаленої мережі ми зауважили, що такою вважають ансамбль усіх можливих конфігурацій мережі. У статистичній сумі ми виконували подвійне усереднення – за спінами та конфігураціями мережі. Саме це може бути одним із можливих пояснень порушення теореми для моделі Ізінга на безмасштабній відпаленій мережі у діапазоні

$3 < \lambda < 5$ . А саме, якщо нулі статистичної суми для кожної конфігурації задовільняють властивість Лі-Янга, то усереднення за конфігураціями призводить до того, що загальна статистична сума, таку властивість для розв'язків (нулів) може і не задовільняти.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі ми досліджували критичну поведінку спінових моделей на безмасштабних мережах, при наявності замороженого чи відпаленого безладу, та на повному графі. На безмасштабній мережі, що характеризується степеневі-спадною функцією розподілу ступенів вузлів, критична поведінка суттєвим чином залежить від показника спадання  $\lambda$  (2.2). Критичні показники, відношення амплітуд, скейлінгові функції виявляються  $\lambda$ -залежними. Таким чином саме поняття універсальності для моделей на безмасштабних мережах зазнає змін:  $\lambda$  виявляється одним із глобальних параметрів, що визначає клас універсальності. Поряд із традиційним в теорії складних мереж методом неоднорідного середнього поля, ми використали метод аналізу нулів статистичної суми в комплексній площині. До появи наших робіт даний метод у теорії складних мереж не застосовувався. Отримані нами результати свідчать про його перспективність та відкривають новий шлях для аналізу фазових переходів на складних мережах.

Нижче ми іще раз коротко підсумуємо оригінальні результати, отримані у трьох попередніх розділах.

1. Для  $q$ -станової моделі Поттса на нескорельовані безмасштабній мережі у присутності замороженого безладу, використовуючи наближення неоднорідного середнього поля, отримано представлення для вільної енергії. Фазова діаграма моделі (рис. 2.2) свідчить про те, що характер впорядкування та рід фазового переходу кардинальним чином залежить як від кількості станів  $q$ , так і від показника загасання функції розподілу ступенів вузлів  $\lambda$ . В режимі фазового переходу другого роду ми вперше отри-

- мали скейлінгові функції моделі та відношення критичних амплітуд.
2. Для явища перколяції на безмасштабних мережах (границя  $q \rightarrow 1$  моделі Поттса) показано виникнення логарифмічних поправок до скейлінгу. Отримані значення показників поправок до скейлінгу є від'ємними. Це означає послаблення сингулярностей відповідних спостережуваних в околі точки перколяції.
  3. Ми встановили, що стрибок теплоємності  $\delta c_H$  моделі Ізінга на безмасштабній мережі є  $\lambda$ -залежним навіть при  $\lambda > 5$ , коли всі критичні показники не залежать від  $\lambda$  та є стандартними критичними показниками середнього поля. Значення стрибка теплоємності у цьому випадку наближаються до передбаченого у теорії середнього поля тільки в границі  $\delta c_H(\lambda \rightarrow \infty) = 3/2$ .
  4. Ми доповнили аналіз моделі Ізінга на повному графі застосовуючи формалізм Лі-Янга-Фішера аналізу нулів статистичної суми. Використовуючи метод, запропонований для нулів у площині комплексної температури (нулі Фішера), ми знайшли відповідні інтегральні представлення статистичної суми для випадку комплексного поля (нулі Лі-Янга), знайшли значення конформно інваріантних кутів та показника скейлінгу для нулів Лі-Янга.
  5. Ми вперше застосували метод аналізу нулів статистичної суми для аналізу критичної поведінки спінових моделей на безмасштабних мережах. Знайдені нами конформно-інваріантні характеристики розташування нулів у випадку безмасштабної мережі виявляються залежними від значенням параметра  $\lambda$ . А саме, значення кута конденсації нулів Фішера  $\varphi$  та показника  $\sigma$  у діапазоні  $\lambda \geq 5$  відповідають спостережуваним на повному графі, а у випадку  $3 < \lambda < 5$  задаються виразами (4.15), (4.16).
  6. Для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $\lambda = 5$  появляються логарифмічні поправки для координат нулів як функції розміру мережі  $N$  (див. р-ня (4.39)) із показниками, що задовільняють скейлінгові

залежності для цих логарифмічних поправок.

7. Теорема Лі-Янга про коло одиничного радіуса для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі порушується у діапазоні  $3 < \lambda < 5$ . Якщо при  $\lambda \geq 5$  усі нулі є чисто уявними, при  $3 < \lambda < 5$  зі збільшенням  $\lambda$  кількість чисто уявних нулів зменшується та з'являються нулі із дійсною та уявною частиною, що суперечить умовам теореми.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Eulero, L.* Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis / L. Eulero // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. – 1741. – Vol. 8. – P. 128-140.
2. *Bondy, J. A.* Graph theory and applications / J. A. Bondy, U. S. R. Murty. – Great Britain: The Macmillan Press Ltd, 1976.
3. *Albert R.* Statistical mechanics of complex networks / R. Albert, A.-L. Barabási // Rev. Mod. Phys. – 2002. – Vol. 74. – P. 47-94.
4. *Dorogovtsev, S. N.* Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW / S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes. – Oxford: Oxford University Press, 2003.
5. Складні мережі / Ю. Головач, К. фон Фербер, О. Олемской та ін. // ЖФД. – 2006. – Т. 10. – С. 247.
6. *Barrat, A.* Dynamical Processes on Complex Networks / A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespignani. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
7. *Newman, M.* Networks: An Introduction / M. Newman. – Oxford: Oxford University Press, 2010.
8. *Erdős, I. P.* On random graphs / I. P. Erdős, A. Rényi // Publ. Math. (Debrecen). – 1959. – Vol. 6. – P. 290-297.
9. *Watts, D. J.* Collective dynamics of small-world networks / D. J. Watts, S. H. Strogatz // Nature (London). – 1998. – Vol. 393. – P. 440-442.
10. *Watts, D. J.* Small Worlds / D. J. Watts. – Princeton: Princeton University Press, 1999.
11. Resilience of the Internet to random breakdowns / R. Cohen, K. Erez, D.

- ben-Avraham, S. Havlin // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85, no. 21. – P. 4626.
12. Resilience of public transport networks against attacks / B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, Yu. Holovatch // *Eur. Phys. J. B.* – 2009. – Vol. 71, no. 1. – P. 125–137.
  13. *Barabási, A.-L.* Emergence of Scaling in Random Networks / A.-L. Barabási, R. Albert // *Science.* – 1999. – Vol. 286, no. 5439. – P. 509-512.
  14. *Barabási, A.-L.* Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world wide web / A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong // *Physica A.* – 2000. – Vol. 281, no. 1. – P. 69-77.
  15. *Galam, S.* Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena (Understanding Complex Systems) / S. Galam. – London: Springer, 2012.
  16. *Tadić, B.* Magnetization Reversal in Spin Patterns with Complex Geometry / B. Tadić, K. Malarz, K. Kułakowski // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 94, no. 13. – P. 137204.
  17. Experimental Observation of Lee-Yang Zeros / X. Peng, H. Zhou, B.-B. Wei et al. // *Phys. Rev. Lett.* – 2015. – Vol. 114, no. 1. – P. 010601.
  18. *Krasnytska, M.* Phase transitions in the Potts model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // *Condens. Matter Phys.* – 2013. – Vol. 16, no. 2. – P. 23602.
  19. *Krasnytska, M.* Scaling functions and amplitude ratios for the Potts model on an uncorrelated scale-free network / M. Krasnytska // *Condens. Matter Phys.* – 2014. – Vol. 17, no. 2. – P. 23602.
  20. *Krasnytska, M.* On the discontinuity of the specific heat of the Ising model on a scale-free network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, and R. Kenna // *Condens. Matter Phys.* – 2015. – Vol. 18, no. 4. – P. 44601.
  21. Violation of Lee-Yang circle theorem for Ising phase transitions on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // *EPL.* – 2015. – Vol. 111, no.6. – P. 60009.

22. Partition function zeros for the Ising model on complete graphs and on annealed scale-free networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // J. Phys. A: Math. Theor. – 2016. – Vol. 49, no. 13. – P. 135001.
23. *Krasnytska, M.* Scaling functions and critical amplitude ratios for the Potts model on scale-free networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // VI International Conference: Physics of Disordered Systems, Lviv, October 14-16, 2013. Proceedings. – Lviv: LNU, 2013. – P. 67.
24. *Krasnytska, M.* Critical behaviour of the Potts model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch // Різдвяні дискусії 2013, Львів, 3-4 січня, 2013. – Журн. фіз. дослідж., 2013. – Т. 17. – С. 1998-6.
25. *Красницька, М.* Фазові переходи для моделі Поттса на складних мережах / М. Красницька, Б. Берш, Ю. Головач // XIII Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики і теорії конденсованої речовини. – Львів, 5-7 червня 2013. Інститут фізики конденсованих систем НАН України: Збірка тез. – С. 29.
26. *Krasnytska, M.* Scaling functions and amplitude ratios for the Potts model on uncorrelated scale-free network / M. Krasnytska // 5-th Conference of young scientists “Modern problems of theoretical physics”. – Kyiv, Ukraine, December 24-27, 2013: Book of Abstracts. – P. 30.
27. Lee-Yang-Fisher zeros for the Ising model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // The 39-th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. – Coventry, United Kingdom, April 8-10, 2014: Book of Abstracts. – P. 75.
28. Lee-Yang-Fisher zeros for the Ising model on complex networks / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // Workshop “CompPhys-2014”. – Leipzig, Germany, November 27-29, 2014: Book of Abstracts. – P. 10.
29. Violation of the Lee-Yang circle theorem for the Ising model on complex network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // Різдвяні

- дискусії 2015, Львів, 12-13 січня, 2015. – Журн. фіз. дослідж., 2015. – Т. 19. – С. 1998-3.
30. *Красницька, М.* Нулі статистичної суми моделі Ізінга на безмасштабній мережі / М. Красницька // XV Всеукраїнська школа-семінар і конкурс молодих вчених зі статистичної фізики і теорії конденсованої речовини. – Львів, Україна, 4-5 червня 2015: Тези доповідей. – С. 29.
  31. *Krasnytska, M.* Violation of Lee-Yang circle theorem for Ising phase transitions on complex networks / M. Krasnytska // The 41-st Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. – Vienna, Austria, February 14-17, 2016: Book of Abstracts. – P. 68.
  32. On the discontinuity of the specific heat of the Ising model on a scale-free network / M. Krasnytska, B. Berche, Yu. Holovatch, R. Kenna // The 41-st Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics. – Vienna, Austria, February 14-17, 2016: Book of Abstracts. – P. 68.
  33. *Diestel, R.* Graph Theory / R. Diestel // Graduate Texts in Mathematics. – Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – Vol. 173.
  34. *Bornholdt, S.* Handbook of Graphs and Networks / S. Bornholdt, H. Schuster. – Weinheim: Wiley-VCH, 2003.
  35. *Faloutsos, M.* On power-law relationships of the internet topology / M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos // Computer Communications Rev. – 1999. – Vol. 29 – P. 251-262.
  36. *Albert, R.* Diameter of the world wide web / R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási // Nature (London). – 1999. – Vol. 401. – P. 130-131.
  37. The large-scale organization of metabolic networks / H. Jeong, B. Tombor, R. Albert et al. // Nature (London). – 2000. – Vol. 407, no. 9. – P. 651-655.
  38. The Web of Human Sexual Contacts / F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral et al. // Nature. – 2001. – Vol. 411, no. 6804. – P. 907-908.
  39. Extracting large-scale knowledge bases from the web / R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajalopagan, A. Tomkins // VLDB. – 1999. – Vol. 99, no. 6840. – P. 639–650.

40. The web as a graph: measurements, models, and methods / J. M. Kleinberg, R. Kumar, P. Raghavan et al. // Proceedings of the Int. Conf. on Combinatorics and Computing, Lect. Notes in Comput. Sci. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – P. 1-17.
41. *Adamic, L. A.* Power-law distribution of the world wide web / L. A. Adamic, B. A. Huberman // Science. – 2000. – Vol. 287, no. 5461. – P. 2115.
42. *Newman, M. E. J.* The structure of scientific collaboration networks / M. E. J. Newman // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2001. – Vol. 98, no. 2. – P. 404-409.
43. *Newman, E. J.* The structure and function of complex networks / E. J. Newman // SIAM Review. – 2003. – Vol. 45, no. 2. – P. 167-256.
44. Evolution of the social network of scientific collaborations / A. L. Barabási, H. Jeong, Z. Neda et al. // Physica A: Statistical mechanics and its applications. – 2002. – Vol. 311, no. 3. – P. 590-614.
45. *Newman, M. E. J.* Coauthorship networks and patterns of scientific collaboration / M. E. J. Newman // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 2004. – Vol. 101. – P. 5200-5205.
46. Classes of small-world networks / L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, H. E. Stanley // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2000. – Vol. 97, no. 21. – P. 11149-11152.
47. *Guimera, R.* Modeling the world-wide airport network / R. Guimera, L. A. N. Amaral // Eur. Phys. J. B. – 2004. – Vol. 38, no. 2. – P. 381-385.
48. The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities' global roles / R. Guimera, S. Mossa, A. Turtschi, L. A. N. Amaral // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 2005. – Vol. 102, no. 22. – P. 7794-7799.
49. The architecture of complex weighted networks / A. Barrat, M. Barthelemy, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2004. – Vol. 101, no. 11. – P. 3747-3752.
50. *Li, W.* Statistical analysis of airport network of China / W. Li, X. Cai // Phys.

- Rev. E. – 2004. – Vol. 69. – P. 046106.
51. *Guida, M.* Topology of the Italian airport network: A scale-free small-world network with a fractal structure? / M. Guida, F. Maria, // *Chaos Solitons & Fractals*. – 2007. – Vol. 31, no. 3. – P. 527-536.
  52. Small-world properties of the Indian railway network / P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram et al. // *Phys. Rev. E*. – 2003. – Vol. 67, no. 3. – P. 036106.
  53. *Latora, V.* Efficient Behavior of Small-World Networks / V. Latora, M. Marchiori // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, no. 19. – P. 198701.
  54. *V. Latora, V.* Is the Boston subway a small-world network? / V. Latora, M. Marchiori // *Physica A*. – 2002. – Vol. 314, no. 1. – P. 109-113.
  55. *Seaton, K. A.* Stations, trains and small-world networks / K. A. Seaton, L. M. Hackett // *Physica A*. – 2004. – Vol. 339, no. 3-4. – P. 635-644.
  56. *von Ferber C.* Scaling in public transport networks / C. von Ferber, Yu. Holovatch, V. Palchykov // *Condens. Matter Phys.* – 2005. – Vol. 8, no. 3. – P. 225-234.
  57. *Sienkiewicz, J.* Log-periodic oscillations due to discrete effects in complex networks / J. Sienkiewicz, J. A. Hołyst // *Phys. Rev. E*. – 2005. – Vol. 72, no. 6. – P. 066102.
  58. Scaling and correlations in three bus-transport networks of China / X. Xu, J. Hu, F. Liu, L. Liu // *Physica A*. – 2007. – Vol. 374, no. 1. – P. 441-448.
  59. *Brout, R.* Statistical mechanical theory of a random ferromagnetic system / R. Brout // *Phys. Rev.* – 1959. – Vol. 115. – P. 824-835.
  60. *Bender, E. A.* The asymptotic number of labelled graphs with given degree sequences / E. A. Bender, E. R. Canfield // *Journ. Comb. Theory A*. – 1978. – Vol. 24, no. 3. – P. 296-307.
  61. Critical Behavior of the Ising Model in Annealed Scale-free Networks / S. H. Lee, M. Ha, H. Jeong et al. // *Phys. Rev. E*. – 2009. – Vol. 80, no. 5. – P. 051127.

62. *Bianconi, G.* Superconductor-insulator transition in annealed complex networks / G. Bianconi // Phys. Rev. E. – 2012. – Vol. 85, no. 6. – P. 061113.
63. *Dorogovtsev, S. N.* Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections / S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66, no. 1. – P. 016104.
64. *Dorogovtsev, S. N.* Critical phenomena in complex networks / S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes // Rev. Mod. Phys. – 2008. – Vol. 80, no. 4. – P. 1275-1335.
65. *Aleksiejuk, A.* Ferromagnetic phase transition in Barabasi-Albert networks / A. Aleksiejuk, J. A. Holyst, D. Stauffer // Physica A. – 2002. – Vol. 310, no. 1. – P. 260-266.
66. *Bianconi, G.* Mean field solution of the Ising model on a Barabasi–Albert network / G. Bianconi // Phys. Lett. A. – 2002. – Vol. 303, no. 2. – P. 166-168.
67. *Wu, F. Y.* The Potts model / F. Y. Wu // Rev. Mod. Phys. – 1982. – Vol. 54. – P.235-268.
68. *Müller-Hartmann, E.* New type of phase transition / E. Müller-Hartmann , J. Zittartz // Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 33. – P. 893-897.
69. *Müller-Hartmann, E.* Phase transitions of continuous order: Ising model on a Cayley tree / E. Müller-Hartmann, J. Zittartz // Z. Physik. – 1975. – Vol. 22. – P. 59-67.
70. *Wang, Y. K.* Multi-component spin model on a Cayley tree / Y. K. Wang, F. U. Wu // J. Phys. A. – 1976. – Vol. 9, no. 4. – P. 593-604.
71. *Turban, L.*  $S$ -state Potts model on a Cayley tree / L. Turban // Phys. Lett. A. – 1980. – Vol. 78, no. 4. – P. 404-406.
72. *Ganikhodjaev, N.* On the three state Potts model with competing interactions on the Bethe lattice / N. Ganikhodjaev, F. Mukhamedov, J. F. F. Mendes // J. Stat. Mech.: Theor. and Exper. – 2006. – P. 08012.
73. *Ganikhodjaev, N.* Phase diagram of the three states Potts model with next nearest neighbour interactions on the Bethe lattice / N. Ganikhodjaev, F.

- Mukhamedov, C. H. Pah // Phys. Lett A. – 2008. – Vol. 373. – P. 33-38.
74. *Baxter, R. J.* Exactly solved models in statistical physics / R. J. Baxter. – London: Academic Press, 1982.
  75. *Folk, R.* Critical exponents of a three-dimensional weakly diluted quenched Ising model / R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors’kii // Uspekhi Fizichieskikh Nauk. – 2003. – Vol. 173, no. 2. – P. 169-191.
  76. *Dotsenko, V.* Introduction to the replica theory of disordered statistical systems / V. Dotsenko. – Cambridge: Cambridge university press, 2001.
  77. *Barrat, A.* On the properties of small-world network models / A. Barrat, M. Weigt // Eur. Phys. J. B. – 2000. – Vol. 13, no. 3. – P. 547-560.
  78. XY model in small-world networks / B. J. Kim, H. Hong, P. Holme et al. // Phys. Rev. E. – 2001. – Vol. 64. – P. 056135.
  79. *Herrero, C. P.* Ising model in small-world networks / C. P. Herrero // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65. – P. 066110.
  80. *Hastings, M. B.* Mean-Field and Anomalous Behavior on a Small-World Network / M. B. Hastings // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91. – P. 098701.
  81. *Herrero, C. P.* Antiferromagnetic Ising model in small-world networks / C. P. Herrero // Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – P. 041102.
  82. *Newman, M. E. J.* Spread of epidemic disease on networks / M. E. J. Newman // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66, no. 1. – P. 016128.
  83. *Song, C.* Self-similarity of complex networks / C. Song, S. Havlin, H. A. Makse // Nature (London). – 2005. – Vol. 433, no. 7024. – P. 392-395.
  84. LGL: creating a map of protein function with an algorithm for visualizing very large biological networks / A. T. Adai, S.V. Date, S. Wieland, E. M. Marcotte // J. Mol. Biol. – 2004. – Vol. 340. – P. 179-190.
  85. *Gallos, L. K.* Scaling of degree correlations and its influence on diffusion in scale-free networks / L. K. Gallos, C. Song, H. A. Makse // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100, no. 24. – P. 248701.
  86. *Bianconi, G.* Interdisciplinary and physics challenges of network theory / G.

- Bianconi Eur. Phys Lett. – 2015. – Vol. 111, no. 5. – P. 56001.
87. *Leone, M.* Ferromagnetic ordering in graphs with arbitrary degree distribution / M. Leone, A. Vázquez, A. Vespignani, R. Zecchina // Eur. Phys. Journ. B. – 2002. – Vol. 28, no. 2. – P. 191-197.
  88. Critical phenomena on scale-free networks: Logarithmic corrections and scaling functions / V. Palchykov, C. von Ferber, R. Folk et al. // Phys. Rev. E. – 2010. – Vol. 82, no. 1. – P. 011145.
  89. See e.g. *Kenna R.* Universal Scaling Relations for Logarithmic-Correction Exponents // Ed. Yu. Holovatch. Order, Disorder and Criticality Advanced Problems of Phase Transition Theory. – Singapore: World Scientific, 2012. – Vol. 3. – P. 1-47.
  90. *Kosterlitz, J. M.* The critical properties of the two-dimensional xy model / J. M. Kosterlitz // J. Phys. C: Solid State Physics. – 1974. – Vol. 7, no. 6. – P. 1046.
  91. *Hinczewski, M.* Inverted Berezinskii-Kosterlitz-Thouless singularity and high-temperature algebraic order in an Ising model on a scale-free hierarchical-lattice small-world network / M. Hinczewski, A. N. Berker // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73, no. 6. – P. 066126.
  92. *Araújo, N. A. M.*  $q$ -state Potts model on the Apollonian network / N. A. M. Araújo, R. F. S. Andrade, H. J. Herrmann // Phys. Rev. E. – 2010. – Vol. 82. – P. 046109.
  93. *Iglói, F.* First- and second-order phase transitions in scale-free networks / F. Iglói, L. Turban // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66, no. 3. – P. 036140.
  94. *Dorogovtsev, S.* Potts model on complex networks / S. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes // Eur. Phys. Journ. B. – 2004. – Vol. 38, no. 2. – P. 177-182.
  95. *Ehrhardt, G. C. M. A.* Potts model on random trees / G. C. M. A. Ehrhardt, M. Marsili // J. Stat. Mech.: Theor. and Exper. – 2005. – No. 2. – P. 02006.
  96. Coarse-grained Monte Carlo simulations of the phase transition of the Potts

- model on weighted networks / C. Shen, H. Chen, Z. Hou, H. Xin // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 83. – P. 066109.
97. *Stauffer, D.* Introduction to percolation theory / D. Stauffer, A. Aharony. – London: Taylor & Francis, 1991.
98. *Bollobás, B.* The evolution of random graphs—the giant component / B. Bollobás // Cambridge University Press Cambridge Studies in Advanced Mathematics. – 2001. – No. 73. – P. 130-159.
99. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs / D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 5468-5471.
100. *Molloy, M. A.* Critical Point for Random Graphs with a Given Degree Sequence / M. Molloy and B. Reed // Random Structures and Algorithms. – 1995. – Vol. 6, no. 2-3. – P. 161-180.
101. *Albert, R.* Error and attack tolerance of complex networks / R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási // Nature (London). – 2000. – Vol. 406. – P. 378-482.
102. *Tu, Y.* How robust is the Internet? / Y. Tu // Nature (London). – 2000. – Vol. 406. – P. 353-354.
103. *Sole, R. V.* Complexity and fragility in ecological networks / R. V. Sole, J. M. Montoya // Proc. R. Soc. Lond. B. – 2001. – Vol. 268, no. 1480. – P. 2039-2045.
104. Lethality and centrality in protein networks / H. Jeong, S. P. Mason, A.-L. Barabási, Z. N. Oltvai // Nature (London). – 2001. – Vol. 411, no. 6833. – P. 41-42.
105. *Pastor-Satorras, R.* Epidemic Spreading in Scale-Free Networks / R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86, no. 14. – P. 3200.
106. *Moreno, Y.* Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks / Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // Eur. Phys. Journ. B. – 2002. – Vol. 26, no. 4. – P. 521-529.
107. *Barabási, A.-L.* Mean-field theory for scale-free random networks / A.-L.

- Barabási, R. Albert, H. Jeong // *Physica A.* – 1999. – Vol. 272. – P. 173-187.
108. *Goltsev, A. V.* Critical phenomena in networks / A. V. Goltsev, S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 67, no. 2. – P. 026123.
109. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks / S. V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul et al. // *Nature.* – 2010. – Vol. 464. – P. 1025-1028.
110. *Parshani, R.* Interdependent networks: reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition / R. Parshani, S. V. Buldyrev, S. Havlin // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – Vol. 105, no. 4. – P. 048701.
111. *Bianconi, G.* Mutually connected component of network of networks with replica nodes / G. Bianconi, S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes // *Phys. Rev. E.* – 2015. – Vol. 91. – P. 012804.
112. *SucHECKI, K.* Ising model on two connected Barabasi-Albert networks / K. SuCHECKI, J. A. Holyst // *Phys. Rev. E.* 2006. – Vol. 74. – P. 011122.
113. *SucHECKI, K.* Bistable-monostable transition in the Ising model on two connected complex networks / K. SuCHECKI, J. A. Holyst // *Phys. Rev. E.* – 2009. – Vol. 80, no. 3. – P. 031110.
114. *SucHECKI, K.* Order Ising model on Connected complex networks. K. SuCHECKI, J. A. Holyst // Ed. Yu. Holovatch. *Order, Disorder and Criticality: Advanced Problems of Phase Transition Theory.* – Singapore: World Scientific, 2013. – Vol.4. – P. 167-200.
115. *Privman V.* Phase Transitions and Critical Phenomena / V. Privman, P. C. Hohenberg, A. Aharony. Ed. C. Domb and J. L. Lebowitz. – New York: Academic Press, 1991. – Vol. 14.
116. *Cardy, J. L.* Finite-Size Scaling. *Current Physics - Sources and Comments* / J. L. Cardy. – Elsevier Science Publishers B. V., 1988. – Vol. 12.
117. *Hong, H.* Finite-size scaling in complex networks / H. Hong, M. Ha, H. Park // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98, no. 25. – P. 258701.

118. *Yang, C. N.* Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation / C. N. Yang, T. D. Lee // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, no. 3. – P. 404-410.
119. *Lee, T. D.* Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model / T. D. Lee, C. N. Yang // Phys. Rev. – 1952. – Vol. 87, no. 3. – P. 410-414.
120. *Fisher, M. E.* The nature of critical points: Lecture Notes in Theoretical Physics / M. E. Fisher. – Boulder: University of Colorado Press, 1965. – Vol. 7c. – P. 1-159.
121. *Wu, F. Y.* Professor C. N. Yang and Statistical Mechanics / F. Y. Wu // Int. J. Mod. Phys. B. – 2008. – Vol. 22. – P. 1899-1909.
122. *Bena, I.* Statistical Mechanics of Equilibrium and Nonequilibrium Phase Transitions: The Yang-Lee Formalism / I. Bena, M. Droz, A. Lipowski // Int. J. Mod. Phys. B. – 2005. – Vol. 19, no. 29. – P. 4269-4329.
123. *Pearson, R. B.* Partition function of the Ising model on the periodic  $4 \times 4 \times 4$  lattice / R. B. Pearson // Phys. Rev. B. – 1982. – Vol. 26. – P. 6285.
124. *Itzykson, C.* Distribution of Zeros in Ising and Gauge Models / C. Itzykson, R. B. Pearson, J. B. Zuber // Nucl. Phys. B. – 1983. – Vol. 220, no. 4. – [FS8]. – P. 415-433.
125. *Itzykson, C.* Zeros of the partition function for statistical models on regular and hierarhical lattices / C. Itzykson, J. M. Luck // Prog. Phys. – 1985. – Vol. 11. – P. 45-82.
126. *Abe, R.* Logarithmic Singularity of Specific Heat near the Transition Point in the Ising Model / R. Abe // Prog. Theor. Phys. – 1967. – Vol. 37. – P. 1070.
127. *Janke, W.* Properties of higher-order phase transitions / W. Janke, D. A. Johnston, R. Kenna // Nucl. Phys. B. – 2006. – Vol. 736, no. 3. – P. 319-328.
128. *Kortman, P. J.* Density of Zeros on the Lee-Yang Circle for Two Ising Ferromagnets / P. J. Kortman, R. B. Griffiths // Phys. Rev. Lett. – 1971.

- Vol. 27. – P. 1439-1442.
129. *Glumac, Z.* Yang-Lee zeros and the critical behavior of the infinite-range two- and three-state Potts models / Z. Glumac, K. Uzelac // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, no. 2. – P. 022140.
130. *Dunlop, F.* Multicomponent field theories and classical rotators / F. Dunlop, C. M. Newman // Commun. Math. Phys. – 1975. – Vol. 44, no. 3. – P. 223-235.
131. *Simon, B.* The  $(\phi^2)_2$  field theory as a classical Ising model / B. Simon, R. B. Griffiths // Commun. Math. Phys. – 1973. – Vol. 33, no. 2. – P. 145-164.
132. *Wang, X. Z.* Yang–Lee circle theorem for an ideal pseudospin-1/2 Bose gas in an arbitrary external potential and in an external magnetic field / X. Z. Wang // Physica A. – 2007. – Vol. 380. – P. 163-171.
133. *Blythe, R. A.* Lee-Yang Zeros and Phase Transitions in Nonequilibrium Steady States / R. A. Blythe, M. R. Evans // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89, no. 8. – P. 080601.
134. *O’Loan, O. J.* Jamming transition in a homogeneous one-dimensional system: The bus route model / O. J. O’Loan, M. R. Evans, M. E. Cates // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58, no. 2. – P. 1404.
135. *Chou, T.* Entropy-Driven Pumping in Zeolites and Biological Channels / T. Chou, D. Lohse // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 82. – P. 3552-3555.
136. *Kim, S. Y.* Yang-Lee Zeros of the Antiferromagnetic Ising Model / S. Y. Kim // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93. – P. 130604.
137. *Kim, S. Y.* Density of Lee-Yang zeros and Yang-Lee edge singularity in the antiferromagnetic Ising model / S. Y. Kim // Nucl. Phys. B. – 2005. – Vol. 75. – [FS]. – P. 505.
138. *Suzuki, M.* Rigorous results for Ising ferromagnets of general spin with degeneracy or symmetric potentials / M. Suzuki // J. Math. Phys. – 1973. – Vol. 14. – P. 1088.
139. *Yamada, K.* Distribution of zeros of the partition function in the first and second order phase transitions: extension of the Lee-Yang theorem / K.

- Yamada, H. Nakano, M. Yamashita // Prog. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 65. – P. 1603.
140. *Monroe, J. L.* Restrictions on the phase diagrams for a large class of multisite interaction spin systems / J. L. Monroe // J. Stat. Phys. – 1991. – Vol. 65, no. 3. – P. 445-452.
141. *Chin, K. K.* Monte Carlo study of a triangular Ising lattice-gas model with two-body and three-body interactions / K. K. Chin, D. P. Landau // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 36. – P. 275.
142. *Nilsen, T. S.* Yang-Lee distribution of zeros for a van der Waals gas / T. S. Nilsen // Physica. – 1967. – Vol. 37. – P. 47-50.
143. *Hemmer, P. C.* Yang-Lee Distribution of Zeros for a van der Waals Gas / P. C. Hemmer P C, H. E. Hiis // Phys. Rev. – 1964. – Vol. 133. – P. A1010-A1015.
144. *Lee, K.C.* Generalized Circle Theorem on Zeros of Partition Function at Asymmetric First-Order Transitions / K. C. Lee // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol. 73. – P. 28012804.
145. General Theory of Lee-Yang Zeros in Models with First-Order Phase Transitions / M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes et al. // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84, no. 21. – P. 4794.
146. *Wang, X. Z.* Yang-Lee edge singularity of a one-dimensional Ising ferromagnet with arbitrary spin / X. Z. Wang, J. S. Kim // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58. – P. 4174-4180.
147. *Tong, P.* Lee-Yang Zeros of Periodic and Quasiperiodic Anisotropic XY Chains in a Transverse Field / P. Tong, X. Liu // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – P. 017201.
148. *Glasser, M. L.* Complex-temperature-plane zeros: Scaling theory and multicritical mean-field models / M. L. Glasser, V. Privman, L. S. Schulman // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 35, no. 4. – P. 1841.
149. *Stanley, H. E.* Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena / H. E. Stanley // Rev. Mod. Phys. – 1999. –

- Vol. 71, no. 2. – P. S358.
150. *Binek, Ch.* Density of Zeros on the Lee-Yang Circle Obtained from Magnetization Data of a Two-Dimensional Ising Ferromagnet / Ch. Binek // *Phys. Rev. Lett.* – 1998. – Vol. 81. – P. 5644-5647.
  151. *Ткачук, В. М.* Фундаментальні проблеми квантової механіки / В. М. Ткачук. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 144 с.
  152. *Wei, B. B.* Lee-Yang Zeros and Critical Times in Decoherence of a Probe Spin Coupled to a Bath / B. B. Wei, R. B. Liu // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 109, no. 18. – P. 185701.
  153. Phase transitions in the complex plane of physical parameters / B. B. Wei, S. W. Chen, H. C. Po, R. B. Liu // *Sci. Reports.* – 2014. – Vol. 4. – P. 5202.
  154. *Berche, B.* Phase Transitions in Two-Dimensional Random Potts Models / B. Berche, C. Chatelain // Ed. Yu. Holovatch. *Order, Disorder and Criticality Advanced Problems of Phase Transition Theory.* – Singapore: World Scientific, 2004. – Vol.1. – P. 147-200.
  155. Monte Carlo study of phase transitions in the bond-diluted 3D 4-state Potts model / C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, P.-E. Berche // *Nucl. Phys. B.* – 2005. – Vol. 719, no. 3. – P. 275-311.
  156. *Kasteleyn, P. W.* Phase transitions in lattice systems with random local properties / P. W. Kasteleyn, C. M. Fortuin // *J. Phys. Soc. Jpn. (Suppl.)* – 1969. – Vol. 26, no. 11.
  157. *Giri, M. R.* Spin models and cluster distributions for bond and site percolation models / M. R. Giri, M. J. Stephen, G. S. Grest // *Phys. Rev. B.* – 1977. – Vol. 16. – P. 4971-4977.
  158. *Stephen, M. J.* Percolation problems and the Potts model / M. J. Stephen // *Phys. Lett. A.* – 1976. – Vol. 56, no. 3. – P. 149-150.
  159. *Majumdar, S. N.* Equivalence between the Abelian sandpile model and the  $q > 0$  limit of the Potts model / S. N. Majumdar, D. Dhar // *Physica A.* – 1992. – Vol. 185. – P. 129-145.

160. *Aharony, A.* Low-temperature phase diagram and critical properties of a dilute spin glass / A. Aharony // J. Phys. C: Solid State Phys. – 1978. – Vol. 11, no. 11. – P. L457.
161. *Aharony, A.* Dilute spin glasses at zero temperature and the 1/2-state Potts model / A. Aharony, P. Pfeuty // J. Phys. C: Solid State Phys. – 1979. – Vol. 12, no. 3. – P. L128-5.
162. *Lubensky, T. C.* Field theory for the statistics of branched polymers, gelation, and vulcanization / T. C. Lubensky, J. Isaacson // Phys. Rev. Lett. – 1978. – Vol. 41, no. 12. – P. 829-832.
163. *Mukamel, D.* Magnetization of Cubic Ferromagnets and the Three-Component Potts Model / D. Mukamel, M. E. Fisher, E. Domany // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37, no. 10. – P. 565.
164. *Alexander, S.* Lattice gas transition of He on Grafoil. A continuous transition with cubic terms / S. Alexander // Phys. Lett. A. – 1975. – Vol. 54, no. 5. – P. 353-354.
165. *Bretz, M.* Helium Films on Highly Uniform Graphite—Finite-Size Effects, Critical Parameters, and the Three-State Potts Model / M. Bretz // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 38. – P. 501-505.
166. *Domany, E.* Classification of Order-Disorder Transitions in Common Adsorbed Systems: Realization of the Four-State Potts Model / E. Domany, M. Schick, J. S. Walker // Phys. Rev. Lett. – 1977. – Vol. 38, no. 20. – P. 1148.
167. *Turner, S.* Intercellular adhesion and cancer invasion: a discrete simulation using the extended Potts model / S. Turner, J. A. Sherratt // J. theor. Biol. – 2002. – Vol. 216. – P. 85-100.
168. Interfaces in the Potts model I: Pirogov-Sinai theory of the Fortuin-Kasteleyn representation / L. Laanait, A. Messenger, S. Miracle-Sole, S. Shlosman // Commun. Math. Phys. – 1991. – Vol. 140. – P. 81-91.
169. *Suchecki, K.* Bistable-monostable transition in the Ising model on two connected complex networks / K. Suchecki, J. A. Hołyst // Phys. Rev. E.

- 2009. – Vol. 80. – P. 031110.
170. *Suchecki, K.* Ising Model on Connected Complex Networks / K. Suchecki, J. A. Holyst // Ed. Yu. Holovatch Order. Disorder and Criticality Advanced Problems of Phase Transition Theory. – Singapore: World Scientific, 2012. – Vol.3. – P. 167-201.
171. *Pastur, L. A.* Theory of disordered spin systems / L. A. Pastur, A. L Figotin // Theor. Math. Phys. – 1978. – Vol. 35, no. 2. – P. 403-414.
172. *Hopfield, J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities / J. J.Hopfield // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1982. – Vol. 79. – P. 2554-2558.
173. *Gayrard, V.* Thermodynamic limit of theq-state Potts-Hopfield model with infinitely many patterns / V. Gayrard // Journ. Stat. Phys. – 1992. – Vol. 68, no. 5. – P. 977-1011.
174. *Bovier, A.* Large deviation principles for the Hopfield and the Kac-Hopfield model / A. Bovier, V. Gayrard, P. Picco // Probab. Theory Relat. Fields. – 1995. – Vol. 101, no. 4. – P. 511-546.
175. Про застосування моделі Хопфілда для дослідження мов див., наприклад: *Fernández Sabido S. F.* Applications exploratoires des modèles de spins au Traitement Automatique de la Langue. PhD Thesis. – University Henri Poincaré, Nancy I, Nancy, France, 2009.
176. *Aiello, W.* A random graph model for massive graphs / W. Aiello, F. Park, L. Lu // Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing, ACM New York, 2000. – P. 171-180.
177. Див. С. 253 у: *Bender, C. M.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers / C. M. Bender, A. O. Steven. – New York: McGraw-Hill, 1978.
178. Entropic equation of state and scaling functions near the critical point in uncorrelated scale-free networks / C. von Ferber, R. Folk, Yu. Holovatch et al. // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 83, no. 6. – P. 061114.
179. *Goltsev, A. V.* Critical phenomena in networks / A. V. Goltsev, S. Dorogovtsev,

- J. F. F. Mendes // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 67, no. 2. – P. 026123.
180. *Cohen, R.* Percolation critical exponents in scale-free networks / R. Cohen, D. ben-Avraham, S. Havlin // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66, no. 3. – P. 036113.
181. *Fisher, M. E.* The theory of equilibrium critical phenomena / M. E. Fisher // Rep. Prog. Phys. – 1967. – Vol. 30, no. 2. – P. 615.
182. Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment / L. P. Kadanoff, W. Gitze, D. Hamblen et al. // Rev. Mod. Phys. – 1967. – Vol. 39. – P. 395-431.
183. *Domb, C.* The critical point / C. Domb. – London: Taylor & Francis, 1996.
184. *Hankey, A.* Systematic application of generalized homogeneous functions to static scaling, dynamic scaling, and universality / A. Hankey, H.E. Stanley // Phys. Rev. B. – 1972. – Vol. 6, no. 9. – P. 3515.
185. *Griffiths, R. B.* Thermodynamic functions for fluids and ferromagnets near the critical point / R. B. Griffiths // Phys. Rev. – 1967. – Vol. 180. – P. 176-187.
186. *Widom, B.* Equation of state in the neighborhood of the critical point / B. Widom // J. Chem. Phys. – 1965. – Vol. 43, no. 11. – P. 3898.
187. *Essam, J. W.* Percolation theory / J. W. Essam // Rep. Prog. Phys. – 1980. – Vol. 43, no. 7. – P. 833-912.
188. *Stauffer, D.* Introduction to percolation theory / D. Stauffer, A. Aharony. – London: Taylor & Francis, 1994.
189. Breakdown of the internet under intentional attack / R. Cohen, K. Erez, D. ben-Avraham, S. Havlin // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86, no. 16. – P. 3882-3885.
190. *Moreno, Y.* Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks / Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // Eur. Phys. J. B. – 2002. – Vol. 26, no. 4. – P. 521-529.
191. *Hasegawa, T.* An Introduction to Complex Networks / T. Hasegawa // Interdisc. Inform. Sci. – 2011. – Vol. 17. – P. 175-195.
192. *Kenna, R.* Scaling Relations for Logarithmic Corrections / R. Kenna, D.A.

- Johnston, W. Janke // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96, no. 15. – P. 115701.
193. *Kenna, R.* Self-Consistent Scaling Theory for Logarithmic-Correction Exponents / R. Kenna, D. A. Johnston, W. Janke // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – P. 115702.
194. *Stanley, H. E.* Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena / H. E. Stanley. – Oxford: Oxford University Press, 1971.
195. Lundow, P. H. The discontinuity of the specific heat for the 5D Ising model / P. H. Lundow, K. Markström // Nucl. Phys. B. – 2015. – Vol. 895. – P. 305-318.
196. *Glasser, M. L.* Complex Temperature Plane Zeros in the Mean-Field Approximation / M. L. Glasser. V. Privman, L. S. Schulman // J. Stat. Phys. – 1986. – Vol. 45, no. 3. – P. 451-457.
197. *Kac, M.* Mathematical Mechanisms of Phase Transitions Statistical Physics: Phase Transitions and Superfluidity. Ed. M. Chretien et al. – New York: Gordon and Breach, 1968. – P. 241–305
198. *Gradshteyn, I. S.* Table of Integrals, Series, and Products (Eighth edition) / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. Ed. D. Zwillinger, V. Moll. – Academic Press, 2014. – P. 1184.
199. *Janke, W.* The Strength of First and Second Order Phase Transitions from Partition Function Zeroes / W. Janke, R. Kenna // J. Stat. Phys. – 2001. – Vol. 102, no. 5-6. – P. 1211-1227.
200. Numerical study of the overlap Lee-Yang singularities in the three-dimensional Edwards-Anderson model / R. A. Baños, J. M. Gil-Narvion, J. Monforte-Garcia et al. // J. Stat. Mech.: Theory Exp. – 2013. – Vol. 2013, no. 2– P. 02031.
201. *Gordillo-Guerrero, A.* Scaling behavior of the Heisenberg model in three dimensions / A. Gordillo-Guerrero, R. Kenna. J. J. Ruiz-Lorenzo // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 88, no. 6. – P. 062117.
202. *Zuber, J. B.* Non-perturbative Field Theory and QCD / J. B. Zuber // Proceedings SACLAY-SPH-T-83-004 CEA-CONF-6639. – Trieste (Italy): 1982.

- P. 228-241.
203. *Fedoryuk, M. V.* Asymptotic Methods in Analysis (Analysis I Encyclopaedia of Mathematical Sciences) / M. V. Fedoryuk. Ed. R. V. Gamkrelidze. – Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1989. – Vol. 13. – P. 83-191.
204. *Lieb, E. H.* A general Lee-Yang theorem for one-component and multi-component ferromagnets / E. H. Lieb, A. D. Sokal // Commun. Math. Phys. – 1981. – Vol. 80. – P. 153-179.
205. *Kozitsky, Yu.* Hierarchical ferromagnetic vector spin model possessing the Lee-Yang property. Thermodynamic limit at the critical point and above / Yu. Kozitsky // J. Stat. Phys. – 1997. – Vol. 87, no. 3. – P. 799-820.
206. *Kozitsky, Yu.* Laguerre entire functions and the Lee–Yang property / Yu. Kozitsky // Appl. Math. and Comput. – 2003. – Vol. 141. – P. 103-112.
207. *Aiello, W.* A random graph model for power law graphs / W. Aiello, F. Chung, L. Lu // Experimental Math. – 2001. – Vol. 10. – P. 53-66.
208. *Boguna, M.* Cut-offs and finite size effects in scale-free networks / M. Boguna, R. Pastor-Satorras, A. Vespignani // Eur. Phys. J. B. – 2004. – Vol. 38, no. 2. – P. 205-209.

## ДОДАТОК А

# ПРО ВИБІР ВЕРХНЬОЇ МЕЖІ ОБРІЗАННЯ

У цьому додатку ми детальніше обговоримо вибір верхньої межі обрізання для інтегралу (4.7). Мережа скінченного розміру (зі скінченного числа вузлів  $N$ ) не може містити вузли з безмежним ступенем  $k$ . Для безмасштабної мережі максимальний ступінь вузла  $k_{\max}$  для скінченного  $N$  (так званий natural cut-off) можна означити кількома способами.

У роботі [207] було запропоновано означити межу обрізання  $k_{\max}$ , як значення ступеня, якому відповідає одна вершина:

$$Np(k_{\max}) \sim 1. \quad (\text{A.1})$$

Звідси одержується така залежність від  $N$ :

$$k_{\max} \sim N^{1/\lambda}. \quad (\text{A.2})$$

Інше означення для межі обрізання дане в [63]. Так, тут  $k_{\max}$  відповідає таке значення ступеня вузла  $k$ , вище якого очікують мати щонайбільше одну вершину:

$$N \int_{k_{\max}}^{\infty} p(k) dk \sim 1, \quad (\text{A.3})$$

що в свою чергу дозволяє отримати

$$k_{\max} \sim N^{1/(\lambda-1)}. \quad (\text{A.4})$$

У роботі [208] для означення природньої межі обрізання використали теорію екстремальних значень.

Хоча (A.4) і (A.2) характеризують залежність  $k_{\max}$  від розміру системи  $N$  із різними показниками, нижче ми покажемо, що вигляд  $k_{\max}(N)$ -залежності не змінює асимптотичну поведінку провідних доданків за  $N$  для статистичної суми (4.9).

Для спрощення розглянемо статистичну суму (4.5) при відсутності зовнішнього поля  $H = 0$ :

$$Z_N(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-N\langle k \rangle x^2 T}{2} + \sum_l \ln \cosh(xk_l)\right) dx. \quad (\text{A.5})$$

Використовуючи (4.6), перепишемо в показнику експоненти суму за вузлами мережі  $\sum_l$  через інтеграл за  $k$  із заданою функцією розподілу  $p(k)$ , зберігаючи нижню на верхню межі інтегрування:

$$Z_N(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{N\left[\frac{-\langle k^2 \rangle x^2 t}{2} + \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} p(k) \left[\ln \cosh(xk) - \frac{1}{2}(xk)^2\right] dk\right]\right\} dx, \quad (\text{A.6})$$

із  $t = (T - T_c)/T_c$  та  $T_c = \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle$ . Щоб обчислити (A.6), ми використаємо ту властивість, що при великих  $N$  основний внесок одержуємо від малих  $x$ . Це означає, що потрібно проінтегрувати по  $k$  у (A.6) при малих  $x$  та при великих  $N$ . Щоб мережа була зв'язною для всіх  $3 < \lambda < 5$ , ми виберемо нижнє значення  $k_{\min} = 2$  [176]. Ключовим моментом є те, що значення інтегралу не залежить від того, як саме  $k_{\max}$  прямуватиме до безмежності (наприклад,  $k_{\max} \sim N^{\frac{1}{\lambda-1}}$ ), оскільки  $k_{\min}$  та  $k_{\max}$  є у (A.6) лише у доданках, що залежать від  $N$ . Більше того, цю залежність можна вибрати у формі, що відповідає природній межі обрізання (A.4) чи будь-якій іншій, для якої виконується  $\lim_{N \rightarrow \infty} k_{\max} \rightarrow \infty$ . Отже, ми отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} p(k) \left[\ln \cosh(xk) - \frac{1}{2}(xk)^2\right] dk = \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_2^{\infty} p(k) [\ln \cosh(xk) - \frac{1}{2}(xk)^2] dk.$$

Інтеграл у правій частині рівняння (A.7) був знайдений раніше (див., наприклад, [93] чи [18]). Отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_2^{\infty} p(k) [\ln \cosh(xk) - \frac{1}{2}(xk)^2] dk = a_{\lambda} x^{\lambda-1} + O(x^{\lambda}), \quad (\text{A.8})$$

із відомими значеннями коефіцієнтів  $a_{\lambda}$  [18, 93]. Підставляючи (A.8) у (A.6) приходимо до виразу:

$$Z_N(\tau) \sim \int_0^{\infty} \exp \left\{ -N \left( \frac{\langle k^2 \rangle x^2 \tau}{2} + a(\lambda) x^{\lambda-1} \right) \right\} dx, \quad 3 < \lambda < 5. \quad (\text{A.9})$$

Тепер можна розрахувати інтеграл (A.9), використовуючи метод найшвидшого спуску. Результати, що ми отримали, узгоджуються із теорією Ландау для моделі Ізінга на безмасштабних мережах [108], так само, як і з результатами неоднорідного середнього поля [87, 93, 94]. Таким чином, всі ці наближення (Ландау, неоднорідного середнього поля та дане інтегральне представлення) приводять до однакової термодинаміки.

## ДОДАТОК Б

# НУЛІ МОДЕЛІ ІЗІНГА НА ПОВНОМУ ГРАФІ ДЛЯ ДВО- ТА ТРИ-СПІНОВОЇ СИСТЕМИ

Для пояснення пошуку нулів статистичної суми розглянемо два найпростіші випадки – дво- та три-спінову модель Ізінга на повному графі. Для спрощення покладемо зовнішнє магнітне поле  $H = 0$  та знайдемо нулі у випадку комплексних температур.

Для двочастинкової моделі Ізінга гамільтоніан запишеться:

$$-\mathcal{H} = \sum_{i \neq j} S_i S_j, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{Б.1})$$

Усреднюючи у статистичній сумі за конфігураціями спінів, одержуємо наступний вираз:

$$Z = 2(e^\beta + e^{-\beta}). \quad (\text{Б.2})$$

Перейдемо до іншого температурного представлення, оскільки кути розташування нулів статистичної суми є конформно-інваріантні відносно заміни змінних. Позначимо  $x = e^\beta$ , де  $\beta = 1/T$  – комплексна температура. Оскільки змінна  $x$  комплексна, то шукатимемо розв'язки у комплексній площині  $x = x_r + ix_i$ , де для дійсної та уявної частини координати справедливо  $x_r = \text{Re } e^\beta$  і  $x_i = \text{Im } e^\beta$ . Прирівнявши статистичну суму (Б.2) до нуля та виконавши заміну змінних, шукаємо розв'язки для наступного поліному в площині комплексних значень змінної:

$$x^2 + 1 = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Легко бачити, що для поліному другого порядку, у площині комплексних температур існує два комплексні розв'язки для нулів статистичної суми:  $x_{1,2} = \pm i$ .

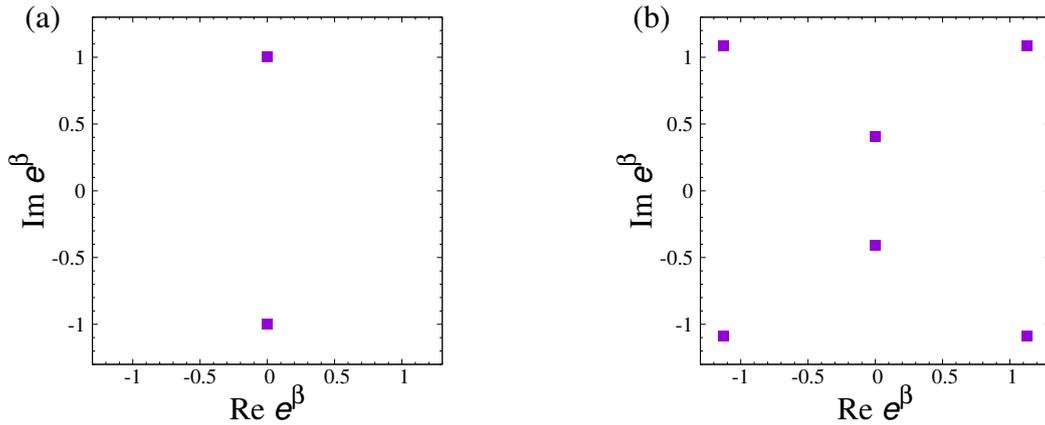


Рис. Б.1. Нулі Фішера (а) двочастинкової та (б) тричастинкової моделі Ізінга на повному графі у комплексній площині  $e^\beta$ .

У площині комплексних  $x = x_r + ix_i$  це відповідає двом точкам на уявній осі (див. Рис. Б.1а).

Тепер знайдемо нулі статистичної суми для  $N = 3$ -частинкової моделі Ізінга на повному графі при відсутності магнітного поля ( $H = 0$ ). Гамільтоніан запишеться:

$$-\mathcal{H} = \sum_{i \neq j} S_i S_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{Б.4})$$

Усреднюючи за конфігураціями спінів та прирівнюючи до нуля статистичну суму, попередньо виконавши заміну змінних  $x = e^\beta$ , приходимо до наступного рівняння для поліному шостого порядку:

$$x^6 + 6x^2 + 1 = 0. \quad (\text{Б.5})$$

Для цього поліному аналітично знаходимо наступні 6 комплексних розв'язків:  $x_{1,2} = \pm 0.407i$  чи  $x_{3,4} = 1.127 \pm i1.089$ ,  $x_{5,6} = -1.127 \pm i1.089$ . Перша сім'я розв'язків має чисто уявні координати, тоді як розв'язки  $x_{3,4,5,6}$  містять уявну та дійсну частину координат нулів Фішера (див. Рис. Б.1б).

Такий аналіз пошуку нулів Фішера можна продовжити і для систем більшого розміру, однак зростання степеня поліному із додаванням кожної наступної частинки ускладнює розв'язування і пошук аналітичних розв'язків для координат нулів. У нашій роботі ми аналізуватимемо інтегральне представлення статистичної суми та знаходитимемо комплексні нулі чисельно.

## ДОДАТОК В

# ЧИСЕЛЬНО ЗНАЙДЕНІ ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКА $\sigma$ ДЛЯ МОДЕЛІ ІЗІНГА НА ВІДПАЛЕНІЙ БЕЗМАСШТАБНІЙ МЕРЕЖІ (І СПОСІБ)

У цьому Додатку ми опишемо детально процедуру підгонки, яку використовуємо для отримання значення показника  $\sigma$  для моделі на відпаленій мережі з показником загасання  $\lambda$ . Для приведеної координати нулів Лі-Янга рівняння (3.19) запишеться:

$$\text{Im}h_j \sim (j - C)^\sigma. \quad (\text{B.1})$$

Наша мета – перевірити чи степеневий закон (B.1) справджується для  $j$  при різних  $C$  та  $\lambda$ . На Рис. B.1 ми зобразили перші 7 координат нулів Лі-Янга при  $\lambda = 4.9$  та  $C = 0; 0.5; 0, 7$  апроксимації прямою. Повторюючи цю процедуру при різних  $C$  та заданому  $\lambda$ , ми знаходимо оптимальне значення параметра підгонки, коли середнє квадратичне відхилення  $\Delta$  є мінімальним. Залежності  $\Delta(C)$  та  $\sigma(C)$  при  $\lambda = 4.9$  показані на Рис B.2. При оптимальному значення параметра  $C_{\text{opt}} = 0.36$  величина показника  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.724(7)$ , в той час, як точне значення рівне  $\sigma = 0.744$ .

У Табл. B.1 та Табл. B.2 ми наводимо чисельно отримані значення чисто уявних нулів Лі-Янга при  $\lambda = 4.1 \div 4.9$  та уявну частину координати перших десяти нулів при  $\lambda = 3.5 \div 4.9$ . Використовуючи процедуру підгонки, ми знаходимо квадратичне відхилення  $\Delta$ , показник  $\sigma$  та оптимальне значення параметра підгонки  $C_{\text{opt}}$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі, апроксимуючи  $\mathcal{N}$  нулів Лі-Янга чи уявну частину перших десяти нулів в залежності

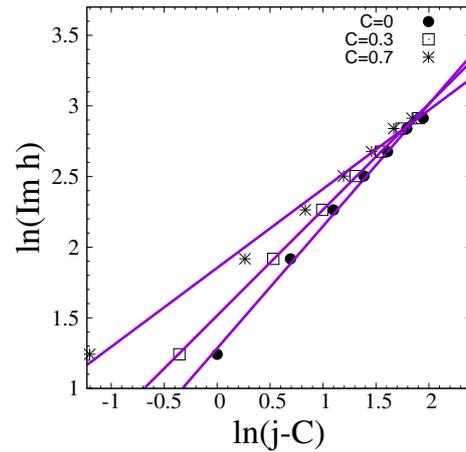


Рис. В.1. Лінійна апроксимація перших семи координат нулів Лі-Янга при  $\lambda = 4.9$  для  $C = 0; 0.5; 0.7$  (кола, квадрати та зірки відповідно).

від порядку нуля при різних  $\lambda$  (див. Табл. В.3 та Табл. В.4, відповідно).

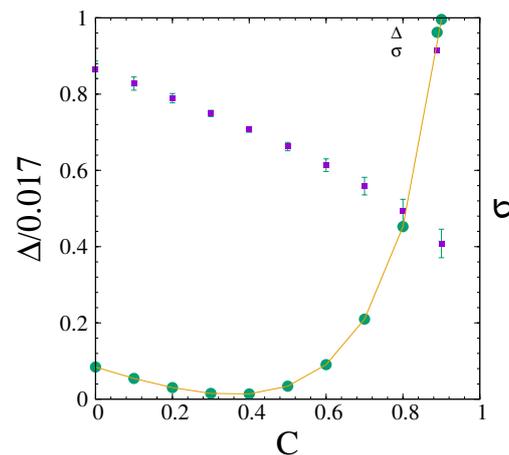


Рис. В.2. Середнє квадратичне відхилення  $\Delta$  та показник  $\sigma$  при  $\lambda = 4.9$ , отримані з апроксимації перших семи координат Лі-Янга, як функції параметра підгонки  $C$ . Значення, показника  $\sigma$ , обчислене при  $\sigma(C_{\text{opt}}) = 0.724(7)$  є доволі близьким до точного значення  $\sigma = 0.744$ .

Табл. В.1. Чисельно отримані значення чисто уявних нулів Лі-Янга ( $\mathcal{N}$ ) для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі ( $\lambda$  змінюється від 4.1 до 4.9 з кроком 0.1).

$\lambda$	$\text{Im}h_1$	$\text{Im}h_2$	$\text{Im}h_3$	$\text{Im}h_4$	$\text{Im}h_5$	$\text{Im}h_6$	$\text{Im}h_7$
4.1	3.549	7.354	8.778	—	—	—	—
4.2	3.533	7.178	9.072	—	—	—	—
4.3	3.518	7.068	9.262	—	—	—	—
4.4	3.506	6.991	9.388	—	—	—	—
4.5	3.495	6.933	9.474	—	—	—	—
4.6	3.485	6.889	9.531	12.491	13.577	—	—
4.7	3.476	6.855	9.571	12.301	14.065	—	—
4.8	3.468	6.827	9.599	12.239	14.352	—	—
4.9	3.460	6.804	9.620	12.223	14.533	17.111	18.420

Табл. В.2. Чисельно отримані значення уявної частини перших 10 нулів Лі-Янга для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі ( $\lambda$  змінюється від 3.5 до 4.9 з кроком 0.1)

$\lambda$	$\text{Im}h_1$	$\text{Im}h_2$	$\text{Im}h_3$	$\text{Im}h_4$	$\text{Im}h_5$	$\text{Im}h_6$	$\text{Im}h_7$	$\text{Im}h_8$	$\text{Im}h_9$	$\text{Im}h_{10}$
3.5	3.762	7.212	9.496	11.351	12.983	14.470	15.850	17.146	18.375	19.548
3.6	3.702	7.417	9.940	11.976	13.770	15.406	16.927	18.358	19.716	21.014
3.7	3.657	7.597	10.357	12.570	14.522	16.305	17.964	19.528	21.014	22.437
3.8	3.621	7.752	10.750	13.134	15.240	17.165	18.961	20.655	22.268	23.813
3.9	3.593	7.881	11.119	13.668	15.923	17.989	19.918	21.740	23.478	25.143
4	3.569	7.823	8.149	11.466	14.174	16.574	18.776	20.835	22.783	24.642
4.1	3.549	7.354	8.778	11.791	14.654	17.194	19.528	21.714	23.785	25.762
4.2	3.533	7.178	9.072	12.094	15.108	17.785	20.248	22.556	24.746	26.840
4.3	3.518	7.068	9.262	12.374	15.540	18.349	20.936	23.364	25.670	27.877
4.4	3.506	6.991	9.388	12.626	15.952	18.887	21.595	24.140	26.558	28.875
4.5	3.495	6.933	9.474	12.848	16.346	19.405	22.229	24.886	27.414	29.838
4.6	3.485	6.889	9.531	12.491	13.577	16.726	19.904	22.841	25.607	28.240
4.7	3.476	6.855	9.571	12.301	14.065	17.092	20.393	23.438	26.308	29.044
4.8	3.468	6.827	9.599	12.239	14.352	17.442	20.883	24.032	27.003	29.838
4.9	3.460	6.804	9.620	12.223	14.533	17.111	18.420	21.412	24.662	27.728

Табл. В.3. Середнє квадратичне відхилення  $\Delta$ , показник  $\sigma$  та оптимальне значення параметра підгонки  $C_{opt}$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі із показником загасання  $\lambda$  ( $\lambda$  змінюється від 4.1 до 4.9 з кроком 0.1) обчислені при апроксимації  $\mathcal{N}$  чисто уявних нулів Лі-Янга. Кількість уявних нулів  $\mathcal{N}$  дана у другій колонці. Точне значення показника  $\sigma_{exact}$  приведене в останній колонці таблиці.

$\lambda$	$\mathcal{N}$	$C_{opt}$	$\sigma$	$\sigma_{exact}$
4.1	3	0.93	0.267	0.677
4.2	3	0.81	0.386	0.688
4.3	3	0.70	0.475	0.697
4.4	3	0.61	0.543	0.706
4.5	3	0.53	0.601	0.714
4.6	5	0.49	0.639(19)	0.722
4.7	5	0.41	0.688(9)	0.730
4.8	5	0.37	0.715(4)	0.737
4.9	7	0.36	0.724(7)	0.744

Табл. В.4. Середнє квадратичне відхилення  $\Delta$ , показник  $\sigma$  та оптимальне значення параметра підгонки  $C_{opt}$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі із показником загасання  $\lambda$  ( $\lambda$  змінюється від 3.5 до 4.9 з кроком 0.1) обчислені при апроксимації уявних частин координат перших десяти нулів Лі-Янга. Точне значення показника  $\sigma_{exact}$  приведене в останній колонці таблиці.  $\mathcal{N}$  – кількість чисто уявних нулів Лі-Янга.

$\lambda$	$\mathcal{N}$	$C_{opt}$	$\sigma$	$\sigma_{exact}$
3.5	1	0.58	0.528(1)	0.6
3.6	1	0.61	0.544(1)	0.615
3.7	1	0.62	0.565(1)	0.630
3.8	1	0.63	0.582(1)	0.643
3.9	1	0.64	0.597	0.655
4	3	0.15	0.776(33)	0.667
4.1	3	0.14	0.807(20)	0.677
4.2	3	0.12	0.838(14)	0.688
4.3	3	0.10	0.866(12)	0.697
4.4	3	0.07	0.896(11)	0.706
4.5	3	0.05	0.922(11)	0.714
4.6	5	0	0.890(19)	0.722
4.7	5	0	0.907(16)	0.730
4.8	5	0	0.923(15)	0.737
4.9	7	0.16	0.822(14)	0.744

## ДОДАТОК Г

# ЧИСЕЛЬНО ЗНАЙДЕНІ ЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКА $\sigma$ ДЛЯ МОДЕЛІ ІЗІНГА НА ВІДПАЛЕНІЙ БЕЗМАСШТАБНІЙ МЕРЕЖІ (II СПОСІБ)

Розглянемо поведінку уявної координати нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  при малих  $j$  для різних значень  $\lambda$ . На Рис. [Г.1а–с](#) ми наводимо координати уявної частини перших десяти нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  при  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4$  та  $\lambda = 3.5$ , як функцій  $j - C$  для різних  $C = 0, 1/4, 1/3, 1/2, 0.6, 0.9$ , відповідно. Суцільними кривими зображено лінії очікуваного скейлінгу із показниками  $\sigma(\lambda = 4.5) \simeq 0.714$ ,  $\sigma(\lambda = 4) \simeq 0.667$ ,  $\sigma(\lambda = 3.5) \simeq 0.6$ , передбаченими формулою [\(4.25\)](#). Як легко бачити із рисунків, не існує єдиного оптимального значення  $C$  для кривих  $\text{Im } h_j$ . Тепер це значення є  $\lambda$ -залежним, так само, як і показник  $\sigma$ . Більш того, щоб вибрати оптимальне значення  $C$  для фіксованого  $\lambda$  треба означити, в якому діапазоні  $j$  існує найкраще узгодження із прямою лінією. У таблиці [Г.1](#) ми наводимо чисельно одержані значення показника  $\sigma$ . На Рис. [Г.2](#) ми порівнюємо точне значення показника  $\sigma$  [\(4.25\)](#) із чисельно отриманим значенням  $\sigma$ , одержаним при лінійній апроксимації уявних частин перших десяти нулів Лі-Янга в залежності від порядку нуля.

У Таблиці [Г.1](#) приведено чисельно знайдені значення показника  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі із  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4$  та  $\lambda = 3.5$ . Показник обчислено з лінійної апроксимації уявних частин перших десяти нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  в залежності від порядку нуля  $j$ . Останній рядок дає точне значення  $\sigma^{exact}$ , передбачене з аналітичної формули [\(4.15\)](#). Оптимальне зна-

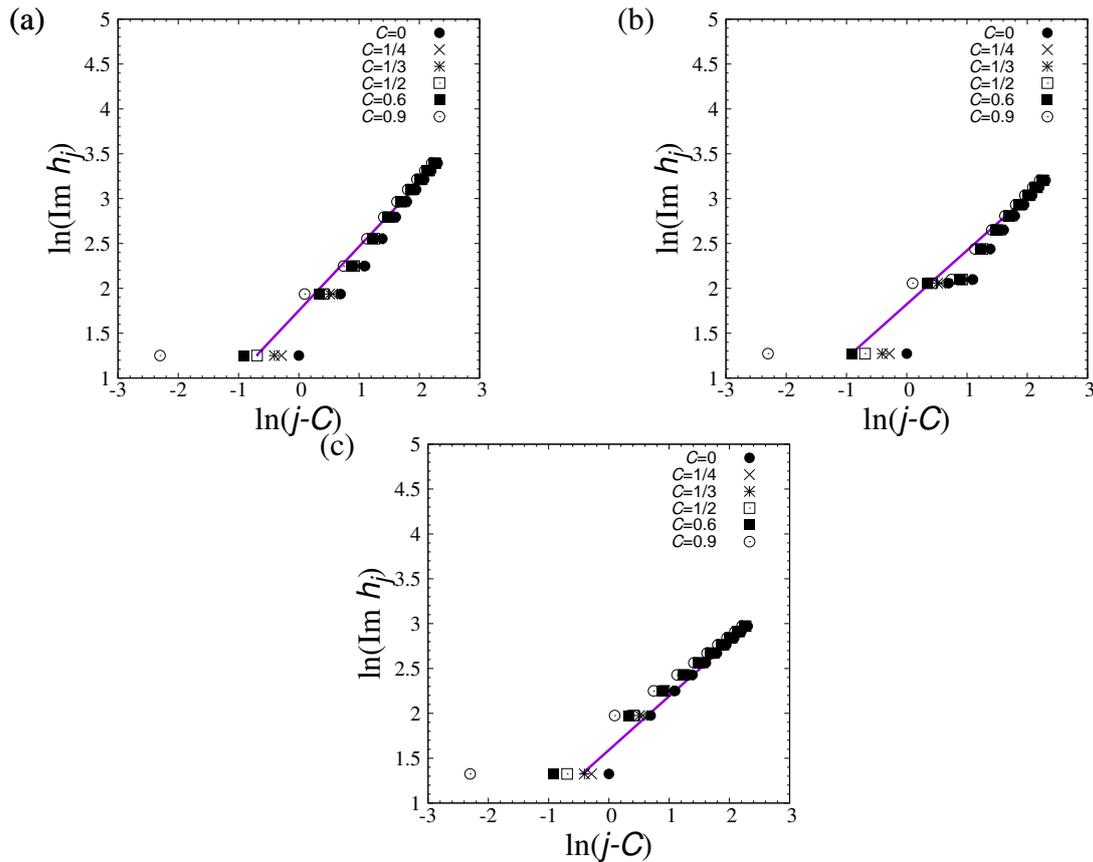


Рис. Г.1. (a), (b), (c) Координати уявної частини перших десяти нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі при  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4$  та  $\lambda = 3.5$ , як функції  $j - C$  при різних значеннях  $C = 0, 1/4, 1/3, 1/2, 0.6, 0.9$ . Суцільні криві – для наочної демонстрації очікуваних скейлінгових залежностей із показником  $\sigma(\lambda = 4.5) \simeq 0.714$ ,  $\sigma(\lambda = 4) \simeq 0.667$ ,  $\sigma(\lambda = 3.5) \simeq 0.6$ .

чення параметра  $C$  можна вибрати, порівнюючи чисельно знайдене  $\sigma$  із його аналітичним значенням.

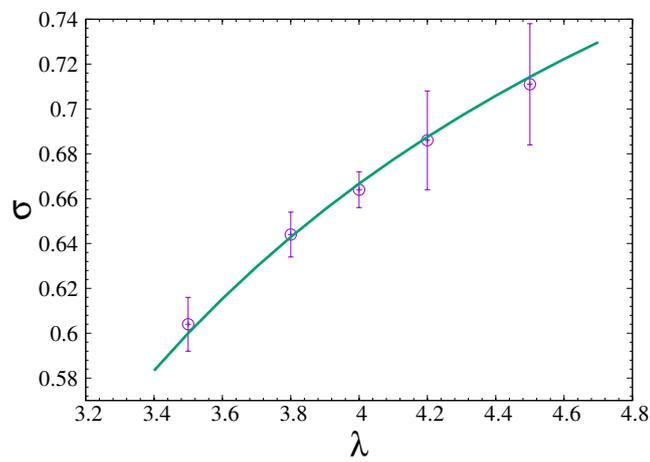


Рис. Г.2. Показник  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі як функція  $\lambda$ . Крива – точні значення  $\sigma$ , р-ння (4.25). Круги: чисельно знайдені найкращі результати підгонки з формули (3.19). Параметр підгонки  $C$  змінюється з  $\lambda$ :  $C = 0.58$ ,  $C = 0.53$ ,  $C = 0.50$ ,  $C = 0.47$  та  $C = 0.33$  для  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4.2$ ,  $\lambda = 4$ ,  $\lambda = 3.8$ , і  $\lambda = 3.5$ , відповідно.

Табл. Г.1. Чисельно одержані значення показника  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпа-  
леній безмасштабній мережі із показником загасання  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4$  і  
 $\lambda = 3.5$ . Значення  $\sigma$ , обчислені з лінійної апроксимації уявних частин  
нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  в залежності від  $j$ ,  $j = j_{\min} \dots 10$ , використовуючи  
формулу (3.19), при кількох значеннях  $C$ . Останній рядок дає точне  
значення  $\sigma^{exact}$ , передбачене з аналітичної формули (4.15).

$C$	$j_{\min}$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.5$
0	1	0.939(11)	0.840(61)	0.690(26)
0	2	0.932(17)	0.738(19)	0.614(7)
0	3	0.950(23)	0.691(6)	0.598(3)
0	4	0.911(23)	0.679(3)	0.593(1)
0	5	0.866(13)	0.673(2)	0.590(1)
0	6	0.842(9)	0.669(1)	0.589
0	7	0.825(7)	0.667(1)	0.588
0	8	0.813(5)	0.665(1)	0.587
0	9	0.804	0.664	0.587
1/4	1	0.850(12)	0.764(24)	0.627(16)
1/4	2	0.876(17)	0.695(14)	0.577(29)
1/4	3	0.906(19)	0.658(3)	0.570
1/4	4	0.874(19)	0.651(1)	0.569
1/4	5	0.835(11)	0.649(1)	0.569
1/4	6	0.814(8)	0.647	0.570
1/4	7	0.801(6)	0.646	0.570
1/4	8	0.791(4)	0.646	0.571
1/4	9	0.783	0.646	0.571
1/3	1	0.818(16)	0.736(19)	0.604(12)
1/3	2	0.857(17)	0.680(13)	0.565(2)
1/3	3	0.891(17)	0.647(2)	0.560(1)
1/3	4	0.862(18)	0.642(1)	0.561(1)
1/3	5	0.825(10)	0.640	0.562(1)
1/3	6	0.805(7)	0.640	0.563(1)
	$\sigma^{exact}$	0.714	0.667	0.6

Табл. Г.5. (продовження) Чисельно одержані значення показника  $\sigma$  для моделі Ізінга на відпаленій безмасштабній мережі із показником загасання  $\lambda = 4.5$ ,  $\lambda = 4$  і  $\lambda = 3.5$ . Значення  $\sigma$ , обчислені з лінійної апроксимації уявних частин нулів Лі-Янга  $\text{Im } h_j$  в залежності від  $j$ ,  $j = j_{\min} \dots 10$  використовуючи формулу (3.19), при кількох значеннях  $C$ . Останній рядок дає точне значення  $\sigma^{exact}$ , передбачене з аналітичної формули (4.15).

$C$	$j_{\min}$	$\lambda = 4.5$	$\lambda = 4$	$\lambda = 3.5$
1/3	7	0.792(5)	0.640	0.564(1)
1/3	8	0.783(4)	0.640	0.565(1)
1/3	9	0.776	0.640	0.566
1/2	1	0.748(23)	0.676(9)	0.554(4)
1/2	2	0.818(18)	0.649(9)	0.539(1)
1/2	3	0.860(14)	0.625(1)	0.541(2)
1/2	4	0.837(16)	0.624	0.544(2)
1/2	5	0.804(9)	0.624	0.548(1)
1/2	6	0.787(6)	0.625	0.550(1)
1/2	7	0.776(4)	0.626(1)	0.552(1)
1/2	8	0.768(3)	0.628(1)	0.554(1)
1/2	9	0.762	0.629	0.556
0.6	1	0.701(28)	0.635(4)	0.521(2)
0.6	2	0.794(19)	0.630(7)	0.524(3)
0.6	3	0.842(13)	0.611(1)	0.529(3)
0.6	4	0.823(15)	0.612(1)	0.535(2)
0.6	5	0.791(8)	0.615(1)	0.539(2)
0.6	6	0.776(5)	0.617(1)	0.543(2)
0.6	7	0.766(4)	0.618(1)	0.545(1)
0.6	8	0.759(3)	0.620(1)	0.548(1)
0.6	9	0.753	0.622	0.550
	$\sigma^{exact}$	0.714	0.667	0.6